Dokažte přímým důkazem:

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\big((6|x) \Rightarrow (2|x)\big)$$

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(6|x) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = 6k) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = 2 \cdot 3 \cdot k) \Rightarrow (\exists l = 3k \in \mathbb{Z})(x = 2l) \Rightarrow 2|x$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\big(6|(n^3 + 5n)\big)$$

$$n^3 + 5n = n^3 + n - n + 5n = n^3 - n + 6n = n(n^2 - 1) + 6n = (n-1)n(n+1) + 6n$$
$$= \Big(2\big|\big((n-1)n(n+1)\big)\Big) \wedge \Big(3\big|\big((n-1)n(n+1)\big)\Big) \wedge 6|6n \Rightarrow 6|(n^3 + 5n)$$

Dokažte nepřímým důkazem

$$\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big) \Rightarrow \big(\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)\big)$$

$A(x) \Rightarrow B(x)$: Jestliže a^2 je sudé, potom a je sudé

$\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$: Jestliže a je liché, potom a^2 je liché

$$(\exists k \in \mathbb{Z})(a = 2k + 1) \Rightarrow a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$
$$\Rightarrow (\exists l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a = 2l + 1 \Rightarrow \text{Liché}$$

Dokažte sporem

$A(x)$: $\sqrt{2}$ není racionální číslo

$\neg A(x)$: $\sqrt{2}$ je racionální číslo

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, nsd(p, q) = 1 \Rightarrow$NEsoudělná

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\left(\underline{p = 2k}\right) \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{Z})\left(\underline{q = 2l}\right)$$

p i q jsou sudá $\Rightarrow$ jsou soudělná $\Rightarrow$ SPOR $\Rightarrow$původní tvrzení je pravdivé

Důkaz matematickou indukcí

Chceme dokázat, že pro $(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0)$ platí $V(n)$

1) Dokážeme, že výraz platí pro 1. hodnotu $\Rightarrow V(n_0)$
2) Převedeme výrok z n na k (vytvoříme tak předpoklad)
3) Převedeme výrok z k na $k + 1$
4) Dosadíme předpoklad
5) Vypočteme jako zkoušku

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)\right)$$

1) $1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$

$1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot (2+1)}{6}$

$1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

$1 = \dfrac{6}{6}$

$1 = 1$

2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \dfrac{1}{6} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)$

3) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot (k+1) \cdot \big((k+1)+1\big) \cdot (2(k+1)+1)$

4) $\frac{1}{6} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot (k+1) \cdot \big((k+1)+1\big) \cdot (2(k+1)+1)$

5) L:

$\frac{1}{6} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (2k+1) + (k+1)^2$

$(k+1) \cdot \left(\dfrac{1}{6} k \cdot (2k+1) + k + 1\right)$

$(k+1) \cdot \left(\dfrac{1}{6}(2k^2 + k) + k + 1\right)$

$(k+1) \cdot \dfrac{2k^2 + \mathrm{k}}{6} + \dfrac{6k+6}{6}$

$(k+1) \cdot \dfrac{2k^2 + 7\mathrm{k} + 6}{6}$

P:

$\dfrac{1}{6} \cdot (k+1) \cdot \big((k+1)+1\big) \cdot (2(k+1)+1)$

$(k+1) \cdot \dfrac{1}{6} \cdot (k+2) \cdot (2k+3)$

$(k+1) \cdot \dfrac{(k+2) \cdot (2k+3)}{6}$

$(k+1) \cdot \dfrac{2k^2 + 7k + 6}{6}$

L=P ⇒ Výrok platí

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\right)$$

1) $1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$
   $1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$
   $1=1$

2) $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$
   $1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}\cdot k\cdot(k+1)$

3) $1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}\cdot(k+1)\cdot\big((k+1)+1\big)$

4) $\frac{1}{2}\cdot k\cdot(k+1)+(k+1)=\frac{1}{2}\cdot(k+1)\cdot\big((k+1)+1\big)$

5) L:
   $\frac{1}{2}\cdot k\cdot(k+1)+(k+1)$
   $(k+1)\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)$
   $\frac{k^2}{2}+k+\frac{\mathrm{k}}{2}+1$
   $\frac{\mathrm{k}^2+3\mathrm{k}+2}{2}$

   P:
   $\frac{1}{2}\cdot(k+1)\cdot\big((k+1)+1\big)$
   $\frac{1}{2}\cdot(k+1)\cdot(k+2)$
   $\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$
   $\frac{\mathrm{k}^2+3\mathrm{k}+2}{2}$

   L=P ⇒ Výrok platí

$(\forall n \in \mathbb{N})(1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot n - 1) = n^2)$

1) $1 = 1^2$
   $1 = 1$

2) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot n - 1) = n^2$
   $1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot \mathrm{k} - 1) = \mathrm{k}^2$

3) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot \mathrm{k} - 1) + (2 \cdot k + 1) = (k + 1)^2$

4) $\mathrm{k}^2 + (2 \cdot k + 1) = (k + 1)^2$

5) L:
   $\mathrm{k}^2 + (2 \cdot k + 1)$
   $\mathrm{k}^2 + 2k + 1$

   P:
   $(k + 1)^2$
   $\mathrm{k}^2 + 2k + 1$

   L=P ⇒ Výrok platí

$(\forall n \in \mathbb{N})\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2\right)$

1) $1 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot (1+1)^2$

   $1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2$

   $1 = \frac{4}{4}$

   $1 = 1$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$

   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \mathrm{k}^3 = \frac{1}{4} \cdot \mathrm{k}^2 \cdot (\mathrm{k}+1)^2$

3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \mathrm{k}^3 + (\mathrm{k}+1)^3 = \frac{1}{4} \cdot (\mathrm{k}+1)^2 \cdot ((\mathrm{k}+1)+1)^2$

4) $\frac{1}{4} \cdot \mathrm{k}^2 \cdot (\mathrm{k}+1)^2 + (k+1)^3 = \frac{1}{4} \cdot (\mathrm{k}+1)^2 \cdot ((\mathrm{k}+1)+1)^2$

5) L:

   $\frac{1}{4} \cdot \mathrm{k}^2 \cdot (\mathrm{k}+1)^2 + (k+1)^3$

   $(k+1)^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{k}^2}{4} + k + 1\right)$

   P:

   $\frac{1}{4} \cdot (k+1)^2 \cdot (\mathrm{k}+2)^2$

   $\frac{1}{4} \cdot (k+1)^2 \cdot (\mathrm{k}^2 + 4k + 4)$

   $(k+1)^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{k}^2}{4} + k + 1\right)$

   L=P ⇒ Výrok platí