Funkce

Nechť X, Y jsou dvě neprázdné množiny.

Podmnožinu F kartézského součinu $X \times Y$, kde

$$\forall x \in X;\ y, z \in Y: ([x, y] \in F \wedge [x, z] \in F) \Rightarrow y = z$$

nazveme zobrazením (funkcí) z množiny X do množiny Y.

Jestliže $[x, y] \in F$, pak říkáme, že zobrazení F přiřazuje prvku x prvek y.

Prvek x nazýváme $vzor$ a prvek y nazýváme $obraz\ prvku\ x$.

Definiční obor zobrazení F: $D(f) = \{x \in X: \exists y \in Y: [x, y] \in F\} \subseteq X$
Obor hodnot zobrazení F: $H(f) = \{y \in Y: \exists x \in X: [x, y] \in F\} \subseteq Y$

$$[x, y] \in F \Leftrightarrow F \subseteq X \times Y$$
$$y = F(x) \Leftrightarrow F: X \to Y$$

Př:
$A = \{a, b, c, d\}, B = \{1,2,3\}$

$F_1 = \{[a, 1], [b, 2], [a, 3], [c, 1], [d, 2]\}$

NENÍ zobrazení

$F_2 = \{[a, b], [c, d], [1,2]\}$

NENÍ zobrazení
Kdyby $F_2 = \{[a, b], [c, d]\}$, jednalo by se o zobrazení z A do A.

$F_3 = \{[a, 1], [b, 1], [c, 1], [d, 1]\}$

$F_3: A \to B$ $\Rightarrow$je zobrazení
$D(F_3) = A$
$H(F_3) = \{1\}$

$F_4 = \{[1, a], [2, b], [3, c]\}$

$F_4: B \to A$
$D(F_4) = B$
$H(F_4) = \{a, b, c\}$

$M = \{u, v\}, N = \{1,2,3\}$
$F: M \to N; D(F) = M$

$F_1 = \{[u, 1], [v, 1]\}$
$F_2 = \{[u, 2], [v, 2]\}$
$F_3 = \{[u, 3], [v, 3]\}$
$F_4 = \{[u, 1], [v, 2]\}$
$F_5 = \{[u, 1], [v, 3]\}$
$F_6 = \{[u, 2], [v, 1]\}$
$F_7 = \{[u, 2], [v, 3]\}$
$F_8 = \{[u, 3], [v, 1]\}$
$F_9 = \{[u, 3], [v, 2]\}$

Vlastnosti zobrazení

Zobrazení $F: X \to Y$ nazveme:

Injektivní (prosté):

$([x, z] \in F \wedge [y, z] \in F) \Rightarrow x = y$

Subjektivní:

$\forall y \in Y: \exists x \in Y: [x, y] \in F$

Bijektivní

injektivní ∧ subjektivní

Z předchozího příkladu:

$F_1 = \times$
$F_2 = \times$
$F_3 = \text{Injektivní}$
$F_4 = \text{Injektivní}$
$F_5 = \text{Injektivní}$
$F_6 = \text{Injektivní}$
$F_7 = \text{Injektivní}$
$F_8 = \text{Injektivní}$
$F_9 = \text{Injektivní}$

Inverzní zobrazení

Je-li zobrazení $F: X \to Y$ injektivní, můžeme k němu definovat inverzní zobrazení jako

$$F^{-1}: Y \to X$$

kde $F^{-1} = \{[y, x]: [x, y] \in F\}$

Nechť $X_1 \subseteq X$ a $F: X \to Y$. Potom definujeme zúžení (restrikci) zobrazení F na množinu X_1:

$$F / X_1 = \{[x, y] \in F: x \in X_1\}$$

Mějme 2 zobrazení: $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$

$$D(6) \subseteq H(F)$$

potom můžeme definovat sloučení tvrzení $F \circ G: X \to Z$

$$F \circ G = \{[x, z]: [x, y] \in F \wedge [y, z] \in G\}$$

$$z = (F \circ G)(x) = G\big(F(x)\big)$$

$X = \{u, v\}, Y = \{5,6\}, Z = \{x, y, z\}$
$F: X \to Y; G: Y \to Z$

$F = \{[u, 5], [v, 6]\}; 6 = \{[5, y], [6, y]\}$

$F \circ G = \{[u, y], [v, y]\}$

$D(G) = \{5,6\} \subseteq H(F) = \{5,6\}$✔

Nejedná se o prosté, subjektivní a ani o bijektivní zobrazení

$F \circ G: X \to Z$

Mohutnost množin

1) A má stejnou nebo menší mohutnost, než má B, jestliže existuje zobrazení $F: A \to B$, které je injektivní

$$A \preccurlyeq B$$

2) A a B mají stejnou mohutnost, jestliže existuje zobrazení $F: A \to B$, které je bijektivní

$$A \approx B$$

3) A má (ostře) menší mohutnost než B, jestliže $A \preccurlyeq B$ a neplatí $A \approx B$, značíme

$$A \prec B$$

Nechť A, B, C jsou množiny

1) $A \approx A$
2) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$
3) $(A \approx B \wedge B \approx C) \Rightarrow A \approx C$
4) $A \preccurlyeq A$
5) $(A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A) \Rightarrow A \approx B$

Mohutnost konečné množiny

Nechť pro nějaké přirozené číslo n existuje bijekce zobrazující množinu $\{1,2,\cdots,n\}$ na množině A.

Potom říkáme, že A má n prvků.

Číslo n se nazývá mohutnost (kardinalita) množiny A a značíme

$$\#A = n$$

$A = \{1,2,3\} \Rightarrow \#A = 3$
$B = \emptyset \qquad \Rightarrow \#B = 0$

Konečnými množinami nazýváme množiny takové, že $\#A = n, n \in \mathbb{N}_0$, ostatní množiny jsou nekonečné.

Množiny z pohledu mohutnosti můžeme dělit na:

- Konečné
- Nekonečné
  - Spočitatelné (mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$)
  - Nespočitatelné

$X = \mathbb{N}, Y = 2\mathbb{N}$

$F: X \to Y \Rightarrow \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$

$F: n \to 2n$
$1 \to 2$
$2 \to 4$
$3 \to 6$
$\vdots$

$2\mathbb{N} \to$ nekonečná spočitatelná