$(\forall n \in \mathbb{N})\big(9|(4^n + 15n - 1)\big)$

$n = 1$
$4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 4 + 15 - 1 = 18$

$n = k$
$4^k + 15k - 1$

$n = k + 1$
$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14$

$4 \cdot 4^k + 15k + 14 + 45k - 45k + 18 - 18$
$4 \cdot 4^k + 4 \cdot 15k - 4 - 45k + 18$
$\underbrace{4 \cdot \big(\underbrace{4^k + 15k - 1}_{n=k}\big) - \underbrace{45k}_{5 \cdot 9} + \underbrace{18}_{2 \cdot 9}}_{\text{Výraz platí}}$

Množiny

Zápis

Výčtem prvků $A = \{1,2,3,4,5\}$
Společnou vlastností $B = \{n: n \in \mathbb{N} \wedge n < 8\}$

$x \in B \Leftrightarrow x$ náleží do množiny B

$C = \{1,2,3,1,8,1,1,2,3\} \Leftrightarrow$ Množina C má pouze 4 prvky! (1,2,3,8)

$D = \emptyset \Leftrightarrow$ Prázdná množina

Množina E je podmnožinou množiny F, jestliže $(\forall x)(x \in E \Rightarrow x \in F)$ $E \subseteq F$

G a H si jsou rovny když $G \subseteq H \wedge H \subseteq G$ $G = H$

Operace s množinami

Průnik
$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$

Sjednocení
$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$

Rozdíl
$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge \neg x \in B\}$
$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

Symetrický rozdíl
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
$A \Delta A = \emptyset$
$A \Delta B = B \Delta A$

Doplněk

$A'_B = \{x: x \in B \wedge \neg x \in A\}$
$A'_B = \{x: x \in B \wedge x \notin A\}$

$A = \{2,4,6,8,10\}$
$B = \{1,2,3,5\}$

$A \cap B = \{2\}$
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8,10\}$
$A \setminus B = \{4,6,8,10\}$
$B \setminus A = \{1,3,5\}$

Metoda neurčitého prvku

$X \cap (Y \cup Z) = (x \cap Y) \cup (Y \cap Z)$

$a \in X \cap (Y \cup Z) \Leftrightarrow a \in X \wedge a \in (Y \cup Z) \Leftrightarrow a \in X \wedge (a \in Y \vee a \in Z)$
$\Leftrightarrow (a \in X \wedge a \in Y) \vee (a \in X \wedge a \in Z) \Leftrightarrow a \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \vee (X \setminus Z)$

$a \in X \setminus (Y \cap Z) \Leftrightarrow a \in X \wedge \neg a \in (Y \cap Z) \Leftrightarrow a \in X \wedge \neg(a \in Y \cap a \in Z) \Leftrightarrow$
$a \in X \wedge (a \notin Y \vee a \notin Z) \Leftrightarrow (a \in X \wedge a \notin Y) \vee (a \in X \cap a \notin Z) \Leftrightarrow$
$(a \in X \wedge \neg a \in Y) \vee (a \in X \wedge \neg a \in Z) \Leftrightarrow a \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

$a \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow a \in A \wedge \neg a \in (A \setminus B) \Leftrightarrow a \in A \wedge \neg(a \in A \wedge \neg a \in B) \Leftrightarrow$
$a \in A \wedge (a \notin A \vee a \in B) \Leftrightarrow (a \in A \wedge a \notin A) \vee (a \in A \wedge a \in B) \Leftrightarrow$
$\emptyset \vee (a \in A \wedge a \in B) \Leftrightarrow (a \in A \wedge a \in B) \Leftrightarrow a \in (A \cap B)$

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

$a \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow a \in (A \setminus B) \wedge a \notin C \Leftrightarrow (a \in A \wedge a \notin B) \wedge a \notin C \Leftrightarrow$
$a \in A \wedge (a \notin B \wedge a \notin C) \Leftrightarrow a \in A \vee \neg(a \in B \vee a \in C) \Leftrightarrow a \in A \setminus (B \cup C)$

$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

$a \in (A \cap B) \setminus C \Leftrightarrow (a \in A \wedge a \in B) \wedge a \notin C \Leftrightarrow (a \in A \wedge a \notin C) \wedge (a \in B \wedge a \notin C) \Leftrightarrow$
$a \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$