Løsningsforslag + Teori Øving 6

Simen Hustad

October 14, 2021

Det blir dessverre mindre utfyllende teori på denne øvingen, jeg hadde ikke tid til mer. Det kan også hende det er noen feil i scriptet, men teoribiten burde dekke det meste med eksempler.

Oppgave 1

a)

Det generelle dobbeltintegral:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$
$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$
$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$$

Integralene over løses ved å integrere $f(x,y)$ to ganger, en for hver variabel. Likt som ved partiellderivasjon kan vi se på y som konstant når vi integrerer med hensyn på x og vise versa. Dobbeltintegraler beholder egenskapene til enkeltintegraler, som substitusjon og linearitet.

Merk: Integrasjonsgrensene er her konstanter og inneholder ingen ledd med variabler. Da kan vi bytte rekkefølgen på dx og dy så mye vi ønsker, siden resultatet blir det samme. Hvis a, b, c eller d inneholder variabler må vi være mer forsiktige.

Integrasjon er en lineær operator, og vi vet fra før at vi kan dele opp grensene til en integrasjon:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = -\int_{2}^{-2} f(x)dx$$
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Merk: Grensene som brukes over (-2 og 2) er kun for å eksemplifisere.

Dobbeltintegraler beholder denne egenskapen, og vi kan gjøre det samme. Det er verdt å merke seg at dobbeltintegraler vil få mange ledd når vi deler opp, og gjerne se skumle ut selv om det kan gjøre det enklere for oss.

$$\int\int_D (f(x,y) + g(x,y))dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy + \int\int_D g(x,y)dxdy$$
$$\int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{0}\int_{-3}^{3} f(x,y)dxdy + \int_{0}^{2}\int_{-3}^{3} f(x,y)dxdy$$
$$\int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{0} f(x,y)dxdy + \int_{-2}^{2}\int_{0}^{3} f(x,y)dxdy$$

Merk: Vi kan bytte ut grenser så mye vi ønsker, men må huske at summen tilsvarer de opprinnelige grensene. Vi kan også bestemme oss for å dele noen ledd og la andre ledd være.

Eksempel 1 og 2 henger sammen, og gjennomgår oppgave 1 på øvingen.

Eksempel 1

Regn ut dobbeltintegralet:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3}(x^2+y^2)dxdy$$

Integrasjonsrekkefølgen blir da:

$$\int_{-2}^{2}\left(\int_{-3}^{3}(x^2+y^2)dx\right)dy$$

Da integrerer vi først x^2+y^2 med hensyn på x, og betrakter y som en konstant:

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2}\left(\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=-3}^{x=3}\right)dy\\ =&\int_{-2}^{2}\left(\frac{3^3}{3}+3y^2-\left(\frac{(-3)^3}{3}+(-3)y^2\right)\right)dy\\ =&\int_{-2}^{2}\left(18+6y^2\right)dy\end{aligned}$$

Deretter gjennomfører vi det resterende integralet:

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2}\left(18+6y^2\right)dy\\ =&\left[18y+\frac{6y^3}{3}\right]_{-2}^{2}\\ =&18*2+\frac{6*2^3}{3}-\left(18*(-2)+\frac{6(-2)^3}{3}\right)=104\end{aligned}$$

Merk: Hvis vi bytter rekkefølgen på hvilken variabel vi integrerer med først kan vi se at svaret blir det samme.

Eksempel 2

Regn ut dobbeltintegralet:

$$\int_0^2 \int_{-3}^0 \left(1 - (x^2 + y^2)\right) dxdy$$
$$= \int_0^2 \int_{-3}^0 1 dxdy - \int_0^2 \int_{-3}^0 \left(x^2 + y^2)\right) dxdy$$

Her kan vi observere at uttrykket over bruker deler fra **Eksempel 1**. På grunn av linearitet kan vi bruke integrasjonene fra **Eksempel 1** men med andre grenser. Observasjonen øvingen ønsker er mer avansert, og kommer etter utregningene under.

$$\int_0^2 \int_{-3}^0 \left(x^2 + y^2)\right) dxdy$$
$$= \int_0^2 \left(\left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=-3}^{x=0} \right) dy$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{0^3}{3} + 0 * y^2 - \left(\frac{(-3)^3}{3} + (-3) * y^2 \right) \right) dy$$
$$= \int_0^2 \left(9 + 3y^2\right) dy$$
$$= \left[9y + \frac{3y^3}{3} \right]_0^2$$
$$= 9 * 2 + \frac{3 * 2^3}{3} - (9 * 0 + \frac{3 * 0^3}{3}) = 26$$

Observasjon: $\frac{104}{26} = 4$. Dette er ingen tilfeldighet. x^2 og y^2 er symmetriske rundt aksene, og symmetri kan betraktes i integrasjon:

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2 * \int_{0}^{2} x^2 dx = 2 * \int_{-2}^{0} x^2 dx$$

Merk: Dette gjelder ganske mange uttrykk. Så lenge grafen er speilet rundt aktuell akse vil denne sammenhengen gjelde.

Da kan vi enklere se at uttrykket vårt i **Eksempel 2** vil være halvparten av halvparten (altså $\frac{1}{4}$) av uttrykket fra **Eksempel 1**.

Resterende i oppgaven trenger vi å finne siste integrasjonsleddet:

$$\int_{0}^{2} \int_{-3}^{0} 1 dx dy = 6$$

Til slutt får vi:

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{2} \int_{-3}^{0} \left(1 - (x^2 + y^2)\right) dx dy \\
=&\int_{0}^{2} \int_{-3}^{0} 1 dx dy - \int_{0}^{2} \int_{-3}^{0} \left(x^2 + y^2)\right) dx dy \\
=&6 - 26 = -20
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

I denne oppgaven har vi at en grense inneholder en variabel, og vi kan da ikke bytte integrasjonsrekkefølgen uten videre. Som regel integreres uttrykket med en variabel først, slik at det kan bli fjernet i integrasjon nummer 2. Spesifikt for oppgaven er det bare å gjennomføre integrasjon i henhold til rekkefølgen (nevnt i **Oppgave 1**).

Viser oppgaven i eksempel:

Eksempel 1

Regn ut dobbeltintegralet:

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} 1 dx dy$$

Starter med det innerste integralet:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2 \left(\int_0^{y^2} 1dx \right) dy \\
=&\int_0^2 \left([x]_0^{x=y^2} \right) dy \\
=&\int_0^2 \left(y^2 \right) dy \\
=&\left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\
=&\frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

Eksempel 2

Merk: Denne oppgaven er egentlig rett frem å løse, men jeg gjør det litt vanskeligere for å ta hensyn til de observasjonene øvingene ber oss om å gjøre
Regn ut dobbelintegralet:

$$
\int_0^2 \int_{y^2}^{2^2} 1dxdy
$$

Kan her observere at vi har informasjon fra **Eksempel 1**, og kan bruke de lineære egenskapene til integrasjon:

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_{y^2}^{2^2} 1dxdy \\
=&\int_0^2 \left(\int_0^{2^2} 1dx + \int_{y^2}^0 1dx \right) dy \\
=&\int_0^2 \left(\int_0^{2^2} 1dx - \int_0^{y^2} 1dx \right) dy \\
=&\int_0^2 \int_0^{2^2} 1dxdy - \int_0^2 \int_0^{y^2} 1dxdy
\end{aligned}$$

Da kan vi bruke svaret fra **Eksempel 1** og vi trenger kun å regne ut det ene leddet:

$$\int_0^2 \int_0^{2^2} 1dxdy = 2^2 * 2 = 8$$

Til slutt får vi da:

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_{y^2}^{2^2} 1dxdy \\
=&\int_0^2 \int_0^{2^2} 1dxdy - \int_0^2 \int_0^{y^2} 1dxdy \\
=&8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

Det har seg dessverre slik at å bytte rekkefølgen på integrasjon når vi har variabler i grenser ikke er rett frem. Den beste måten å gjøre det på er å tegne en skisse med interessante punkter og undersøke hvordan vi kan finne integralet med hensyn på den andre variabelen. Dette er en treningssak, og læres best ved å se på eksempler og oppgaveregning.

Eksempel

Regn ut dobbeltintegralet:

$$\int_0^1 \int_y^1 sin(x^2)dxdy$$

Integralet $\int sin(x^2)dx$ kan kun løses numerisk, og vi ønsker derfor å bytte rekkefølgen på integrasjonen for å forenkle integrasjonen. Vi har noen sammenhenger:

$$0 \leq y \leq 1 \qquad\qquad y \leq x \leq 1$$

Uten å skissere grafen kan vi trekke noen slutninger fra grensene over. Nedre grense til x tilsvarer uttrykket $x = y$. Vi kan invertere dette uttrykket (løse med hensyn på y) for å finne ny grense til y. Siden $y \leq x$ blir dette øvre grense for y. Samtidig vet vi at $0 \leq y$. De nye grensene kan vi hente ut slik: $0 \leq y \leq x \leq 1 \rightarrow 0 \leq x \leq 1$. Da får vi ett nytt sett med grenser som tilsvarer å bytte integrasjonsrekkefølge:

$$0 \leq y \leq x \qquad\qquad 0 \leq x \leq 1$$

Merk: Vi ser at de net nye integralet blir y-enkelt, som er resultatet vi ønsket.

Det nye integralet blir dermed:

$$\int_0^1 \int_0^x sin(x^2) dy dx$$

Merk: Integralet har nå byttet rekkefølge

$$\int_0^1 \int_0^x sin(x^2) dy dx$$
$$= \int_0^1 \left[y sin(x^2) \right]_{y=0}^{y=x} dx$$
$$= \int_0^1 x sin(x^2) dx$$

Bruker vanlig substitusjon for å løse enkeltintegralet:

$$u = x^2$$
$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x$$
$$dx = \frac{du}{u'(x)}$$

Finner grenser til u ved å sette inn for x:
$u_{nedre} = u(0) = 0$
$u_{øvre} = u(1) = 1$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 xsin(u)\frac{du}{u'(x)} \\
=&\int_0^1 xsin(u)\frac{du}{2x} \\
=&\frac{1}{2}\int_0^1 sin(u)du \\
=&\frac{1}{2}[-cos(u)]_0^1 \\
=&\frac{1}{2}(-cos(1)-(-cos(0))) \\
=&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos(1)
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

Oppgaven bygger på symmetri, eller mer spesifikt antisymmetri (hvis det er et ord :)). En ren sinusformet bølge vil være antisymmetrisk (helt lik, men negativ) rundt aktuell akse. Dette kan vi også se ved bruk av en trigonometrisk identitet $sin(-\theta) = -sin(\theta)$. Dette fører til:

$$\int_{-a}^{a} sin(x)dx = 0$$

Merk: Istedenfor å dobles vil en antisymmetrisk graf kansellere seg selv når det integreres like mye rundt aktuell akse.

Oppgave 5

Samme fremgangsmåte som i oppgave 2 :)

Oppgave 6

Vi får oppgitt noen punkter som spenner ut en trekant i planet, avgrenset av x-aksen og grafen. Vi skal da finne grenser og integrand. Viser med eksempel:

Eksempel

La T være trekanten med hjørner i $(\pm 4, 0)$ og $(0, 9)$. Arealet av T er gitt ved dobbeltintegralet:

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1(y)}^{b_1(y)} f(x, y) dx dy$$

Integranden $f(x, y)$ vil alltid være 1 når vi finner arealet til en flate. For å finne grensene til x som funksjoner av y kan vi tenke oss likningene som beskriver trekanten. Trekanten har 2 punkter på x-aksen: $(-4, 0)$ og $(4, 0)$. Disse punktene er igjen koblet til et punkt på y-aksen i $(0, 9)$. Vi kan beskrive funksjoner for når x er større og mindre enn null. Bruker topunktsformelen mellom de forskjellige punktene:

$$\begin{aligned}
0 \geq x &: y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
0 \geq x &: y - 0 = \frac{9 - 0}{0 - (-4)}(x - (-4)) \\
0 \geq x &: y = \frac{9}{4}x + 9 \\
0 \geq x &: x = (y - 9)\frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Uttrykket vi fant over beskriver linjen mellom $(-4, 0)$ og $(0, 9)$, og definerer den nedre grensen til x. Vi gjør det samme for øvre grense mellom punktene $(0, 9)$ og $(4, 0)$:

$$
\begin{aligned}
0 \leq x : y - y_0 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
0 \leq x : y - 9 &= \frac{0 - 9}{4 - 0}(x - 0) \\
0 \leq x : y &= -\frac{9}{4}x + 9 \\
0 \leq x : x &= (9 - y)\frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

Da gjenstår det bare å finne grenseverdiene til y. Disse er enkle å finne, nedre grense er laveste y-verdi mens øvre grense er høyeste y-verdi. Da får vi integralet:

$$\int_0^9 \int_{(y-9)\frac{4}{9}}^{(9-y)\frac{4}{9}} 1 dxdy$$

Merk: Fremgangsmåten hadde vært lik om vi skulle finne integralet for $dydx$ istedenfor $dxdy$, vi hadde bare tatt utgangspunkt i y istedenfor x.

Oppgave 7

Relativt lik fremgangsmåte som i forrige oppgave, bare nå er det snakk om en sirkel. Integranden for å beregne en flate med $f(r, \theta)$ vil alltid være r ($dxdy = r * drd\theta$). Har litt dårlig tid nå så kan vær jeg legger til utledning senere.
Merk: Oppgaven definerer en kvadrant vi arbeider i, som gir begrensing på grafen (og grenser til integrasjon).

Vi ønsker først å finne grensene til de variable uttrykkene $r_1(\theta)$ og $r_2(\theta)$. Disse er ganske rett frem, ettersom r alltid ligger mellom 0 og radiusen. Dermed blir grensene til r: $0 \leq r \leq radius$. Videre er grensene til θ definert av kvadranten. Hvis vi er i første kvadrant bruker vi $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, andre kvadrant $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ osv. Dette gir de forskjellige grensene til integrasjonen.

Oppgave 8

Eksempel

Omgjør følgende dobbeltintegral til polarkoordinater:

$$\int_0^3 \int_{-x}^{x} (x^2 + y^2 + x) dydx$$
$$= \int_a^b \int_{c(\theta)}^{d(\theta)} g(r,\theta) drd\theta$$

For å finne integranden $g(r,\theta)$ er det bare å substituere:

$$x = rcos\theta$$
$$y = rsin\theta$$
$$dydx = r * drd\theta$$

Grensene i (x, y) kan vi bruke for å finne grensene i (r, θ). Øvre og nedre grense til y gir oss to linjer som avgrenser området. Linjene har funksjoner:
Nedre: $y = -x$
Øvre: $y = x$

Disse linjene står $\pm 45°$ fra origo, og avgrenser θ slik at: $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

For å finne grensene til r må vi tenke på minimale og maksimale verdier til radiusen vi ser på. Ettersom (x, y) uttrykket er en sirkel med forskyvning, vil den maksimale radiusen være avhengig av θ. Den minimale radiusen er fra origo, dermed $0 \leq r$. For å uttrykke maksimal verdi til radiusen, kan vi ta utgangspunkt i $x = rcos\theta$. Hvis vi snur om på denne formelen vil vi få $r = \frac{x}{cos\theta}$ hvor den maksimale verdien er øvre grense til x: $r = \frac{x}{cos\theta} = \frac{3}{cos\theta}$. Da har vi grensene til r: $0 \leq r \leq \frac{3}{cos\theta}$

Dobbeltintegralet vårt blir da seende slik ut:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{\frac{3}{cos\theta}} (r^2 + rcos\theta) * r * drd\theta$$