Løsningsforslag + Teori Øving 6

Simen Hustad

October 22, 2021

For visualisering av trippelintegraler er det mulig å bruke følgende:

- Kartesiske integral
- Sylindriske integral
- Sphæriske integral

Hvis det var noen uklarheter i sammenheng med øving 6 håper jeg at de blir svart på her. Denne teorien ble mer utfyllende enn tenkt, for å kompensere for litt mangelfull teori sist :)

Oppgave 1

a)

Regning med trippelintegraler er identisk med regning i dobbeltintegraler. Vi må ta hensyn til rekkefølge og bytte av grenser på akkurat samme måte som før. Den store forskjellen er at trippelintegraler vil være vanskeligere å finne grenser, samt mer arbeid å utføre.

Det generelle trippelintegral:

$$\int\int\int_T f(x,y,z)dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right) dy\right) dz$$

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right) dxdz$$

Integralene over løses ved å integrere $f(x,y,z)$ tre ganger, en for hver variabel. Likt som ved partiellderivasjon kan vi se på y som konstant når vi integrerer med hensyn på x og vise versa. Trippelintegraler beholder egenskapene til enkeltintegraler og dobbeltintegraler, som substitusjon og linearitet.

Merk: Integrasjonsgrensene er her konstanter og inneholder ingen ledd med variabler. Da kan vi bytte rekkefølgen på dx, dy og dz så mye vi ønsker, siden resultatet blir det samme. Hvis noen grenser inneholder variabler må vi være mer forsiktige.

Ettersom variabler regnes som konstanter under integrasjon av andre variabler, kan vi bytte på rekkefølgen og gjøre integralet enklere for oss selv. I enkeltintegraler gjøres det slik:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 3x^2 dx = 3\int_a^b x^2 dx$$

Ettersom 3 er en konstant kan vi trekke den ut av integralet. Vi anvender til trippelintegraler:

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \int_c^d \int_a^b x * y * z \; dxdydz$$
$$= \int_e^f z \; dz \int_c^d y \; dy \int_a^b x \; dx$$
$$= \left(\int_e^f z \; dz\right) * \left(\int_c^d y \; dy\right) * \left(\int_a^b x \; dx\right)$$

Merk: Når vi integrerer med hensyn på x vil y og z være konstanter vi kan trekke utenfor integralet på samme måte vi gjorde i enkeltintegral.

Integrasjon er en lineær operator, og vi vet fra før at vi kan dele opp grensene til en integrasjon:

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$$
$$\int_{-2}^2 f(x)dx = -\int_2^{-2} f(x)dx$$
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Merk: Grensene som brukes over (-2 og 2) er kun for å eksemplifisere.

Trippelintegraler beholder denne egenskapen, og vi kan gjøre det samme. Det er verdt å merke seg at trippelintegraler vil få mange ledd når vi deler opp, og gjerne se skumle ut selv om det kan gjøre det enklere for oss. Viser med dobbeltintegral siden trippelintegral vil ta mye plass :)

$$\int\int_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy + \int\int_D g(x,y)dxdy$$
$$\int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{0}\int_{-3}^{3} f(x,y)dxdy + \int_{0}^{2}\int_{-3}^{3} f(x,y)dxdy$$
$$\int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{0} f(x,y)dxdy + \int_{-2}^{2}\int_{0}^{3} f(x,y)dxdy$$

Merk: Vi kan bytte ut grenser så mye vi ønsker, men må huske at summen tilsvarer de opprinnelige grensene. Vi kan også bestemme oss for å dele noen ledd og la andre ledd være.

Gjennomgår oppgave 1 ved bruk av eksempler:

Eksempel 1

Regn ut trippelintegralet:

$$\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4}^{3} x^2+y^2+z^2 dxdydz$$

Integrerer som vanlig og bruker y^2 og z^2 som konstanter når vi integrerer med hensyn på x. Videre gjør vi tilsvarende når vi integrerer med hensyn på resterende variabler:

$$\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4}^{3} x^2 + y^2 + z^2 dxdydz$$
$$= \int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\left([\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xz^2]_{x=-4}^{x=3}\right) dydz$$
$$= \int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{3}3^3 + 3y^2 + 3z^2 - (\frac{1}{3}(-4)^3 + (-4)y^2 + (-4)z^2\right) dydz$$
$$= \int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\left(\frac{91}{3} + 7y^2 + 7z^2\right) dydz$$

Fortsetter videre ved å integrere med hensyn på y:

$$\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\left(\frac{91}{3} + 7y^2 + 7z^2\right) dydz$$
$$= \int_{-4}^{3}\left([\frac{91}{3}y + \frac{7}{3}y^3 + 7z^2y]_{y=-3}^{y=3}\right) dz$$
$$= \int_{-4}^{3}\left(\frac{91}{3}3 + \frac{7}{3}3^3 + 7z^2 * 3 - (\frac{91}{3}(-3) + \frac{7}{3}(-3)^3 + 7z^2 * (-3)\right) dz$$
$$= \int_{-4}^{3}\left(308 + 42z^2\right) dz$$

Til slutt kan vi integrere med hensyn på z:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-4}^{3}\left(308+42z^2\right)dz\\
=&\left[308z+\frac{42}{3}z^3\right]_{z=-4}^{z=3}\\
=&308*3+\frac{42}{3}*3^3-(308*(-4)+\frac{42}{3}*(-4)^3)\\
=&3430
\end{aligned}
$$

Merk: Utregning med trippelintegraler er relativt rett frem, men er mye arbeid.

Eksempel 2

Regn ut trippelintegralet:

$$\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4}^{3}1-(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

Her kan vi bruke svaret fra forrige eksempel for å gjøre utregningene enklere. Vi vet at trippelintegraler beholder lineære egenskaper til enkeltintegraler, og kan dermed dele opp integralet:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4}^{3}1-(x^2+y^2+z^2)dxdydz\\
=&\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4}^{3}1dxdydz-\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4}x^2+y^2+z^2dxdydz
\end{aligned}
$$

Da trenger vi bare å utføre det ene integralet:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4}^{3} 1 dxdydz \\
=&\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3} [x]_{x=-4}^{x=3} dydz \\
=&\int_{-4}^{3} [7y]_{y=-3}^{y=3} dz \\
=&[42z]_{z=-4}^{z=3} \\
=&294
\end{aligned}
$$

Til slutt kan vi da løse integralet:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4}^{3} 1-(x^2+y^2+z^2) dxdydz \\
=&\int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4}^{3} 1 dxdydz - \int_{-4}^{3}\int_{-3}^{3}\int_{-4} x^2+y^2+z^2 dxdydz \\
=&294-3430=-3136
\end{aligned}
$$

Eksempel 3

Regn ut trippelintegralet:

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{2}\int_{0}^{x^2}\int_{0}^{x^2} 1 dzdydx \\
&\left(\int_{a}^{b}\int_{c(x)}^{d(x)}\int_{e(x,y)}^{f(x,y)} 1 dzdydx\right)
\end{aligned}
$$

Vi må passe på at grensene til de innerste integralene kun inneholder variabler som integreres utenfor det innerste integralet. Med andre ord, grensene til z (innerste integral) kan kun inneholde variablene x og y. Samtidig må grensene til y kun inneholde variabelen x. x er det ytterste integralet, og kan dermed ikke inneholde variabler.

Vi ser at i vårt tilfelle stemmer dette (det gjør som regel det :)) og vi kan integrere som vanlig:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_0^{x^2} \int_0^{x^2} 1 dz dy dx \\
=&\int_0^2 \int_0^{x^2} [z]_{z=0}^{z=x^2} dy dx \\
=&\int_0^2 \int_0^{x^2} x^2 dy dx \\
=&\int_0^2 [x^2 y]_{y=0}^{y=x^2} dx \\
=&\int_0^2 x^4 dx \\
=&[\frac{1}{5}x^5]_{x=0}^{x=2} \\
=&\frac{2^5}{5} = \frac{32}{5}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a)

Integraler kan noen ganger bruke symmetri for å gjøre utregninger enklere. De vanligste brukene av symmetri er symmetrisk eller antisymmetrisk rundt en akse.

Funksjonen $f(x) = x^2$ er et eksempel på symmetri rundt $f(x)$. Vi kan her se at arealet under grafen blir lik på begge sider av $f(x)$. Resultatet fra denne observasjonen er at $\int_{-a}^{a} x^2 dx = 2\int_{0}^{a} x^2 dx$.

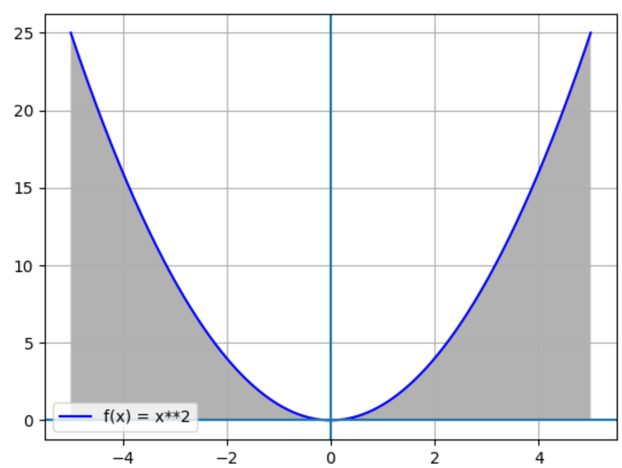

Figure 1: Symmetri

Funksjonen $f(x) = x^3$ er et eksempel på antisymmetri rundt $f(x)$. I motsetning til symmetri kan vi her se at arealene får motsatte fortegn og vil dermed kansellere hverandre slik at $\int_{-a}^{a} x^3 dx = 0$.

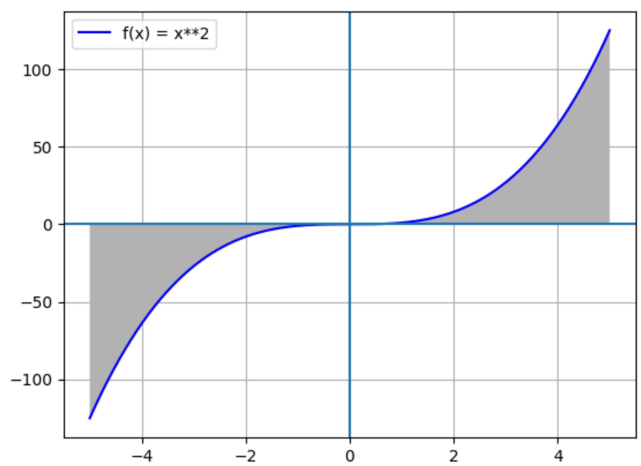

Figure 2: Antisymmetri

Slik symmetri kan også tas med videre i høyere dimensjoner. Demonstrerer med eksempel:

Eksempel 1

Regn ut trippelintegralet:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} y^3 dzdxdy$$

Dette integralet er ikke spesielt og kan løses som normalt, men svaret går raskere å finne når man kjenner symmetrien. Ettersom alle grenser er konstanter kan vi endre på rekkefølgen:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} y^3 dzdxdy$$
$$= \int_{-a}^{a} y^3 dy \left(\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} dzdx\right)$$

Basert på antisymmetri vet vi at $\int_{-a}^{a} y^3 dy = 0$. Vi får da:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} y^3 dzdxdy$$
$$= \int_{-a}^{a} y^3 dy \left(\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} dzdx\right)$$
$$= 0 * \left(\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} dzdx\right) = 0$$

b)

Eksempel 1

Løs trippelintegralet:

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{-2}^{2} r + r^2 cos(\theta) dzdrd\theta$$

Dette integralet er relativt rett frem og løse, men kan løses kjapt når vi vet symmetrien. La oss dele integralet opp i to biter:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r + r^2cos(\theta)dzdrd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r\ dzdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r^2cos(\theta)\ dzdrd\theta$$

Ved å se på grensene kan vi her gjenkjenne at vi figuren vi integrerer over er et sylinder med radius 3 som går fra $z = -2$ til $z = 2$. Dette ser vi ettersom i sylinderkoordinater beskriver θ hvilken bit av en sirkel vi integrerer over, og i dette tilfellet er det fra $0 - 2\pi$ som tilsvarer en hel sirkel. I tillegg ser vi at radiusen er konstant og mellom $0 - 3$, som betyr at sirkelen har sentrum i origo og radius 3. Utifra dette kan vi beregne første del av integralet som volumet av denne sylinderen:

$$V_{sylinder} = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r\ dzdrd\theta$$
$$V_{sylinder} = G * h = \pi r^2 h$$
$$V_{sylinder} = 9\pi * 2 - (-2)$$
$$V_{sylinder} = 36\pi$$

Videre husker vi at overgangen mellom sylinder og kartesiske koordinater har sammenhenger:

$$dxdydz = r\ drd\theta dz$$
$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$
$$z = z$$

Dette lar oss se på andre del av integralet:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r^2cos(\theta)\ dzdrd\theta \\
=&\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r*rcos(\theta)\ dzdrd\theta \\
=&\int\int\int x\ dxdydz
\end{aligned}$$

Vi vet at figuren beveger seg med radius 3 fra origo, og vi får da $-3 \leq x \leq 3$ som grenser til x. Hvis vi integrerer uttrykket over med disse grensene blir resultatet lik 0 grunnet symmetri:

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_{-3}^3 x\ dxdydz \\
=&\left(\int dy\right)*\left(\int dz\right)*\left(\int_{-3}^3 x\ dx\right) \\
=&\left(\int dy\right)*\left(\int dz\right)*(0)=0
\end{aligned}$$

Resultatet fra integrasjonen blir da:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r+r^2cos(\theta)dzdrd\theta \\
=&\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r\ dzdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r^2cos(\theta)\ dzdrd\theta \\
=&36\pi-0=36\pi
\end{aligned}$$

c)

Eksempel 1

Regn ut trippeintegralet:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 sin(\phi)\ d\rho d\phi d\theta$$

For kulekoordinater har vi $\rho^2 sin(\phi) d\rho d\phi d\theta = dxdydz$, som betyr at vi her integrerer volumet til den avgrensede figuren. Vi kan også gjenkjenne at grensene til figuren danner en halvkule med radius 1. Dette ser vi enklere ved å tegne en figur. Vi kan da beregne løsningen til integralet enklere:

$$V_{halvkule} = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 sin(\phi)\ d\rho d\phi d\theta$$
$$V_{halvkule} = \frac{4\pi r^3}{3} * \frac{1}{2}$$
$$V_{halvkule} = \frac{2\pi}{3}$$

Oppgave 3

a)

Eksempel 1

Regn ut trippelintegralet:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-r}^{r} r\ dzdrd\theta$$

Utregningen av dette integralet er relativt rett frem, og svaret vi får er $\frac{4\pi}{3}$. Svaret tilsvarer volumet til enhetskula, men anbefaler å plotte/tegne figuren for å finne ut hvordan den ser ut. Det er den viktigste biten av oppgaven :) (Hint: Det er ikke enhetskula)

b)

Eksempel 1

Regn ut trippelintegralet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{sin(\phi)}} \rho^2 sin(\phi)\ d\rho d\phi d\theta$$

Vi kan gjøre uttrykket fra kulekoordinater til sylinderkoordinater. Vi vet at $\rho^2 sin(\phi) = dxdydz = r\ dzdrd\theta$, og at θ er den samme i både sylinder og kulekoordinater. Videre ser vi at den høyeste verdien for ρ er gitt ved likningen $\rho = \frac{1}{sin(\phi)}$. Vi kan snu om på likningen slik at $\rho sin(\phi) = 1$, og vi har at $r = \rho sin(\phi)$ slik at grensene til r blir $0 \leq r \leq 1$ (0 er laveste verdien til ρ og dermed r). Utifra samme uttrykk vet vi også at høyeste verdi til ρ må være r. På grunn av dette vet vi da at $z = \rho cos(\phi)$

aldri kan være høyere enn r eller mindre enn $-r$, og vi parametriserer grensen til z ved $-r \leq z \leq r$. Da får vi følgende integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_{-r}^{r} r \; dzdrd\theta$$

Vi kan gjenkjenne at dette er samme integral som i forrige oppgave, men at vi integrerer over en del av en sirkel (ikke hele sirkelen) slik at det nye integralet er $\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8}$ ganger så stort som det forrige. Dermed blir det nye integralet:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{sin(\phi)}} \rho^2 sin(\phi) \; d\rho d\phi d\theta \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_{-r}^{r} r \; dzdrd\theta \\
=&\frac{4\pi}{3} * \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Oppgave 4

a)

Eksempel 1

Regn ut trippelintegralet:

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} dxdydz$$

Vi kan gjøre om til sylinderkoordinater. Det første jeg liker å se på er grensene til θ. θ sine grenser er gitt for hvor i xy-planet vi befinner oss. Vi kan se fra de gjeldende grensene at $0 \leq x$ og $0 \leq y$, som betyr at vi kun ser på første kvadrant. θ blir da definert mellom x-aksen og y-aksen $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Videre kan vi finne r som den høyeste verdien vi beveger oss langs xy-planet (gitt sirkel med sentrum i origo, som regel er det tilfellet). Utifra parametriseringen til x sine grenser har vi $x = \sqrt{a^2 - y^2}$. Vi kan gjøre om på denne likningen slik at vi får likningen til en sirkel:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 - y^2} \\ x^2 &= a^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Vi får da en sirkel med radius a, som er den maksimale verdien vi kan bevege oss ut ifra origo. Grensene til r blir da $0 \leq r \leq a$ (0 er minste verdi til r).

Det siste vi trenger er grensene til z, men heldigvis er denne verdien akkurat den samme. Vi kan da bytte ut integralet:

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} dxdydz$$
$$= \int_{-a}^{a}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{a} r\ drd\theta dz$$

Vi kan regne ut integralet eller se at dette tilsvarer et kvart sylinder:

$$V_{sylinder} = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{a} r\ drd\theta dz$$
$$V_{sylinder} = \frac{G * h}{4} = \frac{\pi r^2 h}{4}$$
$$V_{sylinder} = \frac{\pi a^2 * (a - (-a)}{4} = \frac{\pi a^3}{2}$$

b)

I denne oppgaven er det bare å regne ut trippelintegralet som vanlig.

c)

I denne oppgaven skal du bruke samme integralgrenser som i forrige oppgave, men sette integranden til å være $\rho^2 sin(\phi)$ istedenfor 1. Derfra er det bare å gjennomføre integralet som normalt.

Oppgave 5

Massen til et legeme er gitt ved trippelintegralet over masseendringen til legemet. Ofte er massetettheten konstant, og beregningene blir enklere.

$$m = \int\int\int_T \varrho(x, y, z) dV = \int\int\int_T dm$$

Konstant massetetthet:

$$m = \int\int\int_T \varrho dV = \varrho \int\int\int_T dV$$
$$m = \varrho * |T|$$

Mer: Ved konstant massetetthet får vi at massen er tettheten multiplisert med volumet av legemet. Intuitivt gir dette veldig mye mening.

Videre har vi at tyngdepunktet til legemet er et punkt $\overline{P}$ med koordinater $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ vektet med massen. Vi finner dette punktet med å integrere koordinatene $\vec{r} = (x, y, z)$ multiplisert med massetettheten $\varrho(x, y, z)$ som en funksjon av koordinatene.

$$\overline{P} = \frac{1}{m} \int\int\int_T \vec{r} * \varrho(x, y, z)\ dV$$

Merk: Dette er nesten samme uttrykk som for massen. Forskjellen er at for å finne tyngdepunktet tar vi gjennomsnittsposisjonen for hvert koordinat (x, y, z) vektet med den variable massetettheten $\varrho(x, y, z)$ og massen m.

Sidenote: Hvis du blir forvirret over notasjonen $\vec{r}$ er det helt forståelig. Den brukes kun for å korte ned på hvor mye vi skriver:

$$
\begin{aligned}
&\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \\
&\overline{P} = \frac{1}{m} \int \int \int_T \vec{r} * \varrho(x, y, z)\ dV \\
&\overline{P} = \Bigg(\frac{1}{m} \int \int \int_T x * \varrho(x, y, z)\ dV, \\
&\quad \frac{1}{m} \int \int \int_T y * \varrho(x, y, z)\ dV, \\
&\quad \frac{1}{m} \int \int \int_T z * \varrho(x, y, z)\ dV \Bigg)
\end{aligned}
$$

Merk: Det tar mye mer plass og er mer arbeid å skrive alle tre koordinatene istedenfor $\vec{r}$:)

Ved konstant massetetthet ϱ blir beregningen enklere:

$$
\begin{aligned}
\overline{P} &= \frac{1}{m} \int \int \int_T \vec{r} \varrho dV \\
\overline{P} &= \frac{1}{\varrho |T|} \varrho \int \int \int_T \vec{r} dV \\
\overline{P} &= \frac{1}{|T|} \int \int \int_T \vec{r} dV
\end{aligned}
$$

Merk: Når massen er konstant blir tyngdepunktet lik sentroiden til legemet. Sentroiden kan vi kalle gjennomsnittspunktet på legemet, og befinner seg i $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ som ikke er vektet med noe som helst. I en sirkel eller firkant vil det være midtpunktet i figuren.

Eksempel 1

Et legeme i rommet er gitt ved ulikhetene $\rho \leq \frac{5}{cos(\phi)}$, $\rho \leq \frac{2}{sin(\phi)}$ og $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Uniform tetthet $\varrho = 1$.

Velger å gjøre om til sylinderkoordinater for å forenkle integralene. Sammenhenger mellom kule og sylinderkoordinater:

Merk: Det er fullt mulig å gjennomføre integralene i kule koordinater eller å bytte over til kartesiske koordinater. Jeg valgte sylinderkoordinater for å vise at det er mulig å regne i noe annet enn kartesiske koordinater, samt å vise overgang mellom integralgrenser :)

$$r = \rho sin(\phi)$$
$$z = \rho cos(\phi)$$
$$\theta = \theta$$

Utifra disse sammenhengene kan vi justere på ulikhetene:

- $\rho \leq \frac{5}{cos(\phi)} \rightarrow \rho cos(\phi) \leq 5 \rightarrow z \leq 5$
- $\rho \leq \frac{2}{sin(\phi)} \rightarrow \rho sin(\phi) \leq 2 \rightarrow r \leq 2$

Merk: Ettersom $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ blir $z = \rho cos(\phi) \geq 0$ og $r = \rho cos(\phi) \geq 0$. Ulikhetene er uavhengig av θ og vi kan da anta at $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Husk:

$$
\begin{aligned}
dV &= dxdydz = r * drd\theta dz \\
x &= rcos(\theta) \\
y &= rsin(\theta) \\
z &= z
\end{aligned}
$$

Da får vi følgende integraler:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \varrho * r * drd\theta dz \\
\overline{P} &= \Bigg(\frac{1}{m} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 rcos(\theta) * \varrho * r * drd\theta dz, \\
&\frac{1}{m} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 rsin(\theta) * \varrho * r * drd\theta dz \\
&\frac{1}{m} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 z * \varrho * r * drd\theta dz \Bigg)
\end{aligned}
$$

Videre er det bare å gjennomføre disse integralene som normalt.

Merk: Figuren vi ser på er en sylinder som strekker seg fra $z = 0$ til $z = 5$. xy-planet danner også en sirkel med sentrum i origo. Intuitivt vet vi at $\overline{x}$ og $\overline{y}$ da vil være 0, siden gjennomsnittsverdien i en sirkel er sentrumet av sirkelen og sentrumet ligger i origo $(x, y) = (0, 0)$. Vi finner samme svar av å gjennomføre integralet :)

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \varrho * r * drd\theta dz \\
m &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} [\frac{r^2}{2}]_{r=0}^{r=2} d\theta dz \\
m &= \dots \\
m &= 20\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_z &= \frac{1}{m} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 z * \varrho * r * drd\theta dz \\
\overline{P}_z &= \dots \\
\overline{P}_z &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Resultatet blir da et sylinder med masse m og tyngdepunkt $\overline{P}$:

$$
\begin{aligned}
m &= 20\pi \\
\overline{P} &= (0, 0, \frac{5}{2})
\end{aligned}
$$

Oppgave 6

Eksempel 1

Vi ser på en pyramide med kvadratisk grunnflate som strekker seg mellom $(\pm 9, \pm 9, 0)$ med topp i $(0, 0, 2)$ og ønsker å definere integrasjonsgrensene for volumet av pyramiden.

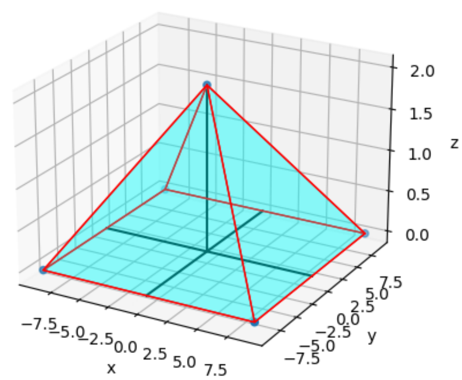

Figure 3: Pyramiden vi ser på

Integrasjonsgrensene kan være på formen:

$$\int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2(z)}^{b_2(z)} \int_{a_1(x,z)}^{b_1(x,z)} dydxdz$$

Merk: Vi kunne valgt hvilken rekkefølge vi ville på integrasjonene, forskjellen er kun grensene vi ser på.

Jeg liker å starte finne ytterste grenser først og jobbe meg innover. Vi kan finne grensene til z ved å se på maksimal og minimal verdi. Laveste verdi for z er på grunnflaten hvor den er lik 0, og høyeste er i toppen der $z = 2$. Vi får da grensene $0 \leq z \leq 2$.

Videre kan vi se på grensene til x ved å bruke et snitt i pyramiden. Vi kan da tenke oss at vi ser på en linje i xz planet. Ved å stirre hardt på figur 4 kan vi observere at $z = 2 - \frac{2}{9}|x|$. Ved å snu om får vi $|x| = 9 - \frac{9}{2}z$. Øvre grense vil da være for positive x-verdier, slik at $x \leq 9 - \frac{9}{2}z$. Nedre grense blir ved negative x-verdier, slik at $-x \leq 9 - \frac{9}{2}z \rightarrow x \geq \frac{9}{2}z - 9$.

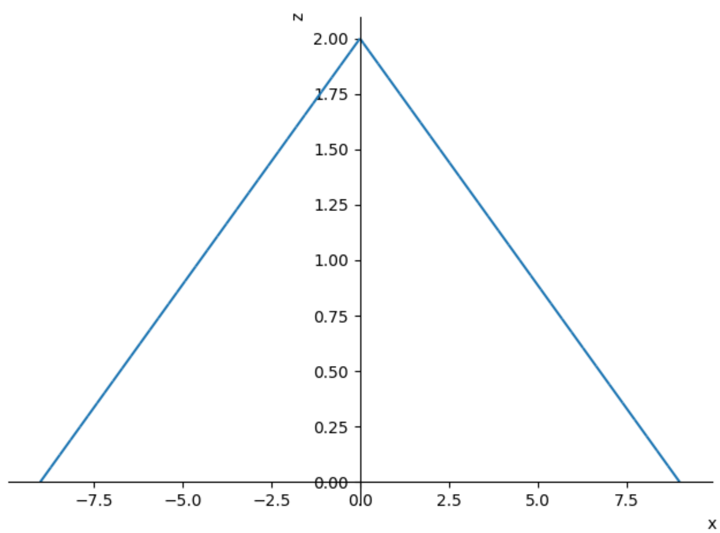

Figure 4: Snitt i pyramiden

For å finne grensene til y ser vi nå på planene som spenner sidene il pyramiden. Øvre grense finner vi ved å studere planet som skjærer y-aksen i positive verdier. Intuitivt vil de nedre grensene være i planet på motsatt side, og vil kun ha forskjellige fortegn på grunn av symmetri (likt som for grensene til x). For å finne likningen til et plan trenger vi normalvektoren til planet og et punkt på planet. Et punkt på planet vi ser på er $(9, 9, 0)$, så vi tar utgangspunkt i det. Vi kan finne normalvektoren ved å ta kryssproduktet (ikke skalarproduktet) av to vektorer på planet. En vektor kan vi finne ved å subtrahere to punkter på en linje (i dette tilfellet et plan). Vi finner to vektorer:

$$\vec{v}_1 = (9, 9, 0) - (-9, 9, 0) = [18, 0, 0]$$
$$\vec{v}_2 = (9, 9, 0) - (0, 0, 2) = [9, 9, -2]$$

Merk: Punktet $(0, 0, 2)$ er toppunktet til pyramiden og ligger i planet vi ser på. $(-9, 9, 0)$ og $(9, 9, 0)$ er begge punkter på planet vi ser på (to av hjørnene til pyramiden). Det er vanlig å bruke [] for vektorer og () for punkter.

Normalvektoren $\vec{n}$ er da gitt ved kryssproduktet til disse to vektorene:

$$\vec{n} = [18, 0, 0]x[9, 9, -2]$$
$$\vec{n} = [0, 36, 162]$$

Da kan vi endelig finne likningen til planet, som er gitt ved skalarproduktet (ikke kryssproduktet) til normalvektoren på en linje i planet lik 0. En linje i planet kan defineres som et generelt punkt (x, y, z) subtrahert med et kjent punkt $(9, 9, 0)$:

$$
\begin{aligned}
\vec{n} * [(x, y, z) - (9, 9, 0)] &= 0 \\
[0, 36, 162] * [x - 9, y - 9, z] &= 0 \\
0 * x + 36y - 324 + 162z &= 0
\end{aligned}
$$

Ved å løse likningen for planet med hensyn på y kan vi finne øvre grense til y (nedre grense er samme med forskjellig fortegn).

Merk: Dette planet er uavhengig av x. Hvis vi hadde tatt utgangspunkt i planet som krysser i positiv x ville vi ikke hatt noe uttrykk med y.

Vi løser likningen med hensyn på y:

$$
\begin{aligned}
36y - 324 + 162z = 0 \\
36y &= 324 - 162z \\
y &= 9 - \frac{9}{2}z
\end{aligned}
$$

Vi får da grensene til y som $\frac{9}{2} - 9 \leq y \leq 9 - \frac{9}{2}z$.

Merk: Grensene til y er kun avhengige av z, og er identiske med grensene til x. Dette er ikke tilfeldig og har med symmetri i figuren å gjøre.

Oppgave 7

Eksempel 1

Et legeme er gitt ved ulikhetene $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ og $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Legemet har uniform tetthet $\varrho = 1$. Regn ut tyngdepunktet.

Det første vi legger merke til er at disse koordinatene ligner på beskrivelsene til sirkel/kule, og kan da anta at det er lurt å omgjøre til kulekoordinater. Her vil vi trenge sammenhenger mellom kartesiske/sylindriske/kule koordinater for å gi oss grenser:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$r = \rho sin(\phi) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$z = \rho cos(\phi)$$

Vi kan hente grensene til ρ utifra første ulikhet. Her har vi at $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \rightarrow \rho^2 \leq 4$. Dette gir oss maksimal verdi $\rho \leq 2$ og minimal verdi $\rho \geq -2$. Men vi vet også at ρ aldri er negativ, slik at $0 \leq \rho \leq 2$. Fra den andre ulikheten kan vi hente grensene til ϕ. $z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \rho cos(\phi) \geq \rho sin(\phi) \rightarrow cos(\phi) \geq sin(\phi)$. For kulekoordinater er også $0 \leq \phi \leq \pi$. Vi kan da stirre hardt på enhetssirkelen og konkludere med at $cos(\phi) \geq sin(\phi)$ når $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ (cosinus vil være større enn sinus frem til 45°. Vi har ingen begrensninger på θ slik at $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi kan da finne tyngdepunktet med følgende integraler:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 \varrho\rho^2 sin(\phi)d\rho d\phi\theta \\
\overline{P} &= \left(\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 (\varrho)*(\rho sin(\phi)cos(\theta))*(\rho^2 sin(\phi))d\rho d\phi d\theta\right. \\
&\quad \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 (\varrho)*(\rho sin(\phi)sin(\theta))*(\rho^2 sin(\phi))d\rho d\phi d\theta \\
&\quad \left.\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 (\varrho)*(\rho cos(\phi))*(\rho^2 sin(\phi))d\rho d\phi d\theta\right)
\end{aligned}
$$

Husk:

$$
\begin{aligned}
x &= \rho sin(\phi)cos(\theta) \\
y &= \rho sin(\phi)sin(\theta) \\
z &= \rho cos(\phi) \\
dV = dxdydz &= \rho^2 sin(\phi)d\rho d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

Integralene over er ganske kjipe å gjennomføre, men vi kan gjøre det litt enklere for oss. Figuren vi ser på er symmetrisk rundt hele z-aksen, og vi kan da vite at $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$ på samme grunnlag som i oppgave 5 eksempel 1. Vi er fortsatt nødt til å gjennomføre integrasjonen for massen og z-koordinaten. (Jeg jukset og gjennomførte integrasjonene i python, men de kan gjøres for hånd også :)). Vi får da resultatene:

$$
\begin{aligned}
m &= 2\pi(\frac{8}{3} - 4\frac{\sqrt{2}}{3}) \\
\overline{P} &= \left(0, 0, \frac{1}{\frac{8}{3} - 4\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)
\end{aligned}
$$