Research Group Computer Science 2
RWTH Aachen University

A Term Encoding to Analyze Runtime Complexity via Innermost Runtime Complexity

Bachelor Colloquium

Simeon Valchev

16.04.2024

Reviewers
Prof. Dr. Jürgen Giesl
apl. Prof. Dr. Thomas Noll

Supervisor
Stefan Dollase, M.Sc.

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{a}(x) &\rightarrow \mathsf{b}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) &\rightarrow \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) &\rightarrow \mathsf{quad}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) &\rightarrow \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) &\rightarrow \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{aligned}
$$

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\hline
\mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\hline
\mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

$\hat{\Phi}(\mathcal{Q})$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x))) \\
\mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\hline
\mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \to & \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)) \\
\hline
\mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))) \\
\hline
\mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))
\end{array}
$$

$\mathcal{R}_1$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 : \quad & \mathsf{add}(x, \mathsf{0}) & \rightarrow \quad & x \\
\alpha_2 : \quad & \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) & \rightarrow \quad & \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y)
\end{aligned}
$$

Introduction

$\mathcal{R}_1$

$$\begin{aligned} \alpha_1: \quad \mathsf{add}(x, 0) &\rightarrow x \\ \alpha_2: \quad \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) &\rightarrow \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 3+2 & = & 4+1 & = & 5+0 & = & 5 \\ \underline{\mathsf{add}(\mathsf{s}^3(0), \mathsf{s}^2(0))} & \rightarrow_{\alpha_2, \varepsilon} & \underline{\mathsf{add}(\mathsf{s}^4(0), \mathsf{s}(0))} & \rightarrow_{\alpha_2, \varepsilon} & \underline{\mathsf{add}(\mathsf{s}^5(0), 0)} & \rightarrow_{\alpha_1, \varepsilon} & \mathsf{s}^5(0) \end{array}$$

Introduction

$\mathcal{R}_1$

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_1: & \mathsf{add}(x, 0) & \to & x \\ \alpha_2: & \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) \end{array}$$

- Full vs Innermost runtime complexity

$\mathcal{R}_1$

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_1 : & \mathsf{add}(x, 0) & \to & x \\ \alpha_2 : & \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) \end{array}$$

- Full vs Innermost runtime complexity

$$\mathsf{irc}_{\mathcal{R}}(n) \leq \mathsf{rc}_{\mathcal{R}}(n)$$

Non-dup-generalized

Non-dup-generalized

$\mathcal{R}_2$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 :&\quad \mathsf{dbl}(x, y) &\to&\quad \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_2 :&\quad \mathsf{dbl}(x, \mathsf{a}) &\to&\quad \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 :&\quad \mathsf{a} &\to&\quad 0
\end{aligned}
$$

Non-dup-generalized

$\mathcal{R}_2$

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_1: & \mathsf{dbl}(x,y) & \to & \mathsf{d}(x,x) \\ \alpha_2: & \mathsf{dbl}(x,\mathsf{a}) & \to & \mathsf{d}(x,x) \\ \alpha_3: & \mathsf{a} & \to & 0 \end{array}$$

	innermost	generalized	non-dup-gen.
$\underline{\mathsf{dbl}(0,0)} \to_{\alpha_1} \mathsf{d}(0,0)$	✓	✓	✓

Non-dup-generalized

$\mathcal{R}_2$

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \quad \mathsf{dbl}(x, y) &\to \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_2 : \quad \mathsf{dbl}(x, \mathsf{a}) &\to \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_3 : \quad \mathsf{a} &\to 0 \end{aligned}$$

	innermost	generalized	non-dup-gen.
$\underline{\mathsf{dbl}(0, 0)} \to_{\alpha_1} \mathsf{d}(0, 0)$	✓	✓	✓
$\underline{\mathsf{dbl}(0, \mathsf{a})} \to_{\alpha_1} \mathsf{d}(0, 0)$	✗	✓	✓

Non-dup-generalized

$\mathcal{R}_2$

$$\begin{aligned}\alpha_1 : \quad \mathsf{dbl}(x, y) &\to \mathsf{d}(x, x)\\ \alpha_2 : \quad \mathsf{dbl}(x, \mathsf{a}) &\to \mathsf{d}(x, x)\\ \alpha_3 : \quad \mathsf{a} &\to 0\end{aligned}$$

	innermost	generalized	non-dup-gen.
$\underline{\mathsf{dbl}(0,0)} \to_{\alpha_1} \mathsf{d}(0,0)$	✓	✓	✓
$\underline{\mathsf{dbl}(0,\mathsf{a})} \to_{\alpha_1} \mathsf{d}(0,0)$	✗	✓	✓
$\underline{\mathsf{dbl}(0,\mathsf{a})} \to_{\alpha_2} \mathsf{d}(0,0)$	✗	✗	✗

Non-dup-generalized

$\mathcal{R}_2$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 :\quad \mathsf{dbl}(x, y) &\to \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_2 :\quad \mathsf{dbl}(x, \mathsf{a}) &\to \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 :\quad \mathsf{a} &\to 0
\end{aligned}$$

	innermost	generalized	non-dup-gen.
$\underline{\mathsf{dbl}(0,0)} \to_{\alpha_1} \mathsf{d}(0,0)$	✓	✓	✓
$\underline{\mathsf{dbl}(0,\mathsf{a})} \to_{\alpha_1} \mathsf{d}(0,0)$	✗	✓	✓
$\underline{\mathsf{dbl}(0,\mathsf{a})} \to_{\alpha_2} \mathsf{d}(0,0)$	✗	✗	✗
$\underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a},0)} \to_{\alpha_1} \mathsf{d}(\mathsf{a},\mathsf{a})$	✗	✓	✗

Introduction

Non-dup-gen.

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

Non-dup-generalized

$\mathcal{R}_2$

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \quad \mathsf{dbl}(x, y) &\rightarrow \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_2 : \quad \mathsf{dbl}(x, \mathsf{a}) &\rightarrow \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_3 : \quad \mathsf{a} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

	innermost	generalized	non-dup-gen.
$\underline{\mathsf{dbl}(0, 0)} \rightarrow_{\alpha_1} \mathsf{d}(0, 0)$	✓	✓	✓
$\underline{\mathsf{dbl}(0, \mathsf{a})} \rightarrow_{\alpha_1} \mathsf{d}(0, 0)$	✗	✓	✓
$\underline{\mathsf{dbl}(0, \mathsf{a})} \rightarrow_{\alpha_2} \mathsf{d}(0, 0)$	✗	✗	✗
$\underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a}, 0)} \rightarrow_{\alpha_1} \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{a})$	✗	✓	✗
$\underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a}, \mathsf{a})} \rightarrow_{\alpha_2} \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{a})$	✗	✗	✗

Non-dup-generalized

$\mathcal{R}_2$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 : \quad \mathsf{dbl}(x, y) &\quad\to\quad \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_2 : \quad \mathsf{dbl}(x, \mathsf{a}) &\quad\to\quad \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 : \quad \mathsf{a} &\quad\to\quad 0
\end{aligned}
$$

- Let $\mathcal{R}$ be a TRS which is ndg. Then $\mathsf{rc}_{\mathcal{R}} = \mathsf{irc}_{\mathcal{R}}$ [1].

[1] F. Frohn and J. Giesl "Analyzing runtime complexity via innermost runtime complexity"

Non-ndg

Non-ndg

$\mathcal{Q}$

$$\begin{array}{rrcl rrcl} \alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\ \alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x)) \end{array}$$

Non-ndg

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{lrcl lrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))$$

Non-ndg

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))}) \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))$$

Non-ndg

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0))}) \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^n(0)))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^n(0))$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))} \longrightarrow_{\mathcal{Q}} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^n(0))$$

Non-ndg

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{rrcl rrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0))}) \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^n(0)))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^n(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{n} \cdots$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))} \longrightarrow_{\mathcal{Q}} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^n(0))$$

Non-ndg

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{lrcl lrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0))}) \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^n(0)))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^n(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{n} \cdots$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))} \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{Q}} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^n(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{\frac{1}{2}(n^2+n)} \cdots$$

Concept of the Encoding

$\mathcal{Q}$

$$\begin{array}{rrcl rrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0))}) \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^n(0)))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^n(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{n} \cdots$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))} \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{Q}} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^n(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{\frac{1}{2}(n^2+n)} \cdots$$

Concept of the Encoding

$\mathcal{Q}'$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))}) \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{n} \cdots$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))} \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))} \longrightarrow_{\mathcal{Q}} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{\frac{1}{2}(\mathsf{n}^2+\mathsf{n})} \cdots$$

Concept of the Encoding

$\mathcal{Q}'$

$$\begin{array}{rrcl rrcl}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))}) \to_{\mathcal{Q}} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{n} \cdots$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))} \to_{\mathcal{Q}'} \underline{\mathsf{g}(l_\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))} \longrightarrow_{\mathcal{Q}'} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}'}^{\frac{1}{2}(\mathsf{n}^2+\mathsf{n})} \cdots$$

Concept of the Encoding

$\mathcal{Q}'$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

$$
\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))} \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}\underline{(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))}) \not\to_{\mathcal{Q}'} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))} \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{Q}'}^{n} \cdots
$$

$$
\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))} \to_{\mathcal{Q}'} \underline{\mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))} \longrightarrow_{\mathcal{Q}'} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{Q}'}^{\frac{1}{2}(\mathsf{n}^2+\mathsf{n})} \cdots
$$

Concept of the Encoding

$\mathcal{Q}''$

$$
\begin{array}{rrcl rrcl}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x))) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x)) \\
\beta_1: & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x & \beta_2: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{a}(x)
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))} \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{g}(\underline{l_{\mathsf{a}}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))}) \not\to_{\mathcal{Q}'} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))} \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to^{n}_{\mathcal{Q}'} \cdots$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))} \to_{\mathcal{Q}'} \underline{\mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))} \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{Q}'} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to^{\frac{1}{2}(\mathsf{n}^2+\mathsf{n})}_{\mathcal{Q}'} \cdots$$

Concept of the Encoding

$\mathcal{Q}''$

$$
\begin{array}{lrcllrcl}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x))) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x)) \\
\beta_1: & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x & \beta_2: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{a}(x)
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))} \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}\underline{(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))}) \not\to_{\mathcal{Q}'} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))} \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to^{n}_{\mathcal{Q}'} \cdots$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))} \to_{\mathcal{Q}''} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))}) \xrightarrow{0}_{\mathcal{Q}''} \underline{\mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))} \to_{\mathcal{Q}''} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to^{\frac{1}{2}(\mathsf{n}^2+\mathsf{n})}_{\mathcal{Q}''} \cdots$$

Concept of the Encoding

$\mathcal{Q}''$

$$
\begin{array}{lrcl lrcl}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x)) \\
\beta_1: & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x & \beta_2: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{a}(x)
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}''} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))}) \xrightarrow{0}_{\mathcal{Q}''} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0))}) \to_{\mathcal{Q}''} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^n(0)))} \to_{\mathcal{Q}''} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^n(0))$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0))} \to_{\mathcal{Q}''} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))}) \xrightarrow{0}_{\mathcal{Q}''} \underline{\mathsf{g}(l_\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))} \to_{\mathcal{Q}''} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^n(0)) \to_{\mathcal{Q}''}^{\frac{1}{2}(n^2+n)} \cdots$$

Non-ndg Locations

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{rrcl rrcl}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{rrcl rrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

$$(\alpha_1, \mathrm{L}, \varepsilon)$$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{lrcllrcl}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \rightarrow & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \rightarrow & \mathsf{lin}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \rightarrow & \mathsf{lin}(x)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
\alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \rightarrow & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \rightarrow & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \rightarrow & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{lrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x)
\end{array}
\quad
\begin{array}{lrcl}
\alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llllll}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(\boxed{x}) & \to & \mathsf{g}(\boxed{\mathsf{a}}(\boxed{x})) & \alpha_2 : \quad \mathsf{a}(x) & \to \quad \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : \quad \mathsf{g}(\boxed{\mathsf{a}}(x)) & \to \quad \mathsf{quad}(\boxed{x}) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\boxed{x})) & \to \quad \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\boxed{x}), \mathsf{quad}(\boxed{x}))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\boxed{\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$\begin{array}{lrcl lrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- Set of potentially defined symbol locations $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- Set of potentially defined symbol locations $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \rightarrow & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \rightarrow & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \rightarrow & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \rightarrow & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \rightarrow & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \rightarrow & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- Set of potentially defined symbol locations $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{lrcllrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- Set of potentially defined symbol locations $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
\alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- Set of potentially defined symbol locations $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{lrcl lrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- Set of potentially defined symbol locations $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

α_1 :	f(x)	$\to$	g(a(x))	α_2 :	a(x)	$\to$	b(x)
α_3 :	g(b(x))	$\to$	lin(x)	α_4 :	g(a(x))	$\to$	quad(x)
α_5 :	lin(s(x))	$\to$	lin(x)	α_6 :	quad(s(x))	$\to$	c(lin(x), quad(x))

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- Set of potentially defined symbol locations $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{rrcl rrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \rightarrow & \mathsf{g}(\boxed{\mathsf{a}}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \rightarrow & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \rightarrow & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\boxed{\mathsf{a}}(\boxed{x})) & \rightarrow & \mathsf{quad}(\boxed{x}) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \rightarrow & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\boxed{x})) & \rightarrow & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\boxed{x}), \mathsf{quad}(\boxed{x}))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- Set of potentially defined symbol locations $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$

Non-ndg Locations

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llllllll}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\boxed{\mathsf{a}}(x)) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(\boxed{\mathsf{a}}(\boxed{x})) & \to & \mathsf{quad}(\boxed{x}) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\boxed{x})) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\boxed{x}), \mathsf{quad}(\boxed{x}))
\end{array}
$$

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- Set of potentially defined symbol locations $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$
- Set of locations to be encoded

Encoding non-ndg Locations

$\Phi(\mathcal{Q})$

$$
\begin{array}{lrcl lrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)))
\end{array}
$$

Encoding non-ndg Locations

$\Phi(\mathcal{Q})$

$$
\begin{array}{llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) \\
\alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\
\alpha_4 : & \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\
\alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))) \\
\beta_1 : & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x \\
\beta_2 : & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\beta_3 : & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))
\end{array}
$$

Encoding non-ndg Locations

$\Phi(\mathcal{Q})$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) & \alpha_2 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : & \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)) \\
\alpha_5 : & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))) \\
\beta_1 : & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x & \beta_2 : & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
 & & & & \beta_3 : & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))
\end{array}
$$

- Addition rules
  - Omission (β_1)
  - Execution (β_2)
  - Propagation (β_3)

Necessity of propagation rules

Necessity of propagation rules

$\mathcal{R}_3$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\
\alpha_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}
$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$
\begin{aligned}
\alpha'_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))))\\
\alpha'_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x))\\
\alpha'_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)\\
\beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x\\
\beta_2 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\
\beta_3 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}
$$

Necessity of propagation rules

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 : \quad & \mathsf{f} && \to \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\alpha_2 : \quad & \mathsf{dbl}(x) && \to \quad \mathsf{d}(x, x) \\
\alpha_3 : \quad & \mathsf{a}(x) && \to \quad \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 : \quad & \mathsf{f} && \to \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\
\alpha'_2 : \quad & \mathsf{dbl}(x) && \to \quad \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\
\alpha'_3 : \quad & \mathsf{a}(x) && \to \quad \mathsf{b}(x) \\
\beta_1 : \quad & \mathsf{i}(x) && \xrightarrow{0} \quad x \\
\beta_2 : \quad & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) && \xrightarrow{0} \quad \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\beta_3 : \quad & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) && \xrightarrow{0} \quad \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{R}_3} \quad \underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a}^2(0))} \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{a}^2(0), \mathsf{a}^2(0)) \to^4_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}^2(0), \mathsf{b}^2(0))$$

Necessity of propagation rules

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\
\alpha_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))\\
\alpha'_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x))\\
\alpha'_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)\\
\beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x\\
\beta_2 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\
\beta_3 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{R}_3} \underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a}^2(0))} \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{a}^2(0), \mathsf{a}^2(0)) \to^4_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}^2(0), \mathsf{b}^2(0))$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{dbl}(\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}^2(0))})$$

Necessity of propagation rules

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned} \alpha_1 :&\quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\ \alpha_2 :&\quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(x,x)\\ \alpha_3 :&\quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned} \alpha_1' :&\quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))\\ \alpha_2' :&\quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x))\\ \alpha_3' :&\quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x)\\ \beta_1 :&\quad \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0}&\quad x\\ \beta_2 :&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\ \beta_3 :&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))) \end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{R}_3} \underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a}^2(0))} \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{a}^2(0),\mathsf{a}^2(0)) \to^4_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}^2(0),\mathsf{b}^2(0))$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{dbl}(\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}^2(0))}) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{dbl}(l_\mathsf{a}^2(0))}$$

Necessity of propagation rules

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned}\alpha_1 :&\quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\ \alpha_2 :&\quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(x,x)\\ \alpha_3 :&\quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x)\end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned}\alpha'_1 :&\quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))))\\ \alpha'_2 :&\quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x))\\ \alpha'_3 :&\quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x)\\ \beta_1 :&\quad \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0}&\quad x\\ \beta_2 :&\quad \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\ \beta_3 :&\quad \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))\end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{R}_3} \underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a}^2(0))} \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{a}^2(0),\mathsf{a}^2(0)) \to^4_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}^2(0),\mathsf{b}^2(0))$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{dbl}(\underline{\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}^2(0))}) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{dbl}(l_{\mathsf{a}}^2(0))} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))),\ \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))))$$

Necessity of propagation rules

$\mathcal{R}_3$

$$
\begin{array}{lrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\alpha_2 : & \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x, x) \\
\alpha_3 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x)
\end{array}
$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$
\begin{array}{lrcl}
\alpha'_1 : & \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\
\alpha'_2 : & \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\
\alpha'_3 : & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\beta_1 : & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x \\
\beta_2 : & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\beta_3 : & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{R}_3} \underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a}^2(0))} \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{a}^2(0), \mathsf{a}^2(0)) \to^4_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}^2(0), \mathsf{b}^2(0))$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{dbl}(\underline{\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}^2(0))}) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{dbl}(l_{\mathsf{a}}^2(0))} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))), \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))))$$

Restrictions on starting terms

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\
\alpha_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))\\
\alpha'_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x))\\
\alpha'_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)\\
\beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x\\
\beta_2 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\
\beta_3 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{R}_3} \underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a}^2(0))} \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{a}^2(0), \mathsf{a}^2(0)) \to^4_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}^2(0), \mathsf{b}^2(0))$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{dbl}(\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}^2(0))}) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{dbl}(l_\mathsf{a}^2(0))} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))), \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$$

Restrictions on starting terms

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned} \alpha_1 :& \quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \alpha_2 :& \quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_3 :& \quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned} \alpha'_1 :& \quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\ \alpha'_2 :& \quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \alpha'_3 :& \quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x) \\ \beta_1 :& \quad \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0}&\quad x \\ \beta_2 :& \quad \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \beta_3 :& \quad \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))) \end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{dbl}(l_{\mathsf{a}}^{\mathsf{n}}(0))} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}^{\mathsf{n}}(0)),\ \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}^{\mathsf{n}}(0))) \to^{2\mathsf{n}}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \cdots$$

Restrictions on starting terms

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\alpha_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\alpha_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\
\alpha'_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\
\alpha'_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\beta_2 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\beta_3 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}$$

- $\mathsf{rc}_{\mathcal{R}_3}(n) \in \mathcal{O}(1)$
- $\mathsf{irc}_{\Phi(\mathcal{R}_3)}(n) \in \mathcal{O}(n)$

Restrictions on starting terms

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\
\alpha_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

- $\mathsf{rc}_{\mathcal{R}_3}(n) \in \mathcal{O}(1)$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))\\
\alpha'_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x))\\
\alpha'_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)\\
\beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x\\
\beta_2 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\
\beta_3 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}$$

- $\mathsf{irc}_{\Phi(\mathcal{R}_3)}(n) \in \mathcal{O}(n)$
- $\mathsf{irc}'_{\Phi(\mathcal{R}_3)}(n) \in \mathcal{O}(1)$

Infinite 0-cost rewriting

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &: & \mathsf{f} &\rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\
\alpha_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\rightarrow \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 &: & \mathsf{a}(x) &\rightarrow \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned}
\alpha_1' &: & \mathsf{f} &\rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))))\\
\alpha_2' &: & \mathsf{dbl}(x) &\rightarrow \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x))\\
\alpha_3' &: & \mathsf{a}(x) &\rightarrow \mathsf{b}(x)\\
\beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x\\
\beta_2 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\
\beta_3 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}$$

Infinite 0-cost rewriting

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 :& \quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\
\alpha_2 :& \quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(x,x)\\
\alpha_3 :& \quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 :& \quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))\\
\alpha'_2 :& \quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x))\\
\alpha'_3 :& \quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x)\\
\beta_1 :& \quad \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0}&\quad x\\
\beta_2 :& \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\
\beta_3 :& \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(0))})) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \cdots$$

Infinite 0-cost rewriting

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \quad & \mathsf{f} & \to \quad & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \alpha_2 : \quad & \mathsf{dbl}(x) & \to \quad & \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_3 : \quad & \mathsf{a}(x) & \to \quad & \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned} \alpha_1' : \quad & \mathsf{f} & \to \quad & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \alpha_2' : \quad & \mathsf{dbl}(x) & \to \quad & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \alpha_3' : \quad & \mathsf{a}(x) & \to \quad & \mathsf{b}(x) \\ \beta_1 : \quad & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} \quad & x \\ \beta_2 : \quad & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} \quad & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \beta_3 : \quad & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} \quad & l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)) \end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(0))})) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \cdots$$

Infinite 0-cost rewriting

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned} \alpha_1 :\quad & \mathsf{f} \to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \alpha_2 :\quad & \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_3 :\quad & \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned} \alpha'_1 :\quad & \mathsf{f} \to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \alpha'_2 :\quad & \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \alpha'_3 :\quad & \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \\ \beta_1 :\quad & \mathsf{i}(x) \xrightarrow{0} x \\ \beta_2 :\quad & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \beta_3 :\quad & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \xrightarrow{0} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)) \end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(0))) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \cdots$$

Infinite 0-cost rewriting

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned} \alpha_1 :& \quad \mathsf{f} &\to\quad& \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \alpha_2 :& \quad \mathsf{dbl}(x) &\to\quad& \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_3 :& \quad \mathsf{a}(x) &\to\quad& \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned} \alpha'_1 :& \quad \mathsf{f} &\to\quad& \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \alpha'_2 :& \quad \mathsf{dbl}(x) &\to\quad& \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \alpha'_3 :& \quad \mathsf{a}(x) &\to\quad& \mathsf{b}(x) \\ \beta_1 :& \quad \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0}\quad& x \\ \beta_2 :& \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0}\quad& \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \beta_3 :& \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0}\quad& l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)) \end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{i}^2(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(0)))) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \cdots$$

Infinite 0-cost rewriting

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 :&\quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\
\alpha_2 :&\quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 :&\quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 :&\quad \mathsf{f} &\to&\quad \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))\\
\alpha'_2 :&\quad \mathsf{dbl}(x) &\to&\quad \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x))\\
\alpha'_3 :&\quad \mathsf{a}(x) &\to&\quad \mathsf{b}(x)\\
\beta_1 :&\quad \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0}&\quad x\\
\beta_2 :&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\
\beta_3 :&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0}&\quad l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))
\end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{i}^2(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(0)))) \to^*_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{b}^2(0)$$

Infinite 0-cost rewriting

$\mathcal{R}_3$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\
\alpha_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x)\\
\alpha_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}
$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$
\begin{aligned}
\alpha'_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))))\\
\alpha'_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x))\\
\alpha'_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)\\
\beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x\\
\beta_2 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\
\beta_3 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))
\end{aligned}
$$

$$\underline{\mathsf{i}^2(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \to^*_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{b}^2(0)$$

Infinite 0-cost rewriting

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \alpha_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}^2(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\ \alpha'_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \alpha'_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\ \beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\ \beta_2 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \beta_3 &: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)) \end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{i}^2(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \to^*_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{b}^2(0)$$

Infinite 0-cost rewriting

$\mathcal{R}_3$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \alpha_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\ \alpha_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$\widehat{\Phi}(\mathcal{R}_3)$

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &: & \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}^2(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \alpha'_2 &: & \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}^2(x), \mathsf{i}^2(x)) \\ \alpha'_3 &: & \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\ \beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\ \beta_2 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \beta_3 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)) \end{aligned}$$

$$\underline{\mathsf{i}^2(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))} \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(0)))) \to^*_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{b}^2(0)$$

AProVE Results

APro VE Results

$\mathcal{Q}$

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x) \\
\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{array}
$$

- $\mathsf{rc}_{\mathcal{Q}}(n)$ **Bounds: (Ω(n^1),∞)**

Link to result here

AProVE Results

$\Phi(\mathcal{Q})$

$$
\begin{array}{llcl llcl}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))) \\
\beta_1: & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x & \beta_2: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
 & & & & \beta_3: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))
\end{array}
$$

- $\mathsf{irc}_{\Phi(\mathcal{Q})}(n)$ **Termination could not be shown (Maybe)**

Link to result here

AProVE Results

$\widehat{\Phi}(\mathcal{Q})$

$$
\begin{array}{rrcl rrcl}
\alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\
\alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \to & \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)) \\
\alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: & \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))) \\
\beta_1: & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x & \beta_2: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
 & & & & \beta_3: & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))
\end{array}
$$

- $\mathsf{irc}_{\widehat{\Phi}(\mathcal{Q})}(n)$ **Bounds: (Ω(n^1),O(n^2))**

Link to result here

Conclusion

- Runtime complexity and ndg-rewriting
- Encoding of TRSs
- Eliminating infinite 0-cost rewriting
- Future work
  - More accurate overapproximation
  - Lemmas
  - Dedicated implementation

Optional innermost

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: & \mathsf{g} &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \\ \alpha_2 &: & \mathsf{a} &\to \mathsf{a} \\ \alpha_3 &: & \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) &\to \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1' &: & \mathsf{g} &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ \alpha_2' &: & \mathsf{a} &\to \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \\ \alpha_3' &: & \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) &\to \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ \beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\ \beta_2 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}) \end{aligned}$$

$$\mathsf{g} \to_{\alpha_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\underline{\mathsf{a}}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\underline{\mathsf{a}}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\underline{\mathsf{a}}) \to_{\alpha_3} \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{g} \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_2} \cdots$$

Infinite nesting depth

$\mathcal{R}_4$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 :\quad & \mathsf{f}(x) & \to \quad & \mathsf{g}(\mathsf{a}, x) \\
\alpha_2 :\quad & \mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) & \to \quad & \mathsf{g}(\mathsf{dbl}(x), y) \\
\alpha_3 :\quad & \mathsf{dbl}(x) & \to \quad & \mathsf{d}(x, x) \\
\alpha_4 :\quad & \mathsf{a} & \to \quad & 0
\end{aligned}
$$

$\Phi(\mathcal{R}_4)$

$$
\begin{aligned}
\alpha'_1 :\quad & \mathsf{f}(x) & \to \quad & \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}), x) \\
\alpha'_2 :\quad & \mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) & \to \quad & \mathsf{g}(\mathsf{i}^{\mathsf{k}}(l_{\mathsf{dbl}}(x)), y) \\
\alpha'_3 :\quad & \mathsf{dbl}(x) & \to \quad & \mathsf{d}(\mathsf{i}^{\mathsf{k}}(x), \mathsf{i}^{\mathsf{k}}(x)) \\
\alpha'_4 :\quad & \mathsf{a} & \to \quad & 0 \\
& & \vdots &
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to^{n}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{g}(\mathsf{dbl}^{\mathsf{n}}(\mathsf{a}), 0)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\Phi(\mathcal{R}_4)} \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}), \mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to^{*}_{\Phi(\mathcal{R}_4)} \mathsf{g}(\mathsf{i}^{\mathsf{k}}(l^{\mathsf{n}}_{\mathsf{dbl}}(l_{\mathsf{a}}), 0)$$