138. **(Calculul entropiei unei variabile aleatoare discrete)**

□ • ∘ ***CMU, (?) 15-781, midterm example questions, pr. 1.b***

Cât este entropia următoarei distribuţii de probabilitate (discretă): $[0.0625, 0.0625, 0.125, 0.25, 0.5]$**?**

Entropia. $H(X)$ = surpriza medie

$$\text{Surpriza}(X) = \log_2 \frac{1}{p(x)}$$

$$\text{Surpriza}(X): \begin{pmatrix} \log_2 \frac{1}{0.0625} & \log_2 \frac{1}{0.0625} & \log_2 \frac{1}{0.125} & \log_2 \frac{1}{0.25} & \log_2 \frac{1}{0.5} \\ 0.0625 & 0.0625 & 0.125 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entropia} = H(X) = E[\text{Surpriza}(X)] =$$

$$= E\left[\log_2 \frac{1}{p(x)}\right] = 2 \cdot \underbrace{\log_2 \frac{1}{0.0625}}_{4} \cdot 0.0625 + \underbrace{\log_2 \frac{1}{0.125}}_{6.321} \cdot 0.125 + \underbrace{\log_2 \frac{1}{0.25}}_{5.321} \cdot 0.25 + \underbrace{\log_2 \frac{1}{0.5}}_{4.321} \cdot 0.5 = 0.5 + 0.790 + 1.330 + 2.1605 =$$

$$\approx 4.6, \ldots$$

139. **(Câştigul de informaţie: câteva proprietăţi şi o exemplificare)**

prelucrare de Liviu Ciortuz, după

□ · ***CMU, 2011 fall, T. Mitchell, A. Singh, HW1, pr. 2***

CMU, 2012 spring, Roni Rosenfeld, HW2, pr. 9

La problema 55 am definit câştigul de informaţie astfel:

$$IG(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

De asemenea, am arătat că entropia condiţonală medie a unei variabile aleatoare X **în raport cu o altă variabilă aleatoare** Y **se poate calcula cu formula**

$$H(X|Y) = -\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X = x, Y = y) \log_2 P(X = x|Y = y).$$

Următoarea *demonstraţie* ne arată că putem calcula câştigul de informaţie şi în alt mod:

$$IG(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \tag{138}$$

1
$$= -\sum_{x\in Val(X)} P(X=x)\log_2 P(X=x) - \left(-\sum_{x\in Val(X)}\sum_{y\in Val(Y)} P(X=x,Y=y)\log_2 P(X=x|Y=y)\right) \tag{139}$$

2
$$= -\sum_{x\in Val(X)}\sum_{y\in Val(Y)} P(X=x,Y=y)\log_2 P(X=x) + \sum_{x\in Val(X)}\sum_{y\in Val(Y)} P(X=x,Y=y)\log_2 P(X=x|Y=y) \tag{140}$$

3
$$= -\sum_{x\in Val(X)}\sum_{y\in Val(Y)} P(X=x,Y=y)(\log_2 P(X=x) - \log_2 P(X=x|Y=y)) \tag{141}$$

4
$$= -\sum_{x\in Val(X)}\sum_{y\in Val(Y)} P(X=x,Y=y)\log_2 \frac{P(X=x)}{P(X=x|Y=y)} \tag{142}$$

5
$$= -\sum_{x\in Val(X)}\sum_{y\in Val(Y)} P(X=x,Y=y)\log_2 \frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(X=x,Y=y)}. \tag{143}$$

a. Justificaţi *de ce* anume au loc fiecare dintre egalităţile care intervin in demonstraţia de mai sus.

a)

$$H(X|Y) = H(X) - H(X|Y)$$

1 Știm că $H(X|Y) = -\sum_{x\in Val(X)}\sum_{y\in Val(Y)} P(X=x,Y=y)\log_2 P(X=x|Y=y)$ (1)

și $H(X) = \sum_{x\in Val(X)} P(x)\cdot\log_2\frac{1}{P(x)} = \sum_{x\in Val(X)} P(x)\cdot(-\log_2 P(x)) =$

$= -\sum_{x\in Val(X)} P(x)\cdot\log_2 P(x)$ (2)

Din (1) și (2) am arătat 1

Altele

Probabilități:

- **co**mune/corelate: de exemplu, $P(X=1, Y=2)$
- **marginale**: de exemplu, $P(X=1) = \sum_{y \in \mathrm{Val}(Y)} P(X=1, Y=y)$

  Observație: De ce se cheamă așa? Pentru că, având un tabel cu probabilitățile comune ale lui X și Y, pentru a afla P(X=x) sau P(Y=y) se calculează suma pe o linie sau o coloană și rezultatul se trece la *marginea* tabelului. *Exemplu* pentru $P(X=0)$:

  $P(X=0) \overset{\text{pb.marg.}}{=} P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1)$

	X=0	X=1
Y=0	0.1	0.2
Y=1	0.3	0.4
	0.4	

  $P(X=0) = 0.1 + 0.3 = 0.4$

- **condiționale**: de exemplu, $P(X=1|Y=2)$

② Conform probabilității marginale avem:

$$P(X) = \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y)$$

și

$$H(X) = -\sum_{x \in Val(X)} P(X) \cdot \log_2 P(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y) \cdot \log_2 P(X=x) \quad (1)$$

Și știm $H(X|Y)$ (2)

$\Rightarrow$ din (1) – (2) $\Rightarrow$ ②, am dem. egalitatea.

3 Ne uităm la formula 2, dacă scoatem factor comun: $-\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y)$

şi obţinem egalitatea 3

4 Ne uităm la egalitatea 3, dacă aplicăm regulile logaritmului „$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$" peste paranteza: $\log_2 P(X=x) - \log_2 P(X=x|Y=y)$ obţinem egalitatea 4

5 Ne uităm la egalitatea 4, aplicăm formula condiţionată peste: $\log_2 \frac{P(X=x)}{\underline{P(X=x|Y=y)}} \Rightarrow \log_2 \frac{P(X=x)}{\frac{P(X,Y)}{P(Y)}} = \log_2 \frac{P(X)\cdot P(Y)}{P(X,Y)}$, avem 5

$$\boxed{P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}}$$

6

b. Definiţi independenţa a două variabile aleatoare X şi Y. Apoi, folosind rezultatul demonstrat mai sus, şi anume

$$IG(X;Y) = \sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y) \log_2 \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)P(Y=y)},$$

arătaţi că dacă X şi Y sunt independente, atunci $IG(X;Y) = 0$.

Dacă X, Y - indep. P.P.r.a că $IG(X;Y) \neq 0$

$$IG(X;Y) = \sum_x \sum_y P(X=x, Y=y) \underbrace{\log_2 \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x) \cdot P(Y=y)}}$$ =>

știind X, Y indep. => $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$

$$\Rightarrow \dots \log_2 \frac{\cancel{P(X) \cdot P(Y)}\ 1}{\cancel{P(X) \cdot P(Y)}\ 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_x \sum_y P(X,Y) \cdot \underbrace{\log_2 1}_{0} = 0$$

Contradicție => $IG(X,Y) = 0$

dacă X, Y - independente.

c. **Demonstrați că $IG(X;X) = H(X)$.**

Știm formulele $IG(X;Y)$ de mai sus.

P.P.r.a $IG(X;X) \neq H(X)$ =>

$$\Rightarrow IG(X;X) = -\sum_X \sum_X P(X,X) \log_2 \frac{P(X)\, P(X)}{P(X,X)} =$$

$P(X \cap X) = P(X)$

$$= -\sum_X P(X) \cdot \log_2 \frac{P(X) \cdot \cancel{P(X)}^{\,1}}{\cancel{P(X)}} = \sum_X P(X) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X)} =$$

$$\sum_X P(X) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X)} = H(X)$$

$= H(X)$ Contradicție => $IG(X;X) = H(X)$

X	Y	$P(Z=0 \mid X,Y)$	$P(Z=1 \mid X,Y)$
0	0	0.8	0.2
0	1	0.2	0.8
1	0	0.2	0.8
1	1	0.8	0.2

i. **Folosind regula de înmulţire, precum şi independenţa variabilelor X şi Y, completaţi în tabelul următor distribuţia de probabilitate comună $P(X,Y,Z)$.**

X	Y	Z	$P(X,Y,Z)$
0	0	0	$\frac{1}{5}$
0	0	1	$\frac{1}{20}$
0	1	0	$\frac{1}{20}$
0	1	1	$\frac{1}{5}$
1	0	0	$\frac{1}{20}$
1	0	1	$\frac{1}{5}$
1	1	0	$\frac{1}{5}$
1	1	1	$\frac{1}{20}$

- $P(X=0, Y=0, Z=0) = P(Z \mid X,Y) \cdot P(X,Y) = 0.8 \cdot P(X) \cdot P(Y) =$

$= 0.8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\cancel{4}^{1}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = \frac{1}{5}$

- $P(X=0, Y=0, Z=1) = P(Z \mid X,Y) \cdot P(X,Y) = 0.2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$
- $P(X=0, Y=1, Z=0) = P(Z \mid X,Y) \cdot P(X,Y) = 0.2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$
- $P(X=1, Y=0, Z=0) = P(Z \mid X,Y) \cdot P(X,Y) = 0.2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$
- $P(X=1, Y=1, Z=0) = P(Z \mid X,Y) \cdot P(X,Y) = 0.8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$
- $P(X=1, Y=1, Z=1) = P(Z \mid X,Y) \cdot P(X,Y) = 0.2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

- $P(X=0, Y=1, Z=1) = 0.8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

- $P(X=1, Y=0, Z=1) = 0.8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

ii. **Calculaţi apoi distribuţiile marginale** $P(X, Z)$, $P(Y, Z)$ **şi** $P(Z)$.

X	Z	$P(X, Z)$
0	0	1/4
0	1	1/4
1	0	1/4
1	1	1/4

Y	Z	$P(Y, Z)$
0	0	1/4
0	1	1/4
1	0	1/4
1	1	1/4

Z	$P(Z)$
0	1/2
1	1/2

- $P(X=0, Z=0) = P(X=0, \cancel{Y}=0, Z=0) + P(X=0, Y=1, Z=0)$

„Pentru a aduna prob. X, Z, vrem să „scăpăm" de Y, și asta o facem atunci când adunăm toate probabilitățile pentru toate valorile lui Y. Exemplul cu bilele!"

- $P(X=0, Z=1) = P(X=0, Y=0, Z=1) + P(X=0, Z=1, Y=1) =$

$= \frac{1}{20} + {}^{4)}\frac{1}{5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

- $P(X=1, Z=0) = P(X=1, Y=0, Z=0) + P(X=1, Y=1, Z=0) =$

$= \frac{1}{20} + {}^{4)}\frac{1}{5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

- $P(X=1, Z=1) = P(X=1, Y=0, Z=1) + P(X=1, Y=1, Z=1) =$

$= {}^{4)}\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

- $P(Y=0, Z=0) = P(X=0, Y=0, Z=0) + P(X=1, Y=0, Z=0) =$

$= \frac{1}{4}$

- $P(Y=0, Z=1) = P(X=0, Y=0, Z=1) + P(X=1, Y=0, Z=1)$
$= \frac{1}{4}$
- $P(Y=1, Z=0) = P(X=0, Y=1, Z=0) + P(X=1, Y=1, Z=0) =$
$= \frac{1}{4}$
- $P(Y=1, Z=1) = P(X=0, Y=1, Y=1) + P(X=1, Y=1, Z=1) =$
$= \frac{1}{4}$

- $P(Z=0) = \sum_{x \in \{0,1\}, y \in \{0,1\}} P(X=x, Y=y, Z=0) = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}$
$= \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

- $P(Z=1) = P(Z=0) = \frac{1}{2}$

iii. **În final, arătaţi că $IG(X;Z) = IG(Y;Z) = 0$. (*Sugestie*: Folosiţi rezultatul de la punctul b.)**

Dacă $IG(X;Z) = H(X) - H(X|Z) = H(Y) - H(Y|Z) = 0 \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} X, Z \\ Y, Z \end{matrix}\right\} \rightarrow$ independente, conform b)

X, Z - independente $\Leftrightarrow IG(X,Z) =$

$$= \sum_x \sum_z P(X=x, Z=z) \log_2 \frac{P(X=x, Z=z)}{P(X=x) \cdot P(Z=z)} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \Bigg(\log_2 \underbrace{\frac{\overbrace{\cancel{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}}^{1}}{\underbrace{\cancel{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}_{1}}}_{0} \Bigg) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ X, Z independente, deci $IG(X,Z)=0$

cum $P(X) = P(Y)$ și $P(X,Z) = P(Y,Z)$ conform calculelor de la ii $\Rightarrow$ Y, Z - independente, deci $IG(Y,Z)=0$

Deci, am demonstrat $IG(X,Z) = IG(Y,Z) = 0$

140. **(Probabilităţi marginale, entropii, entropii condiţionale medii, câştiguri de informaţie)**

prelucrare de Liviu Ciortuz, după
• ◦ CMU, 2011 spring, Roni Rosenfeld, HW2, pr. 1.d

Echipa de fotbal american The Steelers (din Pittsburgh) va juca în cupa Superbowl *XLV* contra echipei The Green Bay Packers. Pregătindu-şi meciul, ei (fotbaliştii echipei The Steelers) se gândesc să-şi definească strategia de joc în funcţie de doi factori majori:

- **dacă jucătorul Ben Roethlisberger va fi (sau nu) accidentat la vremea meciului (*Injured = yes / no*), şi**
- **cum anume va fi vremea (*Weather = foggy / rainy / clear sky*).**

Iată distribuţia comună a acestor două tipuri de evenimente:

	Weather = foggy	*rainy*	*clear sky*	*P(Injured)*
Injured = no	0.1	0.25	0.35	0.7
Injured = yes	0.05	0.1	0.15	0.3
P(Weather)	0.15	0.35	0.5	

a. Pornind de la distribuţia comună dată, completaţi ultima linie şi ultima coloană din tabelul de mai sus cu valorile corespunzătoare distribuţiilor marginale $P(Weather)$ şi $P(Injured)$.

b. Calculaţi entropiile $H(Weather)$ şi $H(Injured)$.

c. Calculaţi entropiile condiţionale medii $H(Injured \mid Weather)$ şi $H(Weather \mid Injured)$.

a) $P(\text{injured}=\text{no}) = P(\underset{I}{\text{injured}}=\text{no} \cap \underset{W}{\text{Weather}}=\text{foggy}) + P(\text{injured}=\text{no} \cap \text{Weather}=\text{rainy}) + P(\text{injured}=\text{no} \cap \text{Weather}=\text{clear sky}) =$

P.P. I și W - independente

$= 0.1 + 0.25 + 0.35 = 0.7$

$P(\text{injured}=\text{yes}) = 0.05 + 0.1 + 0.15 = 0.3$

$P(\text{Weather}=\text{foggy}) = P(W=f, I=no) + P(W=f, I=y) =$

$= 0.1 + 0.05 = 0.15$

$P(W = 97) = 0.25 + 0.1 = 0.35$

$P(W = C\_S) = 0.25 + 0.15 = 0.5$

b)

$$H(W) = -\sum_{w \in Val(W)} P(W=w) \cdot \log_2 P(W=w) =$$

$$= -\left(0.15 \cdot \log_2 0.15 + 0.35 \cdot \log_2 0.35 + 0.5 \cdot \log_2 0.5\right) =$$

$$= -(-0.410 - 0.530 - 0.5) = 1.441 \leq 1.558.. \checkmark$$

$$H(I) = -\left(0.7 \log_2 0.7 + 0.3 \log_2 0.3\right) = 0.8$$

$$H(X|Y) = \sum_{y \in Val(Y)} P(Y=y)\, H(X|Y=y)$$

c)

$$H(I|W) = \sum_{w \in Val(W)} p(w) \cdot H(I|W=w)$$

Calc: $H(I|W = loggy) = -\sum_{i \in Val(i)} p(i|loggy) \cdot \log_2 p(i|loggy) =$

loggy

$$= -\Big(P(i = no | w = loggy) \cdot \log_2 P(i = no | w = loggy) +$$

$$+ P(i = yes | w = loggy) \cdot \log_2 P(i = yes | w = loggy)\Big) = -\Big(\frac{0.1}{0.15} \cdot \log_2 \frac{0.1}{0.15} +$$

$$P(i = no | W = loggy) = \frac{P(i \cap W)}{P(W)}$$

$$+ \frac{0.05}{0.15} \cdot \log_2 \frac{0.05}{0.15} \Big) \approx 0.918$$

• calc pt. rainy: $H(i \mid W=\text{rainy}) = -\sum_{i \in Val(i)} P(i=i \mid W=\text{rainy}) \cdot \log_2 P(i=i \mid W=\text{rainy})$

$$= -\left(\frac{0.25}{0.35} \cdot \log_2 \frac{0.25}{0.35} + \frac{0.1}{0.35} \log_2 \frac{0.1}{0.35} \right) = \dots$$

• calc. pt. clear sky: $H(i \mid W=\text{clear sky}) = -\sum_{i \in Val(i)} P(i=i \mid W=w) \cdot \log_2 P(i=i \mid W=w)$

$$= -\left(\frac{0.35}{0.5} \log_2 \frac{0.35}{0.5} + \frac{0.15}{0.5} \log_2 \frac{0.15}{0.5} \right) = \dots$$

• $\boxed{H(W \mid i)} \overset{\text{formula entropiei medii}}{=\!=} \sum_{i \in Val(i)} p(i)\, H(W \mid i=i)$

• calc. pt $i = no$: $H(W \mid i=no) = -\sum_{w \in Val(W)} P(W=w \mid i=no) \cdot \log_2(\dots)$

$$= -\Big(P(W=\text{rainy} \mid i=no) \log_2(\dots) + P(W=\text{foggy} \mid i=no) \log_2(\dots)$$

$$+ P(W=\text{clear sky} \mid i=no) \cdot \log_2(\dots) \Big) = -\left(\frac{0.2}{0.7} \log_2 \frac{0.2}{0.7} + \frac{0.1}{0.7} \log_2 \frac{0.1}{0.7} + \frac{0.35}{0.7} \log_2 \frac{0.35}{0.7} \right)$$

$$\boxed{P(W \mid i) = \frac{P(i \cap W)}{P(i)}}$$

$= \dots$

calc pentru $i = yes$:

$$H(W \mid i=yes) = -\sum_{w \in Val(W)} P(W=w \mid i=yes) \cdot \log_2 P(W=w \mid i=yes)$$

$$= -\Big(P(W = foggy \mid yes) \cdot \log_2 (\ldots) + P(W = rainy \mid yes) \cdot \log_2 (\ldots)$$

$$+ P(W = clear\ sky) \cdot \log_2 (\ldots) \Big) = -\Big(\frac{0.05}{0.3} \log_2 \frac{0.05}{0.3} + \frac{0.1}{0.3} \cdot \log_2 \frac{0.1}{0.3}$$

$$+ \frac{0.15}{0.3} \cdot \log_2 \frac{0.15}{0.3} \Big) = 1.441$$

d)

d. Calculaţi în entropia comună $H(Injured, Weather)$ **folosind definiţia (vedeţi problema 55). Verificaţi apoi că**

$$\begin{aligned} H(Injured, Weather) &= H(Injured) + H(Weather \mid Injured) \\ &= H(Weather) + H(Injured \mid Weather). \end{aligned}$$

***Indicaţie*: Vedeţi problema 55.c.**

$$H(i, W) \underset{1}{\overset{\text{entr. comună}}{=\!=}} -\sum_{i \in Val(i)} \sum_{w \in Val(W)} P(i = i, W = w) \cdot$$

$\cdot \log P(I=i\ ;\ W=w)\ \Big) =$

$= -\Big(\sum_{w \in Val(W)} P(I=no\ , W=w) \cdot \log_2 (\dots) + \sum_{w \in Val(W)} P(I=yes, w=w)$

$\cdot \log_2 (\dots) \Big) = -\Big(\sum_{w} P(I=no \mid W=w) \cdot P(W=w) \cdot \log_2 (\dots) +$

$+ \sum_{w} P(I=yes \mid W=w) \cdot P(W=w) \Big) =$

Pentru $P(I=no\ , W=foggy) = 0.1$

(ne uităm pe tabel)

$= -\Big(\underbrace{P(I=no \mid W=foggy)}_{0.1} \cdot \log_2 \underbrace{(\dots)}_{0.1} + \underbrace{P(I=no \mid W=}_{0.25}$

$rainy) \cdot \log_2 \underbrace{(\dots)}_{0.25} + \underbrace{P(I=no \mid W=clearsky)}_{0.35} \cdot \log_2 \underbrace{(\dots)}_{0.35} +$

$+ \underbrace{P(I=yes \mid W=foggy)}_{0.05} \cdot \log_2 \underbrace{(\dots)}_{0.05} + \underbrace{P(I=yes \mid W=rainy)}_{0.1}$

$\cdot \log_2 \underbrace{(\dots)}_{0.1} + \underbrace{P(I=yes \mid W=clearsky)}_{0.15} \cdot \log_2 \underbrace{(\dots)}_{0.15} \Big) =$

$= 0.332 + 0.5 + 0.530 + 0.216 + 0.332 + 0.410 =$

$= 2.3209$

Iar: $H(I, W) = \underbrace{H(I)}_{\substack{5) \\ 0.8}} + \underbrace{H(W|I)}_{\substack{c) \\ \sim \\ 1.441}} = 2.241$ $\Big\}$ $\approx$ egale

$H(W|I) \underset{\text{entropie comună}}{=\!=\!=} -\sum_{w}\sum_{i} P(W=w, I=i)\cdot\log_2(\ldots) =$

$= \underset{\text{la fel}}{\ldots\ldots} = 2.399$

iar $= \underbrace{H(W)}_{\text{b)}\ 1.441} + \underbrace{H(I|W)}_{0,8} = 2.241$ } $\approx$ egale.

149. **(Proprietăţi ale entropiei: Adevărat sau Fals?)**

CMU, 2011 spring, Roni Rosenfeld, HW2, pr. 2.a.1
CMU, 2008 fall, Eric Xing, final exam, pr. 1.4
CMU, 2012 spring, Roni Rosenfeld, HW2, pr. 7

Stabiliţi dacă următoarele propoziţii sunt adevărate sau false.

a. **Entropia nu este negativă.** A

b. $H(X,Y) \geq H(X) + H(Y)$ **pentru orice două variabile aleatoare** X **şi** Y. F

c. Dacă X **şi** Y **sunt variabile aleatoare independente, atunci** $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$.
A

a) Adev: ştim că $H \geq 0$, (când „dezordinea" este maximă)

b) $H(X,Y) = H(X) + H(X|Y)$

P.p. r.a. $H(X,Y) > H(X) + H(X|Y) \Rightarrow$

$\Rightarrow H(X,Y) > H(X) + \frac{H(X,Y)}{H(Y)} \quad | (-H(X,Y))$

$\Rightarrow 0 > H(X) + \frac{H(X,Y)}{H(Y)} - H(X,Y)$

$\Rightarrow 0 > \underset{\geq 0}{H(X)} + H(Y|Y) - H(X|Y)\cdot H(Y)$

$$0 > \underbrace{H(X)}_{\geq 0} + \underbrace{H(X|Y)(1 - H(Y))}_{\geq 0}$$

contradicție => Fals

c) A

pg. 575, rezolvate 472

Arbori ID3

32. **(Arbori de decizie; optimalitate, ca număr minim de noduri)**

*

Reprezentaţi arborele / arborii de decizie care are / au numărul minim posibil de noduri (de test) şi corespunde / corespund funcţiei booleene $(A \text{ XOR } B) \wedge C$ definită peste atributele booleene A, B şi C.

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

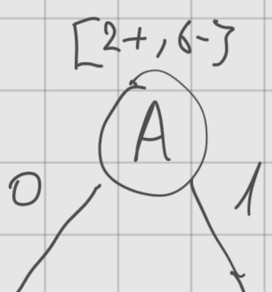
Notăm cu X funcția $(A \text{ XOR } B) \wedge C$.

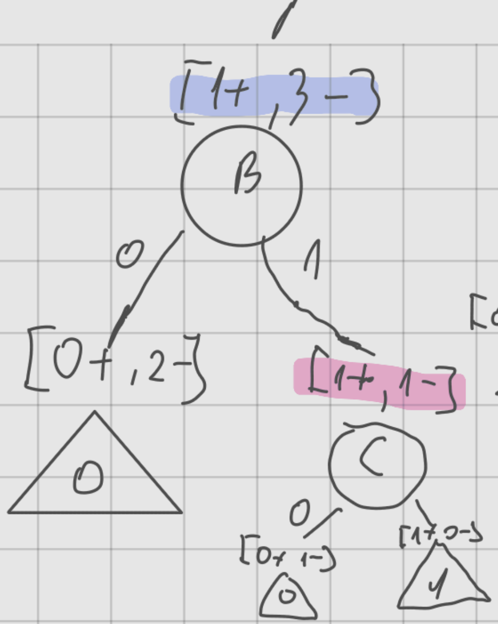
(+, -)

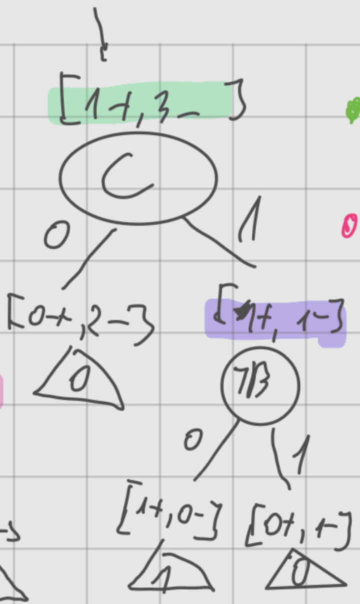
A	B	C	X
0	0	1	0
0	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0
1	1	0	0

1) Alegem cel mai bun nod rădăcină.

Cazul 1 Luăm nodul A ca rădăcină







- $X_0 = X[A/0] = (\overbrace{0 \text{ XOR } B}^{B}) \wedge C$
- $X_1 = X[A/1] = (\underbrace{1 \text{ XOR } B}_{\neg B}) \wedge C$

B	C	X_0
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

¬B	C	X_1
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

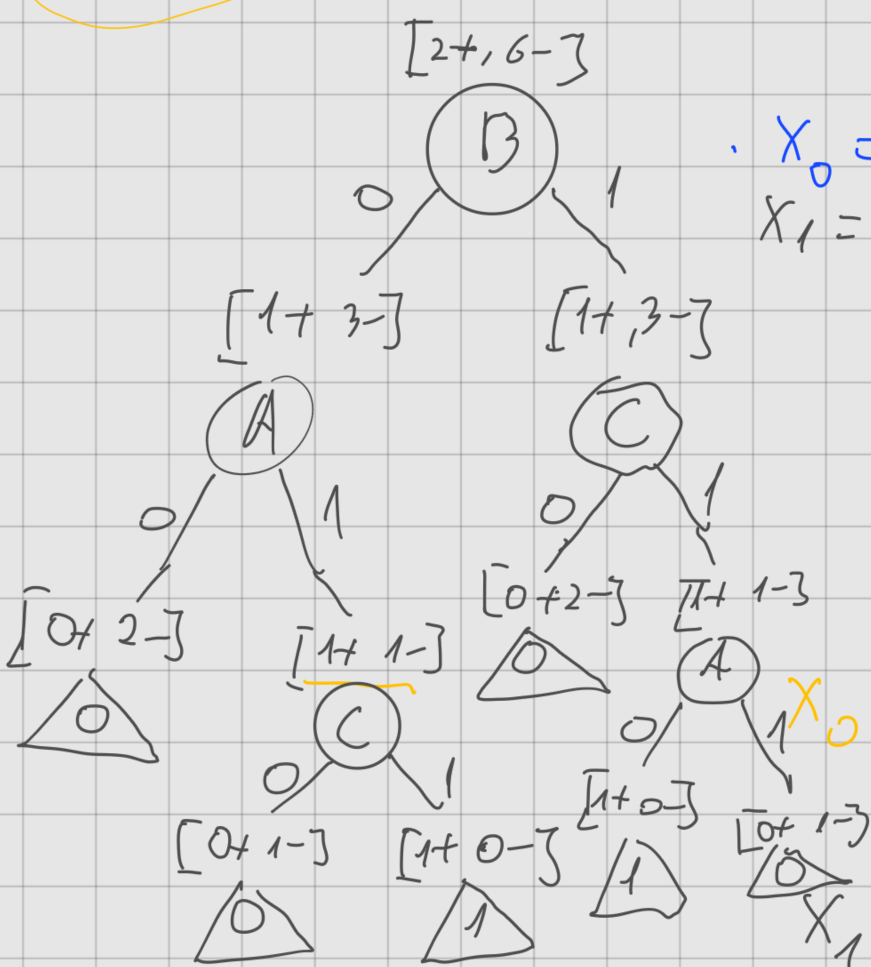
$X_{01} = X_0[B/1] = (0 \text{ XOR } 1) \wedge C = 1 \wedge C = C$

C	X_{01}
0	0
1	1

- $X_{11} = X_1[C/1] = (1 \text{ XOR } B)$

B	X_{11}
0	1
1	0

Cazul 2 rădăcină B.



- $X_0 = X[B/0] = (A \text{ XOR } 0) \wedge C$

$X_1 = X[B/1] = (A \text{ XOR } 1) \wedge C$

A	C	X_0
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	C	X_1
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$X_{01} = X_0[A/1] = (1 \text{ XOR } 0) \wedge C$
$= 1 \wedge C = C$

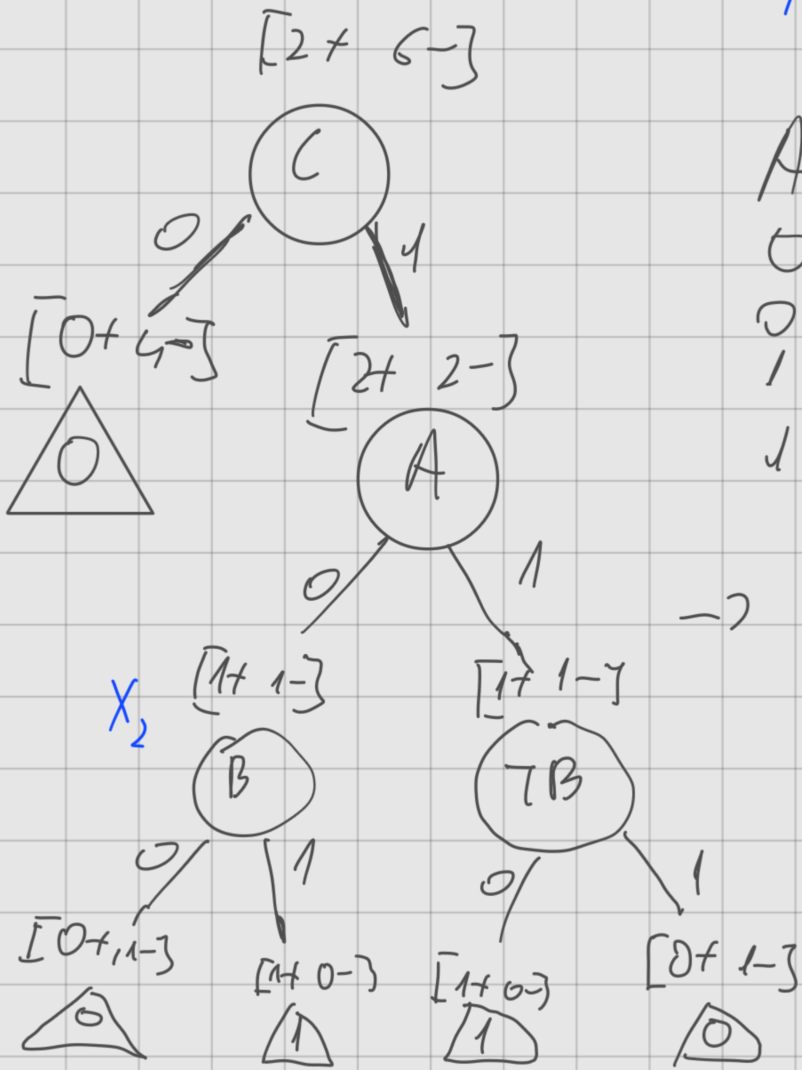
$X_{11} = X_1[C/1] = (A \text{ XOR } 1) \wedge 1 =$
$= A \text{ XOR } 1$

A	X_1
0	1
1	0

Cazul 3 Rădăcină C

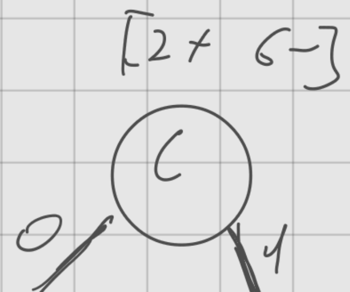
$$X_1 = X[C/1] = (A \text{ XOR } B) \wedge 1 = A \text{ XOR } B$$

A	B	X_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

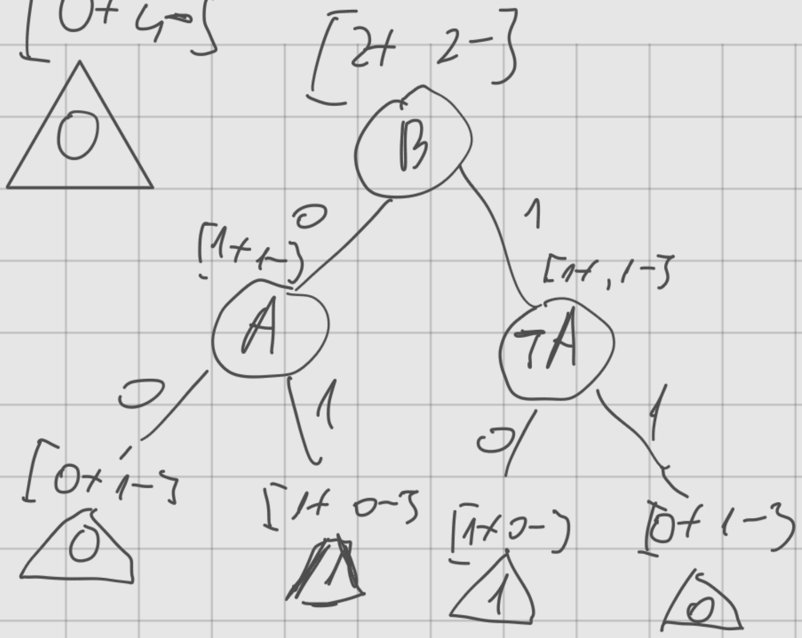


$\rightarrow$ 1 XOR B = ¬B

sau sub arborele drept poate să fie B



$$X_2 = X[C/1] = A \text{ XOR } B$$



Cazul 1
Cazul 2 } sunt la fel, din punct de vedere al entropiilor.

Deci: Cazul 3 este mai bun, deoarece are mai puține noduri de test. $4 < 5$.

33. **(Expresivitatea arborilor de decizie: un rezultat privind funcţiile booleene)**

Orice funcţie booleană (care primeşte n argumente din mulţimea $\{0, 1\}$ şi întoarce un element din mulţimea $\{0, 1\}$) poate fi reprezentată cu ajutorul unui arbore de decizie. Adevărat sau fals?

În cazul afirmativ, explicaţi succint cum anume poate fi construit arborele de decizie respectiv.

În cazul negativ, daţi un exemplu de funcţie booleană pentru care nu se poate construi un arbore de decizie consistent cu funcţia respectivă.

Adevărat:

• Un arbore de decizie este construit

din:
- noduri interne (fiecare nod intern reprezintă o variabilă booleană care poate lua valori cuprinse între {0,1}
- ramuri: (fiecare ramură reprezintă un şir de valori pe care expresia le poate lua.
- noduri frunză (fiecare nod frunză reprezintă outputul corespunzător ramurii)

34. **(Calcularea câştigului de informaţie pe "decision stumps")**

■ □ • *CMU, 2013 fall, W. Cohen, E. Xing, Sample Questions, pr. 4*

Studentul Timmy doreşte să ştie cum [ar trebui să procedeze cel mai bine ca] să promoveze examenul de învăţare automată. Pentru aceasta, a cules informaţii de la studenţii care au urmat acest curs în anii precedenţi şi apoi a decis să-şi construiască un *model* bazat pe arbori de decizie. A colectat în total nouă *instanţe* / exemple, descrise cu ajutorul a două *trăsături* (văzute în cele ce urmează ca două variabile aleatoare, S şi A): „este bine să stai şi să înveţi până noaptea târziu înainte de examen“ (S) şi „este bine să mergi la toate cursurile şi seminariile“ (A). Timmy dispune acum de următoarele „statistici“ (care sunt de fapt *partiţionări* ale datelor sale):

$$Set(all) = [5+, 4-]$$
$$Set(S+) = [3+, 2-], \; Set(S-) = [2+, 2-]$$
$$Set(A+) = [5+, 1-], \; Set(A-) = [0+, 3-]$$

Presupunând că se foloseşte drept criteriu de selecţie a celei mai bune trăsături câştigul maxim de informaţie, ce trăsătură va alege Timmy? Care este valoarea câştigului de informaţie?

575

ARBORI de DECIZIE — Probleme propuse

Puteţi folosi la calcule următoarele aproximaţii:

N	3	5	7
$\log_2 N$	1.5850	2.3219	2.8073

S+ : „Studenţi care au învăţat până noaptea târziu"

S− : „Studenţi care nu au învăţat până noaptea târziu."

A+ : „Studenţi care au mers la facultate"

A− : „Studenţi care nu —"

1) $H(all) = ?$

$$H(all) = \boxed{\sum_{x \in Val(X)} p(X=x) \cdot \log_2 \frac{1}{p(X=x)}} =$$

$$= p(all = 5+) \cdot \log_2 \frac{1}{p(all=5+)} + p(all = 4-) \cdot \log_2 \frac{1}{p(all=4-)} =$$

$$= \frac{5}{9} \cdot \log_2 \frac{9}{5} + \frac{4}{9} \cdot \log_2 \frac{9}{4} =$$

$$= -\left(\frac{5}{9} \cdot \log_2 \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \log_2 \frac{4}{9}\right) = 0.991$$

2) Calc. entr. pt fiecare subset.

$$H(S+) = -\left(\frac{3}{5} \log_2 \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \log \frac{5}{2}\right)$$

[2+, 2−]

$$H(S-) = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\log_2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \log_2 4^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log_2 2^2 = 1$$

$$H(A+) = -\frac{5}{6} \log_2 \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \cdot \log_2 \frac{1}{6} =$$

−0.263 2.584

$$= -\frac{5}{6} \log_2 \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \log_2 6 = 0.650$$

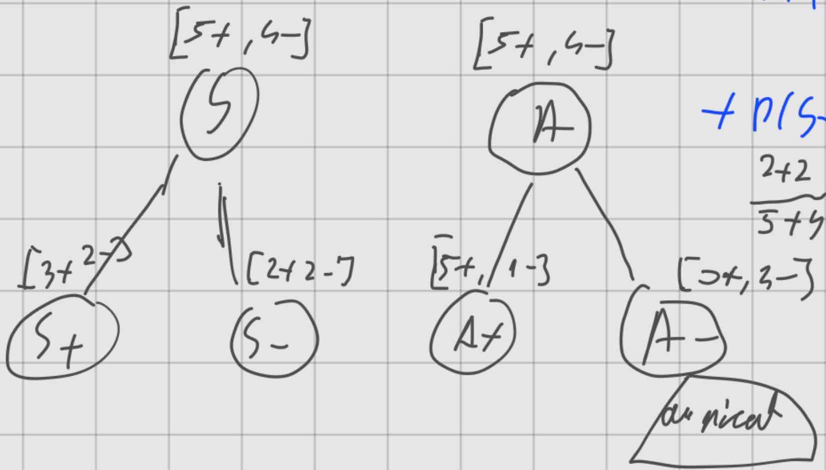
$$H(A-) = 0$$

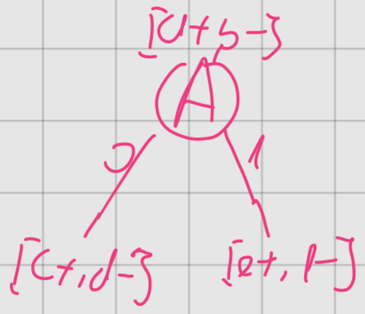
mai interesant

$iG_{all/S} = H(all) - H(all|S)$

$= H(all) - \left(p(\overset{S+}{\underset{5+4}{\overset{3+2}{}}}S+)\, H[3+, 2-] + p(S-) \cdot H[\overset{S-}{}2+, 2-] \right) = (*)$

$\frac{2+2}{5+4}$





$H\,mod = H[a+, b-] = \frac{a}{a+b} \log_2 \frac{a+b}{a} + \frac{b}{a+b} \log_2 \frac{a+b}{b}$

$H(mod/A) = \frac{c+d}{a+b} \cdot H[c+, d-] + \frac{e+f}{a+b} \cdot H[e+, f-]$

$(*)\ H(all) - \left(\frac{\cancel{5}}{9} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \log_2 \frac{3}{5} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{5} \cdot \log_2 \frac{2}{5} \right) =$

$= -\left(\frac{5}{9} \cdot \log_2 \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \log_2 \frac{4}{9} \right) - 0.985 =$

$= \frac{5}{9} \cdot 0.736 + \frac{4}{9} \cdot 1{,}160 - 0.985 =$

$= \underbrace{0.408 + 0.519}_{0.991} - 0.985 =$

$0.991 - 0.985 = 0.006$

Calc. $iG(all/A) = H(all) - H(all/A)$

$$= H(all) - \left(\frac{5+1}{5+4} \cdot H[5+,1-] + \frac{0+3}{5+4} \cdot H[\underbrace{0+,3-}_{0}] \right) =$$

A− above $[0+,3-]$; A+ above $\frac{5}{6}$:

$$= 1.027 - \left(\frac{2}{3}\cancel{\frac{6}{9}} \cdot H\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{3}\cancel{\frac{3}{9}} \cdot \underbrace{0}_{0} \right) =$$

$$= 1.027 - \frac{2}{3} \cdot 0.650 =$$

$$= 1.027 - 0.433 = 0.558$$

Deci $IG(all/A) > IG(all/S)$

$$0.558 > 0.006$$

Deci Timmy va alege trăsătura A, deoarece are un câștig de inf. mai mare.

44. **(Algoritmul ID3: aplicare; calculul erorii la antrenare, respectiv la validare)**

∗ ***CMU, 2003 fall, T. Mitchell, A. Moore, midterm exam, pr. 1***

Folosiţi setul de date alăturat pentru a învăţa cu ajutorul unui arbore de decizie dacă o anumită floare este *Iris* (acesta este numele latinesc pentru *stânjenel*) sau nu, utilizând atributele discrete *Formă*, *Culoare* şi *Miros*.

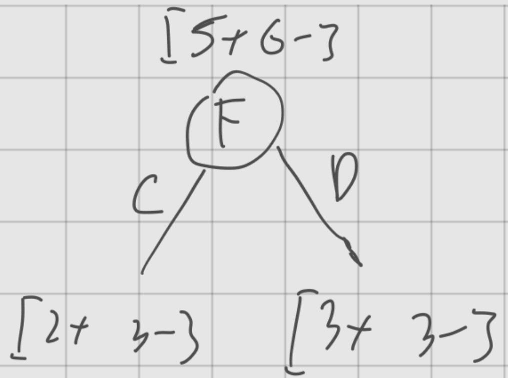
Formă	*Culoare*	*Miros*	*Iris*
C	B	1	1
D	B	1	1
D	W	1	1
D	W	2	1
C	B	2	1
D	B	2	0
D	G	2	0
C	U	2	0
C	B	3	0
C	W	3	0
D	W	3	0

a. Ce atribut va alege algoritmul ID3 ca rădăcină a arborelui de decizie?

b. Elaboraţi întregul arbore de decizie care va fi învăţat din datele de mai sus (fără pruning).

c. Exprimaţi cu ajutorul unui set de reguli din calculul propoziţional clasificarea produsă de arborele de decizie obţinut. (IF … THEN *Iris*; IF … THEN ¬*Iris*.)

a)

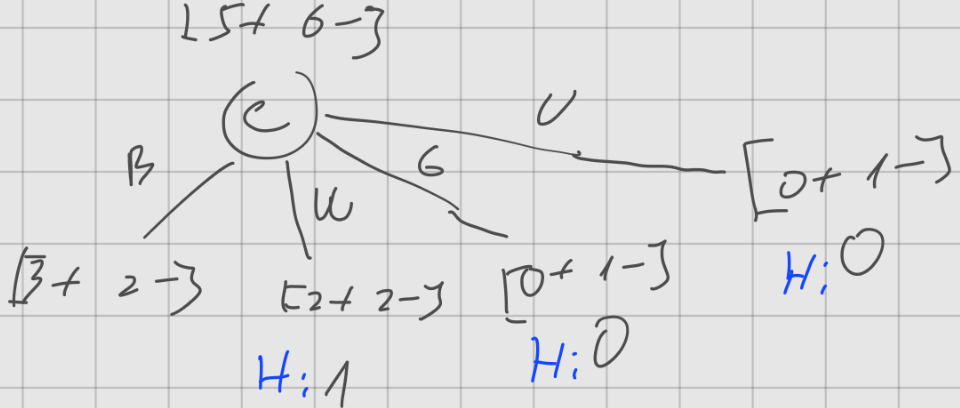


$$H(iris \mid Formă) = \frac{2+3}{5+6} H[2+,3-] + \frac{3+3}{5+6} H[3+,3-] = \frac{5}{11} \cdot 0.971 + \frac{6}{11} \cdot 1 = 0.986$$

$$H(Formă = C) = \frac{2}{5} \cdot \log_2 \frac{5}{2} + \frac{3}{5} \log_2 \frac{5}{3} = 0.971$$

$H(Formă = D) = 1$ $\quad$ $H(iris) = \frac{5}{11} \cdot \log_2 \frac{11}{5} + \frac{6}{11} \log_2 \frac{11}{6} \simeq 0.993$

$$IG_{(iris \mid Formă)} = H(iris) - H(iris \mid Formă) = 0.993 - 0.986 \simeq 0.007$$



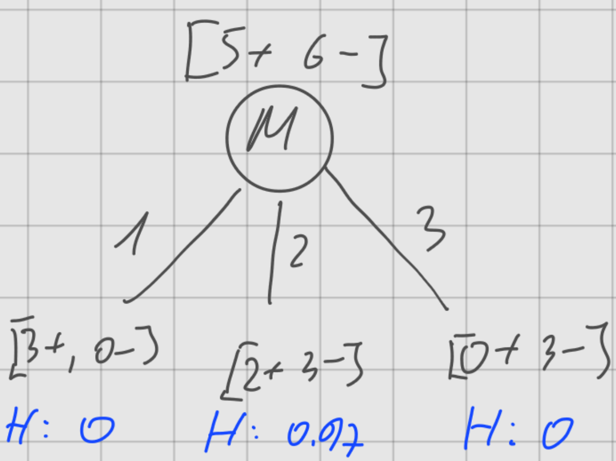
$$H(Culoare = B) = \frac{3}{5} \cdot \log_2 \frac{5}{3} + \frac{2}{5} \cdot \log_2 \frac{5}{2} \simeq 0.971$$

$$H(iris \mid Culoare) = \frac{3+2}{11} \cdot H(Culoare = B) + \frac{2+2}{11} \cdot H(Culoare = W) + \frac{1}{11} \cdot H(Culoare = G) + \frac{1}{11} H(Culoare = U) = \frac{5}{11} \cdot 0.971 + \frac{4}{11} \cdot 1 + 0 + 0 =$$

$$= 0.441 + 0.363 \simeq 0.804$$

$IG(iris/Culoare) = H(iris) - H(iris/Culoare) =$

$= 0.993 - 0.804 \simeq 0.189$



$H(Miros=2) = \frac{2}{5} \cdot \log \frac{5}{2} + \frac{3}{5} \cdot \log \frac{5}{3}$

$= 0.4 \cdot 1.321 + 0.6 \cdot 0.736 = 0.97$

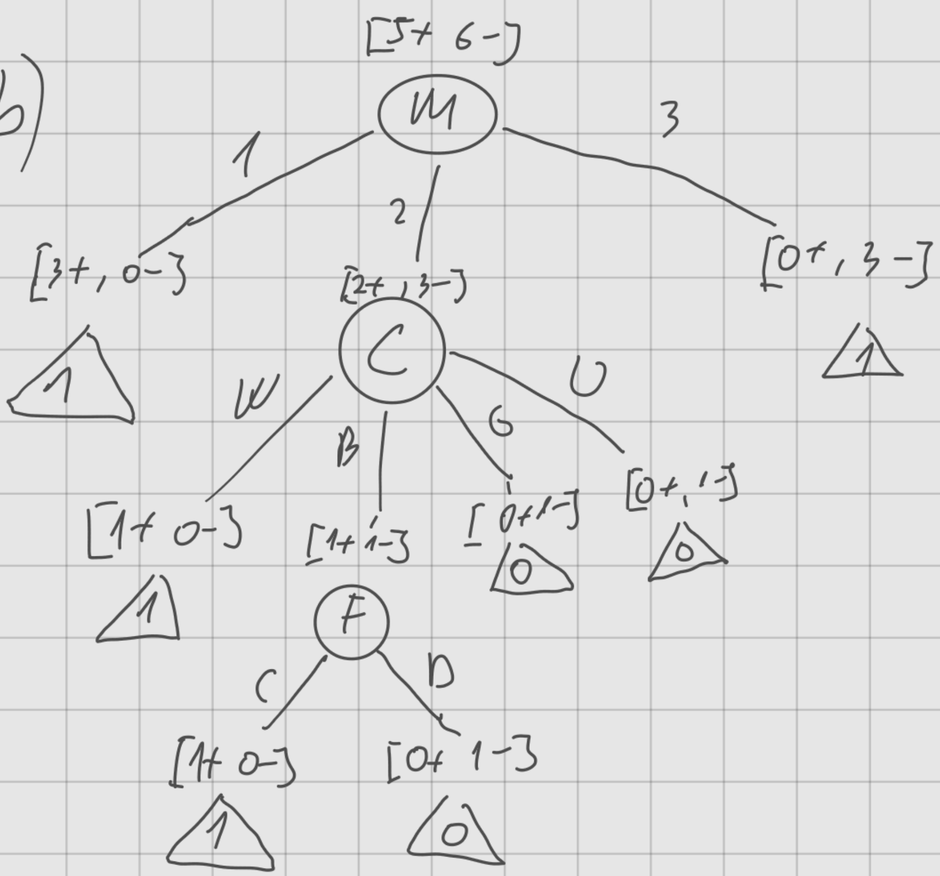
$H(iris/Miros) = 0 + \frac{5}{11} \cdot 0.97 + 0 =$

$= 0.440$

$IG(iris/M) > IG(iris/C) > IG(iris/F)$

0.440   0.189   0.002

b)



c) **c.** **Exprimaţi cu ajutorul unui set de reguli din calculul propoziţional clasificarea produsă de arborele de decizie obţinut. (IF ... THEN *Iris*; IF ... THEN ¬*Iris*.)**

- iF M==1 then Iris.
- iF M==3 then Iris
- iF M==2 then:
  - if C==W then Iris
  - iF C==G then ¬Iris.
  - if C==U then ¬Iris.
  - if C==B then:
    - if F==C then Iris
    - if F==D then ¬Iris.

d. **Să presupunem că avem un set de date de validare:**

Formă	*Culoare*	*Miros*	*Iris*	
C	B	2	0	≠1
D	B	2	0	=0
C	W	2	1	=1

1 inst. greş. → $\frac{1}{3}$ ← totalul de inst.

d. **Să presupunem că avem un set de date de validare:**

Formă	*Culoare*	*Miros*	*Iris*
C	B	2	0
D	B	2	0
C	W	2	1

Care va fi eroarea produsă de arborele de decizie pe mulţimea de date de antrenare respectiv pe datele de validare? (Exprimaţi răspunsul ca număr de exemple clasificate greşit.)