FATTI DI EGA

NOTAZIONI ED INTRODUZIONE

Il corso da cui sono tratti gli enunciati è diviso in alcune parti: nella prima si cerca di dare un'introduzione più concreta alla geometria algebrica attraverso anche esempi di curve in $\mathbb{P}^2$, nella seconda si fanno altre cose... bla bla bla...

PRIMA PARTE

STUDIO DELL'IRRIDUCIBILITÀ DEI POLINOMI "QUADRATICI"

$p(x,y) = y^2 - f(x) \in \mathbb{K}[x][y]$. Se nella fattorizzazione di $f(x) = c \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ con p_i irriducibili e distinti, $\alpha_i > 0$ esiste un i tale che α_i è dispari allora si ha $p(x,y)$ irriducibile. Inoltre se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso questa condizione è anche necessaria.

STUDIO LOCALE DELLE IPERSUPERFICI AFFINI

$f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $p \in V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$. Sia l retta di $\mathbb{A}^n$ passante per p, ovvero $l = \{p+tv \mid t \in \mathbb{K}\}$ con $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Consideriamo il polinomio $g(t) := f(p + tv) \in \mathbb{K}[t]$ e distinguiamo due casi:

- $g \equiv 0$: Significa che la retta l è contenuta in $V(f)$ e quindi diciamo che l interseca $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità infinita.
- $g \not\equiv 0$, ma $g(0) = 0$ perché $p \in V(f)$. Quindi in $t = 0$ ha una radice con una certa molteplicità $g(t) = t^m h(t)$ con $h(0) \neq 0$. Allora dico che l interseca $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità m.

Se $m > 1$ diciamo che l è tangente a $\mathcal{I}_f$ in p.
Invece diciamo che p è un punto liscio o non singolare di $\mathcal{I}_f$ se esiste almeno una retta l che passa per p e non è tangente.
Fissato un punto p vengono chiamate tangenti principali le rette tangenti che intersecano $\mathcal{I}_f$ con molteplicità massima.

In generale, a meno di una traslazione possiamo supporre $p = (0,0)$ e $p \in V(f)$. Allora considero una retta per l'origine $l = \{tv \mid t \in \mathbb{K}\}$ e $g(t) := f(tv)$, con $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.
Allora l è tangente a f in $p \Leftrightarrow g'(0) = 0$. $g'(t) \mid_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tv) \cdot v_i \mid_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i$ quindi $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = 0$ e distinguiamo dunque due casi:

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i$ allora p è un punto singolare
- $\exists i$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$ allora p è liscio e l'insieme delle direazioni in $\mathbb{K}^n$ tangenti a $\mathcal{I}_f$ in p è un iperpiano di equazione $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = 0$

Inoltre, se scriviamo $f(x_1, \dots, x_n) = f_m(\boldsymbol{x}) + h(\boldsymbol{x})$ dove f_m è omogeneo di grado $m \geq 1$ e tutti i monomi di h hanno grado maggiore di m allora abbiamo $\mathcal{I}_f$ è liscia in $p \Leftrightarrow m = 1$ e inoltre sappiamo che ogni retta interseca $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità $\geq m$. E se il campo è infinito, per il principio di identità dei polinomi ho che m è il minimo della molteplicità d'intersezione di l con $\mathcal{I}_f$ in p al variare di l tra le rette in p. Essa viene chiamata molteplicità del punto. Una retta si dice trasversale se molt $(l) = 1$.

Si chiama cono tangente a $\mathcal{I}_f$ in p l'insieme delle rette che intersecano $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità maggiore del minimo m. è dato dall'equazione $f_m = 0$.

Inoltre la molteplicità di p per $\mathcal{I}_f$ è uguale a $m \Leftrightarrow$ tutte le derivate parziali di f di ordine minore di m si annullano in p e c'è almeno una derivata parziale m-esima che non è nulla.

Diciamo che un punto è un nodo se è singolare di molteplicità due.

Omogenizzazione e Disomogeneizzazione

$D : \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tale che $F(x_0, \ldots, x_n) \mapsto F(1, x_1, \ldots, x_n)$ che è ovviamente un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre.
$H : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ che omogeneizza i polinomi, ovvero dato $f \neq 0$, $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sia $d = \deg f$. Allora $H(f) := x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$. Notiamo che H NON è un omomorfismo però è moltiplicativo.
Allora valgono:

- H è moltiplicativo: $H(fg) = H(f)H(g)$
- $D \circ H = \mathrm{id}$
- $H \circ D \mid_{\text{Polinomi Omogenei}} (F) = F_1$ con $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d$ e vale $F = x_0^m F_1$ e $x_0 \nmid F_1$. Ovvero se $x_0 \mid F$ perdiamo le potenze di x_0 nel polinomio, altrimenti otteniamo la stessa cosa.
- $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ irriducibile $\implies F = H(f)$ irriducibile.
- $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ irriducibile e $\neq x_0 \implies f = D(F)$ irriducibile.

Fattorizzazione dei Polinomi Omogenei

Sia F omogeneo, allora scrivo $F = x_0^m G$, con G omogeneo e $x_0 \nmid G$. Considero allora $g := D(G) = D(F) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e $g = c \cdot p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ con i p_i irriducibili distinti e $\alpha_i > 0$, $c \in \mathbb{K}^*$. Allora $P_i := H(p_i)$ che è ancora irriducibile e $F = x_0^m G = x_0^m H(g) = c x_0^m P_1^{\alpha_1} \ldots P_k^{\alpha_k}$. Quindi la fattorizzazione dei polinomi omogenei avviene in una variabile in meno ed i fattori di un polinomio omogeneo sono omogenei.

Studio locale delle Ipersuperfici Proiettive

Lo facciamo passando alle carte affini: supponiamo di avere $[f]$ di $\mathbb{A}^n$ e ci associamo $[F]$ ipersuperficie proiettiva (detta chiusura proiettiva) $F = H(f)$ e inoltre data $[F]$ di $\mathbb{P}^n$ associamo $[D(F)]$ chiamato parte affine.

Definizione assiomatica di molteplicità d'intersezione tra due curve piane

$\mathcal{C} = [f], \mathcal{D} = [g] \subseteq \mathbb{A}^2, p \in \mathbb{A}^2$. Vorremmo definire la molteplicità dell'intersezione di f e g in p $I(f \cap g, p)$ in modo che valgano:

1. $I(f \cap g, p) = +\infty \Leftrightarrow f, g$ hanno una componente in comune a cui p appartiene
2. $I(f \cap g, p) \in \mathbb{N}$ e $I(f \cap g, p) = 0 \Leftrightarrow p \notin V(f) \cap V(g)$
3. $I(f \cap g, p) = I(g \cap f, p)$
4. f, g rette distinte e $p \in V(f) \cap V(g)$ allora $I(g \cap f, p) = 1$
5. $I(f \cap g, p)$ è invariante per affinità
6. Dato $a \in K[x, y]$ si ha $I(f \cap g, p) = I(f \cap (g + af), p)$
7. Se $f = \prod_i f_i$ e $g = \prod_j g_j$ allora deve valere che $I(f \cap g, p) = \sum_{i,j} I(f_i \cap g_j, p)$

Queste proprietà determinano univocamente i numeri di intersezione. L'idea è, data una curva in x e y di abbassare il grado in x, supponendo che fino al grado $n - 1$ i numeri di intersezione siano ben definiti e dimostrare che lo sono anche per n.

Prima definizione di molteplicità d'intersezione

$p = (a, b)$ e si scompongano $f = f_1 a_1$, $g = g_1 b_1$ tali che $a_1(p) \neq 0$, $b_1(p) \neq 0$. Allora si ha $I(f \cap g, p) :=$ molteplicità di $x = a$ come radice del risultante Ris $_y(f_1, g_1)$ in un sistema di coordinate generico

Seconda definizione di molteplicità d'intersezione

$p = (a, b)$, $\mathcal{M}_p = (x - a, y - b) \subseteq K[x, y]$. $\mathcal{M}_p$ è il nucleo della $V_p : K[x, y] \to K$ definita da $f \mapsto f(p)$ mappa di valutazione. $\mathcal{M}_p$ è un ideale massimale. Allora localizziamo $\mathcal{O}_p := K[x, y]_{\mathcal{M}_p}$. Ora presi $f, g \in K[x, y]$ consideriamo la K-algebra $\frac{\mathcal{O}_p}{(f,g)}$. Definiamo la molteplicità dell'intersezione come $I(f \cap g, p) = \dim_K \frac{\mathcal{O}_p}{(f,g)}$

Cubica liscia in forma di Weierstrass

$\mathcal{C} = [F]$ cubica liscia, Char $K \neq 2, 3$ e sia $O \in \mathcal{C}$ flesso. Allora $\exists$ un sistema di coordinate omogenee $[z, x, y]$ su $\mathbb{P}^2$ tale che $O = [0, 0, 1]$ e $\mathcal{C}$ ha equazione affine $y^2 = x^3 + ax + b$ con $\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0$ (Non stiamo supponendo K algebricamente chiuso)

Cubica liscia in forma di Legendre

Se $p(x) = x^3 + ax + b$ in forma di Weierstrass ha tutte le radici in K, allora $\mathcal{C}$ può essere messa in forma di Legendre: $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$ con $\lambda \neq 0, 1$

Flessi di una cubica liscia su un campo algebricamente chiuso

$\mathcal{C}$ cubica liscia e K algebricamente chiuso. Scegliamo un flesso O e mettiamo $\mathcal{C}$ in forma di Weierstrass $y^2 = x^3 + ax + b = p(x)$ rispetto ad O. Cerco i punti di $\mathbb{A}^2$ in cui $\mathcal{C}$ interseca $H(\mathcal{C})$: otteniamo 9 flessi che sono tali che se $p_1, p_2 \in \mathcal{C}$ sono flessi, allora la retta che passa per p_1, p_2 interseca $\mathcal{C}$ in un terzo flesso.
Inoltre il gruppo delle proiettività g di $\mathbb{P}^2$ tali che $g\mathcal{C} = \mathcal{C}$ agiscono transitivamente sui punti di flesso.
Abbiamo inoltre 12 rette che passano per i punti di flesso e ogni retta passa per 3 punti di flesso. I 9 flessi e le 12 rette che li congiungono formano una configurazione isomorfa al piano affine su $\mathbb{F}_3$.

Birapporto, Proiettività e j-invariante

Ci chiediamo quando esiste una proiettività di $\mathbb{P}^1$ che porta una quaterna ordinata di punti in un'altra. Risposta: solo se hanno lo stesso birapporto. Siano $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^1$ punti distinti e le $z_i = \frac{x_1}{x_0}$ le loro coordinate affini $\in K \cup \{+\infty\}$. Dico che il birapporto è la coordinata affine di z_4 nel sistema di coordinate su $\mathbb{P}^1$ in cui $z_1 = 0, z_2 = +\infty, z_3 = 1$. Quindi Bir $(p_1, \ldots, p_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$
Vogliamo ora la condizione per quaterne non ordinate, quindi notiamo che permutando i punti si ottengono sei valori collegati del birapporto: $\{\beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}\}$ ovvero se e solo se hanno uguale j-invariante.
$j : K \setminus \{0, 1\} \to K$ definita da $j(t) = \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2 (t-1)^2}$, dove il j-invariante viene calcolato sul birapporto delle quaterne.

Seconda Parte: Varietà

Topologia di Zariski su $\mathbb{A}^n$

Topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n$

Irriducibilità

- $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso. Allora X è irriducibile $\Leftrightarrow I(X) \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ è un ideale primo $\Leftrightarrow$ dati $U, V \subseteq X$ aperti non vuoti di X si ha $U \cap V \neq \emptyset$
- $Y \subseteq X$. Y irriducibile $\implies \bar{Y}$ irriducibile
- $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ chiuso. Allora Y è irriducibile $\Leftrightarrow \mathcal{C}Y$ (il cono) è irriducibile in $\mathbb{A}^{n+1}$

Terza Parte: Dimensione

Varie ed Eventuali

La Cubica Gobba

Fonte inesauribile di patologie e di controesempi. $\mathcal{C} = \{y - x^2 = z - xy = 0\} \subseteq \mathbb{A}^3$ che è anche il grafico di $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ definita da $x \mapsto (x^2, x^3)$.