Všechny tvary přímky (2D)

$A[-1;1], B[7;-4]$
$\overrightarrow{S_p} = \overrightarrow{AB} = B - A = (7-(-1); -4-1) = (8;-5)$
$\overrightarrow{n_p} = (5;8)$

Parametrický:

$$
\begin{aligned}
x &= -1 + 8t \\
y &= 1 - 5t;\ t \in R
\end{aligned}
$$

A $\overrightarrow{S_p}$

Převod na obecný:

$$
\begin{aligned}
x &= -1 + 8t && /\cdot 5 \\
y &= 1 - 5t;\ t \in R && /\cdot 8
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
5x &= -5 + 40t \\
8y &= 8 - 40t
\end{aligned}
\right] +
$$

$$
\begin{aligned}
&5x + 8y = -3 \\
&5x + 8y - 3 = 0
\end{aligned}
$$

Obecný:

$$
\begin{aligned}
&ax + by + c = 0 \\
&a, b \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_p} \\
&x, y \ \Rightarrow\ A \\
&5 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + c = 0 \\
&8 - 5 + c = 0 \\
&c = -3 \\
&5x + 8y - 3 = 0
\end{aligned}
$$

Směrnicový:

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$$
\begin{aligned}
&5x + 8y - 3 = 0 \\
&8y = -5x + 3 \\
&y = -\frac{5}{8}x + \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

1)

Obecný tvar, $K[0;-3], L[5;0]$
$\overrightarrow{\mathrm{S_p}} = \overrightarrow{\mathrm{KL}} = L - K = \big(5-0; 0-(-3)\big) = (5;3)$
$\overrightarrow{\mathrm{n_p}} = (3;-5)$
$3x - 5y + c = 0$
$3 \cdot 0 - 5 \cdot (-3) + c = 0$
$15 + c = 0$
$c = -15$
$3x - 5y - 15 = 0$

2)

Obecný tvar, $K[0;3], L[-2;0]$
$\overrightarrow{\mathrm{S_p}} = \overrightarrow{\mathrm{KL}} = L - K = (-2-0; 0-3) = (-2;-3)$
$\overrightarrow{\mathrm{n_p}} = (3;-2)$
$3x - 2y + c = 0$
$3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + c = 0$
$-6 + c = 0$
$c = 6$
$3x - 2y + 6 = 0$

Vzájemná poloha dvou přímek (2D)

1. Totožné $\mathrm{p} \cap \mathrm{q} = \mathrm{p} = \mathrm{q}$ ∞ mnoho řešení
2. Rovnoběžné $\mathrm{p} \cap \mathrm{q} = \emptyset$ 0 řešení
3. Různoběžné $\mathrm{p} \cap \mathrm{q} = \{S\}$ 1 řešení

1)

Jaká je vzájemná poloha přímek p a q?

$p: A[4;5], B[2;4]$
$\overrightarrow{\mathrm{S_p}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = B - A = (-2;-1)$
$x = 4 - 2t$
$y = 5 - t$
$x = 4 - 2t$
$-2y = -10 + 2t$
$x - 2y = -6$
$x - 2y + 6 = 0$

$q: C[2;1], D[3;4]$
$\overrightarrow{\mathrm{S_q}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} = D - C = (2;3)$
$x = 2 + r$
$y = 1 + 3r$
$-3x = -6 - 3r$
$y = 1 + 3r$
$-3x + y = -5$
$3x - y - 5 = 0$

$x - 2y + 6 = 0$
$3x - y - 5 = 0 / \cdot (-2)$

$x - 2y + 6 = 0$
$-6x + 2y + 10 = 0$

$-5x + 16 = 0$
$x = \frac{16}{5} \Rightarrow 1\ \check{r}e\check{s}en\acute{\imath} \Rightarrow r\mathring{u}znob\check{e}\check{z}n\acute{e} \Rightarrow v\acute{y}po\check{c}et\ pr\mathring{u}se\check{c}\acute{\imath}ku\ S$

$3x - y - 5 = 0$

$y = 3 \cdot \frac{16}{5} - 5$

$y = \frac{48}{5} - \frac{25}{5}$

$y = \frac{23}{5}$

$S = \left\{ \left[\frac{16}{5}; \frac{23}{5} \right] \right\}$

2)

Jaká je vzájemná poloha přímek p a q?

$x = -6 + 7t$
y = 5 + 2t
$-2x = 12 - 14t$
$7y = 35 + 14t$
$2x - 7y + 47 = 0$

$y = \frac{2}{7}x + 6$
$7y = 2x + 42$
$2x - 7y + 42 = 0$

$2x - 7y + 47 = 0$
$2x - 7y + 42 = 0$
$-5 = 0 \Rightarrow 0 \text{ řešení} \Rightarrow rovnoběžné$

Analitická geometrie v prostoru

Přímka je zadaná POUZE parametricky

p: $x: A + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{S_p}}$
$x = \mathrm{a}_1 + t \cdot \mathrm{s}_1$
$x = \mathrm{a}_2 + t \cdot \mathrm{s}_2$
$x = \mathrm{a}_3 + t \cdot \mathrm{s}_3$

Rovina P je určena

1. Třemi body, které NELEŽÍ na jedné přímce
2. Jedním bodem a dvěma leneárně NEZÁVISLÝMY vektory (LNZ)

$P: X = A + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{S_p}} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{S_q}}$

$P: ax + by + cz + d = 0 \leftarrow a, b, c \leftarrow \overrightarrow{\mathrm{n_q}} \leftarrow \overrightarrow{\mathrm{S_p}} \times \overrightarrow{\mathrm{S_q}}$

1)

$A[2;1;6], B[0;-1;-6], C[-1;2;0]$

$\overrightarrow{\mathrm{S_p}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = B - A = (0-2;-1-1;-6-6) = (-2;-2;-12) = (1;1;6)$

$\overrightarrow{\mathrm{S_q}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} = A - C = (2-(-1);1-2;6-0) = (3;-1;6)$

$\overrightarrow{\mathrm{S_p}}\ není\ násobkem\ \overrightarrow{\mathrm{S_q}} \ \Rightarrow\ LNZ$

$\overrightarrow{\mathrm{n_q}} = \overrightarrow{\mathrm{S_p}} \times \overrightarrow{\mathrm{S_q}} = (6+6;18-6;-1-3) = (12;12;-4) = (3;3;-1)$

$3x + 3y - z + d = 0$

$-3 + 6 + d = 0 \leftarrow\ dosazeno\ C$

$d = -3$

$3x + 3y - z - 3 = 0$

$P: X = A + s \cdot t + q \cdot r$

$$P: \left.\begin{aligned} x &= 2 + t + 3r \\ y &= 1 + t - r \\ z &= 6 + 6t + 6r \end{aligned}\right]$$

2 řešení jedné roviny

Vzájemná poloha přmky a roviny (3D)

1. Přímka leží v rovině $\quad \mathrm{p} \cap \mathrm{P} = \mathrm{p} \quad \infty$ mnoho řešení
2. Přmka je s rovinou rovnoběžná $\quad \mathrm{p} \cap \mathrm{P} = \emptyset \quad$ 0 řešení
3. Přímka protíná rovinu $\quad \mathrm{p} \cap \mathrm{q} = \{\mathrm{S}\} \quad$ 1 řešení

1)

$$p: \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 1 - t \end{aligned} \qquad P: x - 2y + z - 5 = 0$$

$(2+t) - 2 \cdot (3+2t) + (1-t) - 5 = 0$

$2 + t - 6 - 4t + 1 - t - 5 = 0$

$-8 - 4t = 0$

$4t = -8$

$t = -2\ \Rightarrow\ 1\ \text{řešení}\ \Rightarrow\ Protíná\ \Rightarrow\ Výpočet\ S$

$S = \{[2+(-2);3+2(-2);1-(-2)]\} = \{[2-2;3-4;1+2]\} = \{[0;-1;3]\}$

2)

$$p: \begin{aligned} x &= 0 + 2t \\ y &= 4 + t \\ z &= -1 + 0t \end{aligned} \qquad P: x - 2y - 3z + 5 = 0$$

$(0+2t) - 2 \cdot (4+t) - 3 \cdot (-1+0t) + 5 = 0$

$2t - 8 - 2t + 3 + 5 = 0$

$0 = 0\ \Rightarrow\ \infty\ \text{řešení}\ \Rightarrow\ přímka\ leží\ v\ rovině$

3)

$p: x = 1 - 2t$ $\qquad$ $P: 3x - y + z - 11 = 0$

$y = 5 - t$

$z = -3 + 5t$

$3 \cdot (1 - 2t) - (5 - t) + (-3 + 5t) - 11 = 0$

$3 - 6t - 5 + t - 3 + 5t - 11 = 0$

$-16 = 0 \;\Rightarrow\; nemá\ řešení \;\Rightarrow\; přímka\ je\ s\ rovinou\ rovnoběžná$

Vzájemná poloha dvou přímek (3D)

1.	Rovnoběžné	$p \cap q = \emptyset$	Lineárně závislé	0 společných bodů
2.	Totožné	$p \cap q = p = q$	Lineárně závislé	∞ společných bodů
3.	Mimoběžné	$p \cap q = \emptyset$	Lineárně nezávislé	0 společných bodů
4.	Různoběžné	$p \cap q = \{S\}$	Lineárně nezávislé	1 společný bod

1)

$p: x = -6 + t$ $\qquad$ $q: x = -5 - k$

$y = 7 - t$ $\qquad$ $y = 3 - 2k$

$z = 2t$ $\qquad$ $z = 5 + k$

$\overrightarrow{S_p} = (1; -1; 2)$ $\quad$ Lineárně nazávislé $\quad$ $\overrightarrow{S_q} = (-1; -2; 1)$

$-6 + t = -5 - k \quad //x = x$

$7 - t = 3 - 2k \quad //y = y$

$2t = 5 + k \quad //z = z$

$-6 + t = -5 - k$

$t = 1 - k$

$7 - (1 - k) = 3 - 2k$

$7 - 1 + k - 3 + 2k = 0$

$3 + 3k = 0$

$3k = -3$

$k = -1$

$t = 1 - k$

$t = 1 - (-1)$

$t = 1 + 1$

$t = 2$

$2 \cdot 2 = 5 + (-1)$

$4 = 4 \;\Rightarrow\; 1\ řešení \;\Rightarrow\; různoběžné \;\Rightarrow\; výpočet\ S$

$S = \{[-6 + t; 7 - t; 2t]\} = \{[-6 + 2; 7 - 2; 2 \cdot 2]\} = \{[-4; 5; 4]\}$

2)

$p: x = 1 + t$ | $q: x = 4 - 2k$
$y = 2 - 2t$ | $y = 1 + 4k$
$z = t$ | $z = 3 - 2k$

$\overrightarrow{S_p} = (1; -1; 1)$ Lineárně závislé $\cdot\,(-2)$ $\overrightarrow{S_q} = (-2; 4; -2)$

$1 + t = 4 - 2k$
$2 - 2t = 1 + 4k$
$t = 3 - 2k$

$1 + 3 - 2k = 4 - 2k$
$0 = 0 \checkmark \Rightarrow$ *musí vyhovovat i druhá rovnice*!

$2 - 6 + 4k = 1 + 4k$
$5 = 0\ \times \Rightarrow$ *rovnoběžné*

3)

$p: x = 2t$ | $q: x = 2 - 2k$
$y = 3 - t$ | $y = -1 + k$
$z = 4 - t$ | $z = 6 + 2k$

$\overrightarrow{S_p} = (2; -1; -1)$ Lineárně nezávislé $\overrightarrow{S_q} = (-2; 1; 2)$

$2t = 2 - 2k$
$3 - t = -1 + k$
$4 - t = 6 + 2k$

$2t = 2 - 2k$
$t = 1 - k$

$3 - 1 + k = -1 + k$
$4 - 1 + k = 6 + 2k$

$2 + k = k - 1$
$0 = -3 \Rightarrow$ 0 řešeí $\Rightarrow$ *mimoběžné*

Vzájemná poloha dvou rovin

1. Rovnoběžné $\mathrm{P} \cap \delta = \emptyset$
2. Totožné $\mathrm{P} \cap \delta = \mathrm{p} = \delta$ $\vec{\mathrm{n}}$ jsou lineárně závislé
3. Různoběžné $\mathrm{P} \cap \delta = \mathrm{p}$ $\vec{\mathrm{n}}$ jsou lineárně nezávislé

1)

$P: 2x + 4y + z - 8 = 0$
$\delta: 2y + z - 6 = 0$

$2y + z - 6 = 0$
$z = 6 - 2y$

$2x + 4y + 6 - 2y - 8 = 0$
$2x + 2y - 2 = 0$
$x + y - 1 = 0 \Rightarrow \mathit{rovnice\ přímky} \Rightarrow \mathit{různoběžné}$

$x + y - 1 = 0$
$y = 1 - x$

$z = 6 - 2y$
$z = 6 - 2 + 2x$
$z = 4 + 2x$

$p: \{[\mathrm{x}; 1 - \mathrm{x}; 4 + 2\mathrm{x}]\}$

$A[0; 1; 4], B[1; 0; 6]$
$B - A = (1; -1; 2)$

$p: x = 0 + t$
$y = 1 - t$
$z = 4 + 2t$