Study Note of "Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework and Its Applications by Jordi Gali"

SimmSimm

2021 年 10 月 13 日

1 Introduction

2 Classic Monetary Model (古典モデル)

Hypotheses:
- Perfect competition in goods & labour markets (商品・労働市場共に完全競争)
- Fully flexible prices in goods & labour (商品・労働市場共に完全な伸縮性価格)

additionally
- unique goods and investment instrument (単一の商品、単一の投資対象)

Role of money:
- ~Sec 2.4: just a unit of account (お金の単位に過ぎない)
- Sec 2.5~: affects a utility of household (家計の効用に影響)

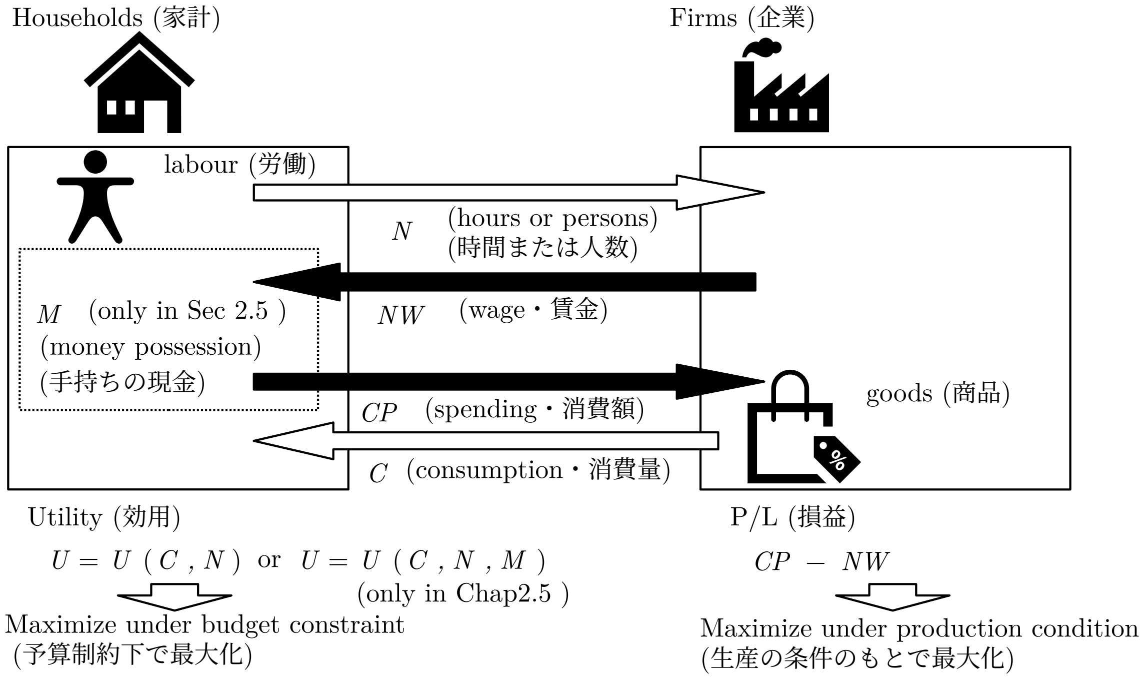


Figure 1. Schematic representation of Classical Monetary Model

2.1 Households (家計)

Identical and many (同一の世帯が多数ある)

Utility function at t=0 (t=0 での効用関数、家計はこの最大化を目指して行動する)

$$\begin{aligned}\Upsilon_0 &= \mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(C_t, N_t; Z_t)\right] \\ &= U(C_0, N_0; Z_0) + \mathbb{E}_0\left[\beta^1 U(C_1, N_1; Z_1)\right] + \mathbb{E}_0\left[\beta^2 U(C_2, N_2; Z_2)\right] + ...\end{aligned} \tag{1}$$

where Υ is upsilon (ウプシロン、U に対応するギリシア文字)

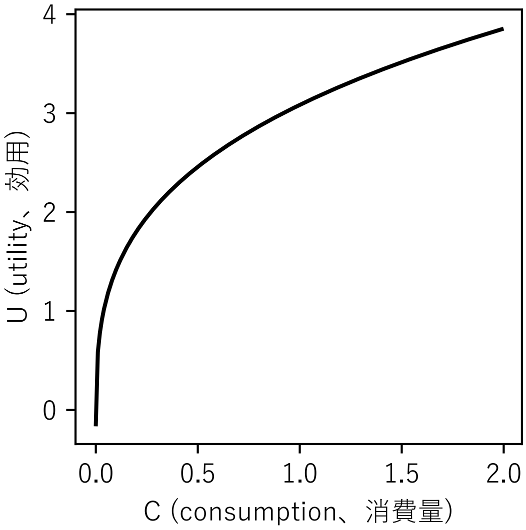
- C_t: consumption of goods, all goods are identical (商品の消費数、全ての商品は同一とする)
  - An increasing function of C_t but the increment diminishes for more C_t
    (C_t の増加関数だが、その増加幅は C_t が増えると逓減する)

$$\frac{\partial U}{\partial C_t}\ (\equiv U_{c,t}) > 0,\ \frac{\partial^2 U}{\partial C_t^2}\ (\equiv U_{cc,t}) \leq 0 \tag{2}$$

where ∂ means partial derivative. A household is happy with more goods, but becomes less sensitive as it gets more goods.

(ここで ∂ は偏微分を意味する。家計は、商品をたくさん持っていた方が幸福になる。しかし、持つ商品が増えていくほど商品一つのありがたみが薄れる。)

Figure 2. Utility diminishingly increases with consumption
(消費量の変化による効用の変化)



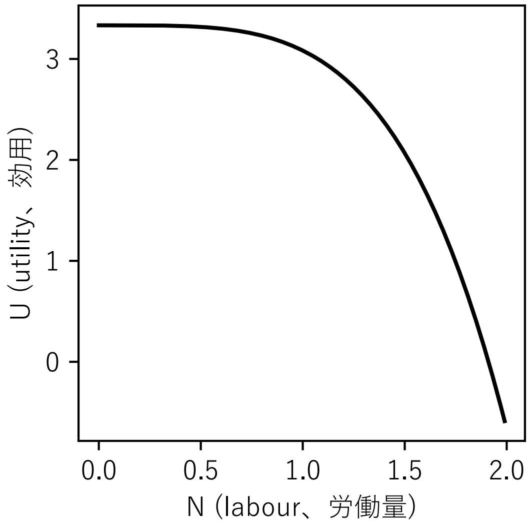
- N_t: amount of work (working hours or the number of working persons) (労働の量、つまり労働時間または労働者の人数)
  - An decreasing function of N_t and the decrement accelerates for more N_t
    (N_t の減少関数だが、N_t が増えるとその減少幅は加速する)

$$\frac{\partial U}{\partial N_t}\ (\equiv U_{n,t}) \leq 0,\ \frac{\partial^2 U}{\partial N_t^2}\ (\equiv U_{nn,t}) \leq 0 \tag{3}$$

A household is less happy with more labour because of less leisure time, and becomes more sensitive as it is exposed to more labour.

(家計は、労働をたくさんすると余暇が少なくなるので幸せが少なくなる。労働をすればするほど余暇がますます削られるため、幸せの減少幅は大きくなる。)

Figure 3. Utility diminishingly increases with labour
(労働量の変化による効用の変化)



- Z_t: degree of preference of consumption and leisure(whole time-working hours) (消費と休暇 (= 全時間-労働時間) の選好度)
  - $Z_t = 0 \rightarrow$ no desire of consumption or leisure(消費欲も休暇欲も無し)
  - $Z_t = \infty \rightarrow$ unlimited desire of consumption and leisure(消費欲も休暇欲も無限大)
  Random variable (ランダムに変化)

- β $(= e^{-\rho})$: discount factor (割引率)
  - ρ: constant risk-free rate (無リスク金利)

Discount factor (割引率)
- When the interest rate ρ_1 (eg. 1%) is for a single time step (ρ_1 が一期分の金利 (例えば 1%) を意味するとき)
Suppose you have ¥100 now. If you invest the ¥100 to a risk-free bond, you will have ¥$100 \times (1+\rho_1)$. Therefore,
(現在 ¥100 持っているとする。この ¥100 を無リスク債券に投資すれば次の 1 期で ¥$100(1+\rho_1)$ となる)

$$¥100 \ @t=0 \text{ is equivalent to } ¥100(1+\rho_1) \ @t=1 \tag{4}$$

or (つまり)

$$¥100\left(\frac{1}{1+\rho_1}\right) \ @t=0 \text{ is equivalent to } ¥100 \ @t=1 \tag{5}$$

The factor $\beta=\frac{1}{1+\rho_1}$ is called a discount factor. ($\beta=\frac{1}{1+\rho_1}$ をディスカウント・ファクターあるいは割引率という)

- When the interest rate ρ is continuously compounding (ρ が連続複利の金利を意味するとき)
  For a tiny time interval $\Delta t\ \left(=\frac{1}{N}\right)$,
  (微小な時間間隔 $\Delta t\ \left(=\frac{1}{N}\right)$ について、)

$$¥100 \ @t=0 \text{ is equivalent to } ¥100\,(1+\rho\Delta t) \ @t=\Delta t \tag{6}$$

The money grows by a factor of $(1+\rho\Delta t)$. So
(金額は Δt 期で $(1+\rho\Delta t)$ 倍だけ増加するので、)

$$¥100 \ @t=0 \text{ is equivalent to } ¥100(1+\rho\Delta t)^2 \ @t=2\Delta t \tag{7}$$

For a unit time interval 1 $(=N\Delta t)$,
(従って 1 期 $(=N\Delta t$ 期$)$ で、)

$$¥100 \ @t=0 \text{ is equivalent to } ¥100(1+\rho\Delta t)^N \ @t=1 \tag{8}$$

Taking limit of continuous compounding (連続複利の極限を取る、つまり), $(1+\Delta t)^N=\left(1+\frac{\rho}{N}\right)^N \longrightarrow e^\rho\ (N\to\infty)$,

$$¥100 \ @t=0 \text{ is equivalent to } ¥100e^\rho \ @t=1 \tag{9}$$

it means (つまり、)

$$¥100e^{-\rho} \ @t=0 \text{ is equivalent to } ¥100 \ @t=1 \tag{10}$$

Thus, the discount factor is (従って割引率は次のようになる)

$$\beta=e^{-\rho} \tag{11}$$

When the risk-free interest rate ρ is constant, discount factor from time=0 to t is
(無リスク金利 ρ が一定だとすると時刻 0 から t までの割引率は)

$$\beta^t \tag{12}$$

Thus, the discount factor comes into play to describe future contributions in the utility function
(従って、将来の寄与を表すために割引率を効用関数で使う：)

$$\Upsilon_0 = \mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(C_t, N_t; Z_t)\right] \tag{1}$$

And $\mathbb{E}_0[...]$ is an expectation of [...] over future possibilities of preference $Z_t\,(t = 1, 2, ...)$. Similarly $\mathbb{E}_t[...]$ is an expectation of [...] over future possibilities beyond t of $Z_s\,(s = t+1, t+2, ...)$.
($\mathbb{E}_0[...]$ は $t = 0$ での [...] の期待値。つまり $Z_t\,(t = 1, 2, ...)$ についての確率平均。同様に、$\mathbb{E}_t[...]$ は時刻 t での [...] の期待値。即ち $Z_s\,(s = t+1, t+2, ...)$ についての確率平均。)

Household's objective is to maximise the utility function (1) under the following budget constraint and solvency constraint.
(家計は、以下の予算制約と財務健全性条件のもとで効用関数(1)を最大化する。)

1. Budget constraint (予算制約)

Suppose our household saves money as an investment of B_t units of bond. The bond price is Q_t and will pay back 1 in price at the next time $t + 1$. Because we cannot use money beyond budget,
(家計は、消費に使った残りのお金を B_t 個の債券に投資するとする。債券の価格は Q_t で時刻 $t+1$ で価格 1 で返ってくるとする。家計は予算を超えてお金を使うことはできないので、)

$$C_t P_t + Q_t B_t \le B_{t-1} + N_t W_t + D_t - T_t \tag{13}$$

where W_t is wage per unit time or per person, D_t is dividend (only if the household is a firm owner), and T_t is tax. The right-hand side is income and the left-hand side is spending. In the optimal case, the equality should hold because the whole income should be used for spending including investment.
(ここで W_t は単位時間当たりまたは人頭あたりの賃金、D_t は配当金 (但し、家計が会社オーナーの場合のみ)、T_t は税金。右辺は収入で左辺は支出である。最適化された状態では収入が全て支出 (投資も含む) に使われるはずなので等式で成り立つはずである。)

2. Solvency constraint (財政健全性条件)

Note that B_t can be positive or negative. It's investment if positive and debt if negative. We assume that the household does not leave debt in the end. Naively, seen from time t
(ここで B_t は正にも負にもなることに注意したい。正のときには投資を意味し、負のときには借金を意味する。もう一つの条件として、家計は最終的には何の借金も残さないという仮定をする。単純に考えれば、時刻 t から見たときに次のような条件になる)

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t B_T \ge 0 \tag{14}$$

But is it a correct way to take an expectation? Suppose we have several scenarios in price level in the future T. The scenarios range from deep deflation to steep inflation. For each scenario, the magnitude of B_T should be adjusted according to its inflation level. To compute an inflation-adjusted value, it should be measured with the equivalent goods amount that can be bought for the bond settlement price B_T. With help of the budget constraint (13), the equivalent goods amount C^B_{T+1} is
(しかしこれは果たして正しい期待値の取り方なのだろうか？　例えば時刻 T の将来において物価水準でいくつかのシナリオがあるとする。デフレからインフレまで様々なシナリオがあるとする。同じ額の借金でも物価水準が高ければ相対的な額は小さくなる。従って B_T の大きさは物価水準で補正されるべきである。物価水準で補正するときには、お金 B_T で買える商品の量 C^B_{T+1} を考えるべきである。(13)より次が成り立つ、)

$$C_t P_t + ... = B_{t-1} + ... \tag{15}$$

$$C^B_{T+1} = \frac{B_T}{P_{T+1}} \tag{16}$$

And even for the same C_{T+1}, if a household is rich, it will not be a big trouble for the household. If the household is rich, C_{T+1} is large so $U_{c,T+1} = \frac{\partial U_{T+1}}{\partial C_{T+1}}$ is small. The level of burden is measured with the utility. Thus we compute the loss of utility from the loss of C^B_{T+1} due to debt payment
(そして、同じ C_{T+1} だったとして、家計が裕福になったときには借金があってもさほど問題にならない。家計が裕福になるとは買えるものが多くなる、つまり C_{T+1} が大きくなるときなので $U_{c,T+1} = \frac{\partial U_{T+1}}{\partial C_{T+1}}$ は小さくなる。ここで、負担の度合いは効用関数で見積もられることが分かる。そこで、借金返済のために C^B_{T+1} を買う機会を失ったときの効用関数の減少分を計算してみる)

$$\Delta U_{T+1} = U(C_{T+1} + C^B_{T+1}) - U(C_{T+1}) \simeq U_{c,T+1} \frac{B_T}{P_{T+1}} \tag{17}$$

It contains both the utility sensitivity and the inflation-adjusted bond amount. Therefore, the debt amount should be measured with the impact on utility. Additionally, at t, it has to be discounted to time t from $T+1$. Thus
(この効用関数の変化には、感度 $U_{c,T+1}$ と物価調整済みの債券の量 C^B_{T+1} が両方が自然に含まれている。従って、債券の量は効用関数の変化で見積もられるべきである。また、時刻 t の効用に焼き直すときには以下のようにする)

$$\Delta \Upsilon_t = \mathbb{E}_t \beta^{T+1-t} \Delta U_{T+1} \simeq \mathbb{E}_t \beta^{T+1-t} \left[U_{c,T+1} \frac{B_T}{P_{T+1}} \right] \tag{18}$$

And this has to be greater than or equal to 0 when $T \to \infty$. Here we define a effective discount factor. Note that this discount factor is stochastic
(この量が $T \to \infty$ で 0 以上になってないといけない。ここで実効的な割引率を定義する。この割引率は確率的に変化するものである)

$$\Lambda_{t,T+1} \equiv \beta^{T+1-t} \frac{U_{c,T+1}}{U_{c,t}} \tag{19}$$

Because the utility function increases with consumption ie. $U_{c,t} > 0$, finally we get a solvency constraint (そして効用関数は消費量について単調増加なので $U_{c,t} > 0$ となることも使って、最終的に以下の財政健全性条件を得る)

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,T+1} \frac{B_T}{P_{T+1}}\right] \geq 0 \tag{20}$$

In reality, the equality holds because if the household has money to buy the bond B_T, it is better to buy goods with that money to increase the utility function.
(現実的にはこの式は等式で成り立つはずである。というのも、B_T の債券を買うお金の余裕があれば代わりに同じお金で商品を買う方が効用を上げられるからである。)

Note that (20) is not the same as (3) in the textbook:
((20)は実は元の本の (3) と異なっている)

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,T} \frac{B_T}{P_T}\right] \geq 0 \tag{21}$$

and the some literature from the same author (GalÌ, n.d.) writes
(そして同じ筆者の文献 (GalÌ, n.d.) にはまた別の式が書かれている)

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t B_T \geq 0 \tag{14}$$

But it is not serious. As you can see, these different constrains have the same result.
(但しこれは別に大ごとではなく、後述するようにどの式でも結果は変わらない。)

To summarize, a household is assumed to maximise its utility
(まとめると、家計は以下の効用関数を最大化するように行動する。)

$$\Upsilon_0 = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t; Z_t)\right] \tag{1}$$

subject to the the budget constraint
(ただし予算条件)

$$C_t P_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + N_t W_t + D_t - T_t \tag{13}$$

and the solvency constraint
(と財政健全性条件という拘束条件がある。)

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,T+1} \frac{B_T}{P_{T+1}}\right] \geq 0 \tag{20}$$

Now we seek the optimum. We can change variables C_t, N_t, B_t $(t = 0, 1, 2, 3...)$. This is a typical variational problem.
(さて、以下で効用関数を最適化する。そのために C_t, N_t, B_t $(t = 0, 1, 2, 3...)$ の値を振る。典型的な変分問題である。)

t	0	1	2	...	s	....
consumption	C_1	C_2	C_3	...	C_s	...
labour amount	N_1	N_2	N_3	...	N_s	...
bond amount	B_1	B_2	B_3	...	B_s	...

And in the optimum case, the equalities should hold in (13) and (20).
(最適化した状態では、(13) and (20)において等式が成り立つはずである)

$$C_t P_t + Q_t B_t = B_{t-1} + N_t W_t + D_t - T_t \tag{13'}$$

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,T+1} \frac{B_T}{P_{T+1}} \right] = 0 \tag{20'}$$

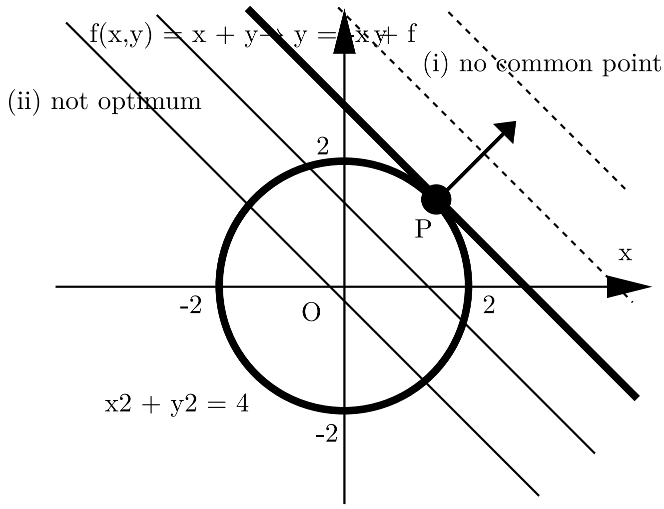
To maximise (1), we use Lagrange multiplier method. We maximise the following variable
((1)を最大化するために、ラグランジュの未定乗数法を用いて以下の関数を最大化する)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t; Z_t) \right] + \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (C_t P_t + Q_t B_t - B_{t-1} - N_t W_t - D_t + T_t) \right] \\ + \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t \left[\lambda_T' \Lambda_{t,T+1} \frac{B_T}{P_{T+1}} \right]\end{aligned} \tag{22}$$

Lagrange multiplier (ラグランジュの未定乗数法)

Here we see how Lagrange multiplier works. This is just an explanation and not a mathematical proof. Suppose we have a function $f(x, y)$ and want to maximise it under a constraint $g(x, y) = 0$.
(ラグランジュの未定乗数法について簡単に説明する。あくまで説明であって厳密な証明ではない。関数 $f(x, y)$ を最大化することを考える。ただし $g(x, y) = 0$ という拘束条件を満たすとする。)

Let us take an example of $f(x, y) = x + y$ and $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. We want to maximise $f(x, y) = x + y$ under the constraint $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ which is actually a circle around $(0, 0)$ with radius of 2. And $f = x + y$ is a line.
(例として拘束条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ を満たすときに $f(x, y) = x + y$ を最大化することを考える。つまり、点 (x, y) が原点周りの半径 2 の円状にあるときに、$y + x$ を最大にしたい。$f = x + y$ は直線である。)



Description of Lagrange multiplier (ラグランジュ未定乗数法の説明)

When $f(x, y)$ is too high, there is no crossing point with the circle. It means no solution (x, y) satisfying $g(x, y) = 0$) ((i) in the figure). On the other hand, when $f(x, y)$ is too low, then the line can be more upward with common points with the circle. The marginal case is that the line and the circle has only one common point P. In this case, the line and the circle tangents. It means that the normal vector of the line at P parallels to the normal vector of the circle at P.
($f(x, y)$ が大きすぎると、図中の (i) のように円と直線は交わらない。つまり解 (x, y) は存在しない。一方、$f(x, y)$ が小さすぎる場合には、直線を上に動かして f を増やすことができる。そうしても図の (ii) のように円と直線の交点は存在する。f が最大となるときは円と直線がただ一つの点 P で交わるときである。このとき円と直線は接する。つまり点 P において、円の法線と直線の法線は平行になる。)

The normal vector of the line $\boldsymbol{n}_g$ is parallel to $\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \equiv \nabla g$, and this is $(1, 1)$. The normal vector of the circle $\boldsymbol{n}_f$ is parallel to $\nabla f = (2x, 2y)$. Because the two vector has to be parallel each other,
(直線の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_g$ は $\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \equiv \nabla g$ と平行になる。一方、円の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_f$ は $\nabla f = (2x, 2y)$ と平行になる。そして、$\boldsymbol{n}_g$ と $\boldsymbol{n}_f$ が平行になるので、)

$$\nabla f = \tilde{\lambda} \nabla g \tag{23}$$

or

$$2x = \tilde{\lambda} 2y = \tilde{\lambda} \tag{24}$$

where $\tilde{\lambda}$ is a constant. Together with the constraint $x^2 + y^2 = 4$, the solution for the point P is $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
(但し $\tilde{\lambda}$ は定数。拘束条件 $x^2 + y^2 = 4$ より、点 P の解は $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$。)

(23) can be rephrased the maximisation of
((23)は、以下の $\mathcal{L}$ を最大化するとも言い換えることができる。)

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \tag{25}$$

where $\lambda = -\tilde{\lambda}$. In general, if the function has more variable, the equation holds
(ただし $\lambda = -\tilde{\lambda}$。一般的に、更に変数があるときにも同様の式は成立する)

$$\mathcal{L}(x,y,z,...) = f(x,y,z,...) + \lambda g(x,y,z,...) \tag{26}$$

and with more constraints $h(x,y,z,...) = 0$,...
(そして更なる拘束条件が存在するときも同様に成立する)

$$\mathcal{L}(x,y,z,...) = f(x,y,z,...) + \lambda g(x,y,z,...) + \eta h(x,y,z,...) + ... \tag{27}$$

and maximise $\mathcal{L}(\S, \dagger, \ddagger, ...)$. The same equation holds when we want to minimise the target function instead of maximising it.
(この手法は、最大化だけでなく最小化のときにも使える手法である。)

Here is the target function to maximise (repeated)
(さて、最大化すべき関数はこちら (再掲))

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(C_t, N_t; Z_t)\right] + \mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t(C_tP_t + Q_tB_t - B_{t-1} - N_tW_t - D_t + T_t)\right] + \lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_t\left[\lambda_T^{'}\Lambda_{t,T+1}\frac{B_T}{P_{T+1}}\right] \tag{22}$$

Let us first maximise within the same time. Take partial derivatives wrt C_s and N_s. Note that when we take a variation at $t = s$, we assume that all the past and present variables up to $t = s$ have been already determined so does not need the expectation operator. Only the future variables $t > s$ are stochastic and need the expectation operator
(まず最初に、同一時間において最大化する。C_s と N_s の偏微分をとる。$t = s$ での変分を考えるときには、現在 $t = s$ と過去の全ての変数は既に定まっていると仮定する。従って期待値の操作は必要はない。一方、将来の変数 $t > s$ は確率的に変化するので期待値の操作が必要になる。)

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_s} = \beta^s U_{c,s} + \lambda_s P_s \tag{28}$$
$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N_s} = \beta^s U_{n,s} - \lambda_s W_s \tag{29}$$

Hence

$$\frac{U_{n,s}}{U_{c,s}} = -\frac{W_s}{P_s} \tag{30}$$

What the formula means? Let us rewrite
(この式は何を意味するのだろうか？　次のように書き直す。)

$$(-U_{n,s})\frac{\Delta m}{W_s} = U_{c,s}\frac{\Delta m}{P_s} \tag{31}$$

Let us consider given the work amount N_s and the goods consumption C_s, the household works to earn an extra tiny Δm units of money, then buys goods with the money. $\frac{\Delta m}{W_s}$ is the extra amount of work to earn Δm units of money. So the left-hand side $(-U_{n,s})\frac{\Delta m}{W_s}$ is the decrement of utility. Similarly, $\frac{\Delta m}{P_s}$ is the extra amount of goods the household buys and the right-hand side $U_{c,s}\frac{\Delta m}{P_s}$ is the increment of utility. Thus (30) points to the equality of the two opposite utility changes.
(労働量が N_s、消費量が C_s のときに、家計が追加で働いて Δm 単位のお金 (少額) を得て、そのお金で商品を買うとする。$\frac{\Delta m}{W_s}$ は追加で得られた Δm 単位のお金を得るために働いた労働量である。従って左辺の $(-U_{n,s})\frac{\Delta m}{W_s}$ は、そのお金を得るために働いたことによる効用の減少幅である。同様に、$\frac{\Delta m}{P_s}$ はそのお金で買った商品の量であり、右辺の $U_{c,s}\frac{\Delta m}{P_s}$ は商品を消費したことによる効用の増加幅である。(30)はこれら 2 種類の増減反対の効用の変化がバランスしていることを意味する。)

If the work amount N_s is too small (hence C_t is also small because the household does not earn much money), it corresponds to the left side of Fig. 2 and Fig. 3 where $U_{n,s}$ is small and $U_{c,s}$ is large. Thus the left-hand side is larger in (31). This imbalance can be resolved by increasing both N_s and C_s. Similarly, if the work amount N_s is too large (hence C_t is also large because the household earns much money), it corresponds to the right side of Fig. 2 and Fig. 3. Thus the left-hand side is smaller in (31). This imbalance can be resolved by decreasing both N_s and C_s.
(もし労働量 N_s が少なすぎると (従って収入も少ないから消費量 C_s も少ない)、その状態は Fig. 2 と Fig. 3 の左側に対応する。このとき $U_{n,s}$ は小さく $U_{c,s}$ は大きいので(31)は左辺の方が大きくなる。このアンバランスを解消するためには N_s と C_s を増やせばいい。同様に、もし N_s が多すぎる (従って収入も多いから C_s も多い) 状態は、Fig. 2 と Fig. 3 の右側に対応する。(31)は左辺の方が小さくなるので、このアンバランスを解消するために N_s と C_s を減らす。

For the inter-tenporal condition, we take a variation wrt B_s
(次に異なる時間間の条件を求める。B_s について変分をとる)

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_s} = \lambda_s Q_s - \mathbb{E}_s \lambda_{s+1} \tag{32}$$

Thus

$$Q_s = \frac{P_s}{\beta^s U_{c,s}} \mathbb{E}_s \frac{\beta^{s+1} U_{c,s+1}}{P_{s+1}} = \beta\, \mathbb{E}_s \left[\frac{U_{c,s+1}}{U_{c,s}} \frac{P_s}{P_{s+1}} \right] \tag{33}$$

This equation determines the bond price. What does it mean? Rewriting it as
(これは債券価格を決める式である。この式にはどういう意味があるだろうか？　少し書き換えてみる)

$$Q_s = \left[\mathbb{E}_s \beta\, U_{c,s+1} \frac{\Delta m}{P_{s+1}}\right] \Big/ \left[U_{c,s} \frac{\Delta m}{P_s}\right] \tag{34}$$

At $t = s$, $\frac{\Delta m}{P_s}$ is the amount of goods which can be bought with a tiny amount Δm of money, and $\frac{U_{c,s}}{P_s}$ is the gain of utility from the purchase of goods using Δm units of money. In other words, $U_{c,s}\frac{\Delta m}{P_s}$ is the amount of happiness for the household by buying goods with Δm units of money. Similarly, $\beta U_{c,s+1}\frac{\Delta m}{P_s+1}$ is the gain of utility from the purchase of goods using Δm units of money and the utility at $t = s+1$ is discounted to $t = s$.
(時刻 s で、$\frac{\Delta m}{P_s}$ は微小なお金 Δm 単位で買える商品の量を意味する。従って $U_{c,s}\frac{\Delta m}{P_s}$ はお金 1 単位で商品を買うことによって増える効用である。くだけた (というか狂気じみた) 言い方をするなら、$U_{c,s}\frac{\Delta m}{P_s}$ はお金 Δm 単位で商品を買うことで、得られる幸せの量である。同様に、$U_{c,s+1}\beta\frac{\Delta m}{P_s+1}$ は、時刻 $s+1$ でお金 Δm 単位で商品を買うことで得られる幸せの量で、その $t = s+1$ の幸せの量を $t = s$ に割り引いたものである。)

If the utility gain at $t = s+1$ is higher than the one at $t = s$, the household chooses to put money into the bond rather than spending now at $t = s$, thus the bond price Q_s increases and the interest rate $i_s = -\ln Q_s$ decreases. On the other hand, the utility gain at $t = s+1$ is lower than the one at $t = s$, the household choose to purchase goods right away. Less demand for the bond decreases the bond price Q_s and the interest rate increases.
(もし時刻 $s+1$ に商品を買うことで得られる幸福が時刻 s より大きいならば、家計は時刻 s に商品を買わずに債券を買って $s+1$ に使おうとする。つまり債券の需要が増えるので債券価格 B_s は増える。逆に、もし時刻 s に商品を買うことで得られる幸福が時刻 $s+1$ より大きいならば、家計は時刻 s にすぐ商品を買い債券を買わない。つまり債券の需要が減るので債券価格 B_s は減る。)

To summarise, the optimum conditions are:
(最適化のための条件をまとめると)

$$\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = -\frac{W_t}{P_t} \tag{30}$$

$$Q_t = \beta\, \mathbb{E}_t \left[\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}}\right] \tag{33}$$

$$C_t P_t + Q_t B_t = B_{t-1} + N_t W_t + D_t - T_t \tag{13'}$$

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,T+1} \frac{B_T}{P_{T+1}}\right] = 0 \tag{20'}$$

My critiques (自分なりのモデルへの突っ込み)

- Because rich and poor households behaves differently respectively, we need multiple representative

households.
(実際は裕福な家計と貧困な家計はそれぞれ異なる振る舞いをする。従って、代表的な家計は複数用意すべきなのではないか。)
- Solvency constraint may be valid for a household, but not necessarily be valid for government. This is just a note for future modelling of the government.
(財政健全性条件は家計に対しては正しいかもしれないが、政府に対しては必ずしも成り立たない。これは今後に政府をモデリングするときの注意。)
- In this model, household controls interest rate. This sounds weird. In reality, interest rate is determined in financial market by market participants, and in banks and borrowers via bilateral agreements.
(このモデルは家計が金利を決める。これは現実に照らし合わせるとおかしい。実際には金利は市場参加者によって金融市場で決まったり、銀行と借り手の合意で決まる。)

Next, we impose a formula of utility function $U(C_t, N_t; Z_t)$.
(以降は、$U(C_t, N_t; Z_t)$ の形を次のように仮定する。)

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \begin{cases} \left(\frac{C_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\psi}}{1+\psi}\right) Z_t & (\sigma \neq 1) \\ \left(\ln C_t - \frac{N_t^{1+\psi}}{1+\psi}\right) Z_t & (\sigma = 1) \end{cases} \tag{35}$$

The second case is to hold the continuity
(式中の 2 番目のケースは連続性のために定義してある。)

$$\frac{x^h - 1}{h} = \left.\frac{\partial x^h}{\partial h}\right|_{h\to 0} = \left.\frac{\partial \exp(h \ln x)}{\partial h}\right|_{h\to 0} = (\ln x)\exp(h\ln x)|_{h\to 0} = \ln x \tag{36}$$

Properties of (35) are
((35)の 3 つの性質：)

i) independent effects of consumption and labour on the utility function
(消費と労働は独立に効用関数に作用する)

$$U_{cn,t} = \frac{\partial^2 U}{\partial C_t \partial N_t} = 0 \tag{37}$$

ii) constant elasticity of marginal utilities (限界効用の弾性率が一定となる)
marginal utilities (限界効用):

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} Z_t \frac{\partial U}{\partial N_t} = -N_t^{\psi} Z_t \tag{38}$$

elasticities (弾性率)

$$\frac{\frac{1}{C_t^{-\sigma} Z_t}}{\frac{1}{C_t}} \left[\frac{\partial C_t^{-\sigma} Z_t}{\partial C_t}\right] = -\sigma = const. \frac{\frac{1}{-N_t^{\psi} Z_t}}{\frac{1}{N_t}} \left[\frac{\partial(-N_t^{\psi} Z_t)}{\partial N_t}\right] = \psi = const. \tag{39}$$

iii) effect of Z_t (Z_t の影響)

- no effect on selection over C_t and N_t (purchase or labour) at the same time t
  (同一時刻における C_t と N_t(つまり消費か労働か) の選択には影響がない)
- effect on different time via $Z_t\beta^t$ in $\beta^t U(C_t, N_t; Z_t)$
  (異なる時刻間では、$\beta^t U(C_t, N_t; Z_t)$ に含まれる $Z_t\beta^t$ のファクターを通じて効用関数に影響する)

And for the dynamics of the preference Z_t, the log of Z_t evolves according to AR(1) model.
(Z_t は、その対数が AR(1) モデルに従って時間発展する)

$$z_t \equiv \ln Z_t z_t = \rho_z z_{t-1} + \epsilon_t \tag{40}$$

where $\rho_z \in [0, 1]$ to prevent diversion and keep positivity, and ϵ adheres to the normal distribution with 0 mean.
(ここで正に保つため & 発散しないように $\rho_z \in [0, 1]$ とする。また ϵ は平均の正規分布に従うと仮定。)

Applying the optimum conditions (30), (33),
(最適化条件(30)と(33)を使うと以下のようになる)

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^\sigma N_t^\psi \tag{41}$$

$$Q_t = \beta\,\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_t}{C_{t+1}}\right)^\sigma \frac{Z_{t+1}}{Z_t}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right] \tag{42}$$

Applying a logarithm function to (41)
(対数をとると)

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \psi n_t \tag{43}$$

where we define $x = \ln X$ $(x = w_t, p_{,t}\, c_t, n_t)$. Or
(但し $x = \ln X$ $(x = w_t, p_{,t}\, c_t, n_t)$ と定義した。以下のように書き換える)

$$n_t = \frac{1}{\psi}(w_t - p_t - \sigma c_t) \tag{44}$$

Thus, the amount of labour is a function of wage. This can be seen as a competitive labour supply schedule. Note that $w_t - p_t$ is real wage. The coefficient $\frac{1}{\psi}$ can be interpreted as Frisch's labour supply elasticity $= \frac{\partial \ln N_t}{\partial \ln W_t}$. Also the formula does not include Z_t. Put it in another way
(従って、労働量は賃金の関数で書け、競争的な労働供給表を示す。ここで $w_t - p_t$ は実質賃金で、係数 $\frac{1}{\psi}$ は $\frac{\partial \ln N_t}{\partial \ln W_t}$ と書けるので Frisch 労働供給弾性率と解釈できる。また式は Z_t を含まない。別の方法で書き直すと)

$$N_t = \left(\frac{W_t}{P_t} U_{c,t}\right)^{\frac{1}{\psi}} \tag{45}$$

where W_t/P_t is real wage, but at the same time, the number of goods that can be purchased in a unit time/by a person. $U_{c,t}$ is the gain of utility from a unit amount of goods. Thus $(W_t/P_t)U_{c,t}$ means the utility gain from wage per time/person through purchase of the goods. If the gain is higher, the labor amount is larger to increase the utility.
(ここで W_t/P_t は実質賃金であると同時に単位時間または人頭当たりの賃金で買うことのできる商品の量である。$U_{c,t}$ は 1 個の商品を買ったときに増加する効用である。従って、$(W_t/P_t)U_{c,t}$ は単位時間/人頭あたりの賃金で商品を買うことによって得られる効用の増分を意味する。この増分が大きいほど効用を増やすために労働量は多くなる。)

Next we apply the logarithm function to (42). We define some rates: risk-free rate $\rho = -\ln\beta$, bond interest rate $i_t \equiv -\ln Q_t$, and inflation rate $\pi_{t+1} \equiv p_{t+1} - p_t$. We use Taylor expansion to the first order as we explain later
(次に(42)の対数をとる。ここで無リスク金利 $\rho = -\ln\beta$、債券金利 $i_t \equiv -\ln Q_t$、インフレ率 $\pi_{t+1} \equiv p_{t+1} - p_t$ を定義する。そして、あとで説明するテーラー展開を使って 1 次まで近似する)

$$\begin{aligned} i_t &= \rho - \ln \mathbb{E}_t \exp\left[\sigma(c_t - c_{t+1}) + z_{t+1} - z_t - \pi_{t+1}\right] \\ &\simeq \rho - \ln\left[1 + \mathbb{E}_t\{\sigma(c_t - c_{t+1}) + z_{t+1} - z_t - \pi_{t+1}\}\right] \\ &\simeq \rho - \ln\left[1 + \sigma(c_t - \mathbb{E}_t c_{t+1}) + \mathbb{E}_t z_{t+1} - z_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}\right] \end{aligned} \tag{46}$$

because z_t evolves as AR(1) process (40), $\mathbb{E}_t z_{t+1} = \rho_z z_t$
((40)より z_t は AR(1) 過程に従うので、$\mathbb{E}_t z_{t+1} = \rho_z z_t$ となる)

$$\begin{aligned} i_t &\simeq \rho - \ln\left[1 + \sigma(c_t - \mathbb{E}_t c_{t+1}) + (\rho_z - 1)z_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}\right] \\ &\simeq \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + \rho - \sigma(c_t - \mathbb{E}_t c_{t+1}) + (1 - \rho_z) z_t \end{aligned} \tag{47}$$

Thus, the current consumption is
(従って現在の消費量は)

$$c_t \simeq \mathbb{E}_t c_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left[i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \rho\right] + (1 - \rho_z)\frac{z_t}{\sigma} \tag{48}$$

So far, there is no topic about money itself. As we explain later in Sec2.5, a proper assumption introduces the demand for a real balance
(これまで、お金そのものは式に出てこなかった。2.5 節で述べるように適切な仮定を立てると実質残高への需要が導かれる)

$$m_t - p_t = c_t - \eta\, i_t + const. \tag{49}$$

where η (≥ 0) is the elasticity of interest semi-elasticity on money demand
(但し η (≥ 0) は貨幣需要の準弾性率である)

$$-\eta = \frac{1}{M_t}\frac{\partial M_t}{\partial i_t} \tag{50}$$

Because only divided by the target M_t, it is called semi-elasticity.
(微分される変数 M_t のみが除されるので、準弾性率という。)

Taylor expansion (テイラー展開)

Here we briefly explain Taylor expansion. Again, this is just an explanation and nowhere near a proper mathematical proof.
(ここではテーラー展開について手短に説明する。あくまで説明に過ぎず正式な証明にはなり得ない。)

Suppose we try to approximate $f(x)$ around $x = x_0$ with polynomial.
($f(x)$ を $x = x_0$ まわりで多項式を使って近似することを考える。)

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_k(x - x_0)^k + ... \tag{51}$$

Let us set $x = x_0$ then we get the 0-th coefficient
(ここで $x = x_0$ と置くと 0 次の係数を得る)

$$c_0 = f(x_0) \tag{52}$$

Then we take derivative sequentially
(順々に微分していく)

$$\frac{df(x)}{dx} \simeq \sum_{k=0}^{n} c_k k (x - x_0)^{k-1} = c_1 + 2c_2(x - x_0) + ... + kc_k(x - x_0)^{k-1} + ... \tag{53}$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \simeq \sum_{k=1}^{n} c_k k(k-1)(x - x_0)^{k-2} = 2!c_2 + ... + k(k-1)c_k(x - x_0)^{k-2} + ... \tag{54}$$

$$... \tag{55}$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \simeq n! c_n \tag{56}$$

setting $x = x0$
($x = x0$ として)

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k f(x_0)}{dx^k} \ (k = 0, 1, 2, ...) \tag{57}$$

Finally
(最終的にテイラー展開の式を得る)

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x_0)}{dx^k} (x - x_0)^k \tag{58}$$

(以下は例)
Example 1) $f(x) = \exp(x)$ and expansion around $x = x_0$

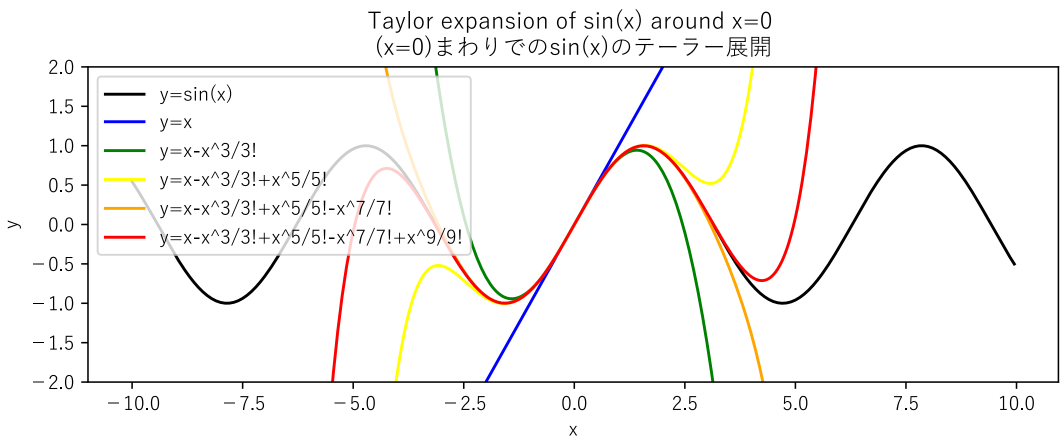
$$\exp(x) \simeq \left[1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}(x - x_0)^2 + \frac{1}{24}(x - x_0)^2 + ...\right] \exp(x_0) \tag{59}$$

Example 2) $f(x) = \ln(1 + x)$ and expansion around $x = 0$

$$\ln(1 + x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... \tag{60}$$

Example 3) $f(x) = \sin x$ and expansion around $x = 0$

$$\sin x \simeq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + ... \tag{61}$$



Higher order expansion gives better approximation.
(高次の展開ほど良い近似になる。)