Løsningsforslag + Teori Øving 8

Simen Hustad

October 28, 2021

Oppgave 1

a)

Når vi skal integrere med variabelbytte, har vi følgende sammenheng:

$$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int\int_D f(\vec{G}(u,v)) * |det(D\vec{G}(u,v))|dudv$$

Merk: Jeg er usikker på spesifikk utledning av denne formelen, men antar det blir brukt kjerneregel av noe slag.

Når vi da ønsker å finne arealet over området, setter vi integranden $f(x,y) = 1$ og står da igjen med:

$$\int\int_S dxdy = \int\int_D |det(D\vec{G}(u,v))|dudv$$

Eksempel 1

Gitt transformasjonene $x = ve^u$ og $y = ve^{-u}$. u og v har grensene $1 \leq v \leq 2$ og $ln(3) \leq u \leq ln(7)$. Finn integranden og å beregne arealet.

For å beregne arealet trenger vi determinanten til Jacobimatrisen til transformasjonen. Den finner vi slik:

Merk: Utledning av Jacobimatrisen gjøres under eksempel 2 i oppgave 2 under.

$$
\begin{aligned}
D\vec{G} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \\
det(D\vec{G}) &= \frac{\partial x}{\partial u} * \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} * \frac{\partial y}{\partial u} \\
&= ve^{u} * e^{-u} - e^{u} * (-ve^{-u}) = 2v
\end{aligned}
$$

Merk: Jeg satte direkte inn for de deriverte uten å utlede dem, ettersom de er relativt enkle utregninger. Svaret over er integranden for beregning av arealet.

Vi kan da sette opp integralet med grensene oppgitt:

$$
\begin{aligned}
\int\int_{S} dxdy &= \int_{1}^{2}\int_{ln(3)}^{ln(7)} |det(D\vec{G})|dudv \\
&= \int_{1}^{2}\int_{ln(3)}^{ln(7)} |2v|dudv \\
&= \int_{1}^{2}\int_{ln(3)}^{ln(7)} 2v\ dudv \\
&= 3ln(7) - 3ln(3)
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

Når vi tidligere har sett på gradienten $\nabla f(\vec{x})$ til en funksjon $f(\vec{x})$, har vi brukt spesifikke punkter $\vec{p}$. Gradientfeltet er det samme, men istedenfor spesifikke punkter ser vi på den generelle gradienten.

Forklart litt anderledes: Vi regner ut gradienten uten å sette inn verdier for koordinatene/punktet vi ser på.

Husk: Gradienten $\nabla f(\vec{x})$ er en vektor, og kan beregnes ved å finne partiellderiverte av $f(\vec{x})$ for hver $\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Som regel bruker vi bare $\vec{x} = [x, y]$ eller $\vec{x} = [x, y, z]$. Gradienten regnes slik:

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$
$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Merk: Jeg bruker endelig riktig partiellderivert tegn ∂ istedenfor δ :)

Eksempel 1

Regn ut gradientfeltet ∇f til funksjonen $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

Vi finner gradientfeltet:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$\nabla f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z)$$

Vi kan helt fint bare beregne gradienten som normalt og få riktig svar, men viser en anvendelse av kjerneregelen som kan gjøre slike operasjoner enklere. Vi setter $u = x^2 + y^2 + z^2$, og bruker kjerneregelen.

$$\nabla f(x,y,z) = \nabla f(u(x,y,z)) = \nabla f(u) * \nabla u(x,y,z)$$

Merk: Tilfellet over er en anvendelse av den generelle kjerneregelen, og vil kun gjelde når både f og u gir ut skalar som verdi. Utledningen kommer etter eksempelet.

Finner gradientene:

$$\nabla f(u) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}$$
$$\nabla u(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2), \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2), \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)\right)$$
$$\nabla u(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

Setter inn:

$$\nabla f(x,y,z) = \nabla f(u) * \nabla u(x,y,z) = -\frac{1}{u^2} * (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{u^2}, -\frac{2y}{u^2}, -\frac{2z}{u^2}\right)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$

Merk: Vi har nå funnet gradientfeltet. Hvis vi setter inn for (x,y,z) får vi gradienten. Forskjellen er kun at feltet er generelt.

Utledning bruk av kjerneregel

Den helt generelle kjerneregelen er gitt ved Jacobimatrisen. Vi ser først på funksjoner av generelle størrelser $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deretter for funksjoner med skalar resultat $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Vi har en funksjon $\vec{F}(\vec{x})$ hvor $\vec{F} = [F_1, F_2, \ldots, F_m]$ og $\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Jacobimatrisen $D\vec{F}(\vec{x})$ er da gitt slik:

$$\begin{aligned} D\vec{F}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \vdots \\ \nabla F_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

For en funksjon som tar inn en vektor og gir ut en skalar:

$$\begin{aligned} DG(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G}{\partial x_n} \end{bmatrix} \\ &= \nabla G \end{aligned}$$

Hvis funksjonen $\vec{F}$ har en intern funksjon (kjernefunksjon) $\vec{H}(\vec{x})$ kan vi finne den deriverte (Jacobimatrisen) av $\vec{F}(\vec{H}(\vec{x}))$ ved bruk av kjerneregelen:

$$D\vec{F}(\vec{H}(\vec{x})) = D(\vec{F} \circ \vec{H})(\vec{x}) = D\vec{F}(\vec{H}) * D\vec{H}(\vec{x})$$

For funksjoner som tar in en vektor og gir ut en skalar $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kan vi anvende denne kjerneregelen slik at den er enklere. Vi har funksjonen $G(\vec{x})$ som har intern funksjon $K(\vec{x})$. Vi kan skrive dette som $G(K(\vec{x}))$ eller $G \circ K(\vec{x})$. Vi ønsker å finne den deriverte (Jacobimatrisen) til G, og bruker da kjerneregelen.

$$\begin{aligned} D(G \circ K)(\vec{x}) &= DG(K) * DK(\vec{x}) \\ D(G \circ K)(\vec{x}) &= \nabla G(K) * DK(\vec{x}) \end{aligned}$$

Merk: K trenger ikke å gi ut en skalar. Derimot hvis K gir ut en skalar får vi følgende:

$$D(G \circ K)(\vec{x}) = \nabla G(K) * \nabla K(\vec{x})$$

Oppgave 3

Potensialforskjellen $\phi(\vec{x})$ mellom to punkter (som regel er ett punkt origo) i et konservativt vektorfelt F er gitt ved:

$$\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{p}) = \int_{t_0}^{t} F(\vec{r}(t))\vec{v}(t)dt$$

Merk: Denne sammenhengen er ikke den absolutt generelle versjonen, men den som brukes og som vi trenger å huske på. Som regel er $\phi(\vec{p}) = 0$ og $t \in [0, 1]$.

Hvis vi stirrer hardt på uttrykket over kan vi observere at dette likner på fysiske sammenhenger vi kjenner godt. Hvis vi antar at vektorfeltet er et homogent kraftfelt (konstant) får vi følgende:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{p}) &= \int_{t_0}^{t} F * \vec{v}(t)dt = F * \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt \\ &= F * (s(t) - s(t_0))\end{aligned}$$

Merk: $*$ i likningen over er skalarprodukt, og vi har satt F til å være et konstant kraftfelt.

Hvis vi sier høyt det som står i likningen over kan vi formulere det slik: "Endringen i potensialet er gitt ved produktet mellom kraften og endringen av posisjonen". Med fysiske benevninger:

$$W = F * s$$

I fysikken har vi at endringen i potensial (arbeid) er lik kraften påført legemet (kraftfeltet) multiplisert med posisjonen legemet er flyttet over ($s = s(t) - s(t_0)$).

Håper at å sammenligne med $W = F * s$ kan hjelpe dere å huske formelen for å finne potensialendring :)

Eksempel 1

Gitt et konservativt vektorfelt F, finn potensialfunksjonen.

$$F = \begin{pmatrix} 6x^2y^3 + 4x \\ 6x^3y^2 + 2y \end{pmatrix}$$

Vi kan finne potensialfunksjonen på to måter:

- Løse likningssettet $\nabla\phi = F$
- Beregne arbeidsintegralet mellom origo og et generelt punkt

Velger å bruke arbeidsintegralet. Ettersom vi vet at vektorfeltet er konservativt, er det trivielt hvordan vi beveger oss fra punkt a til b. Velger da enkleste rute: rett linje. Vi beveger oss fra et nullpunkt $\vec{0} = (0, 0)$ til et generelt punkt (x, y) langs linjen $\vec{r}(t) = (tx, ty)$ hvor $t \in [0, 1]$. Vi kan da finne potensialendringen:

$$\begin{aligned} \text{Potensialendring} = \phi(x, y) - \phi(0, 0) &= \int_0^1 F(\vec{r}(t)) * \vec{v}(t)dt \\ \phi(x, y) - 0 &= \int_0^1 F(tx, ty) * \vec{v}(t)dt \end{aligned}$$

Vi kan finne hastigheten ved å tidsderivere posisjonen $\vec{r}(t)$ slik at $\vec{v} = \vec{r}\,'(t) = (x, y)$. Ved å sette inn $\vec{r}(t)$ i F får vi:

$$
\begin{aligned}
F(\vec{r}(t)) &= F(tx, ty) \\
F(\vec{r}(r)) &= \begin{pmatrix} 6 * (t * x)^2 * (t * y)^3 + 4 * (t * x) \\ 6 * (t * x)^3 * (t * y)^2 + 2 * (t * y) \end{pmatrix} \\
F(\vec{r}(t)) &= \begin{pmatrix} 6x^2y^3t^5 + 4xt \\ 6x^3y^2t^5 + 2yt \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Vi regner ut skalarproduktet $F(\vec{r}(t)) * \vec{v}(t)$:

$$
\begin{aligned}
F(\vec{r}(t)) * \vec{v}(t) &= (6x^2y^3t^5 + 4xt) * x + (6x^3y^2t^5 + 2yt) * y \\
&= 6x^3y^3t^5 + 4x^2t + 6x^3y^3t^5 + 2y^2t \\
&= 12x^3y^3t^5 + 4x^2t + 2y^2t
\end{aligned}
$$

Kan da sette inn og løse integralet:

$$
\begin{aligned}
\phi(x, y) - \phi(0, 0) &= \int_0^1 F(\vec{r}(t)) * \vec{v}(t) dt \\
\phi(x, y) - 0 &= \int_0^1 (12x^3y^3t^5 + 4x^2t + 2y^2t) dt \\
\phi(x, y) &= 2x^3y^3 + 2x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

For å beregne sirkulasjon er fremgangsmåten nesten helt lik for vanlig arbeidsintegral. Forskjellene er gjerne parametriseringen $\vec{r}(t)$ og verdiene for t.

Eksempel 1

Vi har vektorfelt $\vec{F}$ i planet, og en kurve C som er parametrisert med $\vec{r}(t)$ på en sirkel med radius 3 rundt origo:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 15x \\ 8x + y^2 \end{pmatrix}$$

Parametriseringen for en sirkel (som beveger seg mot klokka) er gitt slik:

$$\vec{r}(t) = r(cos(t), sin(t))$$
$$\vec{r}\,'(t) = r(-sin(t), cos(t))$$

Ettersom vi ønsker å bevege oss rundt hele sirkelen setter vi $t \in [0, 2\pi]$. Vi beregner $\vec{F}(\vec{r}(t)) * \vec{v}(t)$:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(t)) * \vec{v}(t) &= 15rcos(t) * r(-sin(t)) + (8rcos(t) + (rsin(t))^2)rcos(t) \\ &= -15r^2cos(t)sin(t) + 8r^2cos(t)^2 + r^3sin(t)^2cos(t) \end{aligned}$$

Merk: Hoppet over en del ledd her, men har satt inn $\vec{r}(t)$ i $\vec{F}$ og beregnet skalarproduktet $\vec{F}(\vec{r}(t)) * \vec{r}\,'(t)$.

Da har vi alt vi trenger og kan beregne sirkulasjonen som arbeidsintegralet rundt sirkelen:

$$\phi(x,y) - \phi(0,0) = \int_0^{2\pi} (-15r^2cos(t)sin(t) + 8r^2cos(t)^2 + r^3sin(t)^2cos(t))dt$$
$$\phi(x,y) = 72\pi$$

Merk: Dette er et heftig integral og kan sikkert forenkles ved hjelp av forskjellige trigonometriske identiteter, eller bare gjøres i python :)

Oppgave 5

Arbeidsintegralet er gitt som endring i potensial fra et punkt til et annet $\phi(x, y, z) - \phi(x_0, y_0, z_0)$. I et konservativt felt er det trivielt hvordan vi beveger oss fra punktet (x_0, y_0, z_0) til punktet (x, y, z). Samtidig kan vi beregne denne endringen i potensial ved bruk av arbeidsintegralet:

$$\phi(x, y, z) - \phi(x_0, y_0, z_0) = \int_{t_0}^{t} F(\vec{r}(t))\vec{v}(t)dt$$

Parametriseringen av en sirkel er gitt ved $\vec{r}(t) = r(cos(t), sin(t))$ og følger sirkelen mot klokka. For å regne arbeidsintegralet som går med klokka, er det bare å regne ut arbeidsintegralet i motsatt retning (ta minus foran).

a)

Vi får oppgitt et vektorfelt F med potensialfunksjon $\phi(x, y)$ og en kurve C som er parametrisert på sirkel rundt origo med radius lik r (radiusen har en verdi, gjerne 1, men viser med generell radius). Vi skal finne arbeidsintegral for en runde rundt sirkelen.

Ettersom F er konservativt vet vi at det er trivielt hvordan vi beveger oss fra punkt a til punkt b. Intuitivt kan vi da vite at når vi beveger oss fra starten av en sirkel, til slutten av en sirkel (som er samme punkt som starten) vil arbeidsintegralet være lik 0.

b)

Nå skal vi bevege oss *med klokka* innenfor første kvadrant i sirkelen. Da kan vi bruke parametriseringen $\vec{r}(t) = r(cos(t), sin(t))$ hvor $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Verdiene til t kommer fra at vi beveger oss i første kvadrant, altså mellom 0 og 90°. Vi kan finne arbeidsintegralet med å ta potensialendringen $\phi(x_0, y_0) - \phi(x_1, y_1)$ hvor vi setter inn $\vec{r}(t)$.

Merk: Når vi går mot klokka bruker vi $\phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$, men vi skal se på arbeidsintegralet når vi går med klokka og da tar vi bare minus foran (bytter rekkefølgen).

$$
\begin{aligned}
\phi(x, y) &= cos(4y^2) + sin(4x^2) \\
\phi(x_0, y_0) - \phi(x_1, y_1) &= \phi(\vec{r}_c(0)) - \phi(\vec{r}_c(\frac{\pi}{2})) \\
&= \Big(cos\left(4(rsin(0))^2\right) + sin\left(4(rcos(0))^2\right)\Big) \\
&\quad - \left(cos\left(4(rsin(\frac{pi}{2}))^2\right) + sin\left(4(rcos(\frac{\pi}{2}))^2\right)\right) \\
&= 0 + 1 + sin(4r^2) - cos(4r^2) - 0 \\
&= sin(4r^2) - cos(4r^2) + 1
\end{aligned}
$$

Merk: $sin(4r^2)$ og $cos(4r^2)$ er kun tall når vi setter inn for r. Vi kunne også ha funnet svaret ved å løse integralet $\int_{t_0}^{t} F(\vec{r}(t))\vec{v}(t)dt$, men når vi vet potensialfunksjonen er det ofte enklere å benytte den.

Oppgave 6

Et enkeltsammenhengende område innebærer at du kan danne en lukket kurve (altså en sirkel/ellipse eller lignende, den biter seg selv i halen), og at du kan snevre den inn til et punkt uten å forlate området. (Dette gjelder både i 2D og 3D)

Oppgaven kan være lite vanskelig å se for seg med en gang, men jeg foreslår å tegne opp de forskjellige situasjonene og undersøke om situasjonen ikke er enkeltsammenhengende. Altså prøve å finne en lukket kurve som ikke kan snevres inn til et punkt uten å forlate området. Hvis du kan motbevise at området er enkeltsammenhengende, er det ikke enkeltsammenhengende :)

Fint sted å starte:

Fjerne positiv x-akse i planet/rommet: Enkeltsammenhengende
Fjerne hele x-akse i planet/rommet: Ikke enkeltsammenhengende

Fasit:

Enkeltsammenhengende

- Rommet når vi fjerner origo
- Rommet når vi fjerner positiv x-akse
- Planet når vi fjerne positiv y-akse

Oppgave 7

Det generelle flateintegral er gitt ved funksjon $f(x, y, z)$ over en flate S med parametriseringen $\vec{r}(s, t)$.

Merk: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er en funksjon som tar inn 3 variabler og gir ut én verdi (skalar). Dette betyr at flaten vi ser på er i rommet, og ikke i planet. For å parametrisere en funksjon av 3 variabler med en som har 2, setter vi $z = f(x, y)$.

$$\int\int_S f \; dS = \int\int_T f(\vec{r}(s,t)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| dsdt$$

Merk: T er flaten vi ser på i st-planet, som omgjøres til S i xyz-rommet. Når $f(\vec{r}) = 1$ ser vi på arealet til overflaten S. Når $f(\vec{r}) \neq 1$ ser vi på arealet til S vektet med $f(\vec{r})$ (hva dette faktisk betyr er vanskelig å forklare, men det henger tett sammen med vekting av masse).

Kryssproduktet av to vektorer kan løses på flere måter, hvorav vi vanligvis bruker to av dem. En standard formel for å finne kryssvektoren er som følger:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Alternativt kan vi bruke determinanten til matrisen dannet av standard vektoren $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ og vektorene vi ønsker å ta kryssproduktet av. Dette er gjerne litt enklere å huske. Kryssproduktet blir da:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Merk: $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ er enhetsvektoren som tilsvarer å bevege seg langs (x, y, z) i høyrehåndsregelen. Vi skriver standardversjonen ettersom den brukes i alle koordinatsystem, og ikke bare (x, y, z).

Husk: Hvordan å beregne determinanten finner du i løsningsforslaget mitt til **Oppgave 2** på Øving 5. Rent praktisk kan vi da gå mellom vektorform og likningsform:

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

a)

Eksempel 1

Regn ut flateintegralet $\int\int_S x \; dS$ hvor S er flaten til en sphære definert i første oktant med radius $r = 2$.

Vi har da at en sphære er definert ved $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, og første oktant er området hvor $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

For å kunne finne flateintegralet trenger vi å parametrisere funksjonen. Ettersom vi ser på en kule er det naturlig å bruke kulekoordinater. Vi definerer da parametriseringen $\vec{r}(s, t) = \vec{r}(\phi, \theta)$.

Merk: Vi kjenner radiusen ρ, ettersom det er radiusen til sirkelen slik at $\rho = r = 2$

For å sette opp parametriseringen trenger vi å uttrykke $z = f(x, y)$ i kulekoordinater:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 2^2 \\ z^2 &= 4 - (x^2 + y^2) \\ z &= \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

Kulekoordinater:

$$\begin{aligned} x &= \rho sin(\phi)cos(\theta) \\ y &= \rho sin(\phi)sin(\theta) \\ z &= \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \\ z &= \sqrt{4 - (\rho sin(\phi)cos(\theta))^2 + (\rho sin(\phi)sin(\theta))^2)} \\ z &= \sqrt{4 - \rho^2 sin^2(\phi)} \\ z &= \sqrt{4 - 2^2 sin^2(\phi)} \\ z &= \sqrt{4(1 - sin^2(\phi))} \\ z &= 2\sqrt{cos^2(\phi)} = 2cos(\phi) \end{aligned}$$

Merk: Bruker $cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$ og $cos^2(\phi) = 1 - sin^2(\phi)$ for å forenkle uttrykket over.

Vi kan nå skrive parametriseringen $\vec{r}(\phi, \theta)$:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\phi, \theta) &= (\rho sin(\phi)cos(\theta), \rho sin(\phi)sin(\theta), 2cos(\phi)) \\ \vec{r}(\phi, \theta) &= (2sin(\phi)cos(\theta), 2sin(\phi)sin(\theta), 2cos(\phi)) \end{aligned}$$

Merk: Parametriseringen $\vec{r}(\phi, \theta)$ består fortsatt av 3 koordinater, men har kun 2 variabler når vi har satt inn for ρ.

Vi finner de deriverte uttrykkene til $\vec{r}$ og kryssproduktet av dem:

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = (2cos(\phi)cos(\theta), 2cos(\phi)sin(\theta), -2sin(\phi))$$
$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (-2sin(\phi)sin(\theta), 2sin(\phi)cos(\theta), 0)$$
$$\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2cos(\phi)cos(\theta) & 2cos(\phi)sin(\theta) & -2sin(\phi) \\ -2sin(\phi)sin(\theta) & 2sin(\phi)cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= (2cos(\phi)sin(\theta) * 0 - (-2sin(\phi)) * 2sin(\phi)cos(\theta), \\ &- 2sin(\phi) * (-2sin(\phi)sin(\theta) - 2cos(\phi)cos(\theta) * 0, \\ &2cos(\phi)cos(\theta) * 2sin(\phi)cos(\theta) - 2cos(\phi)sin(\theta) * (-2sin(\phi)sin(\theta))) \\ &= (4sin^2(\phi)cos(\theta), 4sin^2(\phi)sin(\theta), 4cos(\phi)sin(\phi))\end{aligned}$$

Merk: Her er det mye som foregår på en gang, og som regel når vi utfører flateintegral vil det være mye å holde styr på og vi får ofte stygge uttrykk. Det viktige er å forstå operasjonene som skjer, ikke nødvendigvis utregningen og forenklingene.

Videre trenger vi å finne lengden av vektoren vi fikk fra krysspoduktet til de deriverte av $\vec{r}$. Vi finner lengden av en vektor som normalt:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta}\right| &= \left|(4sin^2(\phi)cos(\theta), 4sin^2(\phi)sin(\theta), 4cos(\phi)sin(\phi))\right| \\
&= \sqrt{r_{\hat{i}}^2 + r_{\hat{j}}^2 + r_{\hat{k}}^2} \\
&= \sqrt{(4sin^2(\phi)cos(\theta))^2 + (4sin^2(\phi)sin(\theta))^2 + (4cos(\phi)sin(\phi))^2} \\
&= 4\sqrt{sin^4(\phi) + cos^2(\phi)sin^2(\phi)} \\
&= 4\sqrt{sin^2(\phi)(sin^2(\phi) + cos^2(\phi))} \\
&= 4sin(\phi)
\end{aligned}
$$

Det siste vi mangler for å sette inn i flateintegralet er grensene til ϕ og θ. Ettersom vi ser på første oktant vil $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ og $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Flateintegralet blir da:

$$
\begin{aligned}
\int\int_S xdS &= \int\int_T f(\vec{r}(\phi, \theta)) \left|\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta}\right| d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin(\phi)cos(\theta) * 4sin(\phi) d\phi d\theta \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

Merk: $x = \rho sin(\phi)cos(\theta)$.

Jeg ønsker å nevne at det å løse flateintegraler er en omfattende jobb, og det er viktig å holde tunga rett i munnen. Det viktigste er å vite hvordan å sette opp selve linjeintegralet, ikke nødvendigvis hvordan å løse det for hånd. På eksamen, hvis du klarer å sette opp riktig grenser og integrand, vil du sannsynligvis få en del utteling.

b)

Ettersom figuren vi ser på er en sphære, og alle verdier og x og y vi ser på er symmetriske, kan vi vite at:

$$\int\int_S xdS = \int\int_S ydS = 2\pi$$

Oppgave 8

Eksempel 1

Regn ut flateintegralet $\int\int_S z^2 dS$ hvor S er overflaten til kjeglen med sentrum i origo og høyde mellom $0 \leq z \leq 2$. I er grafen begrenset til $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

For å beregne flateintegralet må vi parametrisere kjeglen. Vi kan se at xy-planet spenner ut en sirkel med radius z ($z^2 = x^2+y^2$), og det vil da være naturlig å parametrisere ved bruk av sylinderkoordinater. Vi får da:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(s,t) = \vec{r}(r,\theta) &= (rcos(\theta), rsin(\theta), z) \\
\vec{r}(r,\theta) &= (rcos(\theta), rsin(\theta), \sqrt{x^2+y^2}) \\
\vec{r}(r,\theta) &= (rcos(\theta), rsin(\theta), \sqrt{(rcos(\theta))^2 + (rsin(\theta))^2}) \\
\vec{r}(r,\theta) &= (rcos(\theta), rsin(\theta), r)
\end{aligned}$$

Vi finner de deriverte av $\vec{r}$ og kryssproduktet av disse:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (cos(\theta), sin(\theta), 1) \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (-rsin(\theta), rcos(\theta), 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ cos(\theta) & sin(\theta) & 1 \\ -rsin(\theta) & rcos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-rcos(\theta), -rsin(\theta), r)
\end{aligned}$$

Merk: Jeg hoppet over utregningene over, og skrev bare svaret.

Finner lengden av kryssproduktet:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| &= \sqrt{(-rcos(\theta))^2+(-rsin(\theta))^2+r^2} \\ &= \sqrt{2r^2}=\sqrt{2}r\end{aligned}$$

For å kunne utføre flateintegralet trenger vi kun grensene til r og θ. Vi fant tidligere ut at radiusen til sirkelen på xy-planet var lik z, får vi $0 \leq r \leq 2$. Kjeglen er definert rundt hele origo, og dermed får vi $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi kan da skrive flateintegralet:

$$\begin{aligned}\int\int_S z^2 dS &= \int\int_T f(\vec{r}(r,\theta))\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 z^2 * \sqrt{2} * r\ drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2 * \sqrt{2} * r\ drd\theta \\ &= 8\pi\sqrt{2}\end{aligned}$$

Merk: Vi utledet tidligere at $z=r$, dermed blir $z^2=r^2$