Løsningsforslag + Teori Øving 10

Simen Hustad

November 19, 2021

Dette er ikke ment som et fullstendig utfyllende løsningsforslag til øving 10, men kun for oppgave 7 (og oppgave 1, men den husket jeg ikke at jeg hadde gjort).

Oppgave 1

Når det kommer til skalarfelt og vektorfelt, har vi egenskaper til forskjellige spesifikke situasjoner. La oss definere noen uttrykk:

$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla\phi(\vec{x})$	Konservativt vektorfelt $\vec{F} \in \mathbb{R}^n$
$\phi(\vec{x}) \in \mathbb{R}$	Skalarfelt som gir ut en verdi, ikke vektor
$n = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$	Antall variabler i $\vec{x}$ (ofte 2 eller 3)
$\vec{H}(\vec{x})$	Vilkårlig vektorfelt $\vec{H}$
$\nabla \cdot \vec{H} = div(\vec{H})$	Divergens/Flukstetthet til $\vec{H}$
$\nabla \times \vec{H} = curl(\vec{H})$	Rotasjon/Sirkulasjonstetthet til $\vec{H}$

Merk: $\cdot$ = skalarprodukt, $\times$ = kryssprodukt.

Egenskap	Beskrivelse
$\nabla \times (\nabla\phi) = \vec{0}$	Rotasjonen til et konservativt vektorfelt er alltid null
$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$	Rotasjonen til et vektorfelt er divergensfritt
$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla\vec{H}$	Rotasjonen til rotasjonen er ikke nødvendigvis null

Table 1: Liste over egenskaper

Eksempel 1

Vi har et skalarfelt ϕ og et vektorfelt $\vec{H}$. Hvis $\vec{F} = \nabla\phi$ og $\vec{G} = \nabla \times \vec{H}$ vet vi:

$\vec{F} = \nabla\phi$	$\vec{F}$ er konservativt
$\vec{G} = \nabla \times \vec{H}$	$\vec{G}$ er rotasjonen til $\vec{H}$
$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ ✔	Konservative vektorfelt er rotasjonsfrie
$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$ ✖	$\vec{H}$ er ikke rotasjonsfritt ($\vec{G}$ er rotasjonen til $\vec{H}$)
$\nabla \times \vec{G} = \vec{0}$ ✖	Rotasjonen til rotasjonen er ikke nødvendigvis 0
$\nabla \cdot \vec{F} = 0$ ✖	Konservative vektorfelt er ikke nødvendigvis divergensfrie
$\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ✖	Vilkårlige vektorfelt er ikke nødvendigvis divergensfrie
$\nabla \cdot \vec{G} = 0$ ✔	Rotasjonen til et vektorfelt er divergensfritt

Oppgave 7

Divergensteoremet i planet:

$$\int\int_R div(\vec{F})dA = \int_C \vec{F}\cdot\hat{N}ds$$

Summen av alle flukskildene over et lukket område R tilsvarer summen av fluksen ut av randen C.

Et sentralsymmetrisk vektorfelt som peker utover må tilfredsstille følgende:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= f(|\vec{r}|)\vec{r} = f(r)\vec{r}\\ \vec{r} &= [x, y]^T\\ |\vec{r}| &= r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{Distansen } r \text{ fra origo}\end{aligned}$$

Merk: Tror ikke vi har gjennomgått dette i forelesninger, men dette et generelt uttrykk for et sentralsymmetrisk vektorfelt.

Vi får oppgitt vektorfeltet $\vec{F}(\vec{r}) = A\hat{r}$ og sammenhengen $L = \int\int_R \frac{div(\vec{F})}{2\pi}dA$.

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= A\hat{r}\\ 2\pi L &= \int\int_R div(\vec{F})dA = \int_C \vec{F}\cdot\hat{N}ds\end{aligned}$$

For en hver sirkel som spenner seg om origo har vi normalvektoren $\hat{N} = \hat{r}$. Hvis vi parametriserer med sylinderkoordinater, slik at $\hat{r} = (cos(\theta), sin(\theta))$ får vi følgende integrand:

$$\vec{F} \cdot \hat{N} = A\hat{r} \cdot \hat{r} = A(cos^2(\theta) + sin^2(\theta)) = A$$

Vi kan da finne et uttrykk for arealet basert på likningen med linjeintegralet. Vi integrerer over hele sirkelen rundt origo slik at $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Merk: Siden vi nå jobber i sylinderkoordinater blir $ds = r * d\theta$.

$$\begin{aligned}
2\pi L &= \int_C \vec{F} \cdot \hat{N} ds \\
2\pi L &= \int_0^{2\pi} A * r \ d\theta \\
2\pi L &= A * r * 2\pi \\
L &= Ar \\
A &= \frac{L}{r}
\end{aligned}$$

Merk: Denne sammenhengen vil gjelde for en vilkårlig lukket sirkel med radius r rundt origo.