Løsningsforslag + Teori Øving 5

Simen Hustad

October 10, 2021

Oppgave 1

a)

Gradienten ∇f til en funksjon f i et punkt $\vec{p}$ med variabler $\vec{x}$ er gitt ved:

$$\nabla f(\vec{p}) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(\vec{p}), \frac{\delta f}{\delta x_2}(\vec{p}), ..., \frac{\delta f}{\delta x_n}(\vec{p}) \right)$$

I oppgaven skal det ikke settes inn verdier for $\vec{p}$, slik at svaret blir et uttrykk med x og y. Husk å bruke kjerneregelen når du partiellderiverer!

Eksempel

$$\begin{aligned}
z = f(x,y) &= 3sin(4y + 5x) \\
f(x,y) &= 3sin(u(x,y)) = 3sin(u) \\
u(x,y) &= 4y + 5x \\
\nabla f &= \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y} \right) \\
\nabla f &= \left(\frac{\delta(3sin(u))}{\delta x} * u'(x), \frac{\delta(3sin(u))}{\delta y} * u'(y) \right) \\
\nabla f &= (3cos(4y + 5x) * 5, 3cos(4y + 5x) * 4) \\
\nabla f &= (15cos(4y + 5x), 12cos(4y + 5x))
\end{aligned}$$

b)

Den generelle fremstillingen for linearisering til en funksjon med flere variabler skrives slik:

$$
\begin{aligned}
w &= f(\vec{x}) \\
w &\approx f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p}) * (\vec{x} - \vec{p}) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Forklaring:

$\vec{p}$	Arbeidspunkt
$\vec{x}$	Generelt punkt (x, y, z)
$f(\vec{p})$	Verdi til f i punktet $\vec{p}$
$\nabla f(\vec{p})$	Gradienten til f i punkt $\vec{p}$
$*$	Skalarprodukt

Ved å sette inn kjente verdier i formel 1 får vi en likning på formen:

$$w \approx ax + by + cz + C$$

c)

Hessematrisen til en funksjon f er definert til å være gradienten til gradienten:

$$
\begin{aligned}
\nabla f(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1} & \frac{\delta f}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f}{\delta x_n} \end{bmatrix} \\
H &= \begin{bmatrix} \nabla(\nabla f(\vec{x})) \end{bmatrix} \\
H &= \begin{bmatrix} \nabla \frac{\delta f}{\delta x_1}(\vec{x}) \\ \nabla \frac{\delta f}{\delta x_2}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \nabla \frac{\delta f}{\delta x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \\
H &= \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Generelle 2 x 2 og 3 x 3 Hessematriser blir da:

$$
\begin{aligned}
H_{2x2} &= \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \\
H_{3x3} &= \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

d)

Vi har to matriser A og B som vi ønsker å multiplisere sammen. For å kunne foreta matrisemultiplikasjon, kreves det at antall kolonner i A tilsvarer antall rader i B. Med andre ord må A ha dimensjonene n x m og B ha m x k. Den resulterende matrisen vil ha dimensjoner n x k.

Den generelle matrisemultiplikasjonen ser stor og skummel ut, derfor eksemplifiserer jeg ved bruk av 2x1 og 1x2 matriser. Fremgangsmåten er den samme for nxm matriser.

$$\begin{aligned}
A_{1x2} &= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\
B_{2x1} &= \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\
AB_{1x1} &= \begin{bmatrix} ac + bd \end{bmatrix} \\
BA_{2x2} &= \begin{bmatrix} ca & cb \\ da & db \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

Merk: Mesteparten av teorien under er repetisjon fra MM1.

Egenverdier

En generell kvadratisk matrise A og identitetsmatrise I med størrelse n x n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$I = \begin{bmatrix} 1_{11} & 0_{12} & \dots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 1_{22} & \dots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n1} & 0_{n2} & \dots & 1_{nn} \end{bmatrix}$$
$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0_{12} & \dots & 0_{1n} \\ 0_{21} & \lambda_{22} & \dots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n1} & 0_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

A vil ha et sett med egenverdier gitt ved likningen $det(A-\lambda I) = 0$. Her er I identitetsmatrisen med samme dimensjoner som A.

Merk: Skrivemåten $|A - \lambda I|$ er ekvivalent med $det(A - \lambda I)$ og betyr determinanten til $A - \lambda I$. Generelt betyr det å sette absolutt tegn utfor en matrise å finne determinanten til matrisen.

$$|A - \lambda I| = \left|\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_{nn} \end{bmatrix}\right| = 0$$

Løsningen til denne likningen gir et sett med egenverdier λ_i:

$$|A - \lambda I| = 0 = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$$

Merk: Egenverdiene kan være gjentakende og komplekse.

For en generell 2 x 2 matrise kan vi finne egenverdiene ved å løse likningssettet:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$$
$$\lambda_1 \lambda_2 = det(A) = ad - bc$$

Determinant

Å finne determinanten til en matrise større enn 3 x 3 er en omfattende prosess og gjøres som regel ved bruk av digitale hjelpemidler som Python eller Matlab. Det er pensum fra MM1, og er lite sannsynlig at vi får bruk for.

Derimot kommer vi nok til å få bruk for determinanten til matriser på størrelsene 2 x 2 og 3 x 3. Heldigvis har disse dimensjonene faste sammenhenger vi kan bruke for å "kjapt" regne ut determinanten.

2x2

Determinanten til en 2 x 2 matrise er ganske rett frem:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$|A| = det(A) = ad - bc$$

3x3

Determinanten til en 3 x 3 er litt værre, men har en formel vi kan følge. Ved å bruke *Leibniz formula for determinants* (simplifisert) har vi en måte å uttrykke determinanten til 3 x 3 matrisen A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$
$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Merk: For å finne determinanten til en 3 x 3 matrise bruker vi *interne* matriser som er 2 x 2.
Vi må ikke bruke a_{11}, a_{12} og a_{13}.

I formelen over valgte vi å bruke a_{11}, a_{12} og a_{13}. Vi kan velge vilkårlig hvilken rad eller kolonne vi ønsker å ta utgangspunkt i, og forskjellen blir hvilke innermatriser vi tar determinanten av. Hvis vi ønsker å se på andre kolonner/rader, kan vi sette opp piler for å avdekke innermatrisene. Jeg skriver ikke det generelle stykket her, men se eksempel 2 under.

Eksempel 1

La oss se på et eksempel med tall :)
Vi har en 3 x 3 matrise A og ønsker å finne determinanten $|A|$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = det(A) = 1 * \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 * (5 * 9 - 6 * 8) - 2 * (4 * 9 - 6 * 7) + 3 * (4 * 8 - 5 * 7)$$

$$|A| = 1 * (-3) - 2 * (-6) + 3 * (-3)$$

$$|A| = 0$$

Eksempel 2

Vi fortsetter med samme matrise A. Denne gangen ønsker vi å uttrykke $|A|$ ved å ta utgangspunkt i en annen rad enn 1. La oss undersøke hva determinanten blir hvis vi tar utgangspunkt i rad 2.

Fortegnet til bidragene finner vi ved å se på matrisen som et rutenett med fortegn (jeg kommer ikke til å utlede hvorfor, dette er pensum i MM1):

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Deretter setter vi opp bidragene til de forskjellige koordinatene:

$$\text{Når vi ser på 4, 5 og 6:}$$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \textcolor{green}{2} & \textcolor{green}{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \textcolor{green}{8} & \textcolor{green}{9} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} \textcolor{green}{1} & 2 & \textcolor{green}{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ \textcolor{green}{7} & 8 & \textcolor{green}{9} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} \textcolor{green}{1} & \textcolor{green}{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \textcolor{green}{7} & \textcolor{green}{8} & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Innermatrisene blir da koordinatene markert i grønn. For å avgjøre posisjonen koordinatene i innermatrisen, starter vi bare øverst å venstre hjørne og beveger oss videre derfra. Ved å ta hensyn til fortegnsmatrisen får vi da determinanten til A:

$$|A| = -4\begin{vmatrix}2 & 3\\8 & 9\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}1 & 3\\7 & 9\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}1 & 2\\7 & 8\end{vmatrix}$$
$$|A| = -4(2*9-3*8)+5(1*9-3*7)-6(1*8-2*7)$$
$$|A| = 0$$

Matrise som transformasjon av vektor

Å forklare matriser som en transformasjon kan ta tid og blir vanskelig å beskrive med tekst, derfor anbefaler jeg å se **3Blue1Brown** sin serie på youtube om lineær algebra for en bedre forståelse (lenke).

For oppgaven sin del får vi oppgitt at absoluttverdien til determinanten av en matrise $|det(M)|$ multiplisert med et areal $Areal(0)$ i planet vil gi en transformasjon med et nytt areal:

$$\text{Nytt areal} = |det(M)| * Areal(O)$$

Fremgangsmåten blir akkurat den samme i 3-dimensjoner, derfor tar jeg bare eksempel i 2-dimensjoner :).

Eksempel

Vi har et område O i planet med areal 69. Dette arealet transformeres med matrisen $A = \begin{bmatrix}6 & 10\\ \frac{20}{23} & \frac{10}{23}\end{bmatrix}$. Hva blir det nye arealet?

Først trenger vi å finne determinanten til A:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ \frac{20}{23} & \frac{10}{23} \end{bmatrix} \\
|A| &= \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ \frac{20}{23} & \frac{10}{23} \end{vmatrix} \\
|A| &= 6 * \frac{10}{23} - 10 * \frac{20}{23} = -\frac{140}{23}
\end{aligned}
$$

Dermed kan vi regne ut det nye arealet til O:

$$
\begin{aligned}
Areal(O)_{ny} &= |det(A)| * Areal(O) \\
Areal(O)_{ny} &= |-\frac{140}{23}| * 69 \\
Areal(O)_{ny} &= 420
\end{aligned}
$$

Etter transformasjonen vil området O ha et areal på størrelse 420.

Oppgave 3

For at det skal være mulig at en funksjon f har ekstremalpunkt i $\vec{p}$ må minst ett av kriteriene under være oppfylt:

- $\nabla f = \vec{0}$
- f er ikke deriverbar i $\vec{p}$
- $\vec{p}$ er på *randen* av domenet til f

Merk: Punkt som oppfyller $\nabla f = \vec{0}$ kan være kritisk punkt eller ekstremalpunkt. Et kritisk punkt er et sadelpunkt eller terrassepunkt. Ekstremalverdier er toppunkt og bunnpunkt.

For å klassifisere et kritisk punkt kan vi bruke andrederivert-testen hvor vi undersøker *Hessematrisen* til funksjonen. Hvis Hessematrisen er...

- Negativ definitt (alle $\lambda_i < 0$) $\rightarrow \vec{p}$ er toppunkt
- Positiv definitt (alle $\lambda_i > 0$) $\rightarrow \vec{p}$ er bunnpunkt
- Indefinitt (både $\lambda_i > 0$ og $\lambda_j < 0$) $\rightarrow \vec{p}$ er sadelpunkt
- Hvis ingen av situasjonene over gjelder, kan vi ikke vite (f.eks. både $\lambda_i > 0$ og $\lambda_j = 0$)

Husk: λ_i er egenverdiene til Hessematrisen.

Selv om andrederivert-testen av Hessematrisen gjelder generelt, kan det være fint å vite hvordan testen blir i to dimensjoner. Vi definerer diskriminanten $\Delta = f_{xx}f_{yy} -$

$(fxy)^2$ i et kritisk punkt $\vec{p}$. Diskriminanten er da determinanten til Hessematrisen.

$\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$
Vi undersøker diskriminanten Δ. Hvis...

- $\Delta > 0$ og $f_{xx} > 0 \to \vec{p}$ er lokalt minimum
- $\Delta > 0$ og $f_{xx} < 0 \to \vec{p}$ er lokalt maksimum
- $\Delta < 0 \to \vec{p}$ er sadelpunkt
- $\Delta = 0 \to$ kan ikke konkludere noe

Spesifikt for oppgaven:
OBS: I FORELESNINGER BRUKTE VI
$\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = det(H)$.
ØVINGEN BRUKER
$\Delta = (f_{xy})^2 - f_{xx}f_{yy} = -det(H)$
SVARENE SOM BRUKER DISKRIMINANT BLIR DA MOTSATT

- $\Delta = -det(H)$
- $\Delta < 0$ og $f_{xx} > 0 \to$ lokalt/globalt minimum
- $\Delta < 0$ og $f_{xx} < 0 \to$ lokalt/globalt maksimum
- $\Delta > 0 = det(H) < 0 \to$ sadelpunkt
- $\Delta = 0 \to$ Kan ikke konkludere
- $f_{xy} > f_{xx}$ og $f_{xy} > f_{yy} \to \Delta = (f_{xy})^2 - f_{xx}f_{yy} > 0$ (tror det er feil i øvingen på denne)
- $\Delta < 0$ og $f_{xx}f_{yy} = C \to$ Kan ikke konkludere
- H har to egenverdier λ_1, λ_2 (2x2 matrise)

- $\lambda_1 * \lambda_2 < 0 \rightarrow$ en egenverdi er negativ og en er positiv (indefinitt = sadelpunkt)
- $\lambda_1 * \lambda_2 > 0 \rightarrow$ egenverdiene kan enten være begge negative eller begge positive, kan derfor ikke avgjøre noe
- $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$

Oppgave 4

a)

Oppgaven oppgir en funksjon $f(x,y) = ...$ I tillegg får vi oppgitt at funksjonen har et ekstremalpunkt. Funksjonen er kontinuerlig deriverbar og er definert i alle punkter, slik at funksjonen ikke har en rand.

Vi undersøker funksjonen basert på kriteriene fra tidligere:

- $\nabla f = \vec{0}$
- f er ikke deriverbar i $\vec{p}$
- $\vec{p}$ er på *randen* av domenet til f

Vi starter som regel med $\nabla f = \vec{0}$, men i dette tilfellet vet vi at de andre kriteriene ikke gjelder slik at vi kun trenger å undersøke $\nabla f = \vec{0}$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}\right) = \vec{0}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 0 \qquad\qquad \frac{\delta f}{\delta y} = 0$$

Ved å løse likningssettet over får vi alle verdier for x og y som tilsvarer kritiske punkter. Finner da z ved å sette inn disse verdiene i $f(x,y)$:

$$z = f(x_0, y_0)$$

Vanligvis kunne vi funnet ut hva slags type punkt dette er ved å studere egenverdiene til Hessematrisen, men i dette tilfellet er alle egenverdiene lik null og da vil vi ikke kunne konkludere. For å finne ut hva slags punkt dette faktisk er trenger vi da å undersøke hva som skjer rundt det kritiske punktet. Viser med eksempel.

Eksempel 1

Vi har en funksjon $f(x, y)$ med et kritisk punkt.

$$\begin{aligned} z = f(x, y) &= -(y-3)^4 + (x-6)^4 + 6 \\ \nabla f &= \vec{0} \\ \text{Kritisk punkt} &= (6, 3, 6) \end{aligned}$$

Funksjonen vår er faktorisert så enkelt som mulig, slik at vi ikke trenger å faktorisere mer. Vi undersøker hva som skjer rundt $(x, y) = (6, 3)$. Ettersom det ikke er noen ledd som inneholder både x og y kan vi undersøke bidragene hver for seg.

$$\begin{aligned} &-(y-3)^4 \\ &-(3-3)^4 = 0 \\ &-(2-3)^4 = -1 \\ &-(4-3)^4 = -1 \end{aligned}$$

Her kan vi observere at en endring i y rundt $y = 3$ uansett gir en negativ endring for z.

$$\begin{aligned} &(x-6)^4 \\ &(5-6)^4 = 1 \\ &(7-6)^4 = 1 \end{aligned}$$

Her kan vi observere at en endring i x rundt $x = 6$ uansett gir en positiv endring for z.

Tolkningen av resultatene oven er at når vi beveger oss rundt $(x, y) = (6, 3)$ er det mulig å bevege seg i en retning som øker verdi, og en som minker verdi. Derfor kan vi vite at dette ikke er et toppunkt, siden da ville alle retninger rundt ført til en reduksjon av verdi. Vi kan også vite at dette ikke er et bunnpunkt, siden ikke alle retninger fører til økning av verdi. Vi står da igjen med et sadelpunkt.

Eksempel 2

Vi har en funksjon $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Har denne funksjonen ekstremalpunkter, isåfall hvilke/hvor?

Vi starter med å undersøke gradienten $\nabla f = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= (2x - 2y, 2y - 2x) = \vec{0}\\ 2x - 2y &= 0\\ 2y - 2x &= 0\\ x &= y\end{aligned}$$

Ekstremalpunkter hvor $x = y$. Undersøker Hessematrisen for å klassifisere punktene:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$
$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$|H| = 2 * 2 - (-2 * -2) = 0$$

Siden Hessematrisen har en determinant $|H| = 0$ kan vi ikke si noe om hva slags punkter dette er, og må undersøke på et annet vis. Vi prøver å faktorisere uttrykket:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Ved å se på endringene rundt punktene $x = y$ kan vi klassifisere dem. Siden disse er generelle punkter kan vi se på flere. Starter ved å se på grafen rundt $(x, y) = (5, 5)$.

$$(x - y)^2$$
$$(5 - 5)^2 = 0$$
$$(6 - 5)^2 = 1$$
$$(4 - 5)^2 = 1$$
$$(5 - 6)^2 = 1$$
$$(5 - 4)^2 = 1$$

Her ser vi at uansett hvordan vi beveger oss vekk fra $(x, y) = (5, 5)$ vil grafen øke. Dermed vet vi at dette er et bunnpunkt. Hvis vi undersøker flere punkter ser vi at den samme konklusjonen gjelder for alle $x = y$.

b)

Vi har en funksjon $f(x,y) = sin(x^2+y^2)$. Denne funksjonen vil alltid ligge mellom -1 og 1 siden det er et rent sinus uttrykk. Oppgaven ber om å finne likningen for en kurve som skjærer f i punktet $f(x,y) = 1$. De eneste tidspunktene f kan være 1, er når $x^2 + y^2 = 90° = \frac{\pi}{2}$, ettersom $sin(\theta) = 1$ når $\theta = n * 2\pi + \frac{\pi}{2}, n \in [0, 1, 2 \ldots]$.

Dermed blir likningen for kurven som krysser f når $f(x,y) = 1$: $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2}$
Merk: Det er viktig å passe på at uttrykket er innenfor de gitte rammene for x og y.

c)

I denne oppgaven fungerer det ikke å finne maksimal verdi ved å undersøke gradienten, ettersom maksimal funksjonsverdi kun er kritisk punkt når grafen er definert i det spesifikke området. Med andre ord må vi prøve noe annet. For eksempel kan vi sette inn minimale verdier for x og y og se hva resultatet blir.

Eksempel

Vi har en funksjon $h(x,y) = e^{-\sqrt{1-y^2}} + e^{-\sqrt{1-x^2}}$ hvor $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. For å finne maksimal funksjonsverdi undersøker vi ved å sette inn grensene:

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= e^{-\sqrt{1-0}} + e^{-\sqrt{1-0}} \\
f(0,0) &= 2e^{-1} \\
f(1,1) &= e^{-\sqrt{1-1}} + e^{-\sqrt{1-0}} \\
f(1,1) &= 1 + 1 = 2
\end{aligned}
$$

Etter å utforske grensene kan vi se at maksimal funksjonsverdi er $f(1,1) = 2$. Vi vet at det ikke er noen høyere verdi, ettersom rotuttrykket i eksponenten aldri vil bli høyere enn disse verdiene.

Oppgave 5

a)

For å klassifisere et kritisk punkt kan vi bruke andrederivert-testen hvor vi undersøker *Hessematrisen* til funksjonen. Hvis Hessematrisen er...

- Negativ definitt (alle $\lambda_i < 0$) $\rightarrow \vec{p}$ er toppunkt
- Positiv definitt (alle $\lambda_i > 0$) $\rightarrow \vec{p}$ er bunnpunkt
- Indefinitt (både $\lambda_i > 0$ og $\lambda_j < 0$) $\rightarrow \vec{p}$ er sadelpunkt
- Hvis ingen av situasjonene over gjelder, kan vi ikke vite (f.eks. både $\lambda_i > 0$ og $\lambda_j = 0$)

For en generell kvadradisk matrise A kan vi si en del om fortegnene til egenverdiene uten å regne dem ut. Her har vi noen sammenhenger:

$$det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_i$$

$$det(A) > 0 \rightarrow \text{Partall med eller ingen negative } \lambda$$

$$det(A) < 0 \rightarrow \text{Oddetall med negative } \lambda\text{, men minst en negativ}$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$tr(A) = 0 \rightarrow \text{Både positive og negative } \lambda$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Merk: $tr(A)$ er betegnelsen til $Trace(A)$. Vi har ikke gått gjennom dette i forelesninger, men det er en nyttig egenskap ved matriser (les mer).

For en 2 x 2 matrise kan vi da finne fortegnene til egenverdiene uten å regne dem ut:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
det(A) &= ad - bc = \lambda_1 \lambda_2 \\
tr(A) &= a + d = \lambda_1 + \lambda_2 \\
det(A) &< 0 \rightarrow 1 \text{ negativ og } 1 \text{ positiv } \lambda \\
det(A) &> 0 \rightarrow 2 \text{ negative eller } 2 \text{ positive } \lambda \\
det(A) &> 0 \text{ og } tr(A) > 0 \rightarrow 2 \text{ positive } \lambda \\
det(A) &> 0 \text{ og } tr(A) < 0 \rightarrow 2 \text{ negative } \lambda
\end{aligned}
$$

Vi har lignende sammenhenger for 3 x 3 matriser:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$tr(a) = a + e + i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$det(A) < 0 \rightarrow$ 1 eller 3 negative λ

$det(A) < 0$ og $|tr(A)| = |a| + |e| + |i| \rightarrow$ 3 negative λ

$det(A) < 0$ og $|tr(a)| < |a| + |e| + |i| \rightarrow$ 1 negative og 2 positive λ

$det(A) > 0 \rightarrow$ 2 eller ingen negative λ

$det(A) > 0$ og $|tr(A)| = |a| + |e| + |i| \rightarrow$ 3 positive λ

$det(A) > 0$ og $|tr(A)| < |a| + |e| + |i| \rightarrow$ 2 negative og 1 positiv λ

Merk: Har ikke markert situasjoner hvor en eller flere egenverdier er null. Alle konklusjoner over er hentet ved hjelp av $det(A)$ og $tr(A)$.

Oppgave 6

a)

Vi har en funksjon $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ som vi ønsker å parametrisere på sirkelen med radius $r = k$ og sentrum i origo. Parameterfremstillingen til en sirkel er gitt ved $x = rcos(\theta), y = rsin(\theta)$.

Merk: Dette tilsvarer å gjøre om til sylinderkoordinater.

$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ gjenkjenner her 2. kvadratsetning
$f(x, y) = (x - y)^2$
$f(r, \theta) = (rcos(\theta) - rsin(\theta))^2$
$f(r, \theta) = r^2(cos(\theta) - sin(\theta))^2$

For å finne kritisk punkt kan vi løse likningssettet $\nabla f = \vec{0}$. Alternativt kan vi i dette tilfelle se på leddet $(cos(\theta) - sin(\theta))^2$. Ved å stirre hardt på funksjonen kan vi observere at funksjonsverdien vil ha toppunkt når $(cos(\theta) - sin(\theta))^2$ er høyest mulig. Samtidig vil funksjonen ha bunnpunkt når det samme uttrykket er lavest mulig.

Merk: Den høyeste og laveste verdien vil være på et multiplum av $45°$. Disse punktene gir de høyeste verdiene for summen av $cos(\theta)$ og $sin(\theta)$

$$max(cos(\theta) - sin(\theta))^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})\right)^2$$
$$max(cos(\theta) - sin(\theta))^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - (\frac{\sqrt{2}}{2})\right)^2$$
$$topp = r^2(\pm\sqrt{2})^2 = 2r^2$$

Den laveste verdien er litt mer luren. Ettersom uttrykket $(cos(\theta) - sin(\theta))^2$ er opphøyd i andre, er det ikke bare å ta den maksimale negative verdien til uttrykket. Derimot er den laveste verdien når $cos(\theta) - sin(\theta) = 0$

$$cos(\theta) - sin(\theta) = 0$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$
$$bunn = r^2(0) = 0$$

For å finne (x, y) er det bare å sette inn verdiene for r, $cos(\theta)$ og $sin(\theta)$ inn i:

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$

Oppgave 7

Fremgangsmåte Lagrange

Lagranges metode er en systematisk fremgangsmåte for å analysere kritiske punkter til funksjonen $f(\vec{x})$. For å analysere f har vi en betingelse g slik at $g(\vec{x}) = 0$. Videre definerer vi Lagrangefunksjonen $L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x})$, hvor λ kalles Lagrangemultiplikatoren.

Nå har vi altså en ny funksjon $L(\vec{x}, \lambda)$ som vi kan undersøke for kritiske punkter. Resultatene vi får gir kritiske punkter til $f(\vec{x})$, men også de kritiske punktene til $L(\vec{x}, \lambda)$. Vi glemmer bare kritiske punkter for $L(\vec{x}, \lambda)$ siden de er uinteressante.

$$
\begin{aligned}
L(\vec{x}, \lambda) &= f(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x}) \\
\nabla L(\vec{x}, \lambda) &= (\nabla f(\vec{x}) - \lambda \nabla g(\vec{x}), -g(\vec{x})) = \vec{0}
\end{aligned}
$$

Ved å løse likningssettet over vil vi få verdier for $\vec{x}$ og λ. λ verdiene gir de kritiske punktene til $L(\vec{x}, \lambda)$ og vi bryr oss ikke om dem.

Eksempel

Vi har en funksjon $z = f(x, y) = 4y + 2x$ som er definert på sirkelen med sentrum i origo og radius $r = 8$.

Først finner vi uttrykk for betingelsen slik at $g(x, y) = 0$. Betingelsen til denne oppgaven er at f er definert på en sirkel:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad \text{Sirkellikning}$$
$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{Sirkel med sentrum i origo}$$
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 = g(x, y)$$

Vi definerer da betingelsen $g(x, y) = 0$ ved at $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8^2 = 0$. Finner deretter Lagrangefunksjonen:

$$\begin{aligned}
L(\vec{x}, \lambda) &= f(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x}) \\
L(x, y, \lambda) &= f(x, y) - \lambda g(x, y) \\
L(x, y, \lambda) &= 4y + 2x - \lambda(x^2 + y^2 - 64)
\end{aligned}$$

Fortsetter med vanlig undersøkelse av kritiske punkter ved å sette $\nabla L = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}
&\nabla L(x, y, \lambda) = \left(\frac{\delta L}{\delta x}, \frac{\delta L}{\delta y}, \frac{\delta L}{\delta \lambda} \right) \\
&\nabla L(x, y, \lambda) = \big(2 - 2\lambda x, 4 - 2\lambda y, -(x^2 + y^2 - 64)\big) \\
&\nabla L(x, y, \lambda) = \vec{0}
\end{aligned}$$

Deretter får vi følgende likningssett:

$$\begin{aligned}
&A : 2 - 2\lambda x = 0 \\
&B : 4 - 2\lambda y = 0 \\
&C : -x^2 - y^2 + 64 = 0
\end{aligned}$$

Bruker A og B for å eliminere λ. Definerer D til å være likningen vi ender opp med:

$$A : \lambda = \frac{1}{x}$$
$$B : 4 - 2y\frac{1}{x} = 0$$
$$D : 4x = 2y$$

Bruker C og D for å finne x og y:

$$C : -x^2 - y^2 + 64 = 0$$
$$D : 4x = 2y$$
$$D : y = 2x$$
$$C : -x^2 - (2x)^2 + 64 = 0$$
$$C : -5x^2 = -64$$
$$C : x = \pm\sqrt{\frac{64}{5}}$$
$$D : y = 2x = \pm 2\sqrt{\frac{64}{5}}$$

Resultatene vi ønsker er da $x = \pm\sqrt{\frac{64}{5}}$ og $y = \pm 2\sqrt{\frac{64}{5}}$. Dette er koordinatene til de kritiske punktene til f. I dette tilfellet er det et bunnpunkt og et toppunkt. Vi setter inn for x og y slik at vi får funksjonsverdiene i de punktene:

$$f(\sqrt{\frac{64}{5}}, 2\sqrt{\frac{64}{5}}) = 16\sqrt{5}$$
$$f(-\sqrt{\frac{64}{5}}, -2\sqrt{\frac{64}{5}}) = -16\sqrt{5}$$

Da får vi at f har et toppunkt i $f(\sqrt{\frac{64}{5}}, 2\sqrt{\frac{64}{5}}) = 16\sqrt{5}$ og et bunnpunkt i $f(-\sqrt{\frac{64}{5}}, -2\sqrt{\frac{64}{5}}) = -16\sqrt{5}$.