Løsningsforslag + Teori Øving 9

Simen Hustad

November 3, 2021

Øving 9 kan være litt slem, og det er vanskelig å se flere av snarveiene som brukes. Anbefaler å bruke øvingstimene hvis noe er uklart. Eventuelt kan du opprette issue på GitHub eller sende meg en melding så skal jeg hjelpe så godt jeg kan :)

Oppgave 1

$\hat{N}$

For en vilkårlig flate S kan vi definere en normalvektor $\vec{N}$ som står vinkelrett på S ved å benytte oss av kryssproduktet mellom to vektorer på flaten. Videre er S gitt ved betingelsen $z = f(x, y)$. Vi kan parametrisere overflaten med $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, og vi har da at vektorene $\partial_x \vec{r}$ og $\partial_y \vec{r}$ er vektorer på S. Kan da finne $\vec{N}$:

Merk: $\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$. $\hat{N}$ er en enhetsvektor, men det er ikke nødvendigvis $\vec{N}$.

$$
\begin{aligned}
\vec{N} &= \partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r} \\
\vec{N} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \\
\vec{N} &= (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) \\
\vec{N} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1) = (-\nabla f, 1)
\end{aligned}
$$

$\hat{N}$ er da enhetsvektoren til $\vec{N}$:

$$\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

$$\hat{N} = \frac{(-\nabla f, 1)}{\sqrt{1^2 + (-f_x)^2 + (-f_y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Merk: $(-\nabla f, 1)$ er det samme som $\begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix}$, og man kan bruke begge skrivemåter. De er begge vektorer, men man bruker den andre skrivemåten i forbindelser med matriser for å ta vare på riktige dimensjoner.

Orienteringen til $\hat{N}$ er gitt ved en eller annen betingelse. Hvis vi for eksempel får oppgitt at z-verdien til $\hat{N}$ alltid skal være positiv, er det bare å ta den verdien av $\pm\hat{N}$ som gir positiv z.

$\mathbf{d}\vec{S}$

Når vi ser på fluks bruker vi infinitesimalt små verdier av flaten dS. dS er gitt ved lengden til normalvektoren $\vec{N}$ på det lille flatestykket slik at $dS = |\vec{N}|dxdy$. Vi må passe på at vi kun ser på bidraget som står normalt på dS, og multipliserer dS med $\hat{N}$ slik at:

$$
\begin{aligned}
d\vec{S} &= \hat{N} dS = \hat{N}|\vec{N}|dxdy \\
d\vec{S} &= \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}|\vec{N}|dxdy \\
d\vec{S} &= \vec{N}dxdy
\end{aligned}
$$

Ettersom S har betingelsen $z = f(x, y)$ vet vi også at $\vec{N} = (-\nabla f, 1)$ slik at vi får:

$$
d\vec{S} = \vec{N}dxdy = (-\nabla f, 1)dxdy = (-f_x, -f_y, 1)dxdy
$$

Merk: Det er viktig å ikke blande notasjonene $d\vec{S}$ og dS, ettersom $d\vec{S} = \hat{N}dS$.

Areal

Vi kan finne punktene når en funksjon skjærer x-aksen ved å sette $z = y = 0$. Lignende kan vi finne når en funksjon skjærer y-aksen ved å sette $z = x = 0$.

Arealet av en trekant er gitt ved $A = \frac{g*h}{2}$ hvor g er grunnlinjen og h er høyden (lengde og bredde til en firkant). Hvis vi for eksempel har en trekant som krysser x-aksen i $x = 2$, y-aksen i $y = 1$ og har et hjørne i origo, vil arealet av trekanten kunne skrives $A = \frac{g*h}{2} = \frac{2*1}{2} = 1$.

Fluks

Fluks som et konsept er vanskelig å se for seg, men man kan tenke seg at det er gjennomstrømning gjennom en flate. Når det kommer til beregning av Fluks har vi en formel hvor vi bruker skalarproduktet mellom normalvektoren til flaten og vektorfeltet:

$$Fluks = \int\int_S \vec{F} * \hat{N} dS = \int\int_S \vec{F} * d\vec{S}$$

Merk: Skalarproduktet brukes for å gi oss bidraget til vektorfeltet i retningen vinkelrett på flaten, og gjøres for at integralet skal bli riktig.

Når vi ser på en flate med betingelsen $z = f(x, y)$ trenger vi kun å se på fluksen gjennom flaten som blir prosjektert ned i xy-planet. Intuitivt kan vi tenke oss at siden z er en funksjon av det som skjer i xy-planet, vil endringen av fluksen basert på posisjoner og transformering i rommet motvirkes av endringen i vektorfeltet.

Hva menes med det? Ettersom $z = f(x, y)$ trenger vi kun se på fluksen til trekanten som ligger i xy-planet. Vi vet også at normalvektoren til xy-planet er z-aksen, slik at vi kun trenger å se på fluks-bidraget i z-retningen gjennom trekanten. Fluksen blir da arealet av trekanten multiplisert med fluksbidraget (vektorfeltet) i z-retning.

For eksempel hvis vi har den rettvinklede trekanten med hjørner i $y = 1$, $x = 2$ og origo, med sider langs x og y-aksene, og vektorfelt $\vec{F} = (10x + y, 2x + 2y, 20)$ kan vi beregne fluksen:

$$Fluks = \int\int_S \vec{F} * \hat{N} dS$$
$$Fluks = 20 * A_{trekant} = 20 * \frac{g * h}{2}$$
$$Fluks = 20 * 1 = 20$$

Oppgave 2

Når vi skal se på normalvektoren til flatene i et sylinder, kan vi gjøre det enklere for oss selv. Gitt at sylinderet er symmetrisk rundt z (som de fleste sylindre vi ser på er), kan vi vite enhetsnormalvektorene $\hat{N}$ ved bruk av intusjon.

Hver flate vil ha sin egen enhetsnormalvektor $\hat{N}$ med en orientering. Spesifikt ønsker vi nå å se på orienteringen pekende ut av sylinderet. En normalvektor vil per definisjon alltid stå normalt på planet/flaten vi ser på.

Utifra dette, vet vi at enhetsnormalvektoren til toppen av sylinderet vil være $\pm\hat{N}_{Topp} = \pm[0, 0, 1]$ (altså z-aksen). Dette vet vi siden z-aksen er den vektoren som står normalt på xy-planet. Ettersom vi ønsker orientering pekende ut fra sylinderet velger vi den positive verdien, slik at $\hat{N}_{Topp} = [0, 0, 1](= \hat{k})$.

På akkurat samme grunnlag vet vi at bunnen vil peke motsatt retning med samme verdi, slik at $\hat{N}_{Bunn} = [0, 0, -1](= -\hat{k})$.

Sideflaten er litt værre, men ikke mye. Vi vet at normalvektoren til en sirkel er en vektor som er parallell med vektoren som tegner sirkelen. Hva betyr det? Jo, vektoren som tegner en sirkel i planet er $r(cos(\theta), sin(\theta), 0)$ og er samtidig normalvektoren til sirkelen i punktet $(x, y, z) = (rcos(\theta), rsin(\theta), z)$. For å finne enhetsnormalvektoren tar vi å deler på lengden av vektoren:

$$\hat{N}_{Side} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{r(cos(\theta), sin(\theta), 0)}{\sqrt{r^2(cos^2(\theta) + sin^2(\theta) + 0^2)}}$$
$$\hat{N}_{Side} = \frac{r(cos(\theta), sin(\theta), 0)}{\sqrt{r^2}} = (cos(\theta), sin(\theta), 0)$$

Merk: Denne vektoren peker allerede ut fra sirkelen, og hvis vi skulle funnet normalvektorene inn mot sirkelen måtte vi tatt minus foran.

Vi har vektorfeltet $\vec{F} = \begin{bmatrix} x+7 \\ y+7 \\ z \end{bmatrix}$, et sylinder med radius $r = 2$ og høyde $h = 6$ hvor toppen ligger i $z = 6$.

For å beregne den totale fluksen ut av sylinderet, kan vi se på fluksbidraget på hver individuelle flate. Vi kan igjen gjøre det enklere for oss selv ved å se at fluksbidraget til topp og bunnen kun er avhengig av z-verdien. Ettersom denne fluksen er konstant over flatene, kan vi finne fluksen ved å multiplisere arealene med z-bidraget i fluksen slik at:

$$\begin{aligned}
\int_{S_{topp}} \vec{F} * \hat{N} dS &= A_{topp} * \vec{F} * \hat{k} \\
&= \pi r^2 * z = \pi * 2^2 * 6 = 24\pi \\
\int_{S_{bunn}} \vec{F} * \hat{N} dS &= A_{bunn} * \vec{F} * -\hat{k} \\
&= \pi r^2 * -z = \pi * 2^2 * 0 = 0
\end{aligned}$$

For å finne fluksbidraget til sideflaten blir vi nødt til å gjennomføre et integral, ettersom vektorfeltet varierer på forskjellige steder av flaten og det ingen symmetri å betrakte. Integranden vår finner vi ved å gjennomføre skalaproduktet $\vec{F} * \hat{N}_{side}$, og da trenger vi kun å finne grensene.

Figuren vi ser på er en flate (ikke et volum) som ligger på en konstant radius $r = 2$. Flaten beveger seg langs sirkelen helt rundt origo, altså fra $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Samtidig strekker flaten seg fra xy-planet til $z = h = 6$, slik at $0 \leq z \leq 6$. Vi har nå grenser for å gjennomføre flateintegralet med sylinderkoordinater, og vi gjør derfor uttrykket om til sylinderkoordinater.

$$\int_{S_{side}} \vec{F} * \hat{N} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \vec{F} * \hat{N} * r \; dz d\theta$$

$$\vec{F} * \hat{N} = F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3$$

$$\vec{F} * \hat{N} = (x + 7) * cos(\theta) + (y + 7) * sin(\theta) + 0 * z$$

$$\vec{F} * \hat{N} = xcos(\theta) + ysin(\theta) + 7cos(\theta) + 7sin(\theta)$$

$$\vec{F} * \hat{N} = rcos^2(\theta) + rsin^2(\theta) + 7cos(\theta) + 7sin(\theta)$$

$$\vec{F} * \hat{N} = r + 7cos(\theta) + 7sin(\theta)$$

Merk: Bruker $x = rcos(\theta)$, $y = rsin(\theta)$ og $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ for forenklinger over.

Vi får da følgende flateintegral:

Husk: $r = 2$, slik at vi kan sette inn for r.

$$
\begin{aligned}
\int_{S_{side}} \vec{F} * \hat{N} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^6 (r + 7cos(\theta) + 7sin(\theta)) * r \ dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^6 (2 + 7cos(\theta) + 7sin(\theta)) * 2 \ dz d\theta \\
&= 48\pi
\end{aligned}
$$

Vi har da funnet fluksbidraget til de individuelle flatene for sylinderet vårt, og det totale fluksbidraget vil være summen av disse slik at:

$$
\begin{aligned}
&Fluks_{Tot} = Fluks_{Topp} + Fluks_{Bunn} + Fluks_{Side} \\
&Fluks_{Tot} = 24\pi + 0 + 48\pi = 72\pi
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

Som nevnt i forrige oppgave, vil normalvektoren til en kule/sirkel alltid være parallell med vektoren $\vec{r}$ som spenner ut kulen/sirkelen (som vist på figuren under).

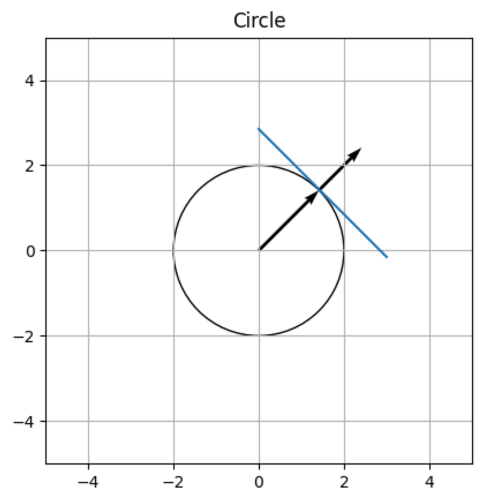

Figure 1: Normalvektor til sirkel

Uavhengig av verdien til normalvektoren, vil den alltid peke i retning $\vec{N} = [x, y, z]$. For å omgjøre til normalvektor trenger vi da bare å dele på lengden av vektoren:

Husk: En kule er på formen $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

$$\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\hat{N} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{r^2}} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

Merk: Denne enhetsnormalvektoren gjelder for alle ordinære kuler og sirkler. For sirkler fjerner vi bare z-leddet.

Når vi skal finne fluks gjennom et flate, summerer vi fluksen gjennom vært punkt. Vi har et vektorfelt hvor $\vec{F} = \begin{bmatrix} ax^2 \\ by^2 \\ cz^2 \end{bmatrix}$. Ettersom koordinatene er opphøyd i andre, vil vektorfeltet alltid peke i retning første oktant uavhengig av fortegn på koordinatene. For en sirkel/kule vil dette bety at fluksen blir positiv på den ene siden og negativ på den andre, slik at de utligner hverandre og den totale fluksen blir 0. Se figur under.

Husk: Normalvektoren peker utover, og fluks regner vi i bidraget som går parallelt i samme retning som normalvektor.

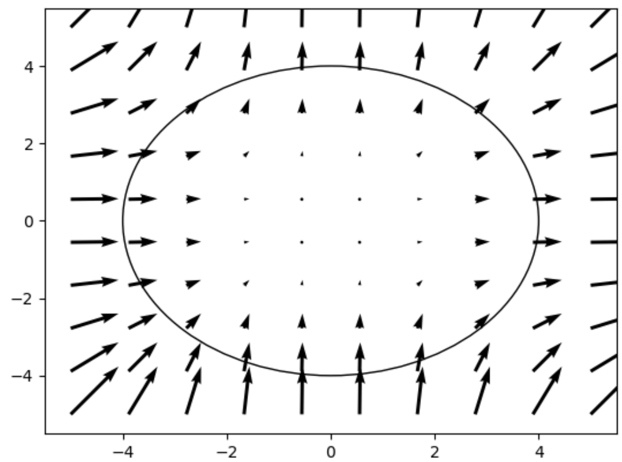

Figure 2: Sirkel i $\vec{F}$

Oppgave 4

Vi har en boks som er avgrenset mellom $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ og $0 \leq z \leq c$ som vi ønsker å finne fluksen gjennom. Vektorfeltet ser slik ut:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} x + sin(\dots) \\ y + sin(\dots) \\ z + sin(\dots) \end{bmatrix}$$

Merk: Oppgaven kan løses enklere enn det ser ut som, og verdiene innenfor sinus uttrykkene er uviktige.

Når vi nå skal finne fluksen gjennom figuren, kan vi se på fluksen gjennom de individuelle flatene. La oss starte med å se på fluksen gjennom flatene som spennes ut av $x = 0$ og $x = a$. Vi har $x = 0$ ettersom figuren er avgrenset mellom koordinatflatene $x = 0$, $y = 0$ og $z = 0$.

Ved å stirre hardt på figuren i oppgaven kan vi observere at normalvektoren på x-planene vil være $\pm\hat{i} = \pm[1, 0, 0]$. $+\hat{i}$ for planet $x = a$ siden normalvektoren pekende utover vil da gå langs x-aksen, og dermed $-\hat{i}$ for planet $x = 0$. Når vi nå skal ta integralet over disse flatene kan vi summere integrandene sammen før integrasjonen (vanlig integrasjonsregler). Vi finner integrandene:

$$
\begin{aligned}
&\int_S \vec{F} * \hat{N} dS = \text{Fluks-integral} \\
(\vec{F} * \hat{N})_{xplan} &= \vec{F}_{x=a} * \hat{i} + \vec{F}_{x=0} * (-\hat{i}) \\
&= \begin{bmatrix} a + sin(\dots) \\ y + sin(\dots) \\ z + sin(\dots) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 + sin(\dots) \\ y + sin(\dots) \\ z + sin(\dots) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= (a + sin(\dots)) * 1 + (y + sin(\dots)) * 0 + (z + sin(\dots)) * 0 \\
&- ((0 + sin(\dots)) * 1 + (y + sin(\dots) * 0 + (z + sin(\dots)) * 0) \\
&= (a + sin(\dots) - (0 + sin(\dots) \\
&= a
\end{aligned}
$$

Merk: Når vi tar skalarproduktet med standardvektorene $\hat{i}$, $\hat{j}$ og $\hat{k}$ er det som å kun se på x, y eller z koordinatene til $\vec{F}$. Dette er fordi de resterende leddene blir 0, som vist over.

Ettersom vektorfeltet over flaten vi skal se på er likt over hele flaten, kan vi beregne fluksen ved å multiplisere bidraget a med arealet på flaten vi ser på. Vi får da:

$$
\begin{aligned}
A_{xplan} &= l * b = y * z = b * c \\
Fluks_{xplan} &= a * b * c
\end{aligned}
$$

Merk: Arealet til en flate er gitt ved lengde ganger bredde. På boksen vår er bredden på sidene til x-planene (der hvor x er konstant) lik produktet av $y - y_0 = b - 0 = b$ med $z - z_0 = c - 0 = c$. Dette ser vi fra figuren.

Hvis vi gjør det samme for de resterende flatene, ender vi opp med samme resultat for fluksbidraget. For å finne det totale fluksbidraget må vi ta summere de individuelle bidragene:

$$Fluks_{tot} = Fluks_{xplan} + Fluks_{yplan} + Fluks_{zplan}$$
$$Fluks_{tot} = a * b * c + a * b * c + a * b * c$$
$$Fluks_{tot} = 3abc$$

Oppgave 5

I oppgave 3 hadde vi enhetsnormalvektoren pekende utover fra en kule er gitt ved:

$$\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\hat{N} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{r^2}} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

$\hat{N}$ for en sirkel vil være den samme, bare at vi fjerner z-leddet slik at:

$$\hat{N}_{sirkel} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$$

Enhetsnormalvektorer som peker innover i sirkelen vil da være $-\hat{N}_{sirkel}$.

I oppgaven parametriserer vi denne sirkelen med $x = rcos(t)$ og $y = rsin(t)$, slik at enhetsnormalvektoren som peker innover i sirkelen blir:

$$\hat{N} = -\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$$
$$\hat{N} = -\left(\frac{rcos(t)}{r}, \frac{rsin(t)}{r}\right)$$
$$\hat{N} = -(cos(t), sin(t))$$

Vi har vektorfeltet $\vec{F} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ og ønsker å finne fluksen gjennom halvsirkelen på positive y-verdier. Først finner vi integranden ved å foreta skalarproduktet mellom $\vec{F}$ og $\hat{N}$, hvor vi setter inn parametriseringen i $\vec{F}$. I tillegg har vi at $dS = \left|\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right|$, som vi også blir en del av integranden (dette kommer fra kjerneregelen):

$$\begin{aligned}
\vec{F} * \hat{N} * \left|\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right| &= \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -cos(t) \\ -sin(t) \end{bmatrix} * |(rcos(t), rsin(t))| \\
&= \begin{bmatrix} rsin(t) \\ rcos(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -cos(t) \\ -sin(t) \end{bmatrix} * \sqrt{r^2(cos^2(t) + sin^2(t))} \\
&= (-rsin(t)cos(t) - rcos(t)sin(t)) * r \\
&= -r^2 * 2sin(t)cos(t) \\
&= -r^2 sin(2t)
\end{aligned}$$

Da er det bare å gjennomføre integralet for halvsirkelen i positive y-verdier, altså for $0 \leq t \leq \pi$:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} * \hat{N} dS &= \int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) * \hat{N} * \left|\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right| dt \\
&= \int_0^{\pi} -r^2 sin(2t) dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Merk: Vi kunne funnet svaret ved bruk av normalvektorer og ortogonale vektorer for å se at resultatet blir 0, men det er lurt å kunne gjennomføre slike beregninger med parametriserte uttrykk.

Oppgave 6

a)

Divergens finner vi ved å utføre skalaproduktet mellom gradientoperatoren ∇ og vektorfeltet $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}\nabla * \vec{F} &= [\partial_x, \partial_y, \partial_z] * [F_1, F_2, F_3] \\ &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\end{aligned}$$

Merk: Dette tilsvarer å summere diagonalene til Jacobimatrisen til $\vec{F}$

For vektorfeltet $\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$ blir divergensen da:

$$\begin{aligned}Div(\vec{F}) = \nabla * \vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \\ &= \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Merk: Hoppet over å vise utførelsen av derivasjon.

b)

Rotasjonen (curl) til et vektorfelt $\vec{F}$ er gitt ved kryssproduktet $\nabla \times \vec{F}$. Intuitivt forteller rotasjonen hvordan $\vec{F}$ sirkulerer, gjerne rundt en gitt akse. Hvis ønskelig er det figurer og mer lesestoff her.

Vi fører vårt vektorfelt fra xy-planet til rommet, og legger til en z-koordinat i $\vec{F}$ lik 0. Vi kan da finne rotasjonen ved bruk av kryssproduktet:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&= \hat{i}(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) \\
&- \hat{j}(\partial_x F_3 - \partial_z F_1) \\
&+ \hat{k}(\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ettersom $F_3 = 0$ og hverken F_1 eller F_2 er avhengige av z, blir alle ledd som inneholder F_3 eller ∂z lik 0. Vi sitter da igjen med:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Rotasjonen er en vektor, men i dette tilfellet er det kun tredje koordinat som er ulik 0. Finner da denne verdien:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= \frac{4xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Rotasjonen til $\vec{F}$ er da gitt ved vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$.

Oppgave 7

I denne oppgaven er det bare å gjennomføre operasjonene som står. Uttrykkene vil bli stygge, men det er rett frem å finne dem.

Husk: Formlene for divergens og rotasjon:

$$Div(\vec{F}) = \nabla * \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} Curl(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) \\ &- \hat{j}(\partial_x F_3 - \partial_z F_1) \\ &+ \hat{k}(\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$