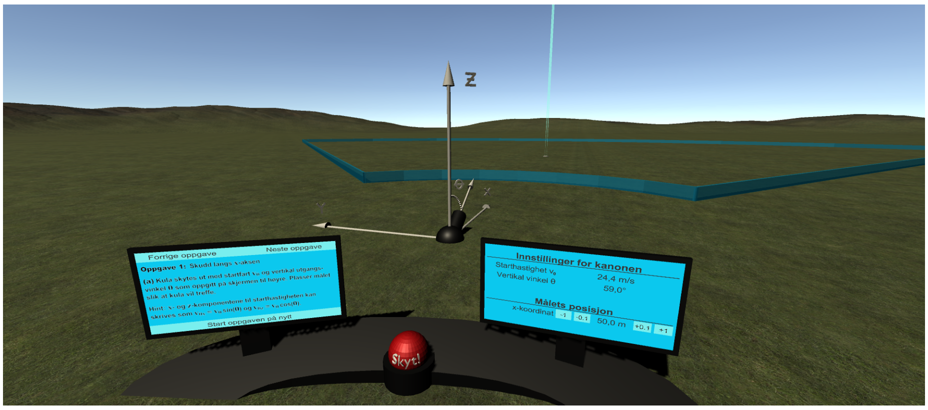
Helt kanon

Virtuell kanon for fysikkundervisning

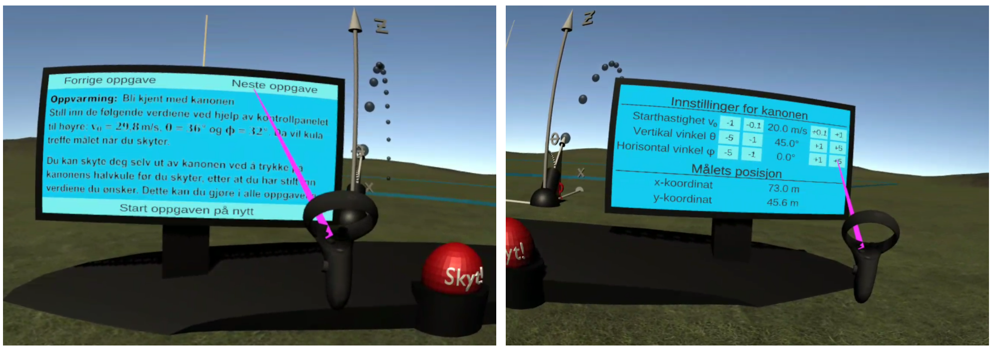
1 Brukermanual

Oppgavene i denne appen går ut på å beregne kanonskudd i 2 og 3 dimensjoner. Deres oppgave er å få kula til å treffe målet, enten ved å plassere målet eller stille inn kanonen.



Figur 1: Fra nært til langt borte: kontrollpanel, kanon og mål

Inne i appen finner dere to skjermer som fungerer som kontrollpanel, avbildet i figur 1. Kontrollpanelet til venstre brukes til å velge oppgave og kontrollpanelet til høyre brukes for å stille inn kanonen og plassere målet. For å bruke kontrollpanelene må dere benytte dere av laseren som kommer ut fra den høyre Oculus-kontrolleren. Laseren må pekes på knappen man vil trykke på, slik som på bildene i figur 2.



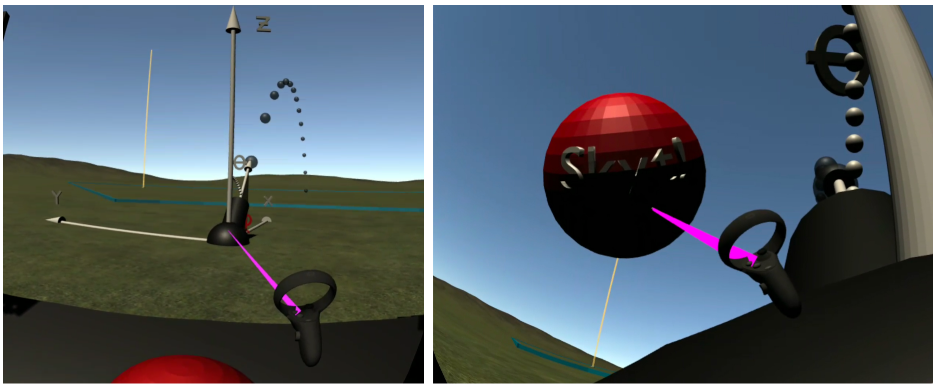
Figur 2: Endring av oppgave og initialverdier

For å bevege dere rundt kan dere bruke joysticken på venstrehånds-kontrolleren. For å snu dere kan dere bruke joysticken på høyrehånds-kontrolleren. For å klikke med laseren bruker dere knappen på høyre pekefinger. Se figur 3 for en oversikt.

Figur 3: Venstre og høyre kontroller

Oppgavene vil kreve utregninger som må gjøres utenfor appen. Alle oppgavene er gjengitt på dette arket, men tallverdiene vil kun være tilgjengelige i appen. Når dere har kommet fram til et svar kan dere gå inn i appen, stille inn verdiene dere kom fram til og skyte ut kula for å se om svaret ble riktig. Dere kan også se notatene deres selv med brillene på ved å sette de i kamera-modus. Dette gjøres ved å dobbelt-tappe på et av kameraene til Oculusen. Disse befinner seg fremme på hver side.

Det er også mulig å skyte seg selv ut av kanonen. Når dere er klare til å skyte, trykk på selve kanonen (mer spesifikt på den sorte halvkulen til kanonen). Dette vil transportere dere inn i kanonen hvor dere vil se en egen knapp for utskytning—se figur 4.

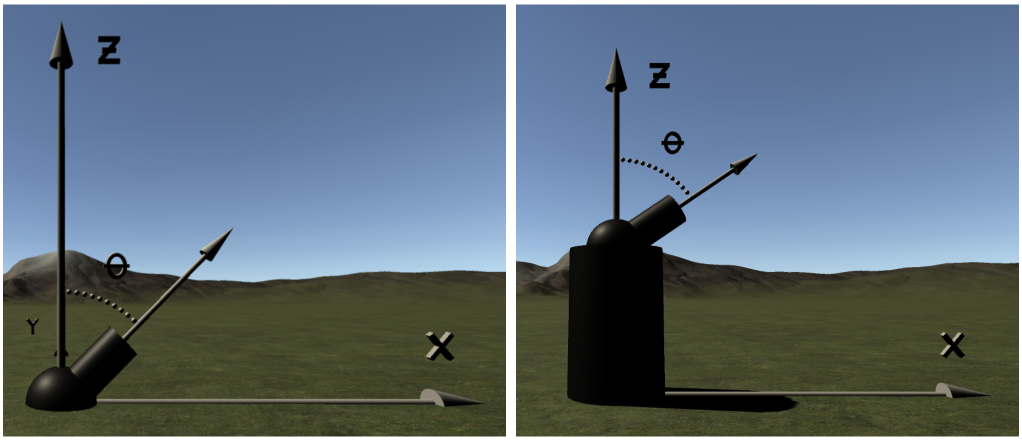


Figur 4: Sette seg inn i og skyte seg ut av kanonen

For å unngå kvalme anbefaler vi at man sitter på en stol mens man skyter seg ut av kanonen.

2 Koordinater i 3 dimensjoner

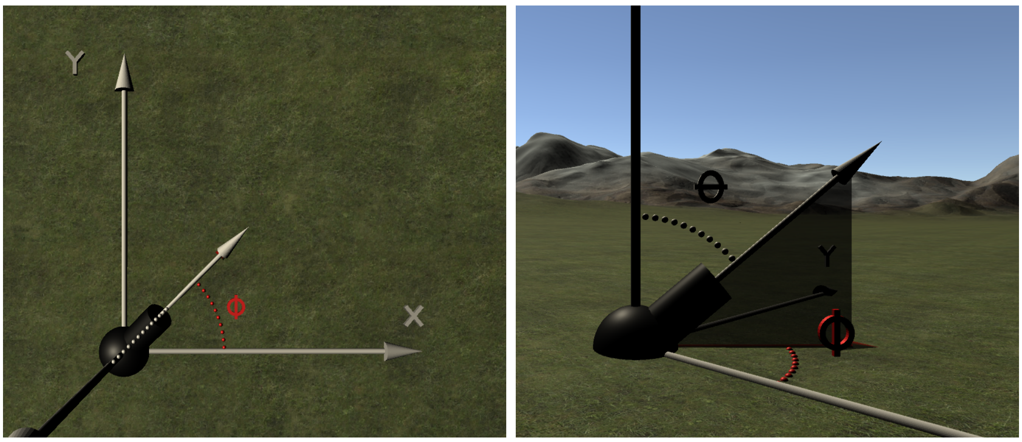
I denne appen vil dere få prøve dere på noen 3-dimensjonale oppgaver, noe som krever flere koordinater enn dere trolig er vant med fra fysikken i videregående skole. Vi vil derfor gi en kort introduksjon til disse. Koordinatene vi bruker her kalles sfæriske koordinater. Dere vil bli godt kjent med disse dersom dere fortsetter med fysikk på universitetsnivå.



Figur 5: Den vertikale vinkelen θ.

Vinkelen θ (theta) er vinkelen mellom z-aksen og starthastighets-vektoren $\vec{v_0}$. Figur 5 består av et par bilder fra appen som illustrerer denne vinkelen. Formlene for å dekomponere vektoren $\vec{v_0}$ langs koordinataksene vil bli oppgitt i oppgavene.

Den helt nye koordinaten vi trenger i 3 dimensjoner er vinkelen ϕ (phi). Dette er en vinkel i bakkeplanet, som for oss er xy-planet. Vi trenger ϕ for å spesifisere den horisontale orienteringen til kanonen. Hvordan vi definerer ϕ er best forklart med en figur, så ta en titt på figur 6. Sagt med ord er ϕ vinkelen mellom x-aksen og kanonen sett ovenfra, eller mer presist: ϕ er vinkelen mellom x-aksen og projeksjonen av $\vec{v_0}$ i xy-planet.



Figur 6: Den horisontale vinkelen ϕ.

3 Oppgaver

I alle oppgavene, unntatt oppvarmingen, vil dere få bruk for bevegelseslikningene. Dersom dere trenger en påminnelse om disse er det viet en egen seksjon til dem i løsningsforslaget (se avsnitt 4). Bruk $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s}$ for gravitasjons-akselerasjonen.

Oppvarming: Bli kjent med kanonen

Dette er en oppvarmingsoppgave hvor dere vil lære å bruke kontrollpanelet som styrer kanonen. Her skal dere stille inn de følgende verdiene: $v_0 = 29{,}8\,\mathrm{m/s}$, $\theta = 36°$ og $\phi = 32°$. Disse vil stå oppgitt i oppgaveteksten på skjermen i appen. Gå gjerne bort til kanonen underveis og utforsk koordinatsystemet for å bli bedre kjent med vinklene ϕ og θ.

Oppgave 1: Skudd langs x-aksen

I denne oppgaven skytes kula ut fra origo og langs x-aksen. Dette er altså en 2-dimensjonal oppgave hvor alt foregår i xz-planet. Bildet til venstre i figur 5 illustrerer situasjonen. Komponentene til starthastigheten $\vec{v_0}$, uttrykt ved vinkelen θ og startfarten $v_0 = \|\vec{v_0}\|$ (lengden til vektoren $\vec{v_0}$), blir

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \sin(\theta) \\ v_{0z} &= v_0 \cos(\theta) \end{aligned}$$

(a) Kula skytes ut med startfart v_0 og vertikal vinkel θ som oppgitt på kontrollpanelet. Ved hvilken x-verdi må målet plasseres for at kula skal treffe?

Fra nå av vil målet være låst ved x-verdien som står oppgitt på kontrollpanelet.

(b) Den vertikale vinkelen θ er låst til verdien oppgitt på kontrollpanelet. Hva må startfarten v_0 være for at kula skal treffe målet?

(c) Startfarten v_0 er låst til verdien oppgitt på kontrollpanelet. Hva må den vertikale vinkelen θ være for at kula skal treffe målet? Her er det to riktige svar, det holder å finne ett. Hint: $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$

Oppgave 2: Skudd i 3 dimensjoner

I denne oppgaven skytes kula ut fra origo og langs en tilfeldig retning i xy-planet. Dette er et 3-dimensjonalt problem og vi må derfor ta hensyn til den horisontale vinkelen ϕ. Komponentene til starthastigheten $\vec{v_0}$ blir nå (som man kan komme fram til ved å studere figur 6 og bruke trigonometri)

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \sin(\theta)\cos(\phi) \\ v_{0y} &= v_0 \sin(\theta)\sin(\phi) \\ v_{0z} &= v_0 \cos(\theta) \end{aligned}$$

(a) Startfarten v_0 og vinklene θ og ϕ er låst til verdiene oppgitt på kontrollpanelet. Hvor må målet plasseres for at kula skal treffe? Her må dere finne både x- og y-koordinatene til kula i det den lander.

Målet befinner seg nå ved x- og y-verdiene som står oppgitt på kontrollpanelet. Hva må vinkelen ϕ i xy-planet være for at kula skal kunne treffe målet? Finn et uttrykk for vinkelen ϕ basert på målets posisjon og bruk dette til å stille inn riktige verdier for ϕ i de neste to deloppgavene. Hint: Studer bildet til venstre i figur 6. Tegn en liknende figur hvor kanonen peker mot målets posisjon og bruk trigonometri.

(b) Den vertikale vinkelen θ er låst til verdien oppgitt på kontrollpanelet. Hva må startfarten v_0 være for at kula skal treffe målet? Husk også å stille inn riktig verdi for ϕ.

(c) Startfarten v_0 er låst til verdien oppgitt på kontrollpanelet. Hva må den vertikale vinkelen θ være for at kula skal treffe målet? Her er det to riktige svar, det holder å finne ett. Husk også å stille inn riktig verdi for ϕ. Hint: $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$

Oppgave 3: Skudd langs x-aksen med starthøyde $\mathbf{z_0}$

Kanonen står nå på en 3 meter høy plattform, og kula skytes dermed ut med starthøyde $z_0 = 3{,}0\,\mathrm{m}$. Den skytes igjen ut langs x-aksen, altså er $\phi = 0°$ og problemet er 2-dimensjonalt, akkurat som i oppgave 1. Den vertikale vinkelen θ er låst til verdien oppgitt på kontrollpanelet i begge deloppgavene.

(a) Kula skytes ut med startfart v_0 som oppgitt på kontrollpanelet. Ved hvilken x-verdi må målet plasseres for at kula skal treffe?

(b) (Ekstra vanskelig!) Nå er målet låst ved x-verdien som står oppgitt på kontrollpanelet. Hva må startfarten v_0 være for at kula skal treffe målet?

4 Løsningsforslag og fasit

Bevegelseslikningene

Bevegelseslikningene for konstant akselerasjon er (helt generelt)

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \\
y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \\
z(t) &= z_0 + v_{0z}t + \tfrac{1}{2}a_z t^2
\end{aligned}$$

hvor $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ er startposisjonen, $\vec{v_0} = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ er starthastigheten og $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ er den konstante akselerasjonen. I disse oppgavene er det kun gravitasjonskraften som forårsaker akselerasjon, og denne virker i negativ z-retning. Vi har altså $\vec{a} = (0, 0, -g)$, hvor $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ er gravitasjons-akselerasjonen ved jordoverflaten. I tillegg blir kula alltid skutt ut fra en startposisjon hvor $x_0 = 0$ og $y_0 = 0$, altså blir bevegelseslikningene i vårt tilfelle

$$\begin{aligned}
x(t) &= v_{0x}t \\
y(t) &= v_{0y}t \\
z(t) &= z_0 + v_{0z}t - \tfrac{1}{2}gt^2
\end{aligned}$$

Oppgave 1

I denne oppgaven blir kula skutt ut fra origo, slik at $z_0 = 0$ og bevegelseslikningen i z-retning blir

$$z(t) = v_{0z}t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Vi kan bruke denne likningen til å finne ut når kula vil treffe bakken. Kall dette tidspunktet for t_l (l for "lande"—vi gir dette tidspunktet et spesielt navn for ikke å forvirre det med variabelen t som kan ta hvilken som helst verdi). Når kula lander er $z = 0$, altså må vi kreve at $z(t_l) = 0$. Dette vil gi oss en likning vi kan løse for t_l:

$$0 = z(t_l) = v_{0z}t_l - \tfrac{1}{2}gt_l^2 \implies t_l = \frac{2v_{0z}}{g}.$$

Kula blir skutt ut langs x-aksen, så y-koordinaten til kula vil ikke endre seg. For å finne ut hvor på x-aksen kula vil lande setter vi landings-tidspunktet t_l inn i $x(t) = v_{0x}t$, bevegelseslikningen for x-retningen. Dette vil gi oss x-posisjonen til kula når den lander, som forteller oss hvor vi må plassere målet. Vi kan kalle denne x-verdien for x_m (m for "mål"). Vi finner dermed

$$x_m = x(t_l) = v_{0x}t_l = \frac{2v_{0z}v_{0x}}{g}.$$

Ved å bruke uttrykkene $v_{0x} = v_0\sin(\theta)$ og $v_{0z} = v_0\cos(\theta)$ for starthastigheten får vi

Oppg. 1 (a) $$x_m = \frac{2v_0^2}{g}\cos(\theta)\sin(\theta) \tag{1}$$

Svaret i oppgave (a) finner vi ved å sette inn verdiene for v_0 og θ som er gitt i oppgaven.

I oppgave (b) blir vi gitt x_m og θ og bedt om å finne v_0. Vi må da løse likning (1) for v_0, som gir

$$\textbf{Oppg. 1 (b)} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{g x_m}{2\cos(\theta)\sin(\theta)}}$$

Ved å sette inn de oppgitte verdiene for x_m og θ finner vi svaret.

I oppgave (c) blir vi gitt x_m og v_0 og bedt om å finne θ. Dette kan løses grafisk, men vi kan også finne svaret direkte ved å bruke at $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$. Dersom vi bruker denne identiteten i likning (1) får vi

$$x_m = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta),$$

som vi kan løse direkte for θ:

$$\textbf{Oppg. 1 (c)} \qquad \theta = \tfrac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x_m g}{v_0^2}\right)$$

Denne likningen vil ha to løsninger for θ mellom 0 og 90 grader. Det holder å finne én av disse.

Oppgave 2

Akkurat som i oppgave 1 vil kula treffe bakken ved tidspunktet

$$t_l = \frac{2v_{0z}}{g}.$$

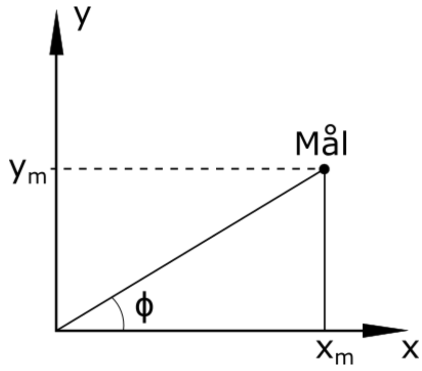
I oppgave (a) blir vi gitt starthastigheten i form av vinklene θ, ϕ og startfarten v_0, og bedt om å finne ut hvor kula kommer til å lande. Vi må altså finne x- og y-posisjonen til kula i det den lander, som vi her kaller for x_m og y_m (m for "mål"). Dette gjør vi ved å sette landings-tidspunktet t_l inn i bevegelseslikningene for x- og y-retningene. Dette gir

$$\textbf{Oppg. 2 (a)} \qquad \begin{aligned} x_m = x(t_l) &= \frac{2v_{0z}v_{0x}}{g} = \frac{2v_0^2}{g}\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y_m = y(t_l) &= \frac{2v_{0z}v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2}{g}\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\phi) \end{aligned} \tag{2}$$

hvor vi også har brukt uttrykkene for starthastigheten gitt i oppgaveteksten. Her kan vi sette inn verdiene for θ, ϕ og v_0 for å finne ut hvor vi må plassere målet.

I oppgave (b) og (c) befinner målet seg ved en gitt posisjon $\vec{r} = (x_m, y_m, 0)$. Vi blir først bedt om å finne ut hva vinkelen ϕ i xy-planet mellom x-aksen og kanonen må være for at kula skal kunne treffe målet. Her må vi bruke trigonometri. Figur 7 illustrerer situasjonen. Ved å betrakte den rettvinklede trekanten i figuren finner vi at

$$\tan(\phi) = \frac{y_m}{x_m} \implies \phi = \arctan\left(\frac{y_m}{x_m}\right).$$



Figur 7: Illustrasjon av situasjonen i oppgave 2.

Denne vinkelen kan vi sette inn i uttrykkene våre for x_m og y_m slik de er gitt i likning (2). Det holder å løse én av disse likningen for v_0 (i oppgave (b), hvor θ er gitt) eller θ (i oppgave (c), hvor v_0 er gitt). Vi velger her likningen for x_m. Utregningen foregår på samme måte som i oppgave 1, og vi må igjen bruke at $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$ for å løse for θ. Resultatene er

Oppg. 2 (b) $\quad \phi = \arctan\left(\frac{y_m}{x_m}\right)$ og $v_0 = \sqrt{\frac{gx_m}{2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\phi)}}$

og

Oppg. 2 (c) $\quad \phi = \arctan\left(\frac{y_m}{x_m}\right)$ og $\theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x_m g}{v_0^2\cos(\phi)}\right)$

Oppgave 3

I denne oppgaven starter kula fra høyden z_0, og bevegelseslikningen i z-retning er dermed

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Akkurat som i oppgave 1 og 2 finner vi tidspunktet hvor kula treffer bakken, t_l, ved å bruke at $z(t_l) = 0$ og løse for t_l. Denne gangen må vi bruke andregradsformelen,

$$0 = z(t_l) = z_0 + v_{0z}t_l - \tfrac{1}{2}gt_l^2 \implies t_l = \frac{v_{0z} \pm \sqrt{v_{0z}^2 + 2gz_0}}{g}. \tag{3}$$

Her får vi to løsninger, avhengig av om vi velger pluss- eller minustegnet i uttrykket for t_l. Minustegnet vil gi et negativt tall for t_l, så dette kan ikke representere tidspunktet hvor kula treffer bakken *etter* at den ble skutt ut ved $t = 0$. Vi må derfor velge plusstegnet i likning (3), altså har vi at kula treffer bakken ved tidspunktet

$$t_l = \frac{v_{0z} + \sqrt{v_{0z}^2 + 2gz_0}}{g}.$$

Vi kan finne x-koordinaten til kula i det den treffer bakken, x_m, ved å sette dette uttrykket inn i bevegelseslikningen for x-retningen, nemlig

$$x_m = x(t_l) = v_{0x}t_l = v_{0x} \cdot \frac{v_{0z} + \sqrt{v_{0z}^2 + 2gz_0}}{g}. \tag{4}$$

I oppgave (a) blir vi bedt om å finne ut hvor kula kommer til å lande basert på de oppgitte verdiene for v_0 og θ. Her må vi bruke uttrykkene $v_{0x} = v_0 \sin(\theta)$ og $v_{0z} = v_0 \cos(\theta)$ i tillegg til likningen for x_m. Dette gir oss

$$\textbf{Oppg. 3 (a)} \qquad x_m = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}\left(v_0 \cos(\theta) + \sqrt{v_0^2 \cos^2(\theta) + 2gz_0}\right) \tag{5}$$

I oppgave (b) er målets posisjon $\vec{r} = (x_m, y_m, 0)$ oppgitt, og vi blir bedt om å finne startfarten v_0. Her må vi løse likning (5) for v_0. Dette vil kreve en del manipulasjon av likningen, noe vi like godt kunne ha gjort før vi satte inn uttrykkene for v_{0x} og v_{0z}. Vi går derfor tilbake til likning (4) for å ha litt færre faktorer å holde styr på. Kvadratrøtter er ofte vanskelige å regne med. Det kan derfor lønne seg å "løse" likningen for kvadroten, og deretter opphøye begge sidene av likningen i andre, altså

$$x_m g - v_{0x} v_{0z} = v_{0x}\sqrt{v_{0z}^2 + 2gz_0} \implies (x_m g - v_{0x} v_{0z})^2 = v_{0x}^2 (v_{0z}^2 + 2gz_0).$$

Hvis vi ganger ut uttrykkene på begge sidene vil vi se at to ledd kansellerer,

$$(x_m g)^2 - 2x_m g v_{0x} v_{0z} + \cancel{(v_{0x} v_{0z})^2} = \cancel{(v_{0x} v_{0z})^2} + 2gz_0 v_{0x}^2.$$

Vi kan nå sette inn uttrykkene for v_{0x} og v_{0z}, som gir

$$(x_m g)^2 - 2x_m g v_0^2 \sin(\theta)\cos(\theta) = 2gz_0 v_0^2 \sin^2(\theta).$$

Hvis vi flytter begge leddene som inneholder faktoren v_0^2 til samme side og faktoriserer denne ut får vi

$$(x_m g)^2 = v_0^2 \left(2gz_0 \sin^2(\theta) + 2x_m g \sin(\theta)\cos(\theta)\right).$$

Vi kan så omsider løse denne likningen for v_0. Alle leddene inneholder en faktor g som vi kan kansellere, og vi kan benytte oss av identiteten $2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$ for å forenkle uttrykket litt hvis vi vil. Resultatet blir

$$\textbf{Oppg. 3 (b)} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{x_m^2 g}{2z_0 \sin^2(\theta) + x_m \sin(2\theta)}}$$