# Faculty of Mathematics, Computer Science and Natural Sciences, Research Group Computer Science 2

RWTH Aachen University, Germany

## A Term Encoding to Analyze Runtime Complexity via Innermost Runtime Complexity

Bachelor Colloquium

Simeon Valchev

Reviewers Prof. Dr. Jürgen Giesl apl. Prof. Dr. Thomas Noll

Supervisor Stefan Dollase, M.Sc.

2/18

### Introduction

Introduction

### Example 1.

 $\alpha_1 : \mathsf{add}(x,0) \to x$   $\alpha_2 : \mathsf{add}(x,\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{add}(\mathsf{s}(x),y)$ 

3/18 16.04.2024

# Introduction

Introduction

ncoding

pande coding

nclusio

```
Example 1. \begin{array}{ccc} \alpha_1: \mathsf{add}(x,0) & \to & x \\ \alpha_2: \mathsf{add}(x,\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{add}(\mathsf{s}(x),y) \end{array}
```

3+2 = 4+1 = 5+0 =  $add(s^3(0), s^2(0))$   $\rightarrow a$   $add(s^4(0), s(0))$   $\rightarrow a$   $add(s^5(0), 0)$   $\rightarrow a$ 

16.04.2024

 $\mathsf{add}(\mathsf{s}^3(0),\mathsf{s}^2(0)) \quad \to_{\alpha_2,\,\varepsilon} \quad \mathsf{add}(\mathsf{s}^4(0),\mathsf{s}(0)) \quad \to_{\alpha_2,\,\varepsilon} \quad \mathsf{add}(\mathsf{s}^5(0),0) \quad \to_{\alpha_1,\,\varepsilon} \quad \mathsf{s}^5(0)$ 

### **Motivation**

Introduction

### Example 1.

$$\alpha_1 : \mathsf{add}(x,0) \longrightarrow x$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1:\operatorname{add}(x,0) & \to & x \\ \alpha_2:\operatorname{add}(x,\operatorname{s}(y)) & \to & \operatorname{add}(\operatorname{s}(x),y) \end{array}$$

Automatic complexity analysis

4/18 16.04.2024

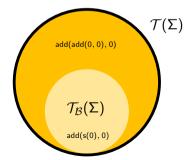
### **Motivation**

Introduction

#### Example 1.

 $\alpha_1 : \mathsf{add}(x,0) \to x$   $\alpha_2 : \mathsf{add}(x,\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{add}(\mathsf{s}(x),y)$ 

- Automatic complexity analysis
- Derivational vs Runtime complexity



4/18 16.04.2024

### **Motivation**

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

### Example 1.

$$\alpha_1 : \mathsf{add}(x,0) \to x$$
  
 $\alpha_2 : \mathsf{add}(x,\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{add}(\mathsf{s}(x),y)$ 

- Automatic complexity analysis
- ► Derivational vs Runtime complexity
- ► Full vs Innermost runtime complexity

$$\operatorname{irc}_{\mathcal{R}}(n) \leq \operatorname{rc}_{\mathcal{R}}(n)$$

## Non-dup-generalized

Introduction

### Example 2.

$$\alpha_1: \mathsf{f}(\mathsf{a}(x),y) \to \mathsf{0}$$

$$\alpha_1 : f(a(x), y) \rightarrow 0$$
 $\alpha_2 : a(s(x)) \rightarrow d(x, x)$ 

5/18 16.04.2024

## Non-dup-generalized

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\alpha_1 : f(a(x), y) \rightarrow 0$$
  
 $\alpha_2 : a(s(x)) \rightarrow d(x, x)$ 

- ► Generalized innermost
  - $f(a(0), a(s(0))) \rightarrow_{\mathcal{R}_2} 0$
  - $f(a(s(0)), a(s(0))) \rightarrow_{\mathcal{R}_2} 0$

## Non-dup-generalized

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\alpha_1 : f(a(x), y) \rightarrow 0$$
  
 $\alpha_2 : a(s(x)) \rightarrow d(x, x)$ 

- Generalized innermost
  - $f(a(0), a(s(0))) \rightarrow_{\mathcal{R}_2} 0$
  - $f(a(s(0)), a(s(0))) \rightarrow_{\mathcal{R}_2} 0$
- ► Non-dup-generalized innermost
  - $\mathsf{a}(\mathsf{s}(\phantom{0}\phantom{0}\phantom{0}\phantom{0}\phantom{0})) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(0,0)$
  - $\bullet \ \mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{a}(\mathsf{s}(0)))) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{a}(\mathsf{s}(0)),\mathsf{a}(\mathsf{s}(0)))$

Expanded Encoding

Conclusion

### Example 2.

 $\alpha_1: \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$   $\alpha_2: \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ 

 $\alpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$   $\alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$ 

 $\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$ 

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\alpha_1: \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$$

$$\alpha_2:\mathsf{a}(x)\to\mathsf{b}(x)$$

$$lpha_{\mathsf{3}}:\mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o\mathsf{lin}(x)$$

$$\alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$

$$\alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{R}_3} g(a(s^n(0)))$$

Expanded Encoding

Conclusion

$$\alpha_1:\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$$
  $\alpha_2:\mathsf{a}(x)\to\mathsf{b}(x)$ 

$$\alpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} g(b(s^n(0))) \to_{\mathcal{R}_3} lin(s^n(0))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{R}_3} g(a(s^n(0)))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

$$lpha_1:\mathsf{f}(x) o\mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$$

$$\alpha_2:\mathsf{a}(x)\to\mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$

$$\alpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$

$$\alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} g(b(s^n(0))) \to_{\mathcal{R}_3} lin(s^n(0))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{R}_3} g(a(s^n(0)))$$

$$ightharpoonup \operatorname{rc}_{\mathcal{R}_3}(n) \in \mathcal{O}(n^2)$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

$$\alpha_1:\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$$
  $\alpha_2:\mathsf{a}(x)\to\mathsf{b}(x)$ 

$$\alpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_{\mathsf{5}}: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_{\mathsf{6}}: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$ightarrow_{\mathcal{R}_3} g(b(s^n(0))) 
ightarrow_{\mathcal{R}_3} lin(s^n(0))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{R}_3} g(a(s^n(0)))$$

$$ightharpoonup \operatorname{rc}_{\mathcal{R}_3}(n) \in \mathcal{O}(n^2)$$

$$ightharpoonup irc_{\mathcal{R}_2}(n) \in \mathcal{O}(n)$$

$$ightarrow_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

$$ightharpoonup$$
 irc $_{\mathcal{R}_3}(n)\in\mathcal{O}(n)$ 

# Concept of the Encoding

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

Example 2.

$$\alpha_1:\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$$

$$\alpha_2:\mathsf{a}(x)\to\mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$

$$\alpha_{4}: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$

$$\alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\rightarrow_{\mathcal{R}_3} g(b(s^n(0))) \rightarrow_{\mathcal{R}_3} lin(s^n(0))$$

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{R}_3} g(a(s^n(0)))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

# Concept of the Encoding

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

 $\alpha_1:\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x))$   $\alpha_2:\mathsf{a}(x)\to\mathsf{b}(x)$ 

 $lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \ \ \, lpha_4: \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) o \mathsf{quad}(x)$ 

 $\alpha_{\mathbf{5}}: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_{\mathbf{6}}: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$ 

$$\to_{\mathcal{R}_3} g(b(s^n(0))) \to_{\mathcal{R}_3} lin(s^n(0))$$

 $\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))$ 

 $\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$ 

16.04.2024

7/18

# Concept of the Encoding

Encoding

Expanded

 $\alpha_1: \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)))$  $\alpha_3: g(b(x)) \to lin(x)$ 

 $\alpha_5: \operatorname{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \operatorname{lin}(x)$ 

 $\beta_1: \mathsf{i}(x) \to x$ 

 $f(s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{R}_2} g(i(l_a(s^n(0))))$ 

 $\alpha_2: \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ 

 $\alpha_4: g(l_a(x)) \to quad(x)$ 

 $\alpha_6$ : quad(s(x))  $\rightarrow$  c(lin(x), quad(x))

 $\beta_2: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{a}(x)$ 

 $\stackrel{0}{\rightarrow}_{\mathcal{R}_3} g(\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \rightarrow_{\mathcal{R}_3} g(\mathsf{b}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \rightarrow_{\mathcal{R}_3} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$ 

 $\stackrel{0}{\rightarrow}_{\mathcal{R}_3} g(l_a(s^n(0))) \rightarrow_{\mathcal{R}_3} quad(s^n(0))$ 

16 04 2024

7/18

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

 $\alpha_1: \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$   $\alpha_2: \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ 

 $\alpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$ 

 $\alpha_{5}: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_{6}: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$ 

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \mathsf{f}(x) o \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\overset{}{\mathsf{a}}(x)) o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\overset{}{\mathsf{x}}), \mathsf{quad}(\overset{}{\mathsf{x}}))$$

Calculating the set of non-ndg locations

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \mathsf{f}(x) o \mathsf{g}(\mathbf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathbf{a}(x)) o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

Calculating the set of non-ndg locations

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \mathsf{f}(\mathbf{x}) o \mathsf{g}(\mathbf{a}(\mathbf{x})) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathbf{a}(x)) o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathbf{x}), \mathsf{quad}(\mathbf{x}))$$

Calculating the set of non-ndg locations

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \mathsf{f}(\mathbf{x}) o \mathsf{g}(\mathbf{a}(\mathbf{x})) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathbf{a}(x)) o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\mathbf{x})) o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathbf{x}), \mathsf{quad}(\mathbf{x}))$$

Calculating the set of non-ndg locations

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \mathsf{f}(\begin{subarray}{ll} $\alpha_1: \mathsf{f}(\begin{subarray}{ll} $\mathbf{x}$ &> & \mathsf{g}(\begin{subarray}{ll} $\mathbf{a}$ &> & \mathsf{g}(\begin{subarray}{ll} $\mathbf{x}$ &> & \mathsf{g}(\begin{subarray}{ll} $$$

Calculating the set of non-ndg locations

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \mathsf{f}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}) o \mathsf{g}(\frac{\mathbf{a}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\frac{\mathbf{a}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}) o \mathsf{quad}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}})) o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}), \mathsf{quad}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}))$$

Calculating the set of non-ndg locations

16.04.2024 8/18

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \mathsf{f}(\begin{subarray}{ll} $\alpha_1: \mathsf{f}(\begin{subarray}{ll} $\mathbf{x}$ &> \mathsf{g}(\begin{subarray}{ll} $\mathbf{a}(\begin{subarray}{ll} $\mathbf{x}$ &> \mathsf{g}(\begin{subarray}{ll} $\mathbf{x}$$$

Calculating the set of non-ndg locations

16.04.2024 8/18

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \mathsf{f}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}) o \mathsf{g}(\frac{\mathbf{a}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}) o \mathsf{b}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\frac{\mathbf{a}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}) o \mathsf{quad}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}})) o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}), \mathsf{quad}(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}))$$

Calculating the set of non-ndg locations

16.04.2024 8/18

 $\alpha_6$ : quad(s( $\frac{x}{x}$ ))  $\rightarrow$  c(lin( $\frac{x}{x}$ ), quad( $\frac{x}{x}$ ))

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \mathsf{f}(rac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}) o \mathsf{g}(rac{\mathsf{a}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}) \qquad \qquad lpha_2: \mathsf{a}(rac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}) o rac{\mathsf{b}(\mathbf{x})}{lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o \mathsf{lin}(x)} \qquad \qquad lpha_4: \mathsf{g}(rac{\mathsf{a}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}) o \mathsf{quad}(rac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}})$$

Calculating the set of non-ndg locations

 $\alpha_5: \operatorname{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \operatorname{lin}(x)$ 

Refining the calculated set

 $\alpha_6$ : quad(s(x))  $\rightarrow$  c(lin(x), quad(x))

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$egin{aligned} &lpha_1:\mathsf{f}(x) o\mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) &lpha_2:\mathsf{a}(x) o\mathsf{b}(x) \ &lpha_3:\mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o\mathsf{lin}(x) &lpha_4:\mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) o\mathsf{quad}(x) \end{aligned}$$

Calculating the set of non-ndg locations

 $\alpha_5: \operatorname{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \operatorname{lin}(x)$ 

Refining the calculated set

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

```
lpha_1: \mathsf{f}(x) 	o \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) 	o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) 	o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
```

- Calculating the set of non-ndg locations
- ► Refining the calculated set

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

```
lpha_1: \mathsf{f}(x) 	o \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) 	o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) 	o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
```

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

```
lpha_1: \mathsf{f}(x) 	o \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) 	o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) 	o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
```

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

```
lpha_1: \mathsf{f}(x) 	o \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) 	o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) 	o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
```

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

8/18

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

```
lpha_1: \mathsf{f}(x) 	o \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) 	o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) 	o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
```

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

8/18

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

```
lpha_1: \mathsf{f}(x) 	o \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) 	o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) 	o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
```

- Calculating the set of non-ndg locations
- ► Refining the calculated set

### Non-ndg Locations

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

```
lpha_1: \mathsf{f}(x) 	o \mathsf{g}(\mathbf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) 	o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathbf{a}(x)) 	o \mathsf{quad}(x) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
```

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

### Non-ndg Locations

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

```
lpha_1: \mathsf{f}(x) 	o \mathsf{g}(\mathbf{a}(x)) \qquad \qquad \alpha_2: \mathsf{a}(x) 	o \mathsf{b}(x) \\ lpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathbf{a}(\mathbf{z})) 	o \mathsf{quad}(\mathbf{z}) \\ lpha_5: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) 	o \mathsf{lin}(x) \qquad \qquad \alpha_6: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(\mathbf{z})) 	o \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathbf{z}), \mathsf{quad}(\mathbf{z}))
```

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

### Encoding non-ndg Locations

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1': \mathsf{f}(x) o \mathsf{g}(\underbrace{\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))})$$
 $lpha_3': \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) o \mathsf{lin}(x)$ 
 $lpha_5': \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) o \mathsf{lin}(x)$ 
 $\beta_1: \mathsf{i}(x) \overset{0}{ o} x$ 

```
\alpha'_{2}: \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)
\alpha'_{4}: \mathsf{g}(\underline{l_{\mathbf{a}}(x)}) \to \mathsf{quad}(\underline{\mathsf{i}(x)})
\alpha'_{6}: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\underline{\mathsf{i}(x)}), \mathsf{quad}(\underline{\mathsf{i}(x)}))
\beta_{2}: \mathsf{i}(l_{\mathbf{a}}(x)) \xrightarrow{\circ} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))
\beta_{3}: \mathsf{i}(l_{\mathbf{a}}(x)) \xrightarrow{\circ} \mathsf{i}(l_{\mathbf{a}}(\mathsf{i}(x)))
```

# Encoding non-ndg Locations

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$\alpha_1':\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(\mathrm{\underline{i}(\mathit{l}_a(x))})$$

$$\alpha_3': \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$

$$\alpha_5': \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$$

$$\beta_1$$
:  $i(x) \stackrel{0}{\to} x$ 

$$\alpha_2': \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha'_{4}: \mathsf{g}(\frac{l_{\mathsf{a}}(x)}{\mathsf{a}(x)}) \to \mathsf{quad}(\frac{\mathsf{i}(x)}{\mathsf{i}(x)})$$

$$\alpha_6' : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{\underline{i}(x)}), \mathsf{quad}(\mathsf{\underline{i}(x)}))$$

$$\beta_2$$
:  $i(l_a(x)) \stackrel{0}{\to} i(a(x))$ 

$$\beta_3$$
:  $i(l_a(x)) \xrightarrow{0} i(l_a(i(x)))$ 

- Addition rules
  - Omission  $(\beta_1)$
  - Execution  $(\beta_2)$
  - Propagation  $(\beta_3)$

ntroduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0}))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x,x) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \end{array}$$

```
\begin{array}{cccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{\mathtt{0}}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\mathtt{0}}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \end{array}
```

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$f o dbl(a(a(0)))$$
 $dbl(x) o d(x,x)$ 
 $a(x) o b(x)$ 

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{0}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{0}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \end{array}$$

$$f \rightarrow_{\mathcal{R}_4} dbl(a(a(0)))$$

$$\to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{b}(0)))$$

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

f o dbl(a(a(0))) dbl(x) o d(x,x) a(x) o b(x)

 $\begin{array}{cccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{0}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{0}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \end{array}$ 

$$f \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(a(a(0)))$$

$$\rightarrow_{\mathcal{R}_4} dbl(a(b(0)))$$

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \overset{\scriptscriptstyle 0}{\to}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathsf{b}(l_\mathsf{a}(0)))$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

```
f 	o dbl(a(a(0)))

dbl(x) 	o d(x,x)

a(x) 	o b(x)
```

```
\begin{array}{lll} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{0}))))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \end{array}
```

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0}))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x,x) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{0}))))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \end{array}$$

$$f \rightarrow_{\mathcal{R}_4} dbl(a(a(0)))$$

$$\rightarrow_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0})),\ \dots)$$

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

 $egin{array}{lll} f & 
ightarrow & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0}))) \ \mathsf{dbl}(x) & 
ightarrow & \mathsf{d}(x,x) \ \mathsf{a}(x) & 
ightarrow & \mathsf{b}(x) \end{array}$ 

 $\begin{array}{cccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{0}))))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{\mathtt{0}}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\mathtt{0}}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \end{array}$ 

$$f \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(a(a(0)))$$

$$\rightarrow_{\mathcal{R}_A} d(a(a(0)), \ldots)$$

$$f \rightarrow_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{0}))))) \stackrel{0}{\rightarrow}_{\mathcal{R}_4}^2 \mathsf{dbl}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(\mathsf{0}))) \rightarrow_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(\mathsf{0}))), \ldots)$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

```
\begin{array}{ccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0}))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x,x) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \end{array}
```

```
\begin{array}{cccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{\circ}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\circ}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\circ}{\to} & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))) \end{array}
```

### Restrictions on starting terms

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0}))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x,x) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))) \end{array}$$

$$\mathsf{dbl}(l_\mathsf{a}^\mathsf{n}(0)) \overset{0}{\to}_{\mathcal{R}_\mathsf{A}} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}^\mathsf{n}(0)), \ldots)$$

### Restrictions on starting terms

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{array}{ccc} f & \rightarrow & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(\mathsf{0}))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \rightarrow & \mathsf{d}(x,x) \\ \mathsf{a}(x) & \rightarrow & \mathsf{b}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x),\mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\mathsf{o}}{\to} & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))) \end{array}$$

$$\begin{split} & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{a}^\mathsf{n}(0),\; \dots) \\ & \mathsf{dbl}(\mathit{l}^\mathsf{n}_\mathsf{a}(0)) \stackrel{\scriptscriptstyle 0}{\to}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}(\mathit{l}^\mathsf{n}_\mathsf{a}(0)),\; \dots) \end{split}$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

 $egin{array}{lll} lpha_1: & \mathsf{g} & 
ightarrow & \mathsf{f(a,a)} \ lpha_2: & \mathsf{a} & 
ightarrow & \mathsf{a} \ lpha_3: & \mathsf{f(}x,\mathsf{a}) & 
ightarrow & \mathsf{f(}x,\mathsf{a}) \end{array}$ 

```
\begin{array}{llll} \alpha_1': & \mathsf{g} & \to & \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ \alpha_2': & \mathsf{a} & \to & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \\ \alpha_3': & \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) & \to & \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ \beta_1: & \mathsf{i}(x) & \stackrel{\mathtt{o}}{\to} & x \\ \beta_2: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) & \stackrel{\mathtt{o}}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}) \end{array}
```

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$\mathsf{g} \to_{\alpha_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\alpha_3} \cdots$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

 $lpha_1: \quad \mathsf{g} \quad o \quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \qquad \qquad \alpha_1': \quad \mathsf{g} \quad o \quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ lpha_2: \quad \mathsf{a} \quad o \quad \mathsf{a} \qquad \qquad \alpha_2': \quad \mathsf{a} \quad o \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \\ lpha_3: \quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) \quad o \quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) \qquad \qquad \alpha_3': \quad \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) \quad o \quad \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ eta_1: \quad \mathsf{i}(x) \quad \stackrel{0}{ o} \quad x \\ eta_2: \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \quad \stackrel{0}{ o} \quad \mathsf{i}(\mathsf{a}) \\ \end{cases}$ 

$$\begin{split} \mathbf{g} &\to_{\alpha_1} \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \to_{\alpha_3} \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \to_{\alpha_3} \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \to_{\alpha_3} \cdots \\ \\ \mathbf{g} &\to_{\alpha_1'} \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{i}(l_{\mathbf{a}})) \xrightarrow{\mathbf{0}}_{\beta_1} \mathbf{f}(\mathbf{a}, l_{\mathbf{a}}) \to_{\alpha_2'} \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{i}(l_{\mathbf{a}})) \xrightarrow{\mathbf{0}}_{\beta_1} \cdots \end{split}$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$g \rightarrow_{\alpha_1} f(a, \underline{a}) \rightarrow_{\alpha_3} f(a, \underline{a}) \rightarrow_{\alpha_3} f(a, \underline{a}) \rightarrow_{\alpha_3} \cdots$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$g \to_{\alpha_1} f(a, \underline{a}) \to_{\alpha_3} f(a, \underline{a}) \to_{\alpha_3} f(a, \underline{a}) \to_{\alpha_3} \cdots$$

$$g \xrightarrow{\circ i}_{\alpha_1} f(a, a) \xrightarrow{\circ i}_{\alpha_2} f(a, a) \xrightarrow{\circ i}_{\alpha_2} f(a, a) \xrightarrow{\circ i}_{\alpha_2} \cdots$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$lpha_1: \quad \mathsf{g} \quad o \quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \qquad \qquad \alpha_1': \quad \mathsf{g} \quad o \quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ lpha_2: \quad \mathsf{a} \quad o \quad \mathsf{a} \qquad \qquad \alpha_2': \quad \mathsf{a} \quad o \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \\ lpha_3: \quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) \quad o \quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) \qquad \qquad \alpha_3': \quad \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) \quad o \quad \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ eta_1: \quad \mathsf{i}(x) \quad & \stackrel{0}{ o} \quad x \\ eta_2: \quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \quad & \stackrel{0}{ o} \quad \mathsf{i}(\mathsf{a}) \\ \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{g} \overset{\circ \mathsf{i}}{\to}_{\alpha_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \overset{\circ \mathsf{i}}{\to}_{\alpha_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \overset{\circ \mathsf{i}}{\to}_{\alpha_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \overset{\circ \mathsf{i}}{\to}_{\alpha_2} \cdots$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$g \xrightarrow{oi}_{\alpha_1} f(a, a) \xrightarrow{oi}_{\alpha_2} f(a, a) \xrightarrow{oi}_{\alpha_2} f(a, a) \xrightarrow{oi}_{\alpha_2} \cdots$$

$$g \xrightarrow{\alpha'_1} f(a, i(l_a)) \xrightarrow{\alpha'_2} f(i(l_a), i(l_a)) \xrightarrow{0}_{\beta_2} f(i(a), i(l_a)) \xrightarrow{0}_{\beta_1} f(a, i(l_a)) \xrightarrow{\alpha'_2} \cdots$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$f o dbl(a(a(0)))$$
 $dbl(x) o d(x,x)$ 
 $a(x) o b(x)$ 

```
\begin{array}{ccccc} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i} \ (l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(\mathsf{0})))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i} \ (x), \mathsf{i} \ (x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \stackrel{\mathsf{0}}{\to} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\mathsf{0}}{\to} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \stackrel{\mathsf{0}}{\to} & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))) \end{array}
```

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0)))) \overset{\circ}{\to}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0))))) \overset{\circ}{\to}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0)))), \ \ldots)$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \overset{\circ}\to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(0))))) \overset{\circ}\to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))), \ \ldots)$$

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0)))) \overset{\scriptscriptstyle 0}{\to}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0))))) \overset{\scriptscriptstyle 0}{\to}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0)))), \ \ldots)$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}\ (\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0)))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}\ (\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0))),\ \ldots)$$

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}\ (\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0)))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}\ (\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0))),\ \ldots)$$

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}^2(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0)))) \overset{\scriptscriptstyle 0}{\to}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}^2(\mathit{l}_\mathsf{a}(\mathit{l}_\mathsf{a}(0))), \, \ldots)$$

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{a},x) \\ \mathsf{g}(x,\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{dbl}(x),y) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x,x) \\ \mathsf{a} & \to & 0 \end{array}$$

```
\begin{array}{cccc} \mathsf{f}(x) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}),x) \\ \mathsf{g}(x,\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{i}\ (l_\mathsf{dbl}(x)),y) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}\ (x),\mathsf{i}\ (x)) \\ & \mathsf{a} & \to & \mathsf{0} \\ & \vdots \end{array}
```

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$f(s^n(0)) \to_{\mathcal{R}_6} g(a,s^n(0)) \qquad \to_{\mathcal{R}_6}^n g(dbl^n(a),0)$$

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{split} f(s^n(0)) \to_{\mathcal{R}_6} g(a,s^n(0)) & \to_{\mathcal{R}_6}^n g(dbl^n(a),0) \\ f(s^n(0)) \to_{\mathcal{R}_6} g(i(\mathit{l}_a),s^n(0)) \to_{\mathcal{R}_6}^* g(i(\mathit{l}_{dbl}^n(a),0) \end{split}$$

Introduction

**Encoding** 

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{split} f(s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{R}_6} g(a,s^n(0)) & \rightarrow_{\mathcal{R}_6}^n g(dbl^n(a),0) \\ f(s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{R}_6} g(i(l_a),s^n(0)) \rightarrow_{\mathcal{R}_6}^* g(i^k(l_{dbl}^n(a),0) \end{split}$$

# Expanded Encoding

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\alpha_1:\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$$
  $\alpha_2:\mathsf{a}(x)\to\mathsf{b}(x)$ 

$$\alpha_3: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4: \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

Bounds: (Ω(n^1),∞)

# Expanded Encoding

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{array}{ll} \alpha_1':\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) & \alpha_2':\mathsf{a}(x)\to\mathsf{b}(x) \\ \alpha_3':\mathsf{g}(\mathsf{b}(x))\to\mathsf{lin}(x) & \alpha_4':\mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x))\to\mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)) \\ \alpha_5':\mathsf{lin}(\mathsf{s}(x))\to\mathsf{lin}(x) & \alpha_6':\mathsf{quad}(\mathsf{s}(x))\to\mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)),\mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))) \\ \beta_1:\mathsf{i}(x)\overset{0}{\to}x & \beta_2:\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))\overset{0}{\to}\mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ & \beta_3:\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))\overset{0}{\to}\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))) \end{array}$$

**Termination could not be shown (Maybe)** 

# Expanded Encoding

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{array}{lll} \alpha_1':\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) & \alpha_2':\mathsf{a}(x)\to\mathsf{b}(x) \\ \alpha_3':\mathsf{g}(\mathsf{b}(x))\to\mathsf{lin}(x) & \alpha_4':\mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x))\to\mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)) \\ \alpha_5':\mathsf{lin}(\mathsf{s}(x))\to\mathsf{lin}(x) & \alpha_6':\mathsf{quad}(\mathsf{s}(x))\to\mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)),\mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))) \\ \beta_1:\mathsf{i}(x)\overset{0}{\to} x & \beta_2:\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))\overset{0}{\to}\mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ & \beta_3:\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))\overset{0}{\to} l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)) \end{array}$$

Bounds:  $(\Omega(n^1), O(n^2))$ 

#### Conclusion

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

- Encoding a TRS
- Useful for automatic complexity analysis
- Future work includes:
  - Improved over-approximation
  - Lemma proofs
  - Implementation in existing tools