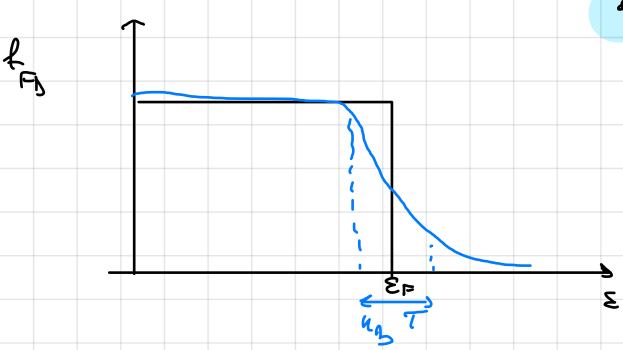
$\boxed{13/12}$

temperatura di Fermi: T_F t.c. $k_B T_F = \varepsilon_F$. $T_F \sim 10^3 - 10^4\ K$

in condizioni standard, per metalli $T \ll T_F$. Ciò implica che $\mu(T)$ sia approssimabile con $\mu(0)$



$n = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\varepsilon}} f_{FD}(\varepsilon) = \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, f_{FD}(\varepsilon)$ ottengo la dipendenza $\mu(T)$ da T

Temperatura non nulla (T>0)

l'energia aumenta in funzione di T. Calcoliamo il calore specifico per elettrone

$$\boxed{C_V = \frac{1}{N}\frac{dE}{dT}} = \frac{1}{N}\frac{d}{dT} V\int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon\, D(\varepsilon)\, f_{FD}(\varepsilon; \mu=\varepsilon_F)$$

$$= \frac{V}{N}\frac{d}{dT}\int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon\, D(\varepsilon)\, \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}\,.$$

non dipende da T!

$$= \frac{1}{N}\frac{d}{dT}\left(E-\boxed{N\varepsilon_F}\right) = \frac{V}{N}\frac{d}{dT}\int_0^\infty d\varepsilon\,(\varepsilon-\varepsilon_F)\, D(\varepsilon)\, \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\varepsilon_F)}+1}$$

$T \ll T_F$

$$= \frac{1}{n}\int_0^\infty d\varepsilon\,(\varepsilon-\varepsilon_F)\, D(\varepsilon)\, \frac{d}{dT}\boxed{f_{FD}(\varepsilon;T)} \simeq$$

cambia solamente in una regione $\sim k_B T$ attorno a ε_F

$$\frac{1}{n}D(\varepsilon_F)\int_0^\infty d\varepsilon\,(\varepsilon-\varepsilon_F)\,(-)\,\frac{1}{\left[e^{\beta(\varepsilon-\varepsilon_F)}+1\right]^2}\; e^{\beta(\varepsilon-\varepsilon_F)}\;(-k_B T^2)$$

$\beta(\varepsilon-\varepsilon_F)=x$

$$= \frac{1}{n}D(\varepsilon_F)\frac{1}{\beta^3}\int_{\boxed{-\frac{\varepsilon_F}{k_BT}}\simeq -\infty}^{\infty} dx\; x^2\,\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\; k_B\beta^2 = \frac{3}{2}\,\frac{\pi^2}{3}\,\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\,k_B$$

dunque $\boxed{C_V = \frac{\pi^2}{2}\frac{T}{T_F}k_B}$ calore specifico per elettrone per $T \ll T_F$

il fattore $C_V \ll k_B$ perché $\frac{T}{T_F} \ll 1$. Se si fa classico

$C_{V,cl} = \frac{d}{dT}\left(\frac{3}{2}k_BT\right) = \frac{3}{2}k_B \gg C_{V,DFG}$ perché in un FG degenere gli elettroni che possono "ricevere" l'energia sono "pochi", cioè entro di ε_F pari a k_BT

\# elettroni eccitati $V D(\varepsilon)\overbrace{k_BT}^{\Delta E}$ e acquistano un'energia pari a $\sim k_BT$

dunque $\Delta E \simeq V D(\varepsilon_F)\, k_BT\cdot k_BT$ e $c_V = \frac{d}{dT}\left(\frac{3}{2\varepsilon_F}k_B^2T^2\right) = 3\frac{T}{T_F}k_B$ ← dipendenza lineare

oss.:

energia totale $E = N\frac{3}{5}\varepsilon_F(n) = N\frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}$. Diminuendo V, E cresce ma ciò significa che il gas esercita una pressione a $T=0$

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V}\Big)_{S,N} = \frac{2}{3}\frac{1}{V}E = \frac{2}{3}\, n\langle\varepsilon\rangle$$

pressione di degenerazione

per un gas classico $P = n k_B T = n\frac{2}{3}\boxed{\left(\frac{3}{2}k_B T\right)} = n\frac{2}{3}\langle\varepsilon\rangle$ ma qui c'è dipendenza dalla temperatura

$\langle\varepsilon\rangle$

BOSONI

Consideriamo bosoni di spin 0

Particelle di massa m senza spin $\varepsilon(\vec k) = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$, $D(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$

Per convergenza $\mu<0$. A $T=0$, i bosoni sono tutti nello stesso stato

$$f_{BE}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1} \Rightarrow f_{BE}(\varepsilon=0) = \frac{1}{e^{-\beta\mu}-1}$$

e il riempimento macroscopico

a $T=0$ si richiede $\mu\to 0^-$: per $T\to 0$ $\mu_{BE}\to 0^-$

$\boxed{T>0}$

$$n = \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1} < \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\frac{1}{e^{\beta\varepsilon}\cancel{e^{-\beta\mu}}-1} \begin{cases} \xrightarrow{T\to 0} 0 \\ \xrightarrow{T\to\infty} \infty \end{cases}$$

perché $e^{-\beta\mu}>1$

Variando T l'integrale assume qualsiasi valore. Scelgo T_c che verifica l'uguaglianza

$$n = \int_0^\infty d\varepsilon\,\frac{D(\varepsilon)}{e^{\beta_c\varepsilon}-1}$$

Per $T<T_c$, $I<n$ sempre: $n<I<n$! Assurdo

In generale $n = \frac{1}{V}\sum_{\vec k} f_{BE}[\varepsilon(\vec k)] \overset{②}{=} \frac{1}{V}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3/V} f_{BE}[\varepsilon(\vec k)]$

accettabile solo se l'integranda è buona

$\frac{1}{2}dk^2\, k$:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}4\pi\int \boxed{dk\,k^2} f_{BE}(\varepsilon(k))$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\int d\varepsilon\,\underbrace{\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}}_{\equiv D(\varepsilon)} f_{BE}(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \boxed{D(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}}$$

Nel passaggio $\sum\to\int$ abbiamo perso il significato fondamentale di un punto (minimo nullo) pari a infinito!

Per superarlo

$$\boxed{n = n_0(T) + \int_0^\infty d\varepsilon\,\frac{D(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}}$$

T_c è detta temperatura di condensazione di Bose-Einstein

$\beta_c \varepsilon = x$

$$n = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{D(\varepsilon)}{e^{\beta_c \varepsilon} - 1} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon}\, \frac{1}{e^{\beta_c \varepsilon} - 1} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{\beta_c}\right)^{3/2} \boxed{\int_0^\infty dx \sqrt{x}\, \frac{1}{e^{x} - 1}}$$

$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2{,}61\ldots$

$$\Rightarrow \boxed{k_B T_c = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n}{2.612}\right)^{2/3} 4\pi}$$

vale teoria $T = 3\,K$

<u>Esempio</u> ^4He liquefa a $4.7\,K$, a $T = 2.17\,K$ transizione alla <u>fase superfluida</u>