Faculty of Mathematics, Computer Science and
Natural Sciences, Research Group Computer Science 2

RWTH Aachen University, Germany

A Term Encoding to Analyze Runtime Complexity via Innermost Runtime Complexity

Bachelor Colloquium

Simeon Valchev

Reviewers
Prof. Dr. Jürgen Giesl
apl. Prof. Dr. Thomas Noll

Supervisor
Stefan Dollase, M.Sc.

16.04.2024

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) &\to \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) &\to \mathsf{quad}(x) \\
\mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x))) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) &\to \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\to \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)) \\
\mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{lin}(x) \\
\mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))) \\
\mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}
$$

Introduction

Example 1.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 : \mathsf{add}(x, 0) &\quad\rightarrow\quad x \\
\alpha_2 : \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) &\quad\rightarrow\quad \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y)
\end{aligned}
$$

Introduction
Encoding
Expanded Encoding
Conclusion

Example 1.

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \mathsf{add}(x, 0) &\to x \\ \alpha_2 : \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) \end{aligned}$$

$$3 + 2 \quad = \quad 4 + 1 \quad = \quad 5 + 0 \quad = \quad 5$$

$$\mathsf{add}(\mathsf{s}^3(0), \mathsf{s}^2(0)) \to_{\alpha_2, \varepsilon} \mathsf{add}(\mathsf{s}^4(0), \mathsf{s}(0)) \to_{\alpha_2, \varepsilon} \mathsf{add}(\mathsf{s}^5(0), 0) \to_{\alpha_1, \varepsilon} \mathsf{s}^5(0)$$

Motivation

Example 1.

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \mathsf{add}(x, 0) &\quad \to \quad x \\ \alpha_2 : \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) &\quad \to \quad \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) \end{aligned}$$

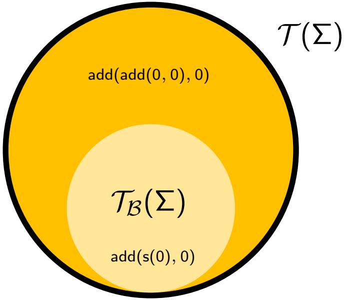
- Automatic complexity analysis

Motivation

Example 1.

$$
\begin{array}{lcl}
\alpha_1 : \mathsf{add}(x, 0) & \to & x \\
\alpha_2 : \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y)
\end{array}
$$

- Automatic complexity analysis
- Derivational vs Runtime complexity



Motivation

Example 1.

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \mathsf{add}(x, 0) &\rightarrow x \\ \alpha_2 : \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) &\rightarrow \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) \end{aligned}$$

- Automatic complexity analysis
- Derivational vs Runtime complexity
- Full vs Innermost runtime complexity

$$\mathrm{irc}_{\mathcal{R}}(n) \leq \mathrm{rc}_{\mathcal{R}}(n)$$

Non-dup-generalized

Example 2.

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \mathsf{f}(\mathsf{a}(x), y) &\quad\to\quad \mathsf{0} \\ \alpha_2 : \mathsf{a}(\mathsf{s}(x)) &\quad\to\quad \mathsf{d}(x, x) \end{aligned}$$

Non-dup-generalized

Example 2.

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \mathsf{f}(\mathsf{a}(x), y) &\to \mathsf{0} \\ \alpha_2 : \mathsf{a}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{d}(x, x) \end{aligned}$$

- Generalized innermost
  - $\mathsf{f}(\mathsf{a}(\quad \mathsf{0} \quad), \mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{0}$
  - $\mathsf{f}(\mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{0})), \mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{0}$

Non-dup-generalized

Example 2.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 : \mathsf{f}(\mathsf{a}(x), y) &\quad\to\quad \mathsf{0} \\
\alpha_2 : \mathsf{a}(\mathsf{s}(x)) &\quad\to\quad \mathsf{d}(x, x)
\end{aligned}
$$

- Generalized innermost
  - $\mathsf{f}(\mathsf{a}(\quad \mathsf{0} \quad), \mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{0}$
  - $\mathsf{f}(\mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{0})), \mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{0}$
- Non-dup-generalized innermost
  - $\mathsf{a}(\mathsf{s}(\qquad \mathsf{0} \quad)) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{0}, \mathsf{0})$
  - $\mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{0})), \mathsf{a}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))$

Non-ndg

Example 2.

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

Non-ndg

Example 2.

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))$$

Non-ndg

Example 2.

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^n(0))) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^n(0))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0)) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^n(0))$$

Non-ndg

Example 2.

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^n(0))) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^n(0))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0)) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))$$

- $\mathsf{rc}_{\mathcal{R}_3}(n) \in \mathcal{O}(n^2)$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^n(0))$$

Non-ndg

Example 2.

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^n(0))) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^n(0))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(0)) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^n(0)))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^n(0))$$

- $\mathrm{rc}_{\mathcal{R}_3}(n) \in \mathcal{O}(n^2)$
- $\mathrm{irc}_{\mathcal{R}_3}(n) \in \mathcal{O}(n)$

Concept of the Encoding

Example 2.

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0))$$

Concept of the Encoding

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)))$$

$$\to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

Concept of the Encoding

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &: \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x))) & \alpha_2 &: \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)\\
\alpha_3 &: \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) & \alpha_4 &: \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)\\
\alpha_5 &: \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) & \alpha_6 &: \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))\\
\beta_1 &: \mathsf{i}(x) \to x & \beta_2 &: \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{a}(x)
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{b}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{lin}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))))$$

$$\xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_3} \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{quad}(\mathsf{s}^\mathsf{n}(0))$$

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

Non-ndg Locations

$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$ $\qquad$ $\alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$

$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$ $\qquad$ $\alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$

$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$ $\qquad$ $\alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$

$$(\alpha_1, \mathtt{L}, \varepsilon)$$

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations

Non-ndg Locations

$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x))$ $\qquad$ $\alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$

$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$ $\qquad$ $\alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$

$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$ $\qquad$ $\alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$

- Calculating the set of non-ndg locations

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Non-ndg Locations

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$

$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

- Calculating the set of non-ndg locations
- Refining the calculated set

Encoding non-ndg Locations

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$\alpha'_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)))$

$\alpha'_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$

$\alpha'_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$

$\alpha'_4 : \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))$

$\alpha'_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$

$\alpha'_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)))$

$\beta_1 : \mathsf{i}(x) \xrightarrow{0} x$

$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$

$\beta_3 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$

Encoding non-ndg Locations

Introduction
Encoding
Expanded Encoding
Conclusion

$\alpha'_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)))$

$\alpha'_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$

$\alpha'_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$

$\alpha'_4 : \mathsf{g}(l_\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))$

$\alpha'_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x)$

$\alpha'_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)))$

$\beta_1 : \mathsf{i}(x) \xrightarrow{0} x$

$\beta_2 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$

$\beta_3 : \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)))$

- Addition rules
  - Omission (β_1)
  - Execution (β_2)
  - Propagation (β_3)

Necessity of propagation rules

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))
\end{aligned}
$$

Necessity of propagation rules

$$\begin{aligned} \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\ \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \end{aligned}$$

$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))$ $\to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{b}(0)))$

Necessity of propagation rules

$\mathsf{f} \to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))$ $\mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(x, x)$ $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$	$\mathsf{f} \to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))))$ $\mathsf{dbl}(x) \to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x))$ $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathsf{i}(x) \xrightarrow{0} x$ $\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) \xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \qquad \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{b}(0)))$$

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(\mathsf{b}(l_\mathsf{a}(0))))$$

Necessity of propagation rules

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\color{red}{\mathsf{i}(}\color{black}{l_{\mathsf{a}}(0)}\color{red}{)}\color{black}{))}) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))
\end{aligned}
$$

Necessity of propagation rules

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x, x) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\color{red}{\mathsf{i}(}l_{\mathsf{a}}(0)\color{red}{)}))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x \\ \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \end{array}$$

$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))$

$\to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)), \ \ldots)$

Necessity of propagation rules

$$\begin{aligned} \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\ \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(0))))) \\ \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)), \ \ldots)$$

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(0))))) \xrightarrow{0}{}^{2}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))), \ \ldots)$$

Necessity of propagation rules

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}
$$

Restrictions on starting terms

$$\begin{aligned} \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\ \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\ \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))) \end{aligned}$$

$$\mathsf{dbl}(l_{\mathsf{a}}^{\mathsf{n}}(0)) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}^{\mathsf{n}}(0)), \ \ldots)$$

Restrictions on starting terms

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x, x) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x))) \end{array}$$

$$\mathsf{dbl}(\mathsf{a}^\mathsf{n}(0)) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{a}^\mathsf{n}(0), \ \ldots)$$

$$\mathsf{dbl}(l_\mathsf{a}^\mathsf{n}(0)) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}^\mathsf{n}(0)), \ \ldots)$$

Encoded rewrite sequences

Introduction

Encoding

Expanded Encoding

Conclusion

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &: & \mathsf{g} &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \\
\alpha_2 &: & \mathsf{a} &\to \mathsf{a} \\
\alpha_3 &: & \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) &\to \mathsf{f}(x,\mathsf{a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &: & \mathsf{g} &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\
\alpha'_2 &: & \mathsf{a} &\to \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \\
\alpha'_3 &: & \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) &\to \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\
\beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\beta_2 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a})
\end{aligned}$$

Encoded rewrite sequences

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &: & \mathsf{g} &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a})\\
\alpha_2 &: & \mathsf{a} &\to \mathsf{a}\\
\alpha_3 &: & \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) &\to \mathsf{f}(x,\mathsf{a})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha'_1 &: & \mathsf{g} &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a}))\\
\alpha'_2 &: & \mathsf{a} &\to \mathsf{i}(l_\mathsf{a})\\
\alpha'_3 &: & \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) &\to \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a}))\\
\beta_1 &: & \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x\\
\beta_2 &: & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a})
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{g} \to_{\alpha_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\alpha_3} \cdots$$

Encoded rewrite sequences

$$\begin{aligned} \alpha_1 :&\quad \mathsf{g} &\to&\quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \\ \alpha_2 :&\quad \mathsf{a} &\to&\quad \mathsf{a} \\ \alpha_3 :&\quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) &\to&\quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha'_1 :&\quad \mathsf{g} &\to&\quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ \alpha'_2 :&\quad \mathsf{a} &\to&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \\ \alpha'_3 :&\quad \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) &\to&\quad \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ \beta_1 :&\quad \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0}&\quad x \\ \beta_2 :&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(\mathsf{a}) \end{aligned}$$

$$\mathsf{g} \to_{\alpha_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\alpha_3} \cdots$$

$$\mathsf{g} \to_{\alpha'_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \xrightarrow{0}_{\beta_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},l_\mathsf{a}) \to_{\alpha'_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \xrightarrow{0}_{\beta_1} \cdots$$

Encoded rewrite sequences

$$\begin{aligned}
\alpha_1 :&\quad \mathsf{g} &\to&\quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a})\\
\alpha_2 :&\quad \mathsf{a} &\to&\quad \mathsf{a}\\
\alpha_3 :&\quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) &\to&\quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1' :&\quad \mathsf{g} &\to&\quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}))\\
\alpha_2' :&\quad \mathsf{a} &\to&\quad \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}})\\
\alpha_3' :&\quad \mathsf{f}(x,l_{\mathsf{a}}) &\to&\quad \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}))\\
\beta_1 :&\quad \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0}&\quad x\\
\beta_2 :&\quad \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(\mathsf{a})
\end{aligned}$$

$$\mathsf{g} \to_{\alpha_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\underline{\mathsf{a}}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\underline{\mathsf{a}}) \to_{\alpha_3} \mathsf{f}(\mathsf{a},\underline{\mathsf{a}}) \to_{\alpha_3} \cdots$$

Encoded rewrite sequences

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: & g &\to f(a,a) \\ \alpha_2 &: & a &\to a \\ \alpha_3 &: & f(x, a) &\to f(x,a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1' &: & g &\to f(a, i(l_a)) \\ \alpha_2' &: & a &\to i(l_a) \\ \alpha_3' &: & f(x, l_a) &\to f(x, i(l_a)) \\ \beta_1 &: & i(x) &\xrightarrow{0} x \\ \beta_2 &: & i(l_a) &\xrightarrow{0} i(a) \end{aligned}$$

$$g \to_{\alpha_1} f(a, \underline{a}) \to_{\alpha_3} f(a, \underline{a}) \to_{\alpha_3} f(a, \underline{a}) \to_{\alpha_3} \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$g \xrightarrow{oi}_{\alpha_1} f(a,a) \xrightarrow{oi}_{\alpha_2} f(a,a) \xrightarrow{oi}_{\alpha_2} f(a,a) \xrightarrow{oi}_{\alpha_2} \cdots$$

Encoded rewrite sequences

$$
\begin{array}{rrcl}
\alpha_1 : & \mathsf{g} & \to & \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \\
\alpha_2 : & \mathsf{a} & \to & \mathsf{a} \\
\alpha_3 : & \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) & \to & \mathsf{f}(x,\mathsf{a})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcl}
\alpha_1' : & \mathsf{g} & \to & \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\
\alpha_2' : & \mathsf{a} & \to & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \\
\alpha_3' : & \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) & \to & \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\
\beta_1 : & \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x \\
\beta_2 : & \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a})
\end{array}
$$

$$\mathsf{g} \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_2} \cdots$$

Encoded rewrite sequences

Introduction
Encoding
Expanded Encoding
Conclusion

$$\begin{aligned} \alpha_1 :&\quad \mathsf{g} &\to&\quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \\ \alpha_2 :&\quad \mathsf{a} &\to&\quad \mathsf{a} \\ \alpha_3 :&\quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) &\to&\quad \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1' :&\quad \mathsf{g} &\to&\quad \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ \alpha_2' :&\quad \mathsf{a} &\to&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) \\ \alpha_3' :&\quad \mathsf{f}(x,l_\mathsf{a}) &\to&\quad \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \\ \beta_1 :&\quad \mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0}&\quad x \\ \beta_2 :&\quad \mathsf{i}(l_\mathsf{a}) &\xrightarrow{0}&\quad \mathsf{i}(\mathsf{a}) \end{aligned}$$

$$\mathsf{g} \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \xrightarrow{\mathsf{oi}}_{\alpha_2} \cdots$$

$$\mathsf{g} \to_{\alpha_1'} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \to_{\alpha_2'} \mathsf{f}(\mathsf{i}(l_\mathsf{a}),\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \xrightarrow{0}_{\beta_2} \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{a}),\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \xrightarrow{0}_{\beta_1} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{i}(l_\mathsf{a})) \to_{\alpha_2'} \cdots$$

Infinite 0-cost rewriting

$$\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}\ \ (l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}\ \ (x), \mathsf{i}\ \ (x)) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}$$

Infinite 0-cost rewriting

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x, x) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}\ (l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}\ (x), \mathsf{i}\ (x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x \\ \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))) \end{array}$$

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(0))))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))), \ \ldots)$$

Infinite 0-cost rewriting

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}\ (l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}\ (x), \mathsf{i}\ (x)) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))
\end{aligned}
$$

$$
\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(0))))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))), \ \ldots)
$$

Infinite 0-cost rewriting

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}\ \ (l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}\ \ (x), \mathsf{i}\ \ (x)) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))
\end{aligned}
$$

$$
\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(0))))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))),\ \ldots)
$$

Infinite 0-cost rewriting

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0)))\\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x)\\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}\ (l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))))\\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}\ (x), \mathsf{i}\ (x))\\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)\\
\mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x\\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))\\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}\ (l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}\ (l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))), \ \ldots)$$

Infinite 0-cost rewriting

$$\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{f} &\to \mathsf{dbl}(\mathsf{i}^2(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}^2(x), \mathsf{i}^2(x)) \\
\mathsf{a}(x) &\to \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{i}(x) &\xrightarrow{0} x \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) &\xrightarrow{0} l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))
\end{aligned}$$

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}\ \ (l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0)))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}\ \ (l_{\mathsf{a}}(l_{\mathsf{a}}(0))), \ldots)$$

Infinite 0-cost rewriting

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{a}(\mathsf{a}(0))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(x, x) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{f} & \to & \mathsf{dbl}(\mathsf{i}^2(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \\ \mathsf{dbl}(x) & \to & \mathsf{d}(\mathsf{i}^2(x), \mathsf{i}^2(x)) \\ \mathsf{a}(x) & \to & \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{i}(x) & \xrightarrow{0} & x \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & \mathsf{i}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{i}(l_\mathsf{a}(x)) & \xrightarrow{0} & l_\mathsf{a}(\mathsf{i}(x)) \end{array}$$

$$\mathsf{f} \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(\mathsf{i}^2(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0)))) \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}_4} \mathsf{dbl}(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))) \to_{\mathcal{R}_4} \mathsf{d}(\mathsf{i}^2(l_\mathsf{a}(l_\mathsf{a}(0))), \ \ldots)$$

Infinite nesting depth

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{a}, x) \\
\mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) &\rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{dbl}(x), y) \\
\mathsf{dbl}(x) &\rightarrow \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a} &\rightarrow 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}), x) \\
\mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) &\rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{i}\ \ (l_{\mathsf{dbl}}(x)), y) \\
\mathsf{dbl}(x) &\rightarrow \mathsf{d}(\mathsf{i}\ \ (x), \mathsf{i}\ \ (x)) \\
\mathsf{a} &\rightarrow 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Infinite nesting depth

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{a}, x) \\
\mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{g}(\mathsf{dbl}(x), y) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a} &\to 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}), x) \\
\mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{g}(\mathsf{i}\ \ (l_{\mathsf{dbl}}(x)), y) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}\ \ (x), \mathsf{i}\ \ (x)) \\
\mathsf{a} &\to 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \qquad \to^{n}_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{dbl}^{\mathsf{n}}(\mathsf{a}), 0)$$

Infinite nesting depth

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{a}, x) \\
\mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{g}(\mathsf{dbl}(x), y) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\
\mathsf{a} &\to 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}), x) \\
\mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{g}(\mathsf{i}\ \ (l_{\mathsf{dbl}}(x)), y) \\
\mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}\ \ (x), \mathsf{i}\ \ (x)) \\
\mathsf{a} &\to 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \qquad \to^{n}_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{dbl}^{\mathsf{n}}(\mathsf{a}), 0)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}), \mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to^{*}_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{i}\ \ (l^{\mathsf{n}}_{\mathsf{dbl}}(\mathsf{a}), 0)$$

Infinite nesting depth

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{a}, x) \\ \mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{g}(\mathsf{dbl}(x), y) \\ \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(x, x) \\ \mathsf{a} &\to 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}), x) \\ \mathsf{g}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{g}(\mathsf{i}^{\mathsf{k}}(l_{\mathsf{dbl}}(x)), y) \\ \mathsf{dbl}(x) &\to \mathsf{d}(\mathsf{i}^{\mathsf{k}}(x), \mathsf{i}^{\mathsf{k}}(x)) \\ \mathsf{a} &\to 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to^{n}_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{dbl}^{\mathsf{n}}(\mathsf{a}), 0)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}), \mathsf{s}^{\mathsf{n}}(0)) \to^{*}_{\mathcal{R}_6} \mathsf{g}(\mathsf{i}^{\mathsf{k}}(l^{\mathsf{n}}_{\mathsf{dbl}}(\mathsf{a}), 0)$$

Expanded Encoding

$$\alpha_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \qquad \alpha_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$
$$\alpha_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4 : \mathsf{g}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{quad}(x)$$
$$\alpha_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(x), \mathsf{quad}(x))$$

Bounds: (Ω(n^1),∞)

Expanded Encoding

$$\alpha_1' : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x))) \qquad \alpha_2' : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha_3' : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_4' : \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) \to \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))$$

$$\alpha_5' : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha_6' : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)))$$

$$\beta_1 : \mathsf{i}(x) \xrightarrow{0} x \qquad \beta_2 : \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) \xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3 : \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) \xrightarrow{0} \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x)))$$

Termination could not be shown (Maybe)

Expanded Encoding

Introduction
Encoding
Expanded Encoding
Conclusion

$$\alpha'_1 : \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x))) \qquad \alpha'_2 : \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

$$\alpha'_3 : \mathsf{g}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha'_4 : \mathsf{g}(l_{\mathsf{a}}(x)) \to \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x))$$

$$\alpha'_5 : \mathsf{lin}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{lin}(x) \qquad \alpha'_6 : \mathsf{quad}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{lin}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{quad}(\mathsf{i}(x)))$$

$$\beta_1 : \mathsf{i}(x) \xrightarrow{0} x \qquad \beta_2 : \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) \xrightarrow{0} \mathsf{i}(\mathsf{a}(x))$$

$$\beta_3 : \mathsf{i}(l_{\mathsf{a}}(x)) \xrightarrow{0} l_{\mathsf{a}}(\mathsf{i}(x))$$

Bounds: (Ω(n^1),O(n^2))

Conclusion

- Encoding a TRS
- Useful for automatic complexity analysis
- Future work includes:
  - Improved over-approximation
  - Lemma proofs
  - Implementation in existing tools