Research Group Computer Science 2 RWTH Aachen University

A Term Encoding to Analyze Runtime Complexity via Innermost Runtime Complexity

Bachelor Colloquium

Simeon Valchev

16.04.2024

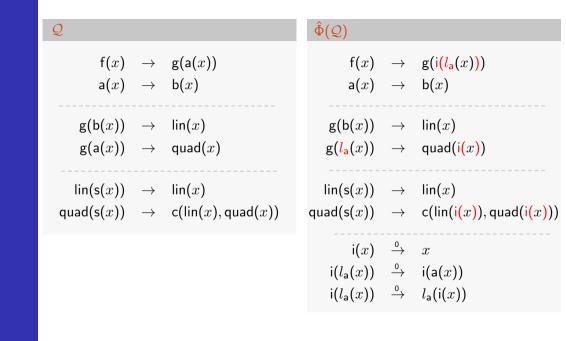
Reviewers Prof. Dr. Jürgen Giesl apl. Prof. Dr. Thomas Noll

Supervisor Stefan Dollase, M.Sc.

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\ \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) \\ \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x)) \end{array}$$



Introduction

 \mathcal{R}_1

 $\begin{array}{cccc} \alpha_1: & \mathsf{add}(x,0) & \to & x \\ \alpha_2: & \mathsf{add}(x,\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{add}(\mathsf{s}(x),y) \end{array}$

Introduction

 \mathcal{R}_1

 α_1 :

 $\mathsf{add}(x,\mathsf{0}) \quad o \quad x$

 $\alpha_2: \operatorname{\mathsf{add}}(x,\mathsf{s}(y)) \to \operatorname{\mathsf{add}}(\mathsf{s}(x),y)$

$$5 + 0$$

$$\mathsf{add}(\mathsf{s}^3(\mathsf{0}),\mathsf{s}^2(\mathsf{0})) \quad \to_{\alpha_2,\,\varepsilon} \quad \mathsf{add}(\mathsf{s}^4(\mathsf{0}),\mathsf{s}(\mathsf{0})) \quad \to_{\alpha_2,\,\varepsilon} \quad \mathsf{add}(\mathsf{s}^5(\mathsf{0}),\mathsf{0}) \quad \to_{\alpha_1,\,\varepsilon}$$

Introduction

Non-dup-gen.

 \mathcal{R}_1

 $\begin{array}{cccc} \alpha_1: & \mathsf{add}(x,0) & \to & x \\ \alpha_2: & \mathsf{add}(x,\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{add}(\mathsf{s}(x),y) \end{array}$

Full vs Innermost runtime complexity

Introduction

\mathcal{R}_1

$$\alpha_1: \quad \mathsf{add}(x,0) \rightarrow x$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1: & \mathsf{add}(x,0) & \to & x \\ \alpha_2: & \mathsf{add}(x,\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{add}(\mathsf{s}(x),y) \end{array}$$

Full vs Innermost runtime complexity

$$\operatorname{irc}_{\mathcal{R}}(n) \leq \operatorname{rc}_{\mathcal{R}}(n)$$

Introduction

Non-dup-gen.

Concept

Encoding

Propagation

rules

Results

Conclusion

Non-dup-gen.

 \mathcal{R}_2

 $\begin{array}{ccccc} \alpha_1: & \mathsf{dbl}(x,y) & \to & \mathsf{d}(x,x) \\ \alpha_2: & \mathsf{dbl}(x,\mathsf{a}) & \to & \mathsf{d}(x,x) \end{array}$

 α_3 :

Non-dup-gen.

 \mathcal{R}_2

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1: & \mathsf{dbl}(x,y) & \to & \mathsf{d}(x,x) \\ \alpha_2: & \mathsf{dbl}(x,\mathsf{a}) & \to & \mathsf{d}(x,x) \end{array}$$

$$\alpha_2: \operatorname{\mathsf{dbl}}(x,\mathsf{a}) \to \operatorname{\mathsf{d}}(x,x)$$

$$\alpha_3$$
: a \rightarrow 0

innermost generalized non-dup-gen.

 $dbl(0,0) \rightarrow_{\alpha_1} d(0,0)$

Non-dup-gen.

 \mathcal{R}_2

 $\mathsf{dbl}(0,0) \quad \rightarrow_{\alpha_1} \quad \mathsf{d}(0,0)$ $dbl(0,a) \rightarrow_{\alpha_1} d(0,0)$

$$\alpha_1: \operatorname{dbl}(x,y) \to \operatorname{d}(x,x)$$

 $\alpha_2: \operatorname{dbl}(x,a) \to \operatorname{d}(x,x)$

$$\alpha_2: \operatorname{dbl}(x,\mathsf{a}) \to \operatorname{d}(x,x)$$

$$\alpha_3$$
: a \rightarrow 0

innermost generalized non-dup-gen.

Non-dup-gen.

 \mathcal{R}_2

dbl(0, 0)

$$\alpha_1: \operatorname{dbl}(x,y) \to \operatorname{d}(x,x)$$

 $\alpha_2: \operatorname{dbl}(x,a) \to \operatorname{d}(x,x)$

$$\alpha_2: \operatorname{\mathsf{dbl}}(x,\mathsf{a}) \to \operatorname{\mathsf{d}}(x,x)$$

$$\alpha_3$$
: a \rightarrow 0

innermost generalized non-dup-gen.

$$\frac{\mathsf{dbl}(\mathsf{0},\mathsf{a})}{\mathsf{dbl}(\mathsf{0},\mathsf{a})} \quad \mathop{\to}_{\alpha_1} \quad \mathsf{d}(\mathsf{0},\mathsf{0}) \\ \rightarrow_{\alpha_2} \quad \mathsf{d}(\mathsf{0},\mathsf{0})$$

 $ightarrow_{lpha_1} \quad \mathsf{d}(0,0)$

Introduction

Non-dup-gen.

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_2

dbl(0,0)

 $ightarrow_{lpha_1}$ d(0,0)

 $\frac{\mathsf{dbl}(0,\mathsf{a})}{\mathsf{dbl}(0,\mathsf{a})} \quad \rightarrow_{\alpha_1} \quad \mathsf{d}(0,0)$ $\frac{\mathsf{dbl}(0,\mathsf{a})}{\mathsf{dbl}(\mathsf{a},0)} \quad \rightarrow_{\alpha_2} \quad \mathsf{d}(\mathsf{a},\mathsf{a})$

$$\alpha_1: \operatorname{dbl}(x,y) \to \operatorname{d}(x,x)$$

$$\alpha_2: \operatorname{dbl}(x, \mathsf{a}) \to \operatorname{d}(x, x)$$

$$\alpha_3$$
: a \rightarrow 0

innermost generalized non-dup-gen.

Introduction

Non-dup-gen.

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_2

$$\alpha_1: \operatorname{dbl}(x,y) \to \operatorname{d}(x,x)$$

$$\alpha_2: \operatorname{dbl}(x, \mathsf{a}) \to \operatorname{d}(x, x)$$

$$\alpha_3$$
: a \rightarrow 0

innermost generalized non-dup-gen.

$$egin{array}{lll} \displaystyle rac{{
m dbl}(0,0)}{{
m dbl}(0,{
m a})} & \displaystyle
ightarrow_{lpha_1} & {
m d}(0,0) \ \hline {
m dbl}(0,{
m a}) & \displaystyle
ightarrow_{lpha_2} & {
m d}(0,0) \ \hline {
m dbl}({
m a},0) & \displaystyle
ightarrow_{lpha_1} & {
m d}({
m a},{
m a}) \end{array}$$

 $dbl(a,a) \rightarrow_{\alpha_2} d(a,a)$

Introduction

Non-dup-gen.

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_2

$$\alpha_1: \operatorname{dbl}(x,y) \to \operatorname{d}(x,x)$$

 $\alpha_2: \operatorname{dbl}(x,a) \to \operatorname{d}(x,x)$

$$\alpha_3$$
: a \rightarrow 0

▶ Let \mathcal{R} be a TRS which is ndg. Then $rc_{\mathcal{R}} = irc_{\mathcal{R}}$ [1].

Non-ndg

Introduction

Non-dup-gen.

Concept

Encoding

Propagation

rules

Results

Conclusion

0

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x)) \quad \alpha_2: a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\alpha_3: \ \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \ \to \ \mathsf{lin}(x) \ \alpha_4: \ \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \ \to \ \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x)) \alpha_2:$$

$$\alpha_2: \qquad \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)$$

$$\mathsf{n}(x)$$

$$\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)$$

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}} g(a(s^n(0)))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}} g(a(s^n(0)))$$

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x)) \quad \alpha_2: a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)$$

$$\alpha_{\mathbf{5}}: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \quad \rightarrow \quad \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_{\mathbf{6}}: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \quad \rightarrow \quad \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}} g(a(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}} g(b(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}} lin(s^n(0))$$

$$\underline{f(s^n(0))} \to_{\mathcal{Q}} g(a(s^n(0)))$$

Concept

Encoding

Propagation rules

D. . . . It. .

Conclusion

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x)) \quad \alpha_2: a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\alpha_3: \ \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \ \to \ \mathsf{lin}(x) \ \alpha_4: \ \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \ \to \ \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_{\mathbf{5}}: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \quad \rightarrow \quad \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_{\mathbf{6}}: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \quad \rightarrow \quad \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}} g(a(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}} g(b(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}} lin(s^n(0))$$

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x)) \quad \alpha_2: a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\alpha_3: \ \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \ \to \ \mathsf{lin}(x) \ \alpha_4: \ \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \ \to \ \mathsf{quad}(x)$$

$$\mathsf{n}(x)$$

$$\alpha_4$$
 . $\beta(a(x)$

$$)) \rightarrow$$

$$(c)) \rightarrow$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}}^n \cdots$$

Conclusion

Q

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x)) \quad \alpha_2: a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\alpha_{\mathbf{3}}:\ \mathsf{g}(\mathsf{b}(x))\quad\rightarrow\quad \mathsf{lin}(x)\qquad \alpha_{\mathbf{4}}:\qquad \mathsf{g}(\mathsf{a}(x))\quad\rightarrow\quad \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \quad o \quad \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \quad o \quad \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}}^n \cdots$$

$$\underline{f(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \longrightarrow_{\mathcal{Q}} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{\frac{1}{2}(\mathsf{n}^2+\mathsf{n})} \cdots$$

Introduction

Non-dup-ger

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x)) \quad \alpha_2: a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\alpha_{\mathbf{3}}:\ \mathsf{g}(\mathsf{b}(x))\quad\rightarrow\quad \mathsf{lin}(x)\qquad \alpha_{\mathbf{4}}:\qquad \mathsf{g}(\mathsf{a}(x))\quad\rightarrow\quad \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}} g(a(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}} g(b(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}} lin(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}}^n \cdots$$

$$\underline{f(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))} \to_{\mathcal{Q}} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \longrightarrow_{\mathcal{Q}} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{\frac{1}{2}(\mathsf{n}^2+\mathsf{n})} \cdots$$

Concept

0!

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f}(x) \quad \to \quad \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x))$$

$$\alpha_2$$
 :

$$\mathsf{a}(x)$$

$$\alpha_2: \quad \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)$$

$$\rightarrow$$

$$\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(l_a(x)) \rightarrow quad(x)$$

$$(^{\mathfrak{o}_{\mathbf{a}}}(\mathscr{A}))$$

$$\rightarrow$$
 c(

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

5/12

$$f(s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{Q}} g(a(s^n(0))) \rightarrow_{\mathcal{Q}} g(b(s^n(0))) \rightarrow_{\mathcal{Q}} lin(s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{Q}}^n \cdots$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}} g(a(s^n(0))) - \cdots \to_{\mathcal{Q}} quad(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}}^{\frac{1}{2}(n^2+n)} \cdots$$

Introduction

Non-dup-ger

Concept

Encoding

Propagation rules

ruies

Results

Conclusion

$$\alpha_1: \quad \mathsf{f}(x) \rightarrow \mathsf{g}(\frac{l_\mathsf{a}}{(x)}) \quad \alpha_2: \quad \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3: \ \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \ \to \ \mathsf{lin}(x) \ \alpha_4: \ \mathsf{g}(\emph{l}_\mathsf{a}(x)) \ \to \ \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_{\mathbf{5}}: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \ \rightarrow \ \mathsf{lin}(x) \ \alpha_{\mathbf{6}}: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \ \rightarrow \ \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}} g(a(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}} g(b(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}} lin(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}}^n \cdots$$

$$\underline{f(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))} \to_{\mathcal{Q}'} \underline{g(\textcolor{red}{\textit{l}_\mathsf{a}}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))} \longrightarrow_{\mathcal{Q}'} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}'}^{\frac{1}{2}(\mathsf{n}^2+\mathsf{n})} \cdots$$

Concept

0'

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f}(x) \quad \to \quad \mathsf{g}(\textcolor{red}{l_{\mathsf{a}}}(x))$$

$$\alpha_2: \qquad \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)$$

$$\mathsf{a}(x)$$

$$\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(l_a(x)) \rightarrow quad(x)$$

$$(x)) \rightarrow$$

$$\rightarrow$$
 α

$$\alpha_{\mathbf{5}}: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \quad \rightarrow \quad \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_{\mathbf{6}}: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \quad \rightarrow \quad \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\rightarrow$$
 c

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{g}(\textcolor{red}{l_\mathsf{a}}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \xrightarrow{}_{\mathcal{Q}'} \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \xrightarrow{n}_{\mathcal{O}'} \cdots$$

$$\longrightarrow_{\mathcal{Q}'} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(\mathsf{0})) o_{\mathcal{Q}'}^{\frac{1}{2}(\mathsf{n}^2+\mathsf{n})} \cdots$$

Introduction

Non-dup-gei

Concept

Encoding

Propagation

rules

Results

Conclusion

$$\alpha_1: \quad \mathsf{f}(x) \rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) \quad \alpha_2: \quad \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x)$$
 $\alpha_4: g(l_a(x)) \rightarrow quad(x)$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$
 $\alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} x \qquad \qquad \beta_2: \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{a}(x)$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}'} g(\mathit{l}_a(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}'} g(b(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{lin}(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}'}^n \cdots$$

$$f(s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{Q}'} g(l_a(s^n(0))) \longrightarrow_{\mathcal{Q}'} quad(s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{Q}'}^{\frac{1}{2}(n^2+n)} \cdots$$

Introduction

Non-dup-gei

Concept

Encoding

Propagation

rules

Results

Conclusion

$$\alpha_1: \quad \mathsf{f}(x) \rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) \quad \alpha_2: \quad \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3: \ \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \ \to \ \mathsf{lin}(x) \ \alpha_4: \ \mathsf{g}({}^{l}_\mathsf{a}(x)) \ \to \ \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$
 $\alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} x \qquad \qquad \beta_2: \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{a}(x)$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}'} g(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}'} g(b(s^n(0))) \to_{\mathcal{Q}'} \mathsf{lin}(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}'}^n \cdots$$

$$\underline{f(s^n(0))} \to_{\mathcal{Q}''} \underline{g(\underline{i(l_a(s^n(0)))})} \xrightarrow[]{0} \underbrace{g(l_a(s^n(0)))} \to_{\mathcal{Q}''} \underline{g(l_a(s^n(0)))} \to_{\mathcal{Q}''} \underline{g(ad(s^n(0)))} \xrightarrow[]{0} \underbrace{f(s^n(0))} \underbrace{f(s^n(0))} \xrightarrow[]{0} \underbrace{f(s^n(0))} \underbrace{f(s^n(0))} \underbrace{f(s^n(0))} \underbrace{f(s^n(0))} \underbrace{f(s^n(0))} \underbrace{f(s^n(0))} \underbrace{f(s^n(0))} \underbrace{f$$

Introduction

Non-dup-ge

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

$$\alpha_1: \quad \mathsf{f}(x) \rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) \quad \alpha_2: \quad \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x)$$
 $\alpha_4: g(l_a(x)) \rightarrow quad(x)$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$
 $\alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} x \qquad \qquad \beta_2: \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{a}(x)$$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))} \to_{\mathcal{Q}''} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{i}(\textit{l}_\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))}) \overset{0}{\to}_{\mathcal{Q}''} \mathsf{g}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))}) \to_{\mathcal{Q}''} \underline{\mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))} \to_{\mathcal{Q}''} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

$$\underline{f(s^n(0))} \to_{\mathcal{Q}''} g(\underline{i(\textit{l}_a(s^n(0)))}) \overset{0}{\to}_{\mathcal{Q}''} \underline{g(\textit{l}_a(s^n(0)))} \to_{\mathcal{Q}''} quad(s^n(0)) \to_{\mathcal{Q}''}^{\frac{1}{2}(n^2+n)} \cdots$$

Introduction

Non-dup-gen.

Concept

Encoding

Propagation

Reculto

Conclusion

Encoding

0

 $f(x) \rightarrow g(a(x))$ $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ α_2 : α_1 :

 $\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)$

 $\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation

rules

Results

Conclusion

Q

$$lpha_1: \quad \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \quad lpha_2: \quad \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
 $lpha_3: \; \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad lpha_4: \quad \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$(\alpha_1, \mathtt{L}, \varepsilon)$$

Encoding

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(\overline{\mathsf{a}}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\ \alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}}), \mathsf{quad}(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}})) \end{array}$$

Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

Encoding

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\textcolor{red}{\mathsf{a}}(\textcolor{red}{x})) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(\textcolor{red}{\mathsf{a}}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\ \alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\textcolor{red}{x}), \mathsf{quad}(\textcolor{red}{x})) \end{array}$$

Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

Encoding

```
\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x))
                                         a(x) \rightarrow b(x)
                                    \alpha_2 :
```

$$\alpha_1: \quad \mathsf{I}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}) \to \mathsf{g}(\frac{\mathsf{a}}{\mathbf{x}}) \quad \alpha_2: \quad \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3: \ \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \ \to \ \mathsf{lin}(x) \ \alpha_4: \ \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \ \to \ \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}), \mathsf{quad}(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}))$$

Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

0

Encoding

```
\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x))
                                         a(x) \rightarrow b(x)
                                    \alpha_2 :
```

 $\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)$

 $\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$ $\alpha_6 : \operatorname{quad}(\operatorname{s}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}})) \rightarrow \operatorname{c}(\operatorname{lin}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}), \operatorname{quad}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}))$

Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

0

Encoding

```
\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x))
                                         a(x) \rightarrow b(x)
                                    \alpha_2 :
```

$$\alpha_3: \ \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \ \to \ \mathsf{lin}(x) \ \alpha_4: \ \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \ \to \ \mathsf{quad}(\frac{x}{x})$$

$$lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \ o \ \mathsf{lin}(x) \ lpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}})) \ o \ \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}), \mathsf{quad}(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}))$$

Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

0

Encoding

```
f(x) \rightarrow g(a(x))
                                          a(x) \rightarrow b(x)
\alpha_1:
                                    \alpha_2 :
```

 $\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)$

 $\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$ α_6 : quad(s($\frac{x}{x}$)) \rightarrow c(lin($\frac{x}{x}$), quad($\frac{x}{x}$))

Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

0

Encoding

```
f(x) \rightarrow g(a(x))
                                                    \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)
                                             \alpha_2 :
\alpha_1:
```

$$\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \quad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)$$

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\frac{x}{x})) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\frac{x}{x}), \mathsf{quad}(\frac{x}{x}))$$

$$\alpha_0 : \min(s(w)) \rightarrow \min(w) = \alpha_0 : \mathsf{quad}(s(w)) \rightarrow \mathsf{c}(\min(w), \mathsf{quad})$$

Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

0

Encoding

```
f(x) \rightarrow g(a(x))
                                                        \mathsf{a}(\frac{x}{x}) \quad 	o \quad \mathsf{b}(\frac{x}{x})
                                                \alpha_2 :
\alpha_1:
\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)
```

 $\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$ $\alpha_6: \operatorname{quad}(\operatorname{s}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}})) \to \operatorname{c}(\operatorname{lin}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}), \operatorname{quad}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}))$

Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

0

Encoding

- $\alpha_1: f(x) \rightarrow g(\mathbf{a}(x))$ $\alpha_2: \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$
- $\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)$
- $\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x),\mathsf{quad}(x))$
- \triangleright Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

0

Set of potentially defined symbol locations Vo

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

Q

- \triangleright Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- ► Set of potentially defined symbol locations Vo

Introduction

Non-dup-gen

Concep

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

Q

```
\begin{array}{lllll} \alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{quad}(x) \\ \alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x)) \end{array}
```

- ► Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- ► Set of potentially defined symbol locations Vo

Introduction

Non-dup-gen

Concep

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

Q

```
\begin{array}{lllll} \alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathbf{x})) & \to & \mathsf{lin}(\mathbf{x}) & \alpha_4: & \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathbf{x})) & \to & \mathsf{quad}(\mathbf{x}) \\ \alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x)) \end{array}
```

- ► Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- ► Set of potentially defined symbol locations Vo

Encoding

```
f(x) \rightarrow g(a(x))
                                                 \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)
\alpha_1:
                                          \alpha_2:
```

- $\alpha_3: g(\mathbf{b}(\mathbf{x})) \rightarrow$ α_4 : $g(\mathbf{a}(\mathbf{x}))$ quad(x)
- $\alpha_6 : \operatorname{quad}(\operatorname{s}(\mathbf{x})) \to \operatorname{c}(\operatorname{lin}(x), \operatorname{quad}(x))$ $\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(\mathbf{z})) \rightarrow$ lin(x)
- \triangleright Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

0

Set of potentially defined symbol locations Vo

Introduction

Non-dup-gen

Concep

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

```
Q
```

- \triangleright Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- ► Set of potentially defined symbol locations Vo

Encoding

```
0
```

```
f(x) \rightarrow g(a(x))
                                                                                 a(x)
                                                                                                         b(x)
\alpha_1:
                                                            \alpha_2:
                                                                      g(a(x)) \rightarrow
\alpha_3: g(b(x))
                                                                                                         quad(x)
                                                            \alpha_{4} :
\alpha_5: \lim(s(x))
                                                            \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\underline{x})) \to \mathsf{c}(\underline{\mathsf{lin}}(\underline{x}), \underline{\mathsf{quad}}(\underline{x}))
```

- Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$
- Set of potentially defined symbol locations Vo

Encoding

```
a(x) \rightarrow b(x)
\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a(x))
                                    \alpha_2 :
```

 $\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)$

 $\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\mathbf{x})) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathbf{x}), \mathsf{quad}(\mathbf{x}))$

 \triangleright Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$

0

Set of potentially defined symbol locations Vo

Introduction

Non-dup-gen

Concep

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

Q

```
\begin{array}{lllll} \alpha_1: & \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\textcolor{red}{\mathtt{a}}(x)) & \alpha_2: & \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \alpha_3: & \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_4: & \mathsf{g}(\textcolor{red}{\mathtt{a}}(\textcolor{red}{x})) & \to & \mathsf{quad}(\textcolor{red}{x}) \\ \alpha_5: & \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{lin}(x) & \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\textcolor{red}{x})) & \to & \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\textcolor{red}{x}), \mathsf{quad}(\textcolor{red}{x})) \end{array}
```

- \triangleright Set of non-ndg locations $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$
- ► Set of potentially defined symbol locations Vo
- Set of locations to be encoded

Encoding non-ndg Locations

 α_6 : quad(s(x)) \rightarrow c(lin(i(x)), quad(i(x)))

 $\Phi(Q)$

 $\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$

Encoding

```
f(x) \rightarrow g(i(l_a(x)))
                                               a(x) \rightarrow b(x)
\alpha_1:
                                         \alpha_2:
\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \alpha_4: g(l_a(x)) \rightarrow quad(l(x))
```

Encoding non-ndg Locations

b(x)

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation

Results

Conclusion

```
\Phi(Q)
```

$$\alpha_1: \quad \mathsf{f}(x) \rightarrow \mathsf{g}(\frac{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}}(x))) \quad \alpha_2: \\ \alpha_3: \; \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \rightarrow \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4:$$

$$lpha_4: \quad \mathsf{g}(\textcolor{red}{l_\mathsf{a}}(x)) \quad o \quad \mathsf{quad}(\textcolor{red}{\mathsf{i}}(x)) \\ lpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \quad o \quad \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\textcolor{red}{\mathsf{i}}(x)), \mathsf{quad}(\textcolor{red}{\mathsf{i}}(x)))$$

 $\mathsf{a}(x) \quad o$

$$\alpha_5 : \operatorname{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \operatorname{lin}(x)$$

$$\beta_2$$
: $i(l_a(x)) \stackrel{0}{\rightarrow} i(a(x))$

$$\beta_1$$
: $i(x) \stackrel{0}{\rightarrow} x$

$$\beta_3$$
: $i(l_a(x)) \stackrel{0}{\rightarrow} i(l_a(i(x)))$

Encoding non-ndg Locations

 $\alpha_6 : \operatorname{quad}(\mathsf{s}(x)) \rightarrow \operatorname{c}(\operatorname{lin}(\mathbf{i}(x)), \operatorname{quad}(\mathbf{i}(x)))$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Result

Conclusio

 $\Phi(\mathcal{Q})$

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(i(l_a(x)))$$

$$\alpha_2: \qquad \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x)$$

$$\alpha_{4}: g(l_{a}(x)) \rightarrow quad(i(x))$$

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$

$$\beta_2$$
: $i(l_a(x)) \stackrel{0}{\rightarrow} i(a(x))$

$$\beta_1$$
: $i(x) \stackrel{0}{\rightarrow} x$

$$\beta_3$$
: $i(l_a(x)) \xrightarrow{0} i(l_a(i(x)))$

- Addition rules
 - Omission (β_1)
 - Execution (β_2)
 - Propagation (β_3)

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Reculte

Conclusion

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

\mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2 : \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha_1': \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathsf{0}))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha_3': \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} x$$

$$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: i(l_a(x)) \xrightarrow{0} i(l_a(i(x)))$$

Propagation rules

 \mathcal{R}_3

 $\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$

 $\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$

 $\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

 α'_1 : f \rightarrow dbl(i($l_a(l_a(0))$))

 $\alpha'_2: dbl(x) \rightarrow d(i(x), i(x))$

 $\alpha'_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 $\beta_1: i(x) \stackrel{0}{\rightarrow}$

x

 $\beta_2: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to}$ i(a(x))

 $\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$

 $dbl(a^2(0)) \rightarrow_{\mathcal{R}_3} d(a^2(0), a^2(0)) \rightarrow_{\mathcal{R}_3}^4 d(b^2(0), b^2(0))$ $f \rightarrow_{\mathcal{R}_3}$

Propagation rules

 \mathcal{R}_3

 $\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$

 $\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$

 $\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

 α'_1 : f \rightarrow dbl(i($l_a(l_a(0))$))

 $\alpha'_2: dbl(x) \rightarrow d(i(x), i(x))$

 $\alpha'_3: a(x) \rightarrow b(x)$

x

 $\beta_1: i(x) \stackrel{0}{\rightarrow}$

 $\beta_2: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to}$ i(a(x))

 $\beta_3: i(l_a(x)) \xrightarrow{0} i(l_a(i(x)))$

 $\underline{f} \to_{\mathcal{R}_3} \quad dbl(a^2(0)) \to_{\mathcal{R}_3} d(a^2(0), a^2(0)) \to_{\mathcal{R}_3}^4 d(b^2(0), b^2(0))$

 $\underline{f} \rightarrow_{\Phi(\mathcal{R}_3)} dbl(i(l_a^2(0)))$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha_1': \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(\mathsf{0}))))$$

$$\alpha_2': \ \operatorname{dbl}(x) \quad \to \quad \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha_3': \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\beta_1: i(x) \stackrel{0}{\rightarrow} x$$

$$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$$

$$\underline{f} \to_{\mathcal{R}_3} \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}^2(0)) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{a}^2(0),\mathsf{a}^2(0)) \to_{\mathcal{R}_3}^4 \mathsf{d}(\mathsf{b}^2(0),\mathsf{b}^2(0))$$

$$\underline{f} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{dbl}(\underline{i(l_a^2(0))}) \overset{\scriptscriptstyle 0}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{dbl}(l_a^2(0))}$$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Result:

Conclusion

 \mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad o \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2 : \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha'_1:$$
 f \rightarrow dbl(i($l_a(l_a(0))$))
 $\alpha'_2:$ dbl(x) \rightarrow d(i(x), i(x))

$$\alpha_3': a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\beta_1: i(x) \stackrel{0}{\rightarrow} x$$

$$S_1$$
 . $I(x) \rightarrow x$

$$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$$

$$\underline{f} \rightarrow_{\mathcal{R}_3} \quad \underline{\mathsf{dbl}(\mathsf{a}^2(0))} \rightarrow_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{a}^2(0),\mathsf{a}^2(0)) \rightarrow_{\mathcal{R}_3}^4 \mathsf{d}(\mathsf{b}^2(0),\mathsf{b}^2(0))$$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{dbl}(\underline{\mathsf{i}}(\underline{l}_{\mathsf{a}}^2(0))) \overset{\mathtt{0}}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{dbl}}(\underline{l}_{\mathsf{a}}^2(0)) \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{i}}(\underline{l}_{\mathsf{a}}(0))), \, \underline{\mathsf{i}}(\underline{l}_{\mathsf{a}}(\underline{l}_{\mathsf{a}}(0)))$$

Propagation rules

 \mathcal{R}_3

 $\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$

 $\alpha_2 : \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$

 $\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

 $\alpha'_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$

 $\alpha'_2: dbl(x) \rightarrow d(i(x), i(x))$

 $\alpha'_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 $\beta_1: i(x) \xrightarrow{0} x$

 $\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$

8/12

 $\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$

 $\underline{f} \to_{\mathcal{R}_3} \quad dbl(a^2(0)) \to_{\mathcal{R}_3} d(a^2(0), a^2(0)) \to_{\mathcal{R}_3}^4 d(b^2(0), b^2(0))$

 $\underline{f} \rightarrow_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \operatorname{dbl}(i(l_a^2(0))) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \operatorname{dbl}(l_a^2(0)) \rightarrow_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \operatorname{d}(i(l_a(l_a(0))), i(l_a(l_a(0))))$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad o \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

 $\alpha_2 : \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$

 $\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha_1': \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathsf{0}))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha'_3:$$
 $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$
 $\beta_1:$ $\mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} x$

$$\rho_1$$
 . ρ_2

$$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$$

$$\underline{f} \to_{\mathcal{R}_3} \quad \underline{dbl(a^2(0))} \to_{\mathcal{R}_3} d(a^2(0), a^2(0)) \to_{\mathcal{R}_3}^4 d(b^2(0), b^2(0))$$

$$\underline{f} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}^2(0))) \overset{0}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{dbl}(\mathit{l}_\mathsf{a}^2(0))} \to_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))),\,\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))$$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad \to \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha'_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha_3': a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \quad x$$

$$\beta_2: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$$

 $\mathsf{dbl}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} \mathsf{d}(\mathsf{i}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}^{\mathsf{n}}(0)),\,\mathsf{i}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}^{\mathsf{n}}(0))) \to_{\Phi(\mathcal{R}_{3})}^{2\mathsf{n}} \cdots$

Introduction

Non-dup-gen

 $\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad o \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$

 $\alpha_2 : \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$

 $\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 \mathcal{R}_3

Propagation rules

Results

Conclusion

 $ightharpoonup \operatorname{rc}_{\mathcal{R}_2}(n) \in \mathcal{O}(1)$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

 $\alpha'_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$

 $\alpha_2': \ \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$

 $\alpha_3': a(x) \rightarrow b(x)$

 $\beta_1: i(x) \stackrel{0}{\rightarrow} x$

 $\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$

 $\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$

ightharpoonup $\operatorname{irc}_{\Phi(\mathcal{R}_3)}(n) \in \mathcal{O}(n)$

 $\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$

 $\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$

Propagation rules

 \mathcal{R}_3

 $\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 $ightharpoonup \operatorname{rc}_{\mathcal{R}_2}(n) \in \mathcal{O}(1)$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

 α'_1 : f \rightarrow dbl(i($l_a(l_a(0))$))

 $\alpha'_2: dbl(x) \rightarrow d(i(x), i(x))$

x

 $\alpha'_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 $\beta_1: i(x) \xrightarrow{0}$

 $\beta_2: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to}$ i(a(x))

 $\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to}$ $i(l_a(i(x)))$

ightharpoonup $\operatorname{irc}_{\Phi(\mathcal{R}_3)}(n) \in \mathcal{O}(n)$

ightharpoonup $\operatorname{irc}'_{\Phi(\mathcal{R}_3)}(n) \in \mathcal{O}(1)$

Introduction

 \mathcal{R}_3

Non-dup-gen

 $\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad o \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$

 $\alpha_2 : \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$

 $\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$

Propagation

rules

Results

Conclusion

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

 $\alpha'_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$

 $\alpha_2': \ \operatorname{dbl}(x) \quad \to \quad \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$

 $\alpha_3': \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$

 $\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \quad x$

 $\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$

 $\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Result:

Conclusion

 \mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad o \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha'_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(\mathsf{0}))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha_3': \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \quad x$$

$$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{0}{\to} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$$

$$\underline{\mathsf{i}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(0)))} \overset{\circ}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} \underline{\mathsf{i}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(\underline{\mathsf{i}}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(0))))} \overset{\circ}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} \underline{\mathsf{i}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(0)))} \overset{\circ}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} \cdots$$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha_1': \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(\mathsf{0}))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha_3': a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} x$$

$$\beta_2: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))$$

$$\underline{i(\mathit{l}_{a}(\mathit{l}_{a}(0)))} \xrightarrow{\circ}_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} i(\mathit{l}_{a}(\underline{i(\mathit{l}_{a}(0))})) \xrightarrow{\circ}_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} \underline{i(\mathit{l}_{a}(\mathit{l}_{a}(0)))} \xrightarrow{\circ}_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} \cdots$$

Introduction

Non-dup-gen

 $\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad o \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$

 $\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$

 \mathcal{R}_3

 $\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

$$\Phi(\mathcal{R}_3)$$

$$\alpha_1': \qquad \mathsf{f} \quad \to \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha_3': \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \quad x$$

$$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))$$

$$\underline{\mathsf{i}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(0)))} \overset{\mathtt{o}}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} \quad \mathit{l}_{\mathsf{a}}(\mathrm{i}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(0))) \quad \overset{\mathtt{o}}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} \ \underline{\mathsf{i}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(\mathit{l}_{\mathsf{a}}(0)))} \overset{\mathtt{o}}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_{3})} \cdot \cdot \cdot$$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad \to \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

 $\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$

 $\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha_1': \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha_3': a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} x$$

$$\beta_2: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))$$

$$\underline{\mathsf{i}^2(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0)))} \overset{\circ}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0))))} \overset{\circ}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \underline{\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0)))} \overset{\circ}{\to}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} \cdots$$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad \to \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

 $\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha'_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\mathrm{i}(x),\mathrm{i}(x))$$

$$\alpha_3': \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \quad x$$

$$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{0}{\to} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))$$

$$i^2(l_a(l_a(0))) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} i(l_a(i(l_a(0)))) \xrightarrow{*}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} b^2(0)$$

Introduction

Non-dup-gen.

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

\mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha'_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha_3': a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \quad x$$

$$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))$$

$$i^2(l_a(l_a(0))) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} i(l_a(i(l_a(0)))) \xrightarrow{*}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} b^2(0)$$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

\mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad o \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

$\Phi(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha'_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}^2(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(\operatorname{i}(x),\operatorname{i}(x))$$

$$\alpha_3': a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\beta_1: i(x) \stackrel{0}{\rightarrow} x$$

$$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{0}{\to} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))$$

$$i^2(l_a(l_a(0))) \xrightarrow{0}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} i(l_a(i(l_a(0)))) \xrightarrow{*}_{\Phi(\mathcal{R}_3)} b^2(0)$$

Introduction

Non-dup-gen

Concept

Encoding

Propagation rules

Results

Conclusion

 \mathcal{R}_3

$$\alpha_1: \qquad \mathsf{f} \quad o \quad \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})))$$

$$\alpha_2: \mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x,x)$$

$$\alpha_3: a(x) \rightarrow b(x)$$

 $\widehat{\Phi}(\mathcal{R}_3)$

$$\alpha'_1: \qquad \mathsf{f} \rightarrow \mathsf{dbl}(\mathsf{i}^2(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$$

$$\alpha_2': \operatorname{dbl}(x) \to \operatorname{d}(i^2(x), i^2(x))$$

$$\alpha_3': a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \quad x$$

$$\beta_2: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))$$

$$\underline{i^2(\mathit{l}_a(\mathit{l}_a(0)))} \xrightarrow[\Phi(\mathcal{R}_3)]{0} i(\mathit{l}_a(i(\mathit{l}_a(0)))) \xrightarrow[\Phi(\mathcal{R}_3)]{0} b^2(0)$$

Introduction

Non-dup-gen.

Concept

Encoding

Propagation

Results

Conclusion

Results

0

 $f(x) \rightarrow g(a(x))$ α_1 :

 α_2 :

 $a(x) \rightarrow b(x)$

 $\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x) \qquad \alpha_4: g(a(x)) \rightarrow quad(x)$

 $\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$

ightharpoonup rc_O(n)

Bounds: (Ω(n^1),∞)

Results

$$\Phi(\mathcal{Q})$$

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(l_a(x)) \quad \alpha_2: a(x) \rightarrow b(x)$$

$$\alpha_3: g(b(x)) \rightarrow lin(x)$$
 $\alpha_4: g(l_a(x)) \rightarrow quad(i(x))$
 $\alpha_5: lin(s(x)) \rightarrow lin(x)$ $\alpha_6: quad(s(x)) \rightarrow c(lin(i(x)), quad(i(x)))$

$$\beta_{-}: i(x) \xrightarrow{0} x$$

$$\beta_1: \quad \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} x$$

$$\beta_2$$

$$\beta_3$$
: i(l_a (:

$$\xrightarrow{0}$$

$$\beta_2: \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \quad \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\stackrel{0}{\rightarrow}$$
 $i(l_2(i(x))$

$$\beta_3: \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{o}}{\to} \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$$

ightharpoonup irc $_{\Phi(\mathcal{O})}(n)$ **Termination could not be shown (Maybe)**

Results

$$\widehat{\Phi}(\mathcal{Q})$$

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(l_a(x))$$

$$_{\mathsf{a}}(x))$$

$$\alpha_2: \quad \mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x)$$

$$(x) \rightarrow$$

$$\alpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \quad \alpha_4: \mathsf{g}(l_a(x)) \to \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))$$

$$lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad lpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)))$$

$$lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$
 $eta_1: \mathsf{i}(x) \stackrel{\mathtt{0}}{\to} x$

$$\beta_2: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \overset{\mathsf{0}}{\to} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$f_{\mathsf{a}}(x))$$

$$\stackrel{\circ}{\rightarrow}$$
 i(a)

$$\beta_3$$
 :

$$\beta_3: \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \stackrel{\mathsf{0}}{\to} \quad l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))$$

$$\xrightarrow{0}$$

$$l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))$$

$$ightharpoonup$$
 irc $_{\widehat{\Phi}(\mathcal{Q})}(n)$

Bounds: $(\Omega(n^1),O(n^2))$

Conclusion

Introduction

Non-dup-ger

Concep

Encoding

Propagation

Poculto

Conclusion

Runtime complexity and ndg-rewriting

- Encoding of TRSs
- Eliminating infinite 0-cost rewriting
- Future work
 - More accurate overapproximation
 - Lemmas
 - Dedicated implementation

Optional innermost

$$egin{array}{lll} lpha_1: & \mathsf{g} &
ightarrow & \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \ lpha_2: & \mathsf{a} &
ightarrow & \mathsf{a} \ lpha_3: & \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) &
ightarrow & \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) \end{array}$$

$$lpha_1': \quad \mathsf{g} \quad o \quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ lpha_2': \quad \mathsf{a} \quad o \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \\ lpha_3': \quad \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) \quad o \quad \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ eta_1: \quad \mathsf{i}(x) \quad \stackrel{\circ}{ o} \quad x \\ eta_2: \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \quad \stackrel{\circ}{ o} \quad \mathsf{i}(\mathsf{a}) \\ \end{array}$$

Infinite nesting depth

\mathcal{R}_4

$$\alpha_1: f(x) \rightarrow g(a,x)$$

$$\alpha_2: g(x, s(y)) \rightarrow g(dbl(x), y)$$

$$\alpha_3: \operatorname{dbl}(x) \rightarrow \operatorname{d}(x,x)$$

$$\alpha_{4}:$$
 a \rightarrow 0

$$\Phi(\mathcal{R}_4)$$

$$\alpha'_1: \qquad \mathsf{f}(x) \rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}), x)$$

 $\alpha'_2: \mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) \rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{i}^\mathsf{k}(l_\mathsf{dbl}(x)), y)$

$$\alpha_3': \operatorname{\mathsf{dbl}}(x) \to \operatorname{\mathsf{d}}(\mathsf{i}^\mathsf{k}(x),\mathsf{i}^\mathsf{k}(x))$$

$$\alpha_4'$$
: a \rightarrow 0

$$f(s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{R}_4} g(a, s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{R}_4}^n g(dbl^n(a), 0)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \mathop{\rightarrow}_{\Phi(\mathcal{R}_4)} \mathsf{g}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}),\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \mathop{\rightarrow}^*_{\Phi(\mathcal{R}_4)} \mathsf{g}(\mathsf{i}^\mathsf{k}(\mathit{l}^\mathsf{n}_\mathsf{dbl}(\mathit{l}_\mathsf{a}),0)$$