

# TEORIA DEI GRUPPI

## ENUNCIATI

---

Nel seguito  $G$  indica un qualsiasi gruppo, viene indicata con  $e$  l'unità del gruppo. La notazione usata è quella moltiplicativa.  $H \subseteq G$  indica che  $H$  è sottogruppo di  $G$  (eventualmente coincidente).  $H \triangleleft G$  indica che  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$ .

- Due qualsiasi laterali destri di  $H \subseteq G$  in  $G$  ( $Ha$  e  $Hb$ ) sono in corrispondenza biunivoca attraverso la funzione  $ah \mapsto bh$
- Esiste inoltre una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei laterali destri e quello dei laterali sinistri di uno stesso sottogruppo  $H$
- (**Teorema di Lagrange**)  $G$  finito e  $H \subseteq G$ , allora  $\text{ord } H \mid \text{ord } G$
- $G$  finito,  $a \in G$  allora  $\text{ord } a \mid \text{ord } G$  e  $a^{\text{ord } G} = e$
- (**Ciclicità degli ordini primi**)  $G$  finito con ordine primo ( $\text{ord } G = p \in \mathbb{P}$ ), allora  $G$  è ciclico
- (**Sottogruppo prodotto**)  $H, K \subseteq G$ . Allora  $HK \subseteq G \Leftrightarrow HK = KH$
- (**Ordine del prodotto**)  $H, K \subseteq G$  con  $H$  e  $K$  sottogruppi finiti. Supponiamo che  $HK \subseteq G$ . Allora  $\text{ord}(HK) = \frac{\text{ord}(H)\text{ord}(K)}{\text{ord}(H \cap K)}$
- (**Definizione di sottogruppo normale**)  $N \triangleleft G \Leftrightarrow \forall x \in G \quad xHx^{-1} = H \Leftrightarrow \forall x \in G \quad xHx^{-1} \subseteq H \Leftrightarrow \forall x \in G \quad xH = Hx$
- (**Gruppo quoziente**) Se  $N \triangleleft G$ , allora anche  $G/N$  è un gruppo. Inoltre se  $G$  è finito, vale  $\text{ord}(G/N) = \frac{\text{ord}(G)}{\text{ord}(N)}$
- (**Proiezione al quoziente**)  $N \triangleleft G$ .  $\Phi : G \mapsto G/N$  definita da  $\Phi(g) = Ng$  è un omomorfismo surgettivo.
- (**Gruppi abeliani hanno tutti i sottogruppi normali**)  $G$  abeliano.  $N \subseteq G \implies N \triangleleft G$ .
- (**Controimmagine di un normale è normale**)  $N' \triangleleft G'$ ,  $\Phi : G \rightarrow G'$ . Allora  $\Phi^{-1}(N') \triangleleft G$ .
- (**Immagine di un normale con morfismo surgettivo è normale**)  $N \triangleleft G$ ,  $\Phi : G \rightarrow G'$  omomorfismo surgettivo. Allora  $\Phi(N) \triangleleft G'$ .
- (**Normalità del Ker**)  $\Phi : G \mapsto H$  omomorfismo surgettivo.  $K = \text{Ker } \Phi \implies K \triangleleft G$
- (**L'immagine è un sottogruppo**)  $\Phi : G \rightarrow G'$  omomorfismo.  $\text{Im } \Phi \subseteq G'$  (ma NON è detto che sia normale)
- (**Immagini inverse**)  $\Phi : G \mapsto H$  omomorfismo.  $\text{Ker } \Phi = K \implies \Phi^{-1}\Phi(x) = Kx$
- (**Primo teorema di Omomorfismo**)  $\Phi : G \mapsto H$  omomorfismo surgettivo con  $K = \text{Ker } \Phi$ . Allora  $G/K \cong H$
- (**Variante del Primo teorema di Omomorfismo**)  $f : G \mapsto G'$  omomorfismo surgettivo.  $H \triangleleft G, H \subseteq K, K = \text{Ker } f$ . Allora  $\exists! \phi : \frac{G}{H} \rightarrow G'$  non necessariamente iniettivo tale che  $f = \phi \circ \pi_{\frac{G}{H}}$
- (**"Inversi del teorema di Lagrange"**) Se  $G$  è ciclico,  $\text{ord } G = n$  si ha  $\forall d \mid n \quad \exists! H \subseteq G$  t.c.  $\text{ord } H = d$ . Se  $G$  è abeliano,  $\text{ord } G = n$  si ha  $\forall d \mid n \quad \exists H \subseteq G$  t.c.  $\text{ord } H = d$  ma in generale non è unico.
- (**Condizione equivalente al prodotto diretto**)  $G \cong H \times K \Leftrightarrow \exists H, K \triangleleft G$  t.c.  $H \cap K = (e), HK = G$
- (**Teorema di Cauchy**) Sia  $p \in \mathbb{P}$  t.c.  $p \mid \text{ord } G$ . Esiste allora  $a \neq e$  t.c.  $a^p = e$
- (**Primo teorema di Sylow**) Sia  $p \in \mathbb{P}$  t.c.  $p^\alpha \mid \text{ord } G, p^{\alpha+1} \nmid \text{ord } G$ . Allora  $G$  ha un sottogruppo di ordine  $p^\alpha$ . Inoltre se  $G$  è abeliano tale sottogruppo è unico.

- **(Secondo teorema di Sylow)** Sia  $G$  un gruppo finito. Allora tutti i  $p$ -Sylow sono coniugati.
- **(Corollario)** Dato un gruppo finito  $G$ , il numero dei  $p$ -Sylow di  $G$  è uguale a  $i_G(N_G(P))$ , dove  $P$  è un qualsiasi  $p$ -Sylow di  $G$ . In particolare, un  $p$ -Sylow  $P$  è normale sse non ci sono altri  $p$ -Sylow oltre a  $P$ .
- **(Terzo teorema di Sylow)** Detto  $n_p$  il numero dei  $p$ -Sylow di un gruppo finito  $G$ , valgono  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$  e  $n_p \mid \text{ord } G$ .
- **(Corrispondenza tra gruppi normali)** Sia  $\Phi : G \mapsto G'$  omomorfismo surgettivo.  $K = \text{Ker } \Phi$ . Dato  $H' \subseteq G'$  si definisca  $H = \{x \in G \mid \Phi(x) \in H'\}$ . Si ha che  $H \subseteq G$  t.c.  $K \subseteq H$ . Inoltre se  $H' \triangleleft G'$  allora  $H \triangleleft G$ . L'associare  $H'$  ad  $H$  stabilisce una corrispondenza biunivoca dell'insieme di tutti i sottogruppi di  $G'$  sull'insieme di tutti i sottogruppi di  $G$  che contengono  $K$ .
- **(Secondo teorema di Omomorfismo)**  $\Phi : G \mapsto G'$  omomorfismo surgettivo,  $K = \text{Ker } \Phi$ . Si prenda ora  $N' \triangleleft G'$  e sia  $N = \{x \in G \mid \Phi(x) \in N'\}$ . Allora  $G/N \cong G'/N'$  oppure, in modo equivalente,  $G/N \cong (G/K)/(N/K)$ .
- **(Il centro è un sottogruppo normale)**  $Z(G) \triangleleft G$ .
- **(Caratterizzazione degli automorfismi interni)**  $\text{Int } G \cong G/Z$  con  $Z = Z(G)$  centro di  $G$ . Inoltre  $\text{Int } G \triangleleft \text{Aut } G$ .
- **(Teorema di Cayley)** Ogni gruppo è isomorfo ad un sottogruppo di  $S(X)$ , per un opportuno  $X$ .
- **(Teorema X)** Se  $G$  è un gruppo,  $H \subseteq G$ ,  $X$  l'insieme di tutti i laterali destri di  $H$  in  $G$ , esiste un omomorfismo  $\Phi : G \rightarrow S(X)$ . Inoltre  $\text{Ker } \Phi$  è il più grande sottogruppo normale di  $G$  contenuto in  $H$ .
- **(Corollario dell'indice fattoriale)** Se  $G$  è un gruppo finito e  $H \neq G$  un sottogruppo di  $G$  tale che  $\text{ord}(G) \nmid i_G(H)!$ , allora  $H$  deve contenere un sottogruppo normale non banale di  $G$ . In particolare,  $G$  non può essere semplice.
- **(Argomento di Frattini)** Sia  $G$  un gruppo finito e  $H \triangleleft G$ ; sia  $P$  un  $p$ -Sylow di  $H$ . Allora  $G = HN_G(P)$ .
- **(Corollario)** Dato un  $p$ -Sylow  $P \subseteq G$  vale  $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$ .

## PARTICOLARI TIPI DI GRUPPI

---

- **(I gruppi ciclici sono abeliani)**  $G$  ciclico  $\implies G$  abeliano. (Segue dall'associatività dell'operazione di gruppo)
- **(Ciclicità dei gruppi con ordine primo)**  $G$  gruppo.  $\text{ord } G = p \in \mathbb{P} \implies G$  è ciclico. (Basta usare Cauchy)
- **(Esiste un unico gruppo ciclico di ogni ordine)**  $G$  gruppo ciclico.  $\text{ord } G = n \implies G \cong \mathbb{Z}_n$
- **(Abelianità di Gruppo con quoziente sul centro ciclico)**  $G$  gruppo.  $G/Z(G)$  ciclico  $\implies G$  abeliano

## CONTROESEMPI

---

- **(Gruppo non abeliano con tutti i sottogruppi normali)**  $Q_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$  con le regole di moltiplicazione tra quaternioni. ( $i^2 = j^2 = k^2 = 1, ij = k, ji = -k, \dots$ )

## TRUCCHI VARI

---

- Il modo più utile di usare l'informazione  $\text{MCD}(a, b) = 1$  è tramite Bézout:  $\exists s, t$  t.c.  $as + bt = 1$ , soprattutto se  $a$  e  $b$  sono ordini di gruppi.
- Se  $N \triangleleft G$ ,  $x^{i_G(N)} \in N$  (poiché  $i_G(N)$  è l'ordine del gruppo quoziente  $G/N$ )
- Se  $G^k \subseteq G$ , allora  $G^k \triangleleft G$ . (Segue banalmente da  $ga^k g^{-1} = (gag^{-1})^k$ )
- Se  $H \subseteq G$ ,  $\text{ord}(H) > \frac{\text{ord}(G)}{2} \implies H = G$

## GRUPPI CICLICI

---

- $H, K \subseteq G$ ,  $\text{ord}(H) = a$ ,  $\text{ord}(K) = b$ . Se  $\text{MCD}(a, b) = 1$ , allora  $H \cap K = (e)$ . Infatti  $H \cap K \subseteq H, H \cap K \subseteq K \implies \text{ord}(H \cap K) \mid \text{ord}(H), \text{ord}(H \cap K) \mid \text{ord}(K) \implies \text{ord}(H \cap K) = 1$ .
- Se  $H \cap K = (e)$  e  $H, K \subseteq G$  con  $G$  abeliano si ha: Siano  $h \in H, k \in K$ ,  $\text{ord}(h) = r$ ,  $\text{ord}(k) = s$ . Allora  $\text{ord}(hk) = \text{mcm}(r, s)$ . (Infatti  $(hk)^{\text{mcm}(r, s)} = h^{\text{mcm}(r, s)} k^{\text{mcm}(r, s)} = ee = e$ . Inoltre supponiamo  $\exists t < \text{mcm}(r, s)$  t.c.  $(hk)^t = e$  Allora  $h^t k^t = e \implies h^t = k^{-t} \in H \cap K \implies h^t = k^{-t} = e \implies r \mid t, s \mid t \implies \text{mcm}(r, s) \mid t$ )

## CARATTERISTICHE DI $S_n$

---

- $S_n$  NON è abeliano per  $n \geq 3$ . Infatti  $(12)$  e  $(13)$  non commutano
- Il centro di  $S_n$  è banale per  $n \geq 3$ . Per questo motivo  $S_n$  NON è nilpotente per  $n \geq 3$
- $S_n$  è generato dalle permutazioni  $(i1), (i2), \dots, (in)$ , qualsiasi sia  $i = 1, \dots, n$
- In  $S_n$  tutti i  $k$ -cicli sono coniugati
- Un automorfismo di  $S_n$  che manda trasposizioni in trasposizioni è interno (basta vedere dove vengono mandati i generatori): per  $n \geq 7$  ciò effettivamente avviene (si esamini il centralizzante di una trasposizione), quindi ogni automorfismo di  $S_n$  è interno
- Per  $n \neq 4$ , l'unico sottogruppo normale proprio di  $S_n$  è  $A_n$ , il sottogruppo delle permutazioni pari (per  $n = 4$  si veda la sezione dedicata)

## CARATTERISTICHE DI $A_n$

---

- $A_n$  contiene tutti i 3-cicli di  $S_n$
- $A_n$  è generato da  $(ij1), (ij2), \dots, (ijn)$  per  $n \geq 3$ , qualsiasi siano  $i, j = 1, \dots, n$
- In  $A_n$  tutti i  $k$ -cicli sono coniugati per  $k = 1, \dots, n - 2$
- Se un sottogruppo normale di  $A_n$  contiene un 3-ciclo allora coincide con  $A_n$
- Ogni sottogruppo normale di  $A_n$ , per  $n \geq 5$ , contiene un 3-ciclo: quindi  $A_n$  è semplice
- Data una classe di coniugio di  $S_n$  di permutazioni pari, ci sono due possibilità per una classe di coniugio di  $A_n$ : o la classe di coniugio è uguale a una singola classe di coniugio di  $A_n$  o questa si spezza in due classi in  $A_n$ . In particolare dato  $g \in A_n$  la classe di  $g$  in  $S_n$  non si spezza se  $C_{S_n}(g) \not\subseteq A_n$ . Equivalentemente non si spezza se esiste una permutazione dispari che commuta con  $g$ . Equivalentemente non si spezza se la decomposizione in cicli disgiunti di  $g$  contiene un ciclo pari o due cicli della stessa lunghezza.

## LAYOUT COMPLETO DI $S_4$

---

$S_4$  è il gruppo delle permutazioni di quattro elementi.  $A_4$  è il gruppo delle permutazioni pari.  $V_4$  è il gruppo dei prodotti di 2-cicli disgiunti ( $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong V_4 = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ).  $D_8$  è il gruppo diedrale di ordine otto.

$S_4$  contiene le seguenti permutazioni:

- 1 identità:  $()$
- 6 2-cicli:  $(12), (13), (14), (23), (24), (34)$
- 3 prodotti di 2-cicli:  $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$
- 8 3-cicli:  $(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)$
- 6 4-cicli:  $(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)$

Altre caratteristiche di  $S_4$ :

- Abbiamo che  $S_4$  è risolubile considerando la catena  $(e) \subseteq V_4 \subseteq A_4 \subseteq S_4$
- $A_4 \triangleleft S_4$  (Poiché ha indice 2)
- $V_4 \triangleleft S_4$  (conti)
- $S_4 \cong V_4 \rtimes \text{Aut}(V_4) \cong V_4 \rtimes S_3$
- $D_8 \subseteq S_4$  (prendendo  $D_8 = \{(), (1234), (13)(24), (1432), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$ )

## GRUPPI DIEDRALI $D_n$

---

- **(Presentazione)**  $D_n = \{s, r \mid s^2 = r^n = e, sr s^{-1} = r^{-1}\}$
- **(Moltiplicazione)**  $r^i s^j \cdot r^a s^b = r^{i+(-1)^j a} s^{j+b}$
- **(Sottogruppi di  $D_n$ )** Si hanno i seguenti sottogruppi: Se  $m \mid n$  si ha  $C_m = \{r^{\frac{n}{m}}\} \triangleleft D_n$ ,  $D_m = \{r^{\frac{n}{m}}, sr^k\}$  con  $k = 0, 1, \dots, \frac{n}{m} - 1$
- **(Classi di coniugio di  $D_n$ ,  $n$  pari)** Sono  $\{e\}$ ,  $\{r^k, r^{-k}\} \quad \forall k \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$ ,  $\{s, sr^2, \dots, sr^{\frac{n}{2}}\}$ ,  $\{sr, sr^3, \dots, sr^{\frac{n}{2}-1}\}$
- **(Classi di coniugio di  $D_n$ ,  $n$  dispari)** Sono  $\{e\}$ ,  $\{r^k, r^{-k}\} \quad \forall k \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ ,  $\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$
- **(Sottogruppi Normali di  $D_n$ )**  $C_m \triangleleft D_n$ , Se  $n$  dispari allora nessun altro (tranne quelli banali), se  $n$  pari si hanno i due sottogruppi  $D_{\frac{n}{2}} \triangleleft D_n$
- **(Sottogruppi Abelian di  $D_n$ )** Tutti i  $C_m$  e i  $D_1, D_2$

## AUTOMORFISMI DI GRUPPI CLASSICI

---

$n$	$\text{Aut}(A_n)$	$\text{Out}(A_n)$	$\text{Aut}(S_n)$	$\text{Out}(S_n)$
$n = 1, 2$	1	1	1	1
$n = 3$	$C_2$	$C_2$	$S_3$	1
$n = 6$	$S_6 \rtimes C_2$	$V_4$	$S_6 \rtimes C_2$	$C_2$
$n \geq 4, n \neq 6$	$S_n$	$C_2$	$S_n$	1

- $\text{Aut}(D_n) \cong \text{Aff}(C_n)$
- $\text{Aut}(Q_8) \cong S_4$ ,  $\text{Int}(Q_8) \cong Q_8/Z(Q_8) \cong V_4$ ,  $\text{Out}(Q_8) = \text{Aut}(Q_8)/\text{Int}(Q_8) \cong S_4/V_4 \cong S_3$
- $\text{Aut}(C_p) \cong C_p^*$ ,  $\text{Aut}(C_p^n) \cong \text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ , con  $p$  primo

- $\text{Aut}(C_n) \cong C_n^*$ , con  $n \in \mathbb{N}^+$
- $\text{Aut}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^*$
- $\text{Aut}(V_4) \cong \text{Aut}(C_2^2) \cong \text{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$

## ELENCO DEI GRUPPI DI ORDINE PICCOLO

---

Ordine	Gruppi Abeliani	Gruppi Non Abeliani
1	$C_1$	
2	$C_2$	
3	$C_3$	
4	$C_4, C_2 \times C_2$	
5	$C_5$	
6	$C_6$	$S_3$
7	$C_7$	
8	$C_8, C_4 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2$	$D_4, Q_8$
9	$C_9, C_3 \times C_3$	
10	$C_{10}$	$D_5$

# TEORIA DEGLI ANELLI

## DEFINIZIONI

---

- **(Ideale primo in un anello commutativo)** Se  $A$  è un anello, allora si dice che l'ideale  $P$  di  $A$  è primo se:  $P \subsetneq A$  e se  $a, b \in A$  t.c.  $ab \in P \implies a \in P$  oppure  $b \in P$
- **(Ideale massimale)**

## PROPRIETÀ DEGLI IDEALI PRIMI

---

- Un ideale  $I$  dell'anello commutativo  $A$  è primo se e solo se l'anello quoziente  $\frac{A}{I}$  è un dominio di integrità
- Un ideale  $I$  di un anello  $A$  è primo se e solo se  $A \setminus I$  è chiuso rispetto alla moltiplicazione
- In un anello commutativo unitario ogni ideale massimale è anche un ideale primo
- **(Lemma di Krull)** Ogni anello commutativo unitario ha almeno un ideale massimale (si può dimostrare usando il lemma di Zorn)
- Un anello commutativo è un dominio di integrità se e solo se  $\{0\}$  è un ideale primo
- La controimmagine di un ideale primo attraverso un omomorfismo di anelli è un ideale primo