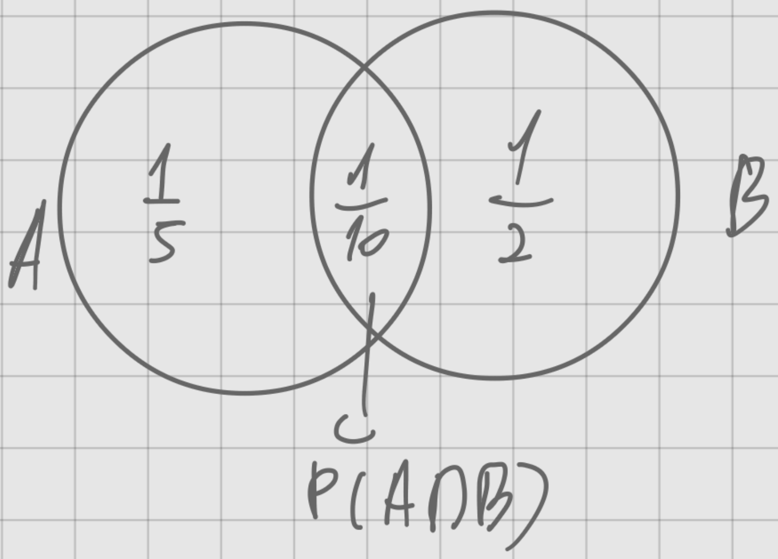
89. **(Calcul de probabilităţi elementare)**

● ○ ***CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 1.3***

Doi soldaţi A şi B trag la ţintă. Probabilitatea ca soldatul A să greşească ţinta este de $1/5$. Probabilitatea ca soldatul B să greşească ţinta este de $1/2$. Probabilitatea ca ambii soldaţi să greşească simultan ţinta este de $1/10$.

a. Care este probabilitatea ca cel puţin unul dintre soldaţi să greşească ţinta?

b. Care este probabilitatea ca exact unul dintre cei doi soldaţi să greşească ţinta?



A şi B – independente.

$\begin{cases} P(A) \text{ nu influenţează} \\ P(B). \end{cases}$

a) Cel puţin unul $\Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

b) Exact unul $\Rightarrow$ $P(\neg B) = P(A) - P(A \cap B) = 1 - P(B)$

$P(\neg A) = P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A)$

$P(\underbrace{(A \cap \neg B)}_{1} \cup (B \cap \neg A)) \overset{a.m}{=} P(A \cap \neg B) + P(B \cap \neg A) - \emptyset =$

$= P(A) \cdot P(\neg B) + P(B) \cdot P(\neg A) =$

$= \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} =$

$= \frac{1+4}{10} = \frac{1}{2}$

• Evenimente dependente. $P(A|B) \neq P(A)$

90. **(Aplicarea formulei probabilităţii totale)**

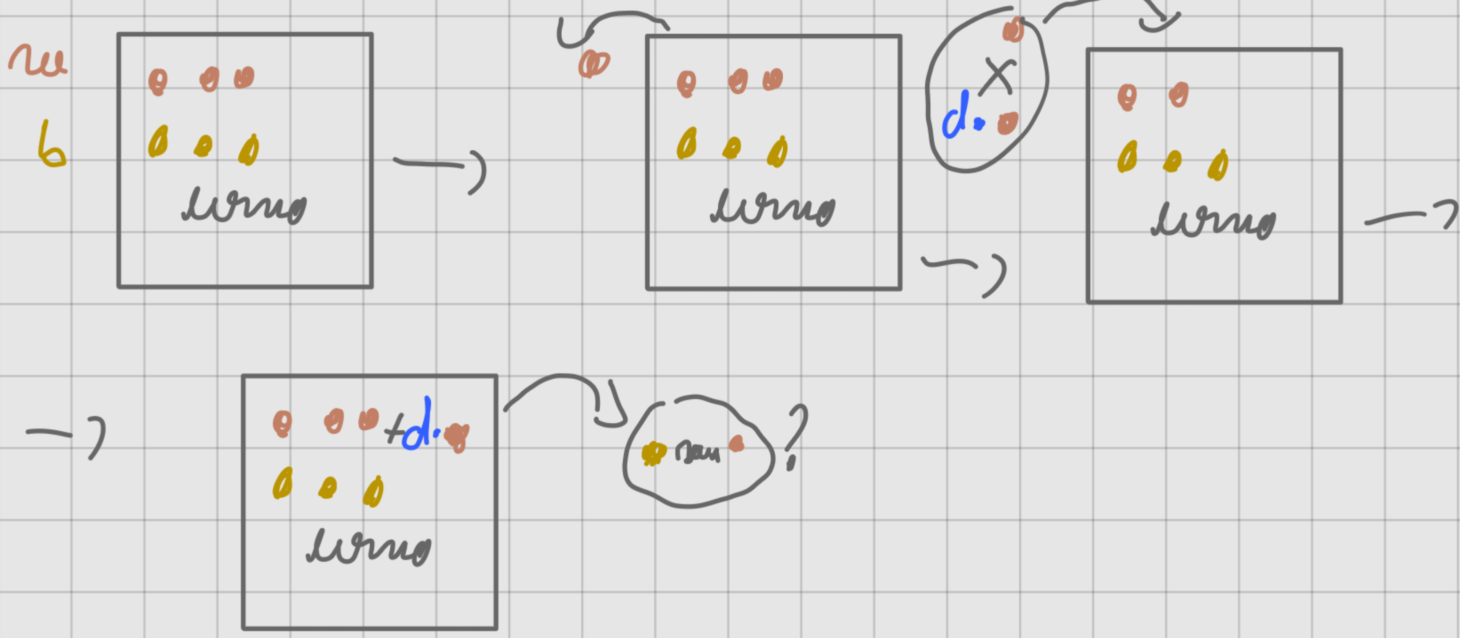
□ • · *CMU, 2011 fall, T. Mitchell, A. Singh, HW1, pr. 1.e*

O urnă conţine w bile albe şi b bile negre. Extragem o bilă dintre acestea, în mod aleatoriu. Apoi repunem bila în urnă, împreună cu alte d bile de aceeaşi culoare (ca a bilei extrase). După aceasta, extragem din urnă încă o bilă, în mod aleatoriu.

a. Demonstraţi că probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albă nu depinde de d.

b. Particularizaţi [raţionamentul dumneavoastră] pentru cazul $w = 2$, $b = 3$ şi $d = 7$.

Formula Prob. Totale: $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \neg B)$



w - bile albe

b - bile negre

A - extrag o bilă albă

B - extrag o bilă neagră

U - urna $= w + b$

Prima extragere: $P(A_1) = \dfrac{w}{w+b}$, $P(B_1) = \dfrac{b}{w+b}$

Punem în urnă:

- extragem o bilă albă
  $U = (w+d) + b$
- extragem o bilă neagră
  $U = (b+d) + w$

A 2-a extragere

d.)

$\overset{\text{prob. să fie bilă albă}}{P(A_2)} = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2 | B_1) \cdot P(B_1)$

$= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1)$

$= P(A_2) \cdot P(A_1) + P(A_2) \cdot P(B_1) \quad | : P(A_2)$

$\dfrac{\cancel{P(A_2)}}{\cancel{P(A_2)}} = \dfrac{\cancel{P(A_2)}\,(P(A_1) + P(B_1))}{\cancel{P(A_2)}}$

fals, valabil doar pentru evenimente independente.

$1 = P(A_1) + P(B_1)$

$1 = \dfrac{w}{w+b} + \dfrac{b}{w+b}$

$1 = \dfrac{\cancel{w+b}}{\cancel{w+b}}$

$1 = 1$

Fail

Bulla 2.

d)

$$P(A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2 | B_1) \cdot P(B_1)$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{w+d}{(w+d)+b}$$

$$P(A_2 | B_1) = \frac{w}{w+(b+d)}$$

$$P(A_2) = \frac{w+d}{(w+d)+b} \cdot \frac{w}{w+b} + \frac{w}{w+(b+d)} \cdot \frac{b}{w+b}$$

$$= \frac{(w+d) \cdot w}{(w+d+b)(w+b)} + \frac{w \cdot b}{(w+b+d) \cdot (w+b)}$$

$$= \frac{(w+d) \cdot w + w \cdot b}{(w+d+b)(w+b)}$$

$$= \frac{w\cancel{(w+d+b)}^{1}}{\cancel{(w+d+b)}_{1}(w+b)}$$

$P(A_2) = \frac{w}{w+b}$, deci $P(A_2)$ nu depinde de d.

b) $n = 2, \quad b = 3 \quad, d = 7$

Vrem ca la a-2-a extragere din urnă, indiferent de prima extragere, să demonstrăm că probabilitatea de a extrage o bilă albă nu va depinde de cele d bile.

$$P(A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2 \mid B_1) \cdot P(B_1)$$

Știm că: $P(A_2 / A_1) = \dfrac{(n+d)}{(n+d)+b} = \dfrac{2+7}{(2+7)+3} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$

$$P(A_2 / B_1) = \frac{n}{n+(d+b)} = \frac{2}{2+(7+3)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_1) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}, \quad P(B_1) = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{5} + \frac{1}{\cancel{6}_2} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{5}$$

$P(A_1) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{\cancel{4}^2}{\cancel{10}_5} = \dfrac{2}{5}$ adevărat,

la a-2-a extragere, vom extrage bila albă cu aceeași probabilitate ca la prima extragere, fără să ținem cont de cele d bile adăugate.

91. **(Probabilităţi condiţionate, evenimente aleatoare independente: câteva proprietăţi simple)**

● ○ ***CMU, 2005 fall, T. Mitchell, A. Moore, HW1, pr. 3.1***
CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 1.1
CMU, (?) spring, 10-701, HW1, pr. 1.2

Fie A şi B două evenimente aleatoare.

a. **Arătaţi că $P(A \mid A, B) = 1$.**

b. **Arătaţi că dacă $P(A) = 0$ atunci A şi B sunt independente.**

c. **Arătaţi că dacă $P(B) = 1$ atunci $P(A \mid B) = P(A)$.**

***Observaţie*: În general, dacă $P(B) \neq 0$, din $P(A \mid B) = P(A)$ rezultă imediat $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ceea ce, conform definiţiei, înseamnă că A şi B sunt independente. Din acest motiv, se poate spune că $P(A \mid B) = P(A)$ este o formă mai restrictivă (deşi, mai aproape de intuiţie!) sau mai „tare“ pentru condiţia de independenţă a două evenimente aleatoare.**

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{Prob. cond.}}$$

a) $P(A \mid \underbrace{A,B}_{A\cap B}) = 1$

P.P.A.d $P(A \mid A,B) \neq 1 \Rightarrow$

$$\frac{P(A \cap A,B)}{P(A\cap B)} \neq 1 \Rightarrow \frac{P(A\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)} \neq 1 \Rightarrow$$

$$\frac{P(\overbrace{A \cap A}^{A} \cap B)}{P(A\cap B)} \neq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{P(A\cap B)}^{1}}{\cancel{P(A\cap B)}_{1}} \neq 1 \Rightarrow 1 \neq 1 \text{ Fals} \Rightarrow \text{Contradicție}$$

Deci $P(A \mid A,B) = 1$

(Probabilitatea ca A să se întâmple, știind că A și B au avut loc, este sigură (=1)).

b) $P(A)=0$

Dacă $P(A)$ nu se întâmplă, atunci A și B

sunt independente.

Forma mai restrictivă, "tare", pt cond. de independență.

$P(A)$ independent $P(B) \iff P(A|B)=P(A)$
$P(B|A)=P(B)$

"$\Rightarrow$" Fie $P(A)=0$,

P.P.R.A. A și B nu sunt independente.

Dacă A, B nu sunt indep. (dependente) $\Rightarrow P(A|B)\neq P(A)$
și
$P(B|A)\neq P(B)$

Știm $P(A)=0$, a.î.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ P(A|B) \overset{T.B}{=} \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A)\cdot \overset{0}{P(A)}}{P(B)} = 0 \\ \bullet\ P(A)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A|B)=P(A)$$

contradicție $\Rightarrow$

A și B sunt independente.

c) Dacă $P(B)=1$, a.î. $P(A|B)=P(A)$

Fie $P(B)=1$

P.p.r.a $P(A|B) \neq P(A) \Rightarrow$ A și B sunt dependente

$$\left.\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)} \\ \text{dar știm că } P(B) &= 1 \text{ (se întâmplă sigur)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{1\cdot P(A)}{1} = P(A) \Rightarrow$ A și B independente $\Rightarrow$ contradicție

Deci Dacă $P(B)=1 \Rightarrow P(A|B) = P(A)$

92. **(Legătura dintre forma „slabă“ şi forma „tare“ a definiţiei pentru evenimente aleatoare independente condiţional)**

• ***CMU, 2005 fall, T. Mitchell, A. Moore, HW1, pr. 3.2***

Folosind doar definiţia probabilităţii condiţionate arătaţi că dacă $P(A \mid B, C) = P(A \mid C)$ **sau** $P(B \mid A, C) = P(B \mid C)$ **atunci** $P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$**.**

Fie $P(A \mid B, C) = P(A \mid C)$ sau $P(B \mid A, C) = P(B \mid C)$

P.p.r.a $P(A, B \mid C) \neq P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$.

$$P(A \cap B \mid C) \overset{P.C}{=} \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} \overset{\text{asociativitate}}{=} \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \mid B, C) \cdot P(B \cap C)}{P(C)},$$

dar ştim $P(A \mid B, C) = P(A \mid C)$

$$\Rightarrow \frac{P(A \mid C) \cdot P(B \cap C)}{P(C)} =$$

$$= \frac{P(A \mid C) \cdot P(B \mid C) \cancel{P(C)}}{\cancel{P(C)}} = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$$

Contradicţie

Deci, dacă $P(A \mid B, C) = P(A \mid C)$ sau $P(B \mid A, C) = P(B \mid C)$

at. $P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$.

93. ? (Proprietăţi ale funcţiei de probabilitate)

• ○ *CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, midterm, pr. 1.d*

Presupunem că evenimentele $B_1, B_2, \ldots, B_k$ formează o *partiţie* a *spaţiului de eşantionare* (engl., sample space), Ω.[236] Considerăm o funcţie de probabilitate P definită pe 2^Ω şi un eveniment A pentru care $P(A) > 0$.

Arătaţi că dacă $P(B_1 \mid A) < P(B_1)$, atunci $P(B_i \mid A) > P(B_i)$ pentru cel puţin o valoare a lui i din mulţimea $\{2, 3, \ldots, k\}$.

Indicaţie: Una sau mai multe dintre următoarele proprietăţi vă pot fi de folos:

a. $\sum_{i=1}^{k} P(B_i) = 1$

b. $\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = P(A)$ — o variantă a *formulei probabilităţii totale*

c. $P(B_i \mid A) \cdot P(A) = P(B_i \cap A)$ — *regula de înmulţire*

d. $\sum_{i=1}^{k} P(B_i \mid A) = 1$

e. $P(B_i \cap A) + P(B_i \cap \bar{A}) = P(B_i)$.

Demonstraţi în prealabil proprietăţile de mai sus, în ordinea în care au fost date.

$\mathcal{F}: P \longrightarrow 2^\Omega$ (spațiu de evenimente)

Fie A a.î. $P(A) > 0$.

Arătați: dacă $P(B_1 / A) < P(B_1)$, at. $P(B_i / A) > P(B_i)$

pt. cel puțin o val. a lui i din $\{2, 3, \ldots k\}$

Fie $P(B_1 / A) < P(B_1)$ și $P(A) > 0$

P.P.R.A. $P(B_i / A) \leq P(B_i)$ pt. nici o val. a lui i din $\{2, 3, \ldots k\}$

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i \cap A)}{\underbrace{P(A)}_{>0}} \leq P(B_i) \Rightarrow$$

$\underline{\text{conf. prop. b.}} \Rightarrow \frac{\cancel{P(A)}^{1}}{\cancel{P(A)}_{1}} \leq P(B_i) \Rightarrow 1 \leq P(B_i) \Rightarrow$

conf. prop. a. $\Rightarrow$ $1 \leq 1$ Fail

Suma totală a evenimentelor condiționate

$$\sum_{i}^{n} P(B_i|A) = 1$$

Dacă $P(B_1|A) < P(B_1)$
$P(B_1) - P(B_1|A) > 0$ } $\rightarrow$ "scădere" $\Rightarrow$

știm că: $\sum_{i}^{n} P(B_i) = 1$

$\sum_{i}^{m} P(B_i|A) = 1$

"compensarea diferenței" $\Rightarrow$ $\exists$ scădere față de probabilitatea lui B_1 asta înseamnă că $\exists$ o "compensație" de alte evenimente $B_2, B_3 \ldots B_K$, deoarece

$\sum_{i=1}^{K} P(B_i|A) = 1$ $\Rightarrow$

- $P(B_1|A) + P(B_2|A) + \ldots + P(B_K|A) = 1$
  cum $P(B_1|A) < P(B_1)$ } $\Rightarrow \exists\, i \in \{2, \ldots K\}$

a.î. $P(B_i|A) > P(B_i)$

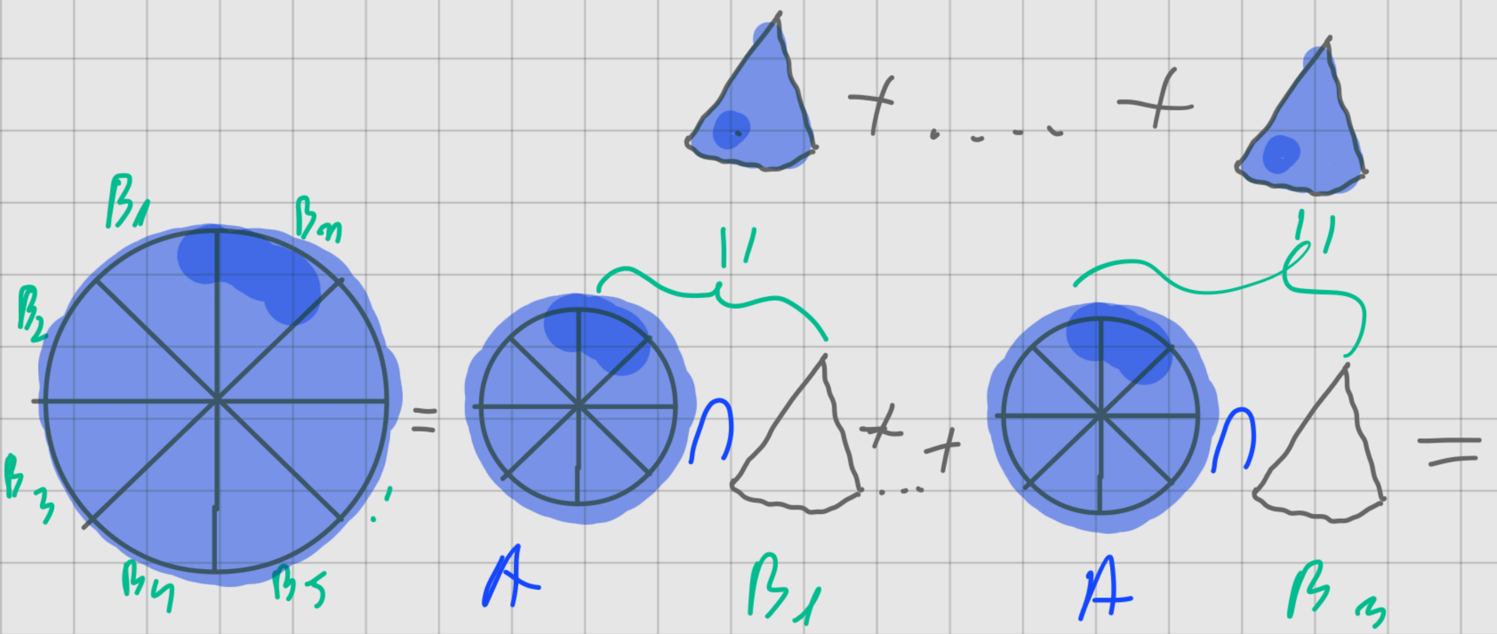
a,b) dem ⇒

Să exprimăm mai bine Formula prob. totale.

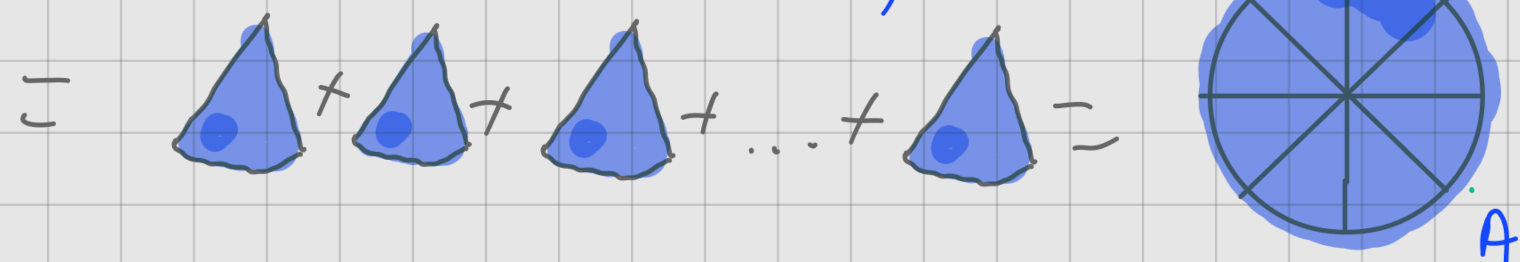
$P(A)$ → prob. totală, suma tuturor evenimentelor din spațiul Ω, posibile.

De ex: dacă știm că $\Omega = \{B_1, B_2, \dots B_n\}$, și fiecare $B_i \cap B_j = \emptyset$ (disjuncte 2 câte 2), însumate fac întreg spațiul de evenimente. astfel dacă vrem să calc. $P(A)$ (ev. total) este același lucru ca și cum am calc. suma tuturor intersecțiilor evenimentului A cu fiecare eveniment B_i din întregul spațiu Ω.

$$\underbrace{P(A)}_{\text{prob. totală}} = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i), \quad B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j,\quad \Omega = \{B_1, \dots B_n\}$$



$A = P(\Omega) = 1$ (A-ul repr. toată pizza.)



$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\neg B)P(\neg B)$

$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A \cap B_i)$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i = j$

$\Omega = \{B_1, B_2, \dots B_m\}$

: La fel și pentru o singură felie de pizza.

$P(C)$

c) $P(B_i|A) \cdot P(A) = P(B_i \cap A)$

$P(B_i \cap A) = P(B_i|A) \cdot P(A)$

~~d)~~ $\sum_{i=1}^{K} P(B_i|A) = 1$ $\quad \sum_{j=m}^{K} P(A \cap B_j)$ $\quad \sum_{j=1}^{K} B_i$

$1 = \sum_{i=1}^{m} P(A \cap B_i) = P(A \cap (B_1 + B_2 + \dots B_m)) = P(A \cap \sum_{j=m}^{K} B_j \cap \sum_{i=1}^{m} B_i) =$

$B_i \cap B_j = \emptyset$

$i \neq j$

$m < K$

$= P(A \cap \sum_{i=1}^{K} B_i) = \sum_{i=1}^{K} P(A \cap B_i)$ Fail

d) Presupunem că $B_1, B_2, \dots B_K$ sunt o partiție a spațiului Ω. $B_1 + \dots + B_m = \Omega$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$.

$\sum_{i=1}^{m} P(B_i|A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} P(B_i|A) = \frac{1}{P(A)} \sum_{i=1}^{m} P(A \cap B_i)$ $= P(A)$ P.T

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} P(B_i/A) = \frac{1}{\cancel{P(A)}} \cdot \cancel{P(A)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} P(B_i/A) = 1 \quad \checkmark$$

e) $P(B_i \cap A) + P(B_i \cap \bar{A}) = P(B_i)$

P.T $\Rightarrow$ $P(A) = \underbrace{P(A/B)P(B)}_{P(A \cap B)} + \underbrace{P(A/\neg B)P(\neg B)}_{P(A \cap \neg B)}$

$$P(B_i) \overset{P.T}{=} P(B_i/A) \cdot P(A) + P(B_i/\neg A)P(\neg A)$$

$$= P(B_i \cap A) + P(B_i \cap \neg A) \quad \checkmark$$

94. **(Formula lui Bayes)**

● ○ ***CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 4***

Într-o grupă de copii de la o creşă, 30% dintre ei au ochi căprui, 50% au ochi albaştri, iar restul de 20% au ochi de alte culori. Într-o zi, educatoarea organizează cu aceşti copii un joc. Pentru prima rundă a jocului, ea selecţionează 65% dintre copiii cu ochi căprui, 82% dintre copiii cu ochi albaştri şi 50% dintre copiii cu ochi de alte culori.

Care este probabilitatea ca un copil ales în mod aleatoriu din această grupă să aibă ochi albaştri, dacă ştim că el n-a fost selecţionat pentru prima rundă a jocului?

$\Omega = \{C, A, O\}$ $P(C) = \frac{3}{10}$, $P(A) = \frac{5}{10}$ $P(O) = \frac{2}{10}$

A_1 - prima rundă, prob. să fie selectat.

- $P(A_1|C) = \frac{65}{100}$, $P(A_1|A) = \frac{82}{100}$ $P(A_1|O) = \frac{20}{100}$

* Prob. totală pt. prima rundă: $P(A_1) = P(A_1|C)P(C) +$

$+ P(A_1|A) \cdot P(A) + P(A_1|O) = \frac{1}{65} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{82} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

$$- \frac{1}{195} + \frac{1}{170} + \frac{1}{4} = \ldots$$

- $P(\neg A_1) = 1 - P(A_1) = 0.18 \cdot 0.5 + 0.35 \cdot 0.30 + 0.5 \cdot 0.20 = 0.295$
- $P(\neg A_1 | C) = 1 - 0.65 = 0.35$ | $P(\neg A_1 | A) = 1 - 0.82 = 0.18$

$$P(A | \neg A_1) = \frac{P(A \cap \neg A_1)}{P(\neg A_1)} = \frac{P(\neg A_1 | A) P(A)}{P(\neg A_1)} = \frac{\frac{18}{100} \cdot \frac{50}{100}}{\frac{295}{1000}} =$$

$$= \frac{0{,}09}{0.295} \approx 0{,}305.$$

$1 - P(A_1 | A)$

ştim: $P(A) = P(A|C)$

$P(\bar{A}|C) = 1 - P(A|C)$

95. (Formula lui Bayes)

● *CMU, 2005 fall, T. Mitchell, A. Moore, HW1, pr. 3.3*

Avem două urne. Prima urnă conţine 11 bile albe şi 4 bile roşii. Cea de-a doua urnă conţine 8 bile albe şi 5 bile roşii. Se alege în mod aleatoriu cu probabilitate uniformă una din cele două urne. Apoi se extrage o bilă din urna aleasă. Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

? $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots B\}$?

$A_1 \rightarrow$ even. de a extrage din urna 1

$A_2 \rightarrow$ evenimentul de a extrage din urna 2

$B \rightarrow$ evenimentul de a extrage o bilă albă

$$P(A_1 | B) \overset{F.B}{=} \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{11}{15} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}} \frac{11}{15}\left(1 + \frac{\frac{8}{13}}{\frac{11}{15}}\right)} =$$

$P(B|A_1) = \frac{11}{15}$, $P(B|A_2) = \frac{8}{13}$

$P(A_1) = \frac{1}{2} = P(A_2)$ (2 urne)

$$= \frac{1}{1 + \frac{8}{13} \cdot \frac{15}{11}} = \frac{1}{1 + \frac{120}{143}} = \frac{1}{\frac{263}{143}} = \frac{143}{263}$$

R:

F.P. echi.

$$P(B) \overset{P.T}{=} P(B|A_1) P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) = \frac{11}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{13} \cdot \frac{1}{2} =$$

Dem: $\left(P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) \ldots = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \right)$

96. **(Probabilităţi elementare şi probabilităţi condiţionate: Adevărat sau Fals?)**

• ∗ ***prelucrare de Liviu Ciortuz, după***
CMU, 2014 fall, W. Cohen, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 4.a
CMU, 2014 fall, W. Cohen, Z. Bar-Joseph, midterm, pr. 1

Marcaţi cu *adevărat* sau *fals* fiecare dintre afirmaţiile următoare:

a. $P(A \cup B \cup C) \geq P(A) + P(B) + P(C)$.

b. $P(A|B,C) = \dfrac{P(B|A,C)\,P(A|C)}{P(B|C)}$.

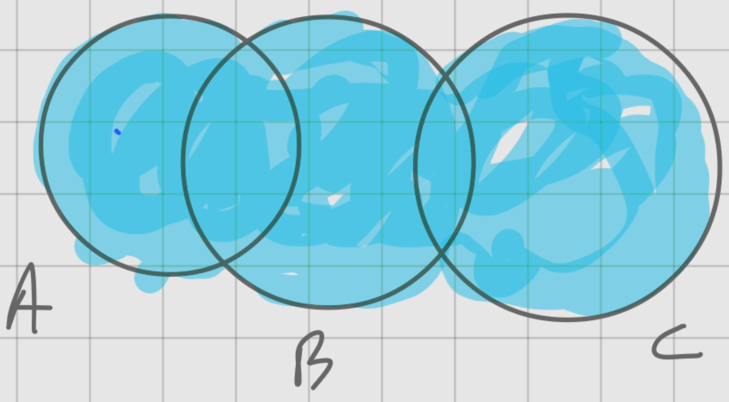
c. $P(A|C) = \sum_{i=1}^{n} P(A, B_i|C)$, **unde** $B_i \cap B_j = \emptyset$ **pentru orice** $i \neq j$ **şi** $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ **(evenimentul sigur).**[237]

d. $P(A|C) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i, C)\,P(B_i|C)$, **evenimentele** B_i **satisfac aceleaşi proprietăţi ca la punctul precedent.**

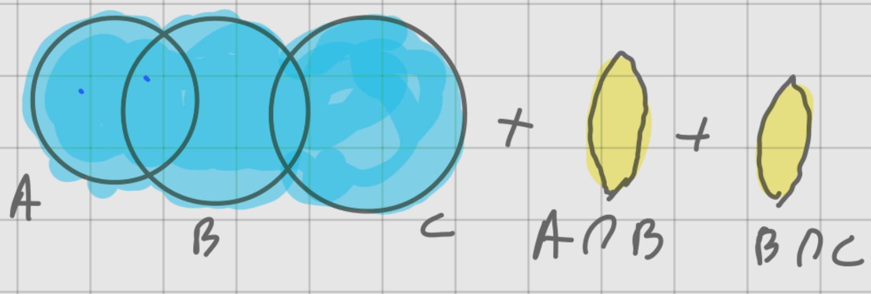
Justificaţi în mod riguros fiecare răspuns. Pentru afirmaţiile *false*, puteţi da un contraexemplu. Pentru afirmaţiile *adevărate*, exprimaţi în câteva cuvinte, dacă este posibil, *tipul* proprietăţii respective.

a) Fals.

$P(A \cup B \cup C) =$



$P(A) + P(B) + P(C) =$



Deci, $P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$

Adevărat

b) $P(A|B,C) = \dfrac{P(B|A,C)P(A|C)}{P(B|C)}$

$$P(A|B,C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)} = \frac{P(B\cap A\cap C)}{P(B|C)\cdot P(C)} =$$

$$= \frac{P(B|A\cap C)\, P(A\cap C)}{P(B|C)\cdot P(C)} = \frac{P(B|A,C)\cdot P(A|C)\cdot \cancel{P(C)}}{P(B|C)\cdot \cancel{P(C)}} =$$

$$= \frac{P(B|A,C)\cdot P(A|C)}{P(B|C)}$$ Adevărat

c) adevărat

disjuncte 2 câte 2

Conf. prob. totale, dacă $B_1, B_2, .. B_n$ disjuncte și acoperă întreg spațiul de evenimente Ω, atunci

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i) \quad \text{sau} \quad P(A\cap C) = \sum_{i} P(A\cap B_i\cap C)}$$

știind $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$,

$$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} \overset{u.n.}{=} \frac{P(A\cap(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)\cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i\cap C))}{P(C)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i\cap C)}{P(C)}$$

c. $P(A|C) = \sum_{i=1}^{n} P(A, B_i|C)$, **unde** $B_i \cap B_j = \emptyset$ **pentru orice** $i \neq j$ **şi** $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ **(evenimentul sigur).**[237]

$$= \frac{\sum P(A, B_i \mid C)\, P(C)}{P(C)} = \frac{\cancel{P(C)} \sum P(A, B_i \mid C)}{\cancel{P(C)}}$$

$$\Rightarrow P(A \mid C) = \sum_{i=1}^{n} P(A, B_i \mid C)$$

adevărat

d) Știm $P(A \mid C) = \sum_i P(A, B_i \mid C)$ adev.

Dem. dacă și $P(A \mid C) = \sum_i P(A \mid B_i, C) P(B_i \mid C)$ adev.

Conform T.P.T: $\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)}$

T.P.C: $P(A \cap C) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i \cap C) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_i^n P(A \mid B_i, C) P(B_i \cap C)$

P.P.R.A. $P(A \mid C) \neq \sum_i^n P(A \mid B_i, C) P(B_i \mid C)$

Dem: $P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \overset{\text{P.C}}{=} \sum_i^n \frac{P(A \cap B_i \cap C)}{P(C)} = \sum_i^n \frac{P(A \mid B_i, C) P(B_i, C)}{P(C)} =$

$$= \frac{\sum P(A \mid B_i, C) P(B_i \mid C) \cancel{P(C)}}{\cancel{P(C)}} = \sum_i^n P(A \mid B_i, C) P(B_i \mid C)$$

contradicție $\Rightarrow$ adev.

Variabile aleatoare:

97. **(Variabile aleatoare: medii şi varianţe; exemplificări ale unor proprietăţi)**

• ⋆ *CMU, 2016 fall, N. Balcan, M. Gormley, HW1, pr. 6.3.2*

Fie X o variabilă aleatoare având media $E[X] = 1$ şi varianţa $Var(X) = 1$. Calculaţi:

$$i. E[3X]; \qquad ii. Var(3X); \qquad iii. Var(X+3).$$

[237] În locul condiţiei $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ se poate considera fie proprietatea $P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = 1$ fie $A \subseteq \bigcup_i B_{i=1}^{n}$, deşi ambele sunt mai laxe (i.e., mai puţin restrictive) decât condiţia din enunţ.

i. $E[3X] = 3E[x] = 3 \cdot 1 = 3$

• $E[aX]$, a - constantă $\Rightarrow$ $\Rightarrow aE[X]$

ii. $Var(3X) = 9\,Var(X) = 9 \cdot 1 = 9$

• $Var[aX] = a^2\,Var[X]$

• $Var[X+a] = Var[X]$

iii. $Var(X+3) = Var(x) = 1$

"Dacă adăugăm o constantă la o variaţie, variaţia va fi aceeaşi, nu o vom modifica."

98. **(Variabila *indicator* pentru un eveniment aleator: calculul mediei)**

• ○ *CMU, 2015 spring, T. Mitchell, N. Balcan, HW2, pr. 1.c*

Fie un eveniment aleatoriu oarecare A, iar X o variabilă aleatoare definită astfel:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{dacă evenimentul } A \text{ se realizează} \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Uneori, X este numită variabila aleatoare *indicator* pentru evenimentul A. Arătaţi că $E[X] = P(A)$, unde $E[X]$ reprezintă *media* variabilei X.