Løsningsforslag + Teori Øving 4

Simen Hustad

September 30, 2021

Figure 1: Dank meme

Oppgave 1

a)

Kjerneregelen for to variabler x og y er gitt ved:

$$\tau'(t) = T_x(\vec{r}(t))x'(t) + T_y(\vec{r}(t))y'(t)$$

Skrevet litt mer forståelig:

$$z'(t) = f_x(x,y) * x'(t) + f_y(x,y) * y'(t)$$

$$f_x = \frac{\delta f}{\delta x} \qquad x'(t) = \frac{\delta x}{\delta t}$$
$$f_y = \frac{\delta f}{\delta y} \qquad y'(t) = \frac{\delta y}{\delta t}$$

For å løse oppgaven må dere regne ut $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$. Deretter setter dere inn i uttrykket for $z'(t)$ over.

b)

Sammenhenger mellom kartesiske og sylinderkoordinater:

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$
$$z = z$$

Vi kan dermed betrakte x og y som funksjoner av r og θ. Da kan vi betrakte følgende:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta x(r,\theta)} \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta y(r,\theta)}$$

$$x'(\theta) = -r * sin(\theta) \qquad y'(\theta) = r * cos(\theta)$$

$$x'(r) = cos(\theta) \qquad y'(r) = sin(\theta)$$

Finner da bidraget til r og θ fra både x og y ved bruk av kjerneregelen:

$$z = g(r,\theta)$$

$$z'(\theta) = g_x(r,\theta) * x'(\theta) + g_y(r,\theta) * y'(\theta)$$

$$z'(r) = g_x(r,\theta) * x'(r) + g_y(r,\theta) * y'(r)$$

Spesifikt for oppgaven sin del:

$$\frac{\delta z}{\delta\theta} = \frac{\delta z}{\delta x} * x'(\theta) + \frac{\delta z}{\delta y} * y'(\theta)$$

$$\frac{\delta z}{\delta\theta} = \frac{\delta z}{\delta x} * (-r * sin(\theta)) + \frac{\delta z}{\delta y} * (r * cos(\theta))$$

$$\frac{\delta z}{\delta r} = \frac{\delta z}{\delta x} * x'(r) + \frac{\delta z}{\delta y} * y'(r)$$

$$\frac{\delta z}{\delta r} = \frac{\delta z}{\delta x} * (cos(\theta)) + \frac{\delta z}{\delta y} * (sin(\theta))$$

Oppgave 2

a)

En vektor er gitt ved $\vec{v} = (v_x, v_y)$. For å finne tilsvarende enhetsvektor:

$$\vec{v} = \frac{(v_x, v_y)}{|(v_x, v_y)|}$$
$$\vec{v} = \frac{(v_x, v_y)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Tolkningen av det som skjer over er at man endrer koordinatene i vektoren slik at *lengden* av vektoren blir 1. Retningen (vinkelen) til vektoren forblir uendret.

Stigningstallet til grafen f i punktet $\vec{p}$ som peker i retning $\vec{v}$ er gitt ved skalarproduktet:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = |\nabla f(\vec{p})||\vec{v}|cos(\theta)$$

Den høyeste stigningen til grafen f i et punkt $\vec{p}$ er gitt når retningen $\vec{v}$ peker samme retning som gradienten $\nabla f(\vec{p})$ (fordi da er $cos(\theta)$ lik 1). I tillegg vet vi at $\vec{v}$ er en enhetsvektor med lengde 1:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = |\nabla f(\vec{p})|$$

For at dette stykket skal gå opp må (dette har med skalaprodukt å gjøre):

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(\vec{p})}{|\nabla f(\vec{p})|}$$

For å løse oppgaven kan vi da bruke oppgitt stigningsverdier til punktet. For enkelhetsskyld kaller vi stigning i x for v_x, og stigning i y for v_y:

$$\begin{aligned}
\nabla f(\vec{p}) &= (v_x, v_y) \\
\vec{v} &= \frac{\nabla f(\vec{p})}{|\nabla f(\vec{p})|} \\
\vec{v} &= \frac{(v_x, v_y)}{|(v_x, v_y)|}
\end{aligned}$$

b)

Den minste stigningen til grafen f er i motsatt retning av den maksimale retningen, gitt ved:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{p}) = -\nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = -|\nabla f(\vec{p})|$$

Dermed blir:

$$\vec{v}_{min} = -\vec{v}_{max} = -\frac{(v_x, v_y)}{|(v_x, v_y)|}$$

c)

Sørøst retning tilsvarer å bevege seg østover (x-retning) og sørover ($-y$-retning):

$$\vec{v} = \frac{(1,-1)}{|(1,-1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

Nordvest retning tilsvarer å bevege seg vestover ($-x$-retning) og nordover (y-retning):

$$\vec{v} = \frac{(-1,1)}{|(-1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

Finner da stigningstallet til f gitt retning $\vec{v}$ i punktet $\vec{p}$. Bruker som tidligere at stigning i x er v_x, og stigning i y er v_y:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v}$$
$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = (v_x, v_y) * \vec{v}$$

Da er det bare å bytte ut $\vec{v}$ med ønsket retning og regne ut skalarproduktet. Skalarprodukt regnes slik på generell form:

$$\vec{x} * \vec{y} = [x_1, y_1, z_1] * [x_2, y_2, z_2]$$
$$\vec{x} * \vec{y} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

d)

Et generelt plan kan beskrives ved bruk av skalarproduktet mellom normalvektoren til planet og en linje på planet. Likningen til planet er på formen:

$$
\begin{aligned}
\vec{n} &= [a, b, c] && \textit{Normalvektor} \\
\vec{x} &= [x, y, z] && \text{Punkt på planet} \\
\vec{x} - \vec{p} &= [x - x_0, y - y_0, z - z_0] && \text{Linje på planet} \\
\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 && \textit{Skalarprodukt} \\
a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 && \textit{Likning}
\end{aligned}
$$

Ettersom gradienten til en flate eller kurve beskriver normalvektoren:

$$
\begin{aligned}
\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 \\
\nabla f(\vec{p}) * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0
\end{aligned}
$$

I oppgaven jobber vi med en funksjon av to variabler, mens et plan krever tre variabler. Bruker fortsatt stigning i x som v_x og stigning i y som v_y. En litt cheeky operasjon:

$$
\begin{aligned}
z &= h(x, y) \\
g(x, y, z) &= z - h(x, y) = 0 \\
\nabla g(x, y, z) &= \left(\frac{\delta g}{\delta x}, \frac{\delta g}{\delta y}, \frac{\delta g}{\delta z} \right) \\
\nabla g(x, y, z) &= (-h_x(x, y), -h_y(x, y), 1) \\
\nabla g(x, y, z) &= (-\nabla h(x, y), 1) \\
\nabla g(x, y, z) &= (-v_x, -v_y, 1)
\end{aligned}
$$

Husk $\nabla h(x, y)$ er en vektor med to koordinater x og y. Slik at uttrykket over er 3 koordinater selv om det ser ut som 2.

Normalvektoren til tangentplanet blir dermed:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \nabla g(a,b,c) \\ \nabla g(a,b,c) &= (-v_x, v_y, 1) \end{aligned}$$

Finner da likning for tangentplanet:

$$\begin{aligned} \vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 \\ \nabla g * (\vec{x} - \vec{p}) &= (-v_x, -v_y, 1) * ((x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0 \\ -v_x x - v_y y + z &= -v_x x_0 - v_y y_0 + z_0 \end{aligned}$$

Merk: Alle verdier på høyre siden er konstante.

e)

For å finne likningen til tangentlinjen i punktet $\vec{p}$ gjør vi nesten det samme som for planet, men enklere og i to dimensjoner. Husk at:

$$\begin{aligned} \nabla h(x,y) &= (v_x, v_y) & &Normalvektor \\ \vec{x} - \vec{p} &= (x - x_0, y - y_0) & &Tangentlinje \\ \vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 & &Skalaprodukt \end{aligned}$$

Grunnen til det ikke blir noe $g(x,y,z) = z - h(x,y)$ hibi jibis er fordi vi leter etter en tangentlinje (en linje kan beskrives med to koordinater) og vi har allerede gradienten til både x og y.

$$\begin{aligned}
\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 \\
\nabla h(x,y) * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 \\
(v_x, v_y) * ((x,y) - (x_0, y_0)) &= 0 \\
v_x x + v_y y = v_x x_0 + v_y y_0
\end{aligned}$$

f)

Stigningstallet til f i retning $\vec{v}$ fra punktet $\vec{p}$ er gitt ved skalarproduktet:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = |\nabla f(\vec{p})||\vec{v}| cos(\theta)$$

Når vi ser på tangentlinjen til f i punktet $\vec{p}$ vet vi fra forrige oppgave at $\nabla f(\vec{p})$ er normalvektoren til tangentlinjen, og dermed også gradienten til denne tangentlinjen. Dette betyr at $\nabla f(\vec{p})$ står 90° på retningen tangentlinjen beveger seg i, slik at:

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}} f(\vec{p}) &= |\nabla f(\vec{p})||\vec{v}| cos(90^\circ) \\
D_{\vec{v}} f(\vec{p}) &= 0
\end{aligned}$$

Intuitivt kan du tenke deg at tangentlinjen er en nivåkurve til funksjonen, og høyden til nivåkurven er konstant langs hele kurven. Derfor har kurven ingen stigning langs tangentlinjen.