MODELARE ŞI SIMULARE

LABORATOR NR. 8 – SISTEME TERMICE (1), SIMULINK (7)

8.1 Se consideră o sferă cu raza r=0.01 m, scufundată într-un vas cu apă fierbinte. Se cunoaşte coeficientul de transfer de căldură prin convectie $h = 350\, W/(m * ℃)$. Se cunosc densitatea bilei, căldura sa specifică şi conductivitatea sa termică: $\rho = 7850 \frac{kg}{m^3}, c = 440 \frac{J}{kg * ℃}, k = 43 \frac{W}{m * ℃}$. Temperatura apei este $T_f = 100\ ℃$ şi temperatura iniţială a sferei este $T_0 = 25\ ℃$.

a. Determinaţi dacă temperatura sferei poate fi considerată uniformă.

b. Determinaţi modelul dinamic pentru temperatura sferei în funcţie de temperatura apei $\left(T(t) = f\left(T_f(t)\right)\right)$.

c. Pe baza modelului de la pct. b, construiţi modelul Simulink corespunzător.

a. **Numărul BIOT**

$$\boxed{N_B = \frac{hL}{k}}$$

L = dimensiune reprezentativă a obiectului (volumul/aria expusă la convecţie)

Conditia ca sistemul sa poata fi tratat ca unul cu parametri concentrati este:

$N_B < 0.1$ (plăci, cilindri, sfere)

Care este valoarea lungimii (dimensiunii) reprezentative pentru sferă, cub?

Lungimea caracteristică a sferei:

$$\boxed{L_c = \frac{V_{\text{body}}}{A_{\text{surface}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3} r = \frac{0.01}{3}}$$

Numărul Biot (N_B sau Bi):

$$\boxed{Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{350(0.01)}{43(3)} = 2.71 \times 10^{-2} < 0.1}$$

Deci sfera dată poate fi tratată ca un sistem cu parametri concentraţi.

b.

CONSERVAREA ENERGIEI

1

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = q_{\mathrm{hi}} - q_{\mathrm{ho}}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho V c T) = \rho V c \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

2

$$q_{\mathrm{hi}} = \frac{T_{\mathrm{f}} - T}{R}$$

3

$$q_{\mathrm{ho}} = 0.$$

4

$$\rho V c\,(\mathrm{d}T/\mathrm{d}t) = (T_{\mathrm{f}} - T)/R$$

5

$$\rho V c = C$$

6

$$RC\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T = T_{\mathrm{f}}$$

CAPACITANTA TERMICA, REZISTENTA TERMICA, MODELUL DINAMIC

1

$$C = \rho V c = 7850\left(\tfrac{4}{3}\right)(\pi)(0.01)^3(440) = 14.47\,\mathrm{J/°C}$$

2

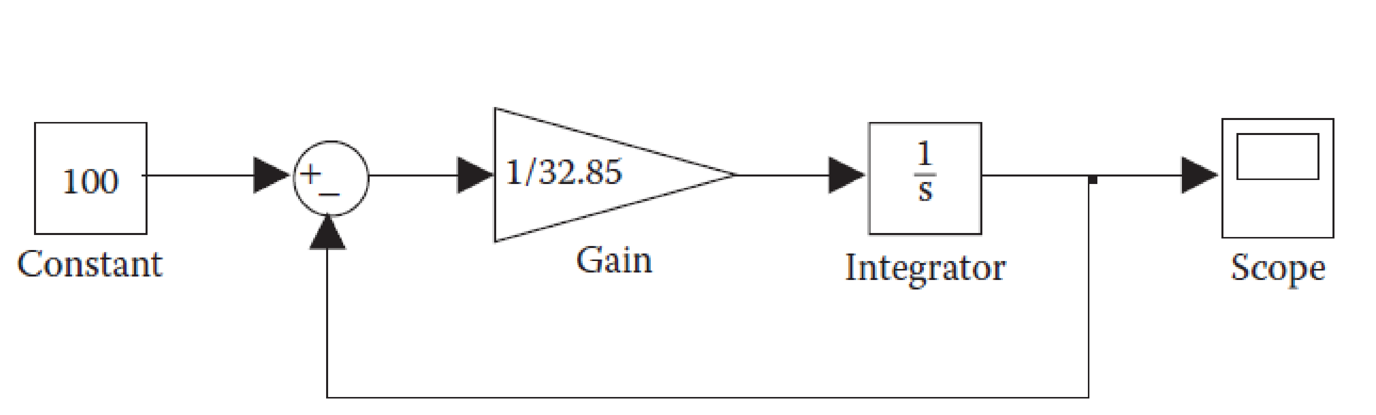
$$R = \frac{1}{hA} = \frac{1}{350(4)(\pi)(0.01)^2} = 2.27\,\mathrm{°C\,s/J}$$

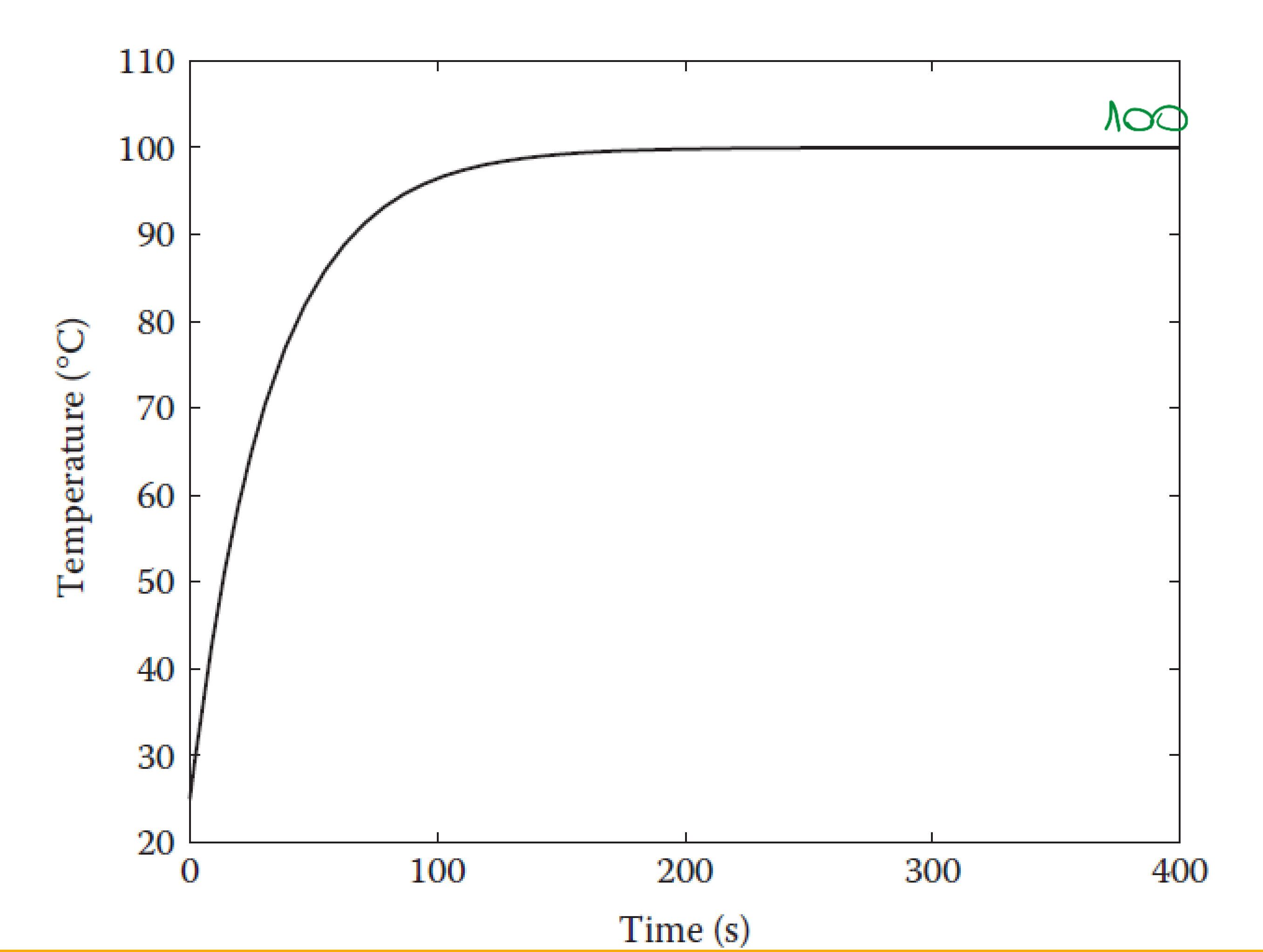
3

$$32.85\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T = T_f$$

c.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{32.85}(100 - T)$$

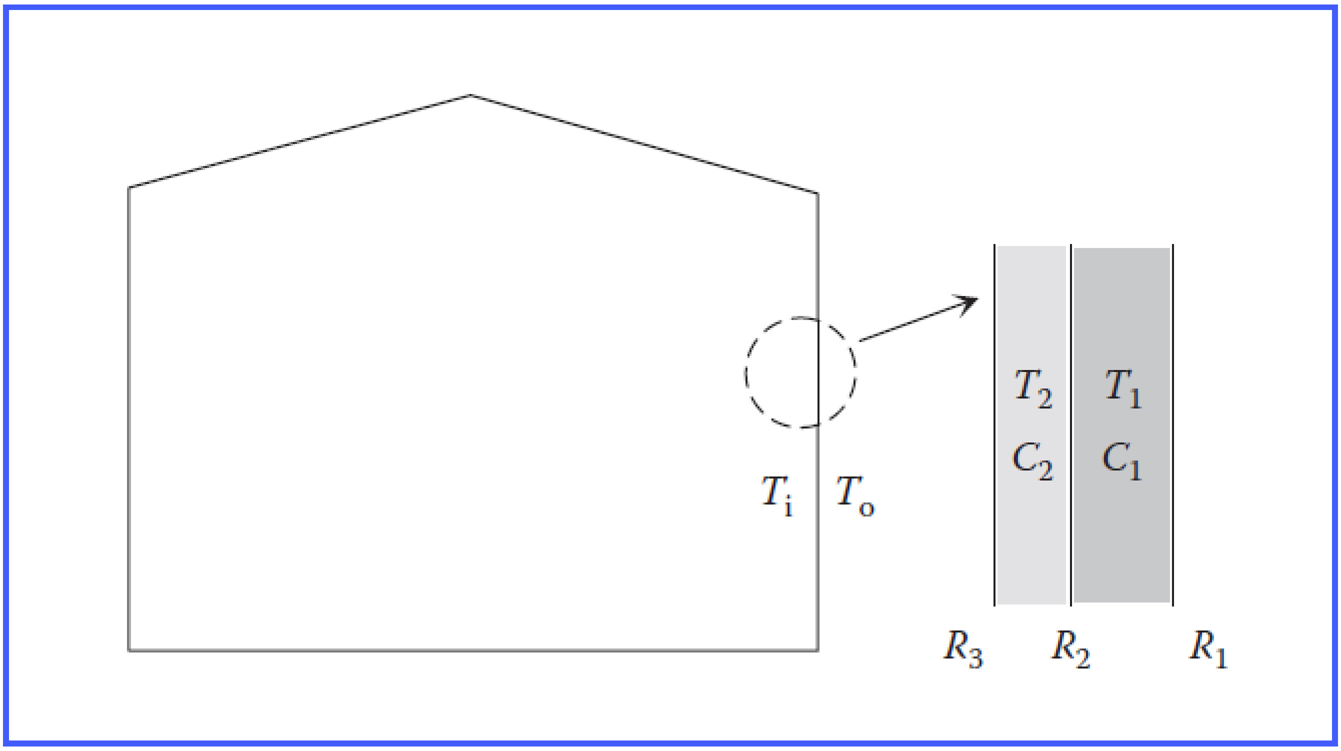




8.2 Se dă o casă cu pereţi realizaţi din două straturi, cu capacitaţile termice cunoscute, C_1 şi C_2. Temperaturile în cele două straturi sunt uniforme, T_1 şi T_2. Se cunosc temperaturile din casă şi din exterior, T_i şi T_o. Cele două straturi schimbă căldura cu aerul prin convecţie, iar rezistenţele termice sunt R_1 şi R_3, respectiv. Rezistenţa termică a interfeţei dintre straturi este R_2.

a. Deduceţi modelul dinamic al sistemului;

b. Deduceţi reprezentarea pe stare a sistemului, dacă ieşirile sunt T_1 şi T_2.



a. Presupun $T_0>T_i$.

CONSERVAREA ENERGIEI PENTRU STRATUL EXTERIOR

1

$$\frac{dU}{dt} = q_{hi} - q_{ho}$$

2

$$\frac{dU}{dt} = C_1 \frac{dT_1}{dt}$$

3

$$q_{hi} = \frac{T_o - T_1}{R_1}$$

4

$$q_{ho} = \frac{T_1 - T_2}{R_2}$$

5

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) T_1 - \frac{1}{R_2} T_2 = \frac{1}{R_1} T_o$$

CONSERVAREA ENERGIEI PENTRU STRATUL INTERIOR

1
$$\frac{dU}{dt} = q_{\text{hi}} - q_{\text{ho}}$$

2
$$\frac{dU}{dt} = C_2 \frac{dT_2}{dt}$$

3
$$q_{\text{hi}} = \frac{T_1 - T_2}{R_2}$$

4
$$q_{\text{ho}} = \frac{T_2 - T_{\text{i}}}{R_3}$$

5
$$C_2 \frac{dT_2}{dt} - \frac{1}{R_2} T_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) T_2 = \frac{1}{R_3} T_{\text{i}}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{R_1} T_{\text{o}} \\ \frac{1}{R_3} T_{\text{i}} \end{Bmatrix}$$

b.

MODELUL PE STARE

1

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_o \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}$$

2

$$\dot{x}_1 = \frac{dT_1}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right)T_1 + \frac{1}{R_2C_1}T_2 + \frac{1}{R_1C_1}T_o$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{R_2C_2}T_1 - \left(\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_3C_2}\right)T_2 + \frac{1}{R_3C_2}T_i$$

3

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right) & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\left(\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_3C_2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_3C_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

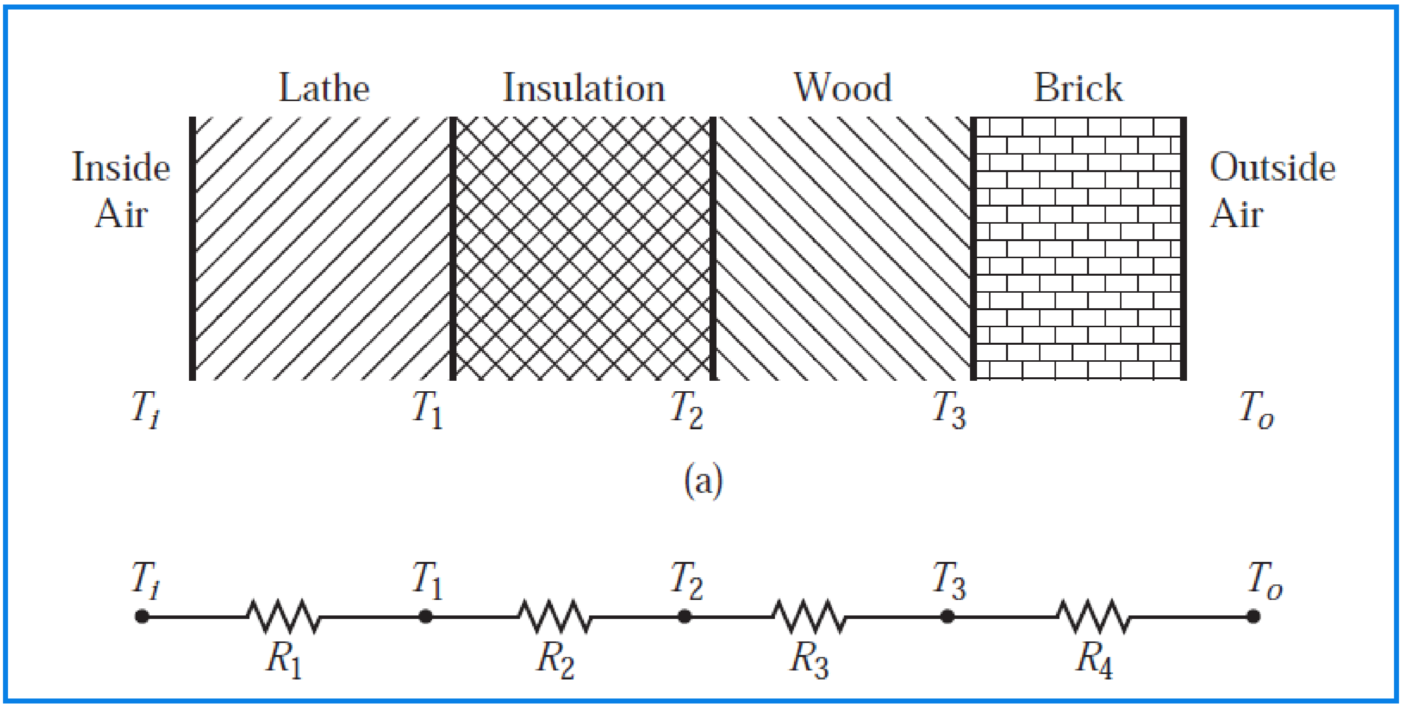
4

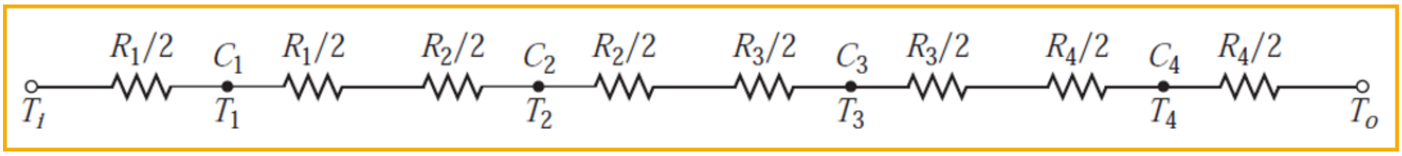
$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Observatie:

Command	Description
`eye(n)`	Creates an $n \times n$ identity matrix.
`eye(size(A))`	Creates an identity matrix the same size as the matrix **A**.
`ones(n)`	Creates an $n \times n$ matrix of 1s.
`ones(m,n)`	Creates an $m \times n$ array of 1s.
`ones(size(A))`	Creates an array of 1s the same size as the array **A**.
`zeros(n)`	Creates an $n \times n$ matrix of 0s.
`zeros(m,n)`	Creates an $m \times n$ array of 0s.
`zeros(size(A))`	Creates an array of 0s the same size as the array **A**.

8.3 Se dă peretele cu structura de mai jos. Se iau în considerare capacităţile termice ale fiecărui strat. Se cere modelul dinamic (pe stare) si simularea acestui model in Simulink si in MATLAB.





$$R_a = \frac{R_1}{2} \qquad R_b = \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2}$$

$$R_c = \frac{R_2}{2} + \frac{R_3}{2} \qquad R_d = \frac{R_3}{2} + \frac{R_4}{2} \qquad R_e = \frac{R_4}{2}$$

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \frac{T_i - T_1}{R_a} - \frac{T_1 - T_2}{R_b}$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R_b} - \frac{T_2 - T_3}{R_c}$$

$$C_3 \frac{dT_3}{dt} = \frac{T_2 - T_3}{R_c} - \frac{T_3 - T_4}{R_d}$$

$$C_4 \frac{dT_4}{dt} = \frac{T_3 - T_4}{R_d} - \frac{T_4 - T_0}{R_e}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{AT} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} T_i \\ T_o \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = -\frac{R_a + R_b}{C_1 R_a R_b} \qquad a_{12} = \frac{1}{C_1 R_b}$$

$$a_{21} = \frac{1}{C_2 R_b} \qquad a_{22} = -\frac{R_b + R_c}{C_2 R_b R_c} \qquad a_{23} = \frac{1}{C_2 R_c}$$

$$a_{32} = \frac{1}{C_3 R_c} \qquad a_{33} = -\frac{R_c + R_d}{C_3 R_c R_d} \qquad a_{34} = \frac{1}{C_3 R_d}$$

$$a_{43} = \frac{1}{C_4 R_d} \qquad a_{44} = -\frac{R_d + R_e}{C_4 R_d R_e}$$

$$b_{11} = \frac{1}{C_1 R_a} \qquad b_{42} = \frac{1}{C_4 R_e}$$

Se dau:

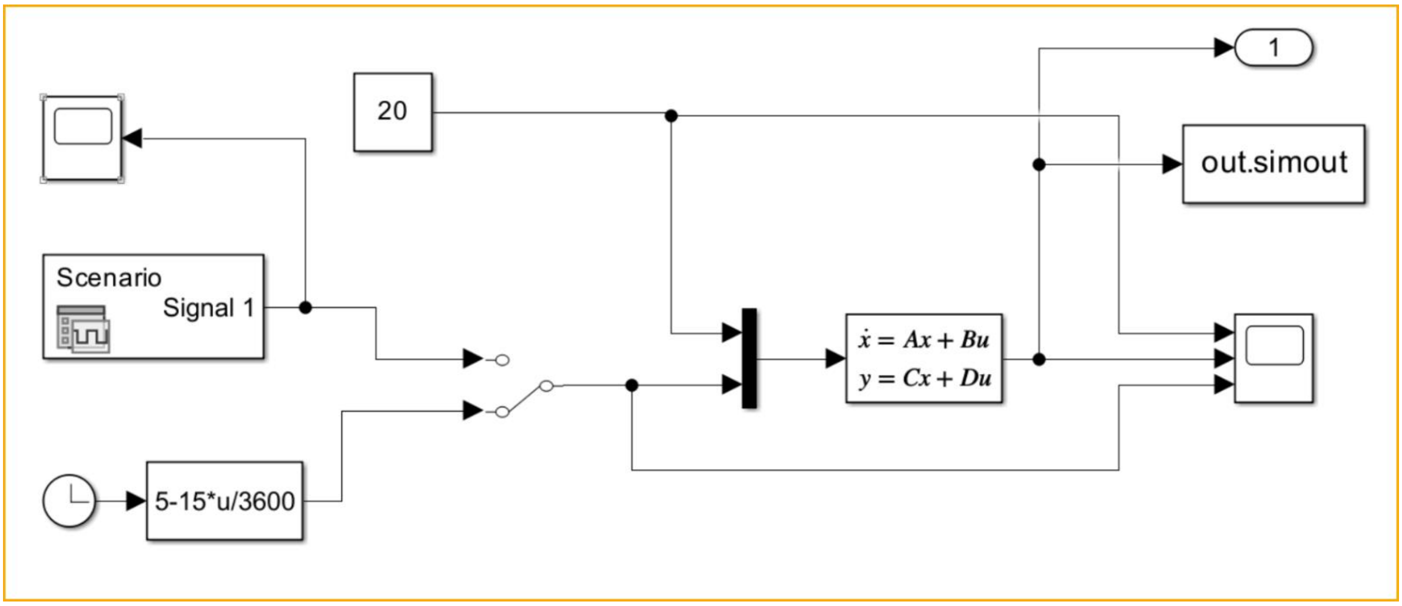
$$R_a = 0.018 \qquad R_b = 2.023 \qquad R_c = 2.204$$
$$R_d = 0.223 \qquad R_e = 0.019$$

$$C_1 = 8720 \qquad C_2 = 6210$$
$$C_3 = 6637 \qquad C_4 = 2.08 \times 10^4$$

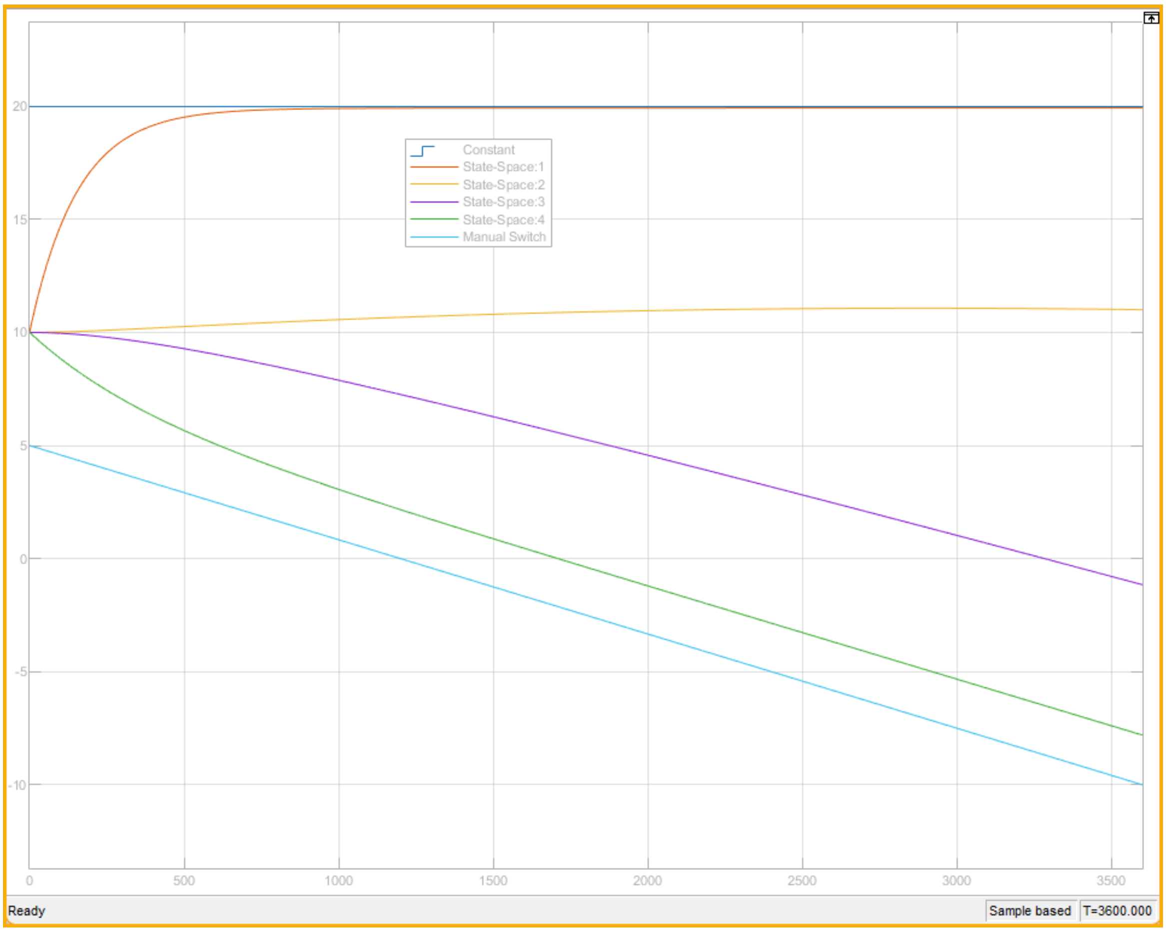
$$T_i(t) = 20$$

$$T_o(t) = 5 - 15t \quad 0 \le t \le 3600 \text{ s}$$

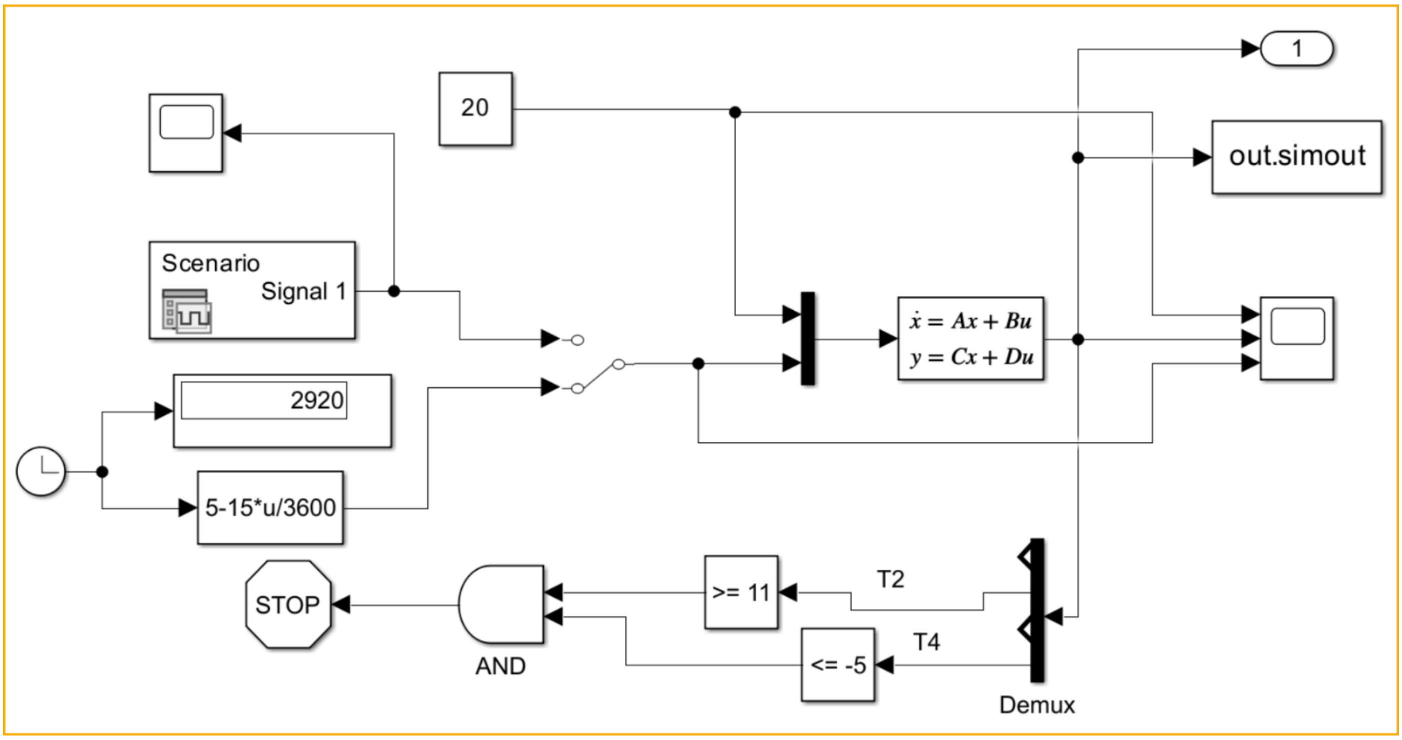
Diagrama Simulink arata ca mai jos. Iesirile se duc si intr-un port de iesire, dar si in spatiul de lucru Matlab. Astfel, ele pot fi vizualizate cu instructiunile Matlab corespunzatoare.



Cele 6 marimi vizualizate pe osciloscop:



Daca ni se cere sa determinam timpul dupa care T_2>=11 **si** T_4<=-5, diagrama Simulink trebuie completata astfel:



În Matlab (**vezi codul .mlx complet postat pe Moodle**):

```
% Rezistente si capacitante termice.
Ra = 0.018; Rb = 2.023; Rc = 2.204; Rd = 0.223; Re = 0.019;
C1 = 8720; C2 = 6210; C3 = 6637; C4 = 20800;

% Coeficientii matricilor.
a11 = -(Ra+Rb)/(C1*Ra*Rb); a12 = 1/(C1*Rb);
a21 = 1/(C2*Rb); a22 = -(Rb+Rc)/(C2*Rb*Rc); a23 = 1/(C2*Rc);
a32 = 1/(C3*Rc); a33 = -(Rc+Rd)/(C3*Rc*Rd); a34 = 1/(C3*Rd);
a43 = 1/(C4*Rd); a44 = -(Rd+Re)/(C4*Rd*Re);
b11 = 1/(C1*Ra); b42 = 1/(C4*Re);

% Matricile A si B.
A = [a11,a12,0,0; a21,a22,a23,0; 0,a32,a33,a34; 0,0,a43,a44];
B = [b11,0; 0,0; 0,0; 0,b42];

% Definim matricile C si D.
% Iesirile sunt cele 4 temperaturi.
C = eye(4);
D = zeros(size(B));

% Cream modelul LTI.
sys = ss(A,B,C,D);

% Cream vectorul de timp (3600 secunde).
t = (0:1:3600);

% Cream vectorul de intrare.
u = [20*ones(size(t));(5-15*ones(size(t)).*t/3600)];

% Raspunsul fortat.
[yforced,t] = lsim(sys,u,t);

% Raspunsul liber (conditii initiale).
[yfree,t] = initial(sys,[10,10,10,10],t);

% Afisam cele patru temperaturi si temperatura exterioara.
plot(t,yforced+yfree,t,u(2,:))

% Constantele de timp.
tau = (-1./real(eig(A)))/60
```

initial(sys,x0) calculates the unforced response of a state-space (ss) model sys with an initial condition on the states specified by the vector x0:

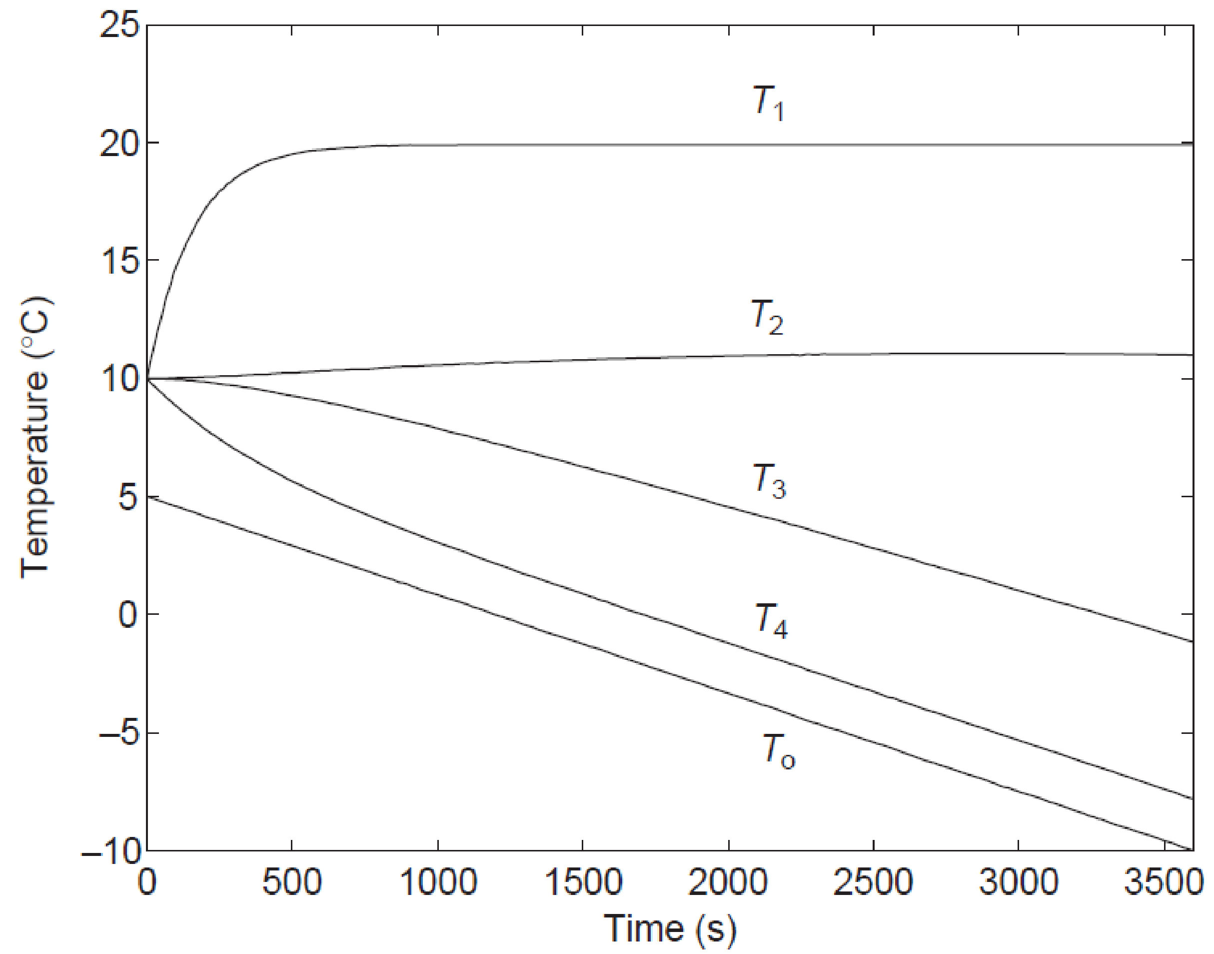
$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$
$$y = Cx$$

initial

Initial condition response of state-space model

Syntax

```
initial(sys,x0)
initial(sys,x0,Tfinal)
initial(sys,x0,t)
initial(sys1,sys2,...,sysN,x0)
initial(sys1,sys2,...,sysN,x0,Tfinal)
initial(sys1,sys2,...,sysN,x0,t)
[y,t,x] = initial(sys,x0)
[y,t,x] = initial(sys,x0,Tfinal)
[y,t,x] = initial(sys,x0,t)
```




```
tau =

    2.5926
  116.7258
   24.4086
    5.9179
```