Nejmenší, největší, minimální a maximální prvky relace

Nechť R je relace uspořádání na množině A

Nejmenší: $a \in A: \forall x \in A: aRx$

Minimální: $a \in A: \forall x \in A: xRa \Rightarrow x = a$

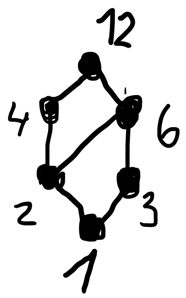
Největší: $a \in A: \forall x \in A: xRa$

Maximální: $a \in A: \forall x \in A: aRx \Rightarrow a = x$

$A = \{1,2,3,4,6,12\}$

12 – Největší a maximální

1 – Nejmenší a minimální

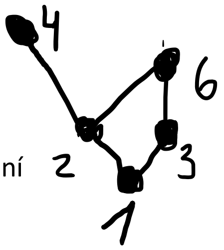


$B = \{1,2,3,4,6\}$

$4,6$ – Maximální

1 – Nejmenší a minimální

Největší NENÍ



$C = \{a, b, c, d\}$

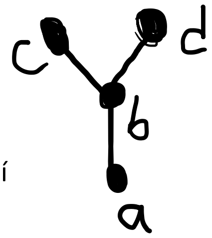
$a \leq b, b \leq c$

$b \leq d$

c, d – Maximální

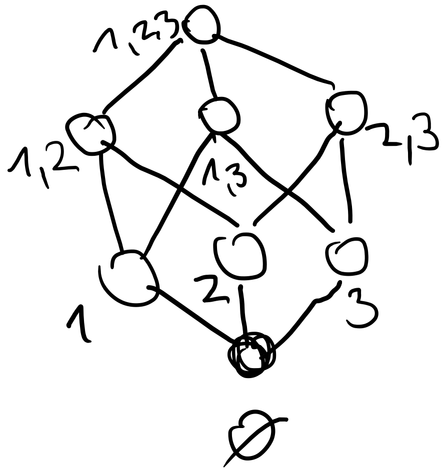
a – Nejmenší a minimální

Největší NENÍ



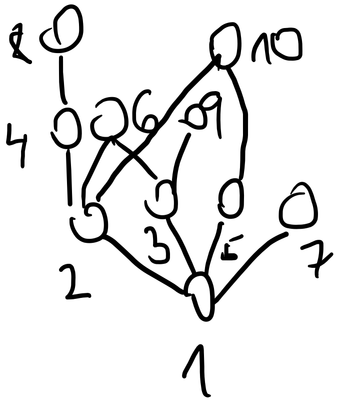
$D = \{1,2,3\}$

$\sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}, \subseteq$



27.11.2019

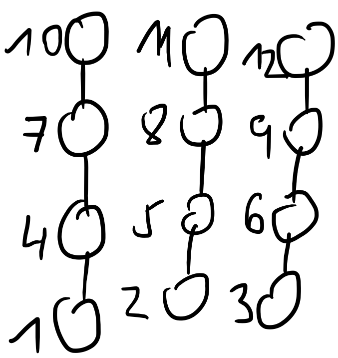
$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ |
$6,7,8,9,10$ – Maximální
1 – Minimální a nejmenší
Největší NENÍ



$\forall a,b \in \mathbb{N}: aRb \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0: b = a + 3k$

1) $aRa \Rightarrow a = a + 3k \quad (k = 0)$ ✓
2) $aRb \Rightarrow bRa$ ✗
3) $(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$ ✓
4) $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$ ✓

Relace částečného uspořádání



$1,2,3$ – Minimální prvky
Maximální, nejmenší ani největší NEJSOU

$\forall a,b \in \mathbb{Z}: aSb \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: b = a + 3k$

1) $aSa \Rightarrow a = a + 3k \quad (k = 0)$ ✓
2) $aSb \Rightarrow bSa$ ✓
3) $(aSb \wedge bSa) \Rightarrow a = b$ ✗
4) $(aSb \wedge bSc) \Rightarrow aSc$ ✓

Relace ekvivalence

Nechť R je relace ekvivalence na množině M. Potom

$$[x]_R = \{m \in M: [m, x] \in R\} = \{m \in M: mRx\}$$

nezveme třídou ekvivalence určenou prvkem x.
Jedná se o množinu všech prvků ekvivalentních s x.

Třída ekvivalence je jednoznačně určena prvkem, který ji patří.
Prvek, kterým třídu určujeme se nazývá reprezentant třídy.

M se rozpadne do tříd, tedy se vytvoří rozklad množiny M. Množinu

$$M \,/\, R = \{[x]_R, x \in M\}$$

nazveme faktorová množina.

$aSb \Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{Z}: \exists k \in \mathbb{Z}: b = a + 3k$

Rozklad množiny:

$$[0]_s = \{\cdots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \cdots\} = \{3k, k \in \mathbb{Z}\} = [3]_s = [6]_s = \cdots$$
$$[1]_s = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\} = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = [4]_s = [7]_s = \cdots$$
$$[2]_s = \{\cdots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \cdots\} = \{3k + 2, k \in \mathbb{Z}\} = [5]_s = [8]_s = \cdots$$

Faktorová množina:

$$\mathbb{Z} \,/\, s = \{[0]_s, [1]_s, [2]_s\}$$

$R = \{[w, w], [x, x], [y, y], [z, z], [x, y], [y, x]\} \Rightarrow M = \{w, x, y, z\}$
Relace ekvivalence.
$[x]_R = \{x, y\}$
$[w]_R = \{w\}$
$[z]_R = \{z\}$

$M/R = \{[x]_R, [w]_R, [z]_R\}$

$\forall a, b \in R: n|(b - a) \Leftrightarrow a \equiv b (mod\, n)$ a je kongruentní s b modulo n

1) $aRa \Rightarrow a \equiv a(mod\, n) = n|(a - a) = n|0$ ✓
2) $aRb \Rightarrow bRa$
$a \equiv b(mod\, n) \Rightarrow b \equiv a(mod\, n)$
$n|(b - a) \Rightarrow n|(a - b)$
$n|(b - a) \equiv n|\big((b - a) \cdot (-1)\big)$ ✓
4) $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc = \big(a \equiv b(mod\, n) \wedge b \equiv c(mod\, n)\big) \Rightarrow a \equiv c(mod\, n)$ ✓

$n = 1: [0]_{\equiv n} = \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/\equiv n = \mathbb{Z}$

$n > 1: [0]_{\equiv n} = \{0, n, \cdots\} = \{k \cdot n, k \in \mathbb{Z}\}$
$[1]_{\equiv n} = \{1, n + 1, \cdots\} = \{n \cdot k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$
$[2]_{\equiv n} = \{2, n + 2, \cdots\} = \{k \cdot n + 2, k \in \mathbb{Z}\}$
$[n - 1]_{\equiv n} = \{k \cdot n - 1, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathbb{Z} \,/\!\equiv n = \{[0]_{\equiv n}, [1]_{\equiv n}, \cdots, [n - 1]_{\equiv n}\}$$