Výroková logika

- Výrok = věta u které lze jednoznačně rozhodnout pravdivost
- Symboly jazyka výrazové logiky
  - Symboly pro proměnné
    - a, b, c, x, y, z, …
  - Symboly pro logické konstanty
    - 1, 0, true, false, T, F
  - Symboly pro logické spojky
    - ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔
  - Pomocné symboly
    - Závorky

- Logické spojky

¬	Negace	$\neg true$	$\longrightarrow$	$false$
∧	Konjunkce	$A \wedge B$	$\longrightarrow$	$A\ a\ zároveň\ B$
∨	Disjunkce	$A \vee B$	$\longrightarrow$	$A\ nebo\ B$
⇒	Implikace	$A \Longrightarrow B$	$\longrightarrow$	$Jestliže\ A, pak\ B$
⇔	Ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	$\longrightarrow$	$A\ právě\ tehdy\ když\ B$

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- Syntaktická pravidla (Atomická formule)
  - Symboly pro proměnné a symboly pro logické konstanty
  - Vytváříme z nich formule podle pravidel:
    1. Každá atomická formule je formulí
    2. Jsou-li A a B formule, potom $\neg A$, $A \wedge B$, … jsou formule
    3. Všechny dobře utvořené formule jazyka jsou výsledkem konečného počtu aplikací pravidel 1. a 2.

p	Atomická formule
1	Atomická formule
$p \wedge q$	formule
$p \wedge$	NENÍ formule

  - Příklad: $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \Leftrightarrow q) \Longrightarrow (p \wedge q)$	
0	0	1	0	0	$\longleftarrow nepravdivá$
0	1	0	0	1	$\longleftarrow pravdivá$
1	0	0	0	1	$\longleftarrow pravdivá$
1	1	1	0	1	$\longleftarrow pravdivá$

$\uparrow$

$pravdivostní\ ohodnocení$

- Formule je splnitelná, existuje-li alespoň jedno pravdivostní ohodnocení ve kterém je pravdivá
- Formule je zvána TAUTOLOGIÍ, je-li pravdivá pro všechna pravdivostní ohodnocení
- Formule je zvána KONTRADIKCÍ, je-li nepravdivá pro všechna pravdivostní ohodnocení

- Příklad: $\big(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)\big) \Rightarrow \neg p$

p	q	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$p \Rightarrow (q \wedge \neg q)$	$\neg p$	$\big(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)\big) \Rightarrow \neg p$	
0	0	1	0	1	1	1	$\longleftarrow$ *pravdivá*
0	1	0	0	1	1	1	$\longleftarrow$ *pravdivá*
1	0	1	0	0	0	1	$\longleftarrow$ *pravdivá*
1	1	0	0	0	0	1	$\longleftarrow$ *pravdivá*

$\uparrow$
tautologie

- Užitečné tautologie

1.	Identita	$p \Leftrightarrow p$
2.	Idempotence	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
3.	Zákon dvojí negace	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$
4.	Zákon vyloučeného třetího	$p \vee \neg p$
5.	De Morganova pravidla	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
6.	Zákon komutativity	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
7.	Zákon asociativity	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
8.	Distributivita	$\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$ $\big(p \vee (q \wedge r)\big) \Leftrightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)$
9.	Absorpce	$\big(p \wedge (p \vee q)\big) \Leftrightarrow p$ $\big(p \vee (p \wedge q)\big) \Leftrightarrow p$
10.	Obměna implikace	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
11.	Negace implikace	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
12.		$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big)$

1) De Morganovo pravidlo

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

2) Zákon asociativity

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3) Distributivita

$\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

4) Absorpce

$\big(p \wedge (p \vee q)\big) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$\big(p \wedge (p \vee q)\big) \Leftrightarrow p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

5) Přepsat na formuli za použití pouze ¬, ∧, ∨ a závorek

$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
$(\neg(x \wedge \neg y) \Rightarrow z)$
$\neg(\neg(x \wedge \neg \mathrm{y}) \wedge \neg z)$
$\neg\big((\neg x \vee y) \wedge \neg z\big)$
$(\neg(\neg x \vee y) \vee z)$
$\underline{(x \wedge \neg y) \vee z}$

$\big((x \Rightarrow y) \Rightarrow z\big) \Leftrightarrow \big((x \wedge \neg y) \vee z\big)$

x	y	z	$x \Rightarrow y$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$	$\neg y$	$x \wedge \neg y$	$(x \wedge \neg y) \vee z$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1

6) Přepsat na formuli za použití pouze ¬, ∧, ∨ a závorek

$x \Rightarrow (y \vee z)$
$\neg\big(x \wedge \neg(y \vee z)\big)$
$\neg x \vee \neg\neg(y \vee z)$
$\underline{\neg x \vee (y \vee z)}$

$\big(x \Rightarrow (y \vee z)\big) \Leftrightarrow \big(\neg x \vee (y \vee z)\big)$

x	y	z	$y \vee z$	$x \Rightarrow (y \vee z)$	$y \vee z$	$\neg x$	$\neg x \vee (y \vee z)$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1