$M = \{2,3\}$
$M^3 = \{[2,2,2], [2,2,3], [2,3,2], [2,3,3], [3,2,2], [3,2,3], [3,3,2], [3,3,3]\}$

Binární relace

Nechť X je množina. Jakákoliv podmnožina $X \times X$ je binární relace.
Relace R
$R \subseteq X^2$

Jestliže pro $x, y \in X$ platí, že $[x, y] \in R$ pak říkáme, že prvek x je v relaci s prvkem y.
Značíme: xRy

$X = \{a, b, c\}$
$R = \{[a, a], [a, b], [b, a], [b, b], [c, c]\}$
$aRa, \ aRb, \ bRa, \ bRb, \ cRc$

$M = \{1,2,3,4,6,12\}$
$R = \{[1,2], [1,3], [1,4], [1,6], [1,12], [2,2], [2,4], [2,6], [2,12], [3,3], [3,6], [3,12],$
$[4,4], [4,12], [6,6], [6,12], [12,12]\}$

Relace dělitelnosti na množině M (První prvek dělí druhý)

Vlastnosti relací:

Relaci nazýváme:

1) REFLEXIVNÍ, jestliže:
$\forall x \in X; [x, x] \in R; xRx$

2) SYMETRICKÁ, jestliže:
$\forall x, y \in X; [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R; xRy \Rightarrow yRx$

3) ANTISYMETRICKÁ, jestliže:
$\forall x, y \in X; [x, y] \in R \wedge [y, x] \in R \Rightarrow x = y; xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

4) TRANZITIVNÍ, jestliže:
$\forall x, y, z \in X; [x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

5) TRICHOTOMICKÁ, jestliže:
$\forall x, y \in X; [x, y] \in R \vee [y, x] \in R \vee x = y; xRy \vee yRx \vee x = y$

Splňuje-li relace vlastnosti 1, 2 a 4, potom je to relace ekvivalence
Splňuje-li relace vlastnosti 1, 3 a 4, potom je to relace částečného uspořádání
Splňuje-li relace vlastnosti 1, 3, 4 a 5, potom je to relace úplného uspořádání

Příklady:

1) Reflexivita

$\forall a \in \mathbb{N}: aRa \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0: a = a + k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ Relace je reflexivní

2) Symetrie

$\forall a, b \in \mathbb{N}: aRb \Rightarrow bRa$

$aRb \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0: \mathrm{b} = a + k \Rightarrow$ Relace NENÍ symetrická

3) Antisymetrie

$\forall a, b \in \mathbb{N}: (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$

$\exists k \in \mathbb{N}_0: b = a + k$

$\exists l \in \mathbb{N}_0: a = b + l$

$b = b + l + k \Rightarrow k = l = 0 \Rightarrow a = b$ $\Rightarrow$ Relace je antisymetrická

4) Tranzitivita

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (aRb \wedge bRc) = aRc$

$\exists k \in \mathbb{N}_0: b = a + k$

$\exists l \in \mathbb{N}_0: c = b + l$

$c = a + k + l \Rightarrow k = l = 0 \Rightarrow c = a \Rightarrow aRc \Rightarrow$ Relace je tranzitivní

5) Trichotomie

$\forall a, b \in \mathbb{N}: aRb \vee bRa \vee a = b$ Ano („Mrknu a vidím“)

Celkově je tato relace částečně uspořádaná.

$\forall a, b \in \mathbb{N}: aRb \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}: b = k \cdot a)$

1) $b = k \cdot a \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \mathit{Je\ reflexivní}$

2) $[2,1] \Rightarrow 2 = k \cdot 1 \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 \Rightarrow k = 1$

$[1,2] \Rightarrow 1 = k \cdot 2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$1 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow\ \mathit{Není\ symetrická}$

3) $\exists k \in \mathbb{N}_0: b = a + k$

$\exists l \in \mathbb{N}_0: a = b + l$

$l = k = 1 \Rightarrow\ \mathit{Je\ antisymetrická}$

4) $\exists k \in \mathbb{N}_0: b = a \cdot k$

$\exists l \in \mathbb{N}_0: c = b \cdot l$

$c = l \cdot k \cdot a \Rightarrow c = m \cdot k$

$l \cdot k = m \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ \mathit{Je\ tranzitivní}$

5) $\cancel{2R3} \quad \cancel{3R2} \quad \cancel{2 = 3} \quad \Rightarrow\ \mathit{Není\ trichotomická}$

Celkově je relace částečně uspořádaná.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}: aRb \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}: b - a = 3 \cdot k)$

1) $a - a = 3k$
$0 = 3k$
$k = 0 \;\Rightarrow\; Je\; reflektivn$í

2) $\exists k \in \mathbb{Z}: b - a = 3 \cdot k \quad / \cdot (-1)$
$b - a = -3k$
$k = -l$
$a - b = 3l$
$\exists l \in \mathbb{Z}: a - b = 3 \cdot l \Rightarrow\; Je\; symetrick$á

3) $\exists k \in \mathbb{Z}: b - a = 3 \cdot k$
$\exists l \in \mathbb{Z}: a - b = 3 \cdot l$
$0 = 3k + 3l$
$k = -l \in \mathbb{Z} \Rightarrow\; Není\; antisymetrick$á

4) $\exists k \in \mathbb{Z}: b - a = 3 \cdot k$
$\exists l \in \mathbb{Z}: c - b = 3 \cdot l$
$c - a = 3(k + l) \Rightarrow\; Je\; tranzitivn$í

5) Mrknu a vidím, že není

Celkově je relace ekvivalence.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}: aRb \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}: b = a + k)$

1) $a = a + k \Rightarrow\; Není\; reflektivn$í

2) $Není$ $symetrick$á

3) $\exists k \in \mathbb{N}: b = a + k$
$\exists l \in \mathbb{N}: a = b + l$
$b = b + l + k$
$0 = l + k \Rightarrow Není\; antisymetrick$á

4) $\exists k \in \mathbb{N}: b = a + k$
$\exists l \in \mathbb{N}: c = b + l$
4) $c = a + k + l \Rightarrow c = a + m$
$l + k = m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; Je\; tranzitivn$í

5) Mrknu a vidím, že je.

Celkově neodpovídá žádné definici.