Løsningsforslag + Teori Øving 4

Simen Hustad

October 3, 2021

Figure 1: Dank meme

Oppgave 1

a)

Kjerneregelen for to variabler x og y er gitt ved:

$$\tau'(t) = T_x(\vec{r}(t))x'(t) + T_y(\vec{r}(t))y'(t) \tag{1}$$

Skrevet litt mer forståelig:

$$z'(t) = f_x(x, y) * x'(t) + f_y(x, y) * y'(t)$$

$$f_x = \frac{\delta f}{\delta x} \qquad x'(t) = \frac{\delta x}{\delta t}$$
$$f_y = \frac{\delta f}{\delta y} \qquad y'(t) = \frac{\delta y}{\delta t}$$

For å løse oppgaven må dere regne ut $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$. Deretter setter dere inn i uttrykket for $z'(t)$ over.

b)

Sammenhenger mellom kartesiske og sylinderkoordinater:

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$
$$z = z$$

Vi kan dermed betrakte x og y som funksjoner av r og θ. Da kan vi gjøre følgende:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta x(r,\theta)} \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta y(r,\theta)}$$

$$x'(\theta) = -r * sin(\theta) \qquad y'(\theta) = r * cos(\theta)$$

$$x'(r) = cos(\theta) \qquad y'(r) = sin(\theta)$$

Finner da bidraget til r og θ fra både x og y ved bruk av kjerneregelen:

$$z = g(r,\theta)$$

$$z'(\theta) = g_x(r,\theta) * x'(\theta) + g_y(r,\theta) * y'(\theta)$$

$$z'(r) = g_x(r,\theta) * x'(r) + g_y(r,\theta) * y'(r)$$

Spesifikt for oppgaven sin del:

$$\frac{\delta z}{\delta \theta} = \frac{\delta z}{\delta x} * x'(\theta) + \frac{\delta z}{\delta y} * y'(\theta)$$

$$\frac{\delta z}{\delta \theta} = \frac{\delta z}{\delta x} * (-r * sin(\theta)) + \frac{\delta z}{\delta y} * (r * cos(\theta))$$

$$\frac{\delta z}{\delta r} = \frac{\delta z}{\delta x} * x'(r) + \frac{\delta z}{\delta y} * y'(r)$$

$$\frac{\delta z}{\delta r} = \frac{\delta z}{\delta x} * (cos(\theta)) + \frac{\delta z}{\delta y} * (sin(\theta))$$

Oppgave 2

a)

En vektor er gitt ved $\vec{v} = (v_x, v_y)$. For å finne tilsvarende enhetsvektor:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{(v_x, v_y)}{|(v_x, v_y)|} \\ \vec{v} &= \frac{(v_x, v_y)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\end{aligned} \tag{2}$$

Tolkningen av det som skjer over er at man endrer koordinatene i vektoren slik at *lengden* av vektoren blir 1. Retningen (vinkelen) til vektoren forblir uendret.

Stigningstallet til grafen f i punktet $\vec{p}$ som peker i retning $\vec{v}$ er gitt ved skalarproduktet:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = |\nabla f(\vec{p})||\vec{v}|cos(\theta) \tag{3}$$

Den høyeste stigningen til grafen f i et punkt $\vec{p}$ er gitt når retningen $\vec{v}$ peker samme retning som gradienten $\nabla f(\vec{p})$ (fordi da er $cos(\theta)$ lik 1). I tillegg vet vi at $\vec{v}$ er en enhetsvektor med lengde 1:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = |\nabla f(\vec{p})|$$

For at dette stykket skal gå opp må (dette har med skalaprodukt å gjøre):

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(\vec{p})}{|\nabla f(\vec{p})|} \tag{4}$$

For å løse oppgaven kan vi da bruke oppgitt stigningsverdier til punktet. For enkelhetsskyld kaller vi stigning i x for v_x, og stigning i y for v_y:

$$\begin{aligned}
\nabla f(\vec{p}) &= (v_x, v_y) \\
\vec{v} &= \frac{\nabla f(\vec{p})}{|\nabla f(\vec{p})|} \\
\vec{v} &= \frac{(v_x, v_y)}{|(v_x, v_y)|}
\end{aligned}$$

b)

Den minste stigningen til grafen f er i motsatt retning av den maksimale retningen, gitt ved:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{p}) = -\nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = -|\nabla f(\vec{p})|$$

Dermed blir:

$$\vec{v}_{min} = -\vec{v}_{max} = -\frac{(v_x, v_y)}{|(v_x, v_y)|}$$

c)

Sørøst retning tilsvarer å bevege seg østover (x-retning) og sørover ($-y$-retning):

$$\vec{v} = \frac{(1,-1)}{|(1,-1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

Nordvest retning tilsvarer å bevege seg vestover ($-x$-retning) og nordover (y-retning):

$$\vec{v} = \frac{(-1,1)}{|(-1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

Finner da stigningstallet til f gitt retning $\vec{v}$ i punktet $\vec{p}$. Bruker som tidligere at stigning i x er v_x, og stigning i y er v_y:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v}$$
$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = (v_x, v_y) * \vec{v}$$

Da er det bare å bytte ut $\vec{v}$ med ønsket retning og regne ut skalarproduktet. Skalarprodukt regnes slik på generell form:

$$\vec{x} * \vec{y} = [x_1, y_1, z_1] * [x_2, y_2, z_2]$$
$$\vec{x} * \vec{y} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

d)

Et generelt plan kan beskrives ved bruk av skalarproduktet mellom normalvektoren til planet og en linje på planet. Likningen til planet er på formen:

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= [a, b, c] && \textit{Normalvektor} \\
\vec{x} &= [x, y, z] && \text{Punkt på planet} \\
\vec{x} - \vec{p} &= [x - x_0, y - y_0, z - z_0] && \text{Linje på planet} \\
\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 && \textit{Skalarprodukt} \\
a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 && \textit{Likning}
\end{aligned}$$

Ettersom gradienten til en flate eller kurve beskriver normalvektoren:

$$\begin{aligned}
\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 \\
\nabla f(\vec{p}) * (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 \qquad (5)
\end{aligned}$$

I oppgaven jobber vi med en funksjon av to variabler, mens et plan krever tre variabler. Bruker fortsatt stigning i x som v_x og stigning i y som v_y. En litt cheeky operasjon:

$$\begin{aligned}
z &= h(x, y) \\
g(x, y, z) &= z - h(x, y) = 0 \\
\nabla g(x, y, z) &= \left(\frac{\delta g}{\delta x}, \frac{\delta g}{\delta y}, \frac{\delta g}{\delta z} \right) \\
\nabla g(x, y, z) &= (-h_x(x, y), -h_y(x, y), 1) \\
\nabla g(x, y, z) &= (-\nabla h(x, y), 1) \\
\nabla g(x, y, z) &= (-v_x, -v_y, 1) \qquad (6)
\end{aligned}$$

Normalvektoren til tangentplanet blir dermed:

$$\vec{n} = \nabla g(a,b,c)$$
$$\nabla g(a,b,c) = (-v_x, v_y, 1)$$

Finner da likning for tangentplanet:

$$\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$
$$\nabla g * (\vec{x} - \vec{p}) = (-v_x, -v_y, 1) * ((x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$
$$-v_x x - v_y y + z = -v_x x_0 - v_y y_0 + z_0$$

Merk: Alle verdier på høyre siden er konstante.

e)

For å finne likningen til tangentlinjen i punktet $\vec{p}$ gjør vi nesten det samme som for planet, men enklere og i to dimensjoner. Husk at:

$$\nabla h(x,y) = (v_x, v_y) \qquad Normalvektor$$
$$\vec{x} - \vec{p} = (x - x_0, y - y_0) \qquad Tangentlinje$$
$$\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \qquad Skalaprodukt$$

Grunnen til det ikke blir noe $g(x,y,z) = z - h(x,y)$ hibi jibis er fordi vi leter etter en tangentlinje (en linje kan beskrives med to koordinater) og vi har allerede gradienten til både x og y.

$$\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$
$$\nabla h(x,y) * (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$
$$(v_x, v_y) * ((x,y) - (x_0, y_0)) = 0$$
$$v_x x + v_y y = v_x x_0 + v_y y_0$$

f)

Stigningstallet til f i retning $\vec{v}$ fra punktet $\vec{p}$ er gitt ved skalarproduktet:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = |\nabla f(\vec{p})||\vec{v}|cos(\theta)$$

Når vi ser på tangentlinjen til f i punktet $\vec{p}$ vet vi fra forrige oppgave at $\nabla f(\vec{p})$ er normalvektoren til tangentlinjen, og dermed også gradienten til denne tangentlinjen. Dette betyr at $\nabla f(\vec{p})$ står $90°$ på retningen tangentlinjen beveger seg i, slik at:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = |\nabla f(\vec{p})||\vec{v}|cos(90°)$$
$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = 0$$

Intuitivt kan du tenke deg at tangentlinjen er en nivåkurve til funksjonen, og høyden til nivåkurven er konstant langs hele kurven. Derfor har kurven ingen stigning langs tangentlinjen.

Oppgave 3

a)

Første del av oppgaven er relativt rett frem. De fire oppgitte punktene er som følger:

$$\begin{aligned} T(x_0, y_0, z_0) &= \text{Utgangspunkt (pun intended)} \\ T(x_1, y_0, z_0) &= \text{Endring i x} \\ T(x_0, y_1, z_0) &= \text{Endring i y} \\ T(x_0, y_0, z_1) &= \text{Endring i z} \end{aligned}$$

Her finner man de første verdiene av å sette inn i lineariseringen:

$$\frac{\delta T}{\delta x} = \frac{T(x + \Delta x, y, z) - T(x, y, z)}{\Delta x}$$

Merk: Formelen over er definisjonen av den deriverte, men ettersom endringen, Δx, ikke går mot null er dette i praksis en linearisering.

b)

Vi husker fra tidligere at stigningen til grafen er det samme som gradienten til grafen (det nevnes også i oppgaven). Formelen for stigning til grafen f i retning $\vec{v}$ fra punktet $\vec{p}$ er slik (også beskrevet i formel 3):

$$D_{\vec{v}} f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = |\nabla f(\vec{p})||\vec{v}|cos(\theta)$$

Når vi ser på den maksimale stigningen, vil $\vec{v}$ gå i samme retning som gradienten ∇f til funksjonen f og vi får følgende sammenheng (utledet i formel 4):

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(\vec{p})}{|\nabla f(\vec{p})|}$$

Her er retningen $\vec{v}$ den retningen som gir *maksimal* stigning til grafen f i punktet $\vec{p}$. Merk at denne retningsvektoren er også en *enhetsvektor*.

I oppgave a) fant vi en tilnærming til gradienten ∇T. For å finne *enhetsvektoren* kan vi bare dele hver koordinat til gradienten på lengden av gradienten, som beskrevet i formelen overfor. Vi får da:

$$\vec{v}_{max} = \frac{\nabla T}{|\nabla T|}$$
$$\vec{v}_{max} = \frac{(\frac{\delta T}{\delta x}, \frac{\delta T}{\delta y}, \frac{\delta T}{\delta z})}{|\nabla T|}$$

c)

For å finne stigningstallet $D_{\vec{v}}$ til grafen f når vi beveger oss i retning $\vec{v}$ fra punktet $\vec{p}$ kan vi bruke skalarproduktet fra formel 3:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = |\nabla f(\vec{p})||\vec{v}|cos(\theta)$$

Vi får da:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = [x, y, z] * [x_1, y_1, z_1]$$
$$D_{\vec{v}}f(\vec{p}) = xx_1 + yy_1 + zz_1$$

HUSK: $\vec{v}$ er en *enhetsvektor*. Pass på å omgjøre den oppgitte vektoren til en enhetsvektor som beskrevet i formel 2.

d)

Linearisering brukes gjerne når vi ikke vet eksplisitte uttrykk, (for eksempel $f(x, y) = 2x+y$), men vi vet verdier og sammenhenger (som for eksempel at $f(1, 2) = 10$ mens $f(2, 1) = 20$). Linearisering kan være et kraftig verktøy for å analysere en funksjon f med tilnærmede verdier rundt et arbeidspunkt $\vec{p}$.

Den generelle fremstillingen for linearisering til en funksjon med flere variabler skrives slik:

$$\begin{aligned} w &= f(\vec{x}) \\ w &\approx f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p}) * (\vec{x} - \vec{p}) \end{aligned} \tag{7}$$

Forklaring:

$\vec{p}$	Arbeidspunkt
$\vec{x}$	Generelt punkt (x, y, z)
$f(\vec{p})$	Verdi til f i punktet $\vec{p}$
$\nabla f(\vec{p})$	Gradienten til f i punkt $\vec{p}$
$*$	Skalarprodukt

Ved å sette inn kjente verdier i formel 7 får vi en likning på formen:

$$w \approx ax + by + cz + C$$

Oppgave 4

a)

Stigning til grafen er det samme som gradienten til grafen. Retningen som gir maksimal stigning (formel 4) er beskrevet slik:

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(\vec{p})}{|\nabla f(\vec{p})|}$$

Gradienten til en funksjon f i punktet $\vec{p}$ med variabler $x_1, x_2...x_n$ finner man slik:

$$\nabla f(\vec{p}) = (\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}...\frac{\delta f}{\delta x_n}) \tag{8}$$

Skrevet på en mer kjent måte:

$$\nabla f(\vec{p}) = (\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta z})$$
$$\nabla f(\vec{p}) = (f_x(\vec{p}), f_y(\vec{p}), f_z(\vec{p}))$$

HUSK: $\vec{v}$ er en enhetsvektor med koordinater (x, y, z) og ∇f er en vektor med samme dimensjon som $\vec{v}$, altså (x, y, z) (kan vær andre dimensjoner, men ikke tenkt på det akkurat nå).

b)

Stigningstallet $D_{\vec{v}}$ til grafen f i retning $\vec{v}$ fra punktet $\vec{p}$ er beskrevet slik (formel 3):

$$D_{\vec{v}} f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) * \vec{v} = |\nabla f(\vec{p})||\vec{v}|cos(\theta)$$

Siden vi ser på maksimal stigning blir vinkelen $\theta = 0$. $|\vec{v}| = 0$ ettersom $\vec{v}$ er en enhetsvektor. Vi får da:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{p}) = |\nabla f(\vec{p})|$$

c)

En tangentflate kan beskrives ved hjelp av normalvektoren $\vec{n}$ og en linje på planet $\vec{x} - \vec{p}$ gjennom punktet $\vec{p}$. Vi vet fra formel 5 at normalvektoren til tangentplanet i punktet $\vec{p}$ er gradienten ∇f til funksjonen f i punktet $\vec{p}$:

$$\begin{gathered} \nabla f(\vec{p}) * (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \qquad (9) \\ \vec{x} = (x, y, z) \end{gathered}$$

Oppgaven prøver å forvirre ved å si at $T(x, y, z) = T(x_0, y_0, z_0)$. I praksis blir dette som å følge formel 9 uten å tenke mer over utsagnet. Her er uansett en forklaring hvorfor:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(x_0, y_0, z_0) && \text{Likning for plan} \\ T(\vec{p}) - T(\vec{p_0}) &= 0 && \text{Skrevet om} \\ T(\vec{p}) - T(\vec{p_0}) &= 0 = g(\vec{p}) && \text{Definerer en ny funksjon } g(\vec{p}) \end{aligned}$$

Tar i bruk det generelle uttrykket for gradient (formel 8):

$$\begin{aligned} \nabla g(\vec{p}) &= (\frac{\delta g}{\delta x}(\vec{p}), \frac{\delta g}{\delta y}(\vec{p}), \frac{\delta g}{\delta z}(\vec{p})) \\ \nabla g(\vec{p}) &= \nabla T(\vec{p}) \end{aligned}$$

Gradienten $\nabla g(\vec{p})$ til funksjonen $g(\vec{p})$ er den samme som gradienten $T(\vec{p})$, ettersom $T(\vec{p_0})$ er en konstant og blir lik 0 når vi deriverer. Tolkningen av denne konklusjonen er at hvis vi spenner ut et plan fra punktet $T(\vec{p_0})$ i retning $T(\vec{p})$ vil normalvektoren til planet $\vec{n} = \nabla g(\vec{p})$ forbli den samme som normalvektoren til punktet $T(\vec{p})$.

Oppgave 5

Alle deler av denne oppgaven kan løses ved å bare gjennomføre det oppgaven sier :).

Oppgave 6

For å finne Jacobimatrisen til en invertert funksjon, kan vi invertere Jacobimatrisen. Da bruker vi generell matriseinvertering. Vi ser kun på 2x2 matriser:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

a)

Vi ønsker å finne Jacobimatrisen til transformasjonen:

$$(h \circ f)(x, y) = \begin{bmatrix} s(u(x, y)) & s(v(x, y)) \\ t(u(x, y)) & t(v(x, y)) \end{bmatrix}$$

Jacobimatrisen til transformasjonen finner vi ved bruk av kjerneregelen:

$$D((h \circ f)(x, y)) = D(h \circ f)(x, y) * Df(x, y)$$

For oppgaven sin del har vi allerede fått oppgitt både $Df(x, y)$ og $D(h \circ f)(x, y)$. Den første matrisen $Df(x, y)$ er relativt åpenbar å se i oppgaveteksten (det er den første matrisen med tall :)). Den andre matrisen er Jacobimatrisen til h som en funksjon av f som en funksjon av x og y. Den andre matrisen med tall i oppgaven er nemlig denne matrisen. Da er det bare å gjennomføre matrisemultiplikasjonen. Her er de generelle reglene for matrisemultiplikasjon i to dimensjoner:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} k & j \\ m & n \end{bmatrix} \\
A * B &\neq B * A \\
A * B &= \begin{bmatrix} a * k + b * m & a * j + b * n \\ c * k + d * m & c * j + d * n \end{bmatrix} \\
AB &= \begin{bmatrix} ak + bm & aj + bn \\ ck + dm & cj + dn \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Oppgave 7

Implisitt derivasjon er når vi deriverer et uttrykk med en variabel som ikke nødvendigvis tilhører uttrykket. Det er vanlig å se implisitt derivasjon i sammenhenger hvor vi ønsker å derivere med hensyn på tiden t. I dette tilfelle ønsker vi å derivere med hensyn på z.

Ettersom derivasjon er en lineær operasjon, kan vi gjennomføre implisitt derivasjon på ett ledd om gangen. En vanlig fallgruve ved implisitt derivasjon er å glemme kjerneregelen: altså å gange uttrykket med den deriverte av kjernen.

Implisitt derivasjon er best forståelig ved bruk av eksempel.

HUSK: $z'(x) = \frac{dz}{dx}$. De er like, og kan brukes om hverandre.

Eksempel 1

Vi har en funksjon $f(x, y) = g(x) + h(y)$ hvor $g(x)$ og $h(y)$ er vilkårlige funksjoner som er avhengig av x og y.

$$f(x, y) = g(x) + h(y)$$

Hvis vi skal derivere uttrykket med hensyn på en variabel t kan vi bruke implisitt derivasjon. Vi må da huske kjerneregelen!

$$\frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} * x'(t) + \frac{dh}{dt} * y'(t)$$

Eventuelt kunne vi derivert uttrykket med hensyn på y:

$$\frac{df}{dy} = \frac{dg}{dy} * x'(y) + \frac{dh}{dy} * y'(y)$$
$$\frac{df}{dy} = \frac{dg}{dy} * x'(y) + \frac{dh}{dy}$$

Ettersom $y'(y) = 1$, samme som vanlig derivasjon, blir uttrykket litt annerledes. Fremgangsmåten er lik.

Eksempel 2

Vi har uttrykket $z + x + y = 0$. Dette uttrykket kan løses $z = g(x, y) = -x - y$, slik at vi da antar z som en funksjon av x og y. Da kan vi derivere z med hensyn på x og y respektivt:

$$\frac{d(z)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(y)}{dx} = \frac{d(0)}{dx}$$
$$\frac{dz}{dx} + 1 + 0 = 0$$
$$z'(x) + 1 = 0$$

Siden vi vet hva z er kan vi også sette inn for $z'(x)$:

$$z'(x) = -x'(x) - y'(x) = -1 - 0 = -1$$

Vi ser att dette stemmer ettersom:

$$z'(x) + 1 = 0$$
$$-1 + 1 = 0$$

Når du kan implisitt derivasjon er oppgavene litt mer rett frem. Deriver uttrykkene med hensyn på x, hvor $z = z(x, y)$ er avhengig av x og y (altså ikke en konstant når du deriverer). Deretter løser du uttrykket du får med hensyn på $\frac{dz}{dx}$. Gjenta det samme for y. Kan vise med min egen oppgave som eksempel:

Eksempel 3

$$z^4 + y^4 + x^3 - 18x^2 + 108x - 216 = 0$$

$$\frac{d(z^4)}{dx} + \frac{d(y^4)}{dx} + \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(-18x^2)}{dx} + \frac{d(108x)}{dx} + \frac{d(-216)}{dx} = \frac{d(0)}{dx}$$

$$4z^3 * z'(x) + 0 + 3x^2 * x'(x) - 36x * x'(x) + 108 + 0 = 0$$

$$4z^3 * \frac{dz}{dx} + 3x^2 - 36x + 108 = 0$$

$$4z^3 * \frac{dz}{dx} = 36x - 3x^2 - 108$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{36x - 3x^2 - 108}{4z^3}$$