

# COSE DI COSE

## COORDINATE POLARI

---

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad \vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z} \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

## COORDINATE SFERICHE

---

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{\phi} = \dot{\varphi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi}$$

## CAMPO CENTRALE

---

$$\vec{F} = f(|\vec{r}|)\hat{r} \quad \vec{L}_0 = \text{cost} \quad V = -\int_{z_0}^z f(|\vec{r}|) d\vec{r}$$
$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial V}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = -f(|\vec{r}|) \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = -f(|\vec{r}|)\hat{r}$$

## POTENZIALE EFFICACE

---

$$\text{Sapendo che } \vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z} \quad E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r)\right)$$

## VIRIALE

---

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} + \vec{r} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot m\vec{v} - \vec{r} \cdot \nabla V = 2T - \alpha V$$
$$V(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha V(x_1, \dots, x_n)$$
$$\frac{1}{\tau}(\vec{r} \cdot \vec{p}) = 2\langle T \rangle - \alpha\langle V \rangle \text{ e passando al limite in } \tau \rightarrow 0 \text{ (siccome } (\vec{r} \cdot \vec{p}) \text{ è limitato poich  per ipotesi il moto (ovvero } \vec{r}) \text{   limitato e } \vec{p} \text{ anche (essendo la massa limitata e la velocit  anch'essa periodica e quindi limitata))} \\ \implies 2\langle T \rangle = \alpha\langle V \rangle$$

## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

---

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \quad \frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = (m\ddot{x} - F)\dot{x} = 0$$

## IDENTIT  DEL CAZZO

---

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$
$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$
$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\rho\sigma} = \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}$$

## LAGRANGIANA

---

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2 - V(q_i) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \implies \frac{d}{dt}(m_i\dot{q}_i) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \implies m_i\ddot{q}_i = F_i$$

## INVARIANZA NEL TEMPO

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}_i) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q}} = \dot{q} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) = 0$$

## INVARIANZA PER TRASLAZIONI

$$r_i \mapsto r_i + \varepsilon \delta_i$$

$$\mathcal{L}(r_i + \varepsilon \delta_i, \dot{r}_i, t) - \mathcal{L}(r_i, \dot{r}_i, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \varepsilon \delta_i = 0 \implies 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \right) = \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i)$$

## INVARIANZA PER ROTAZIONI

$$\vec{r}_i \mapsto (1 + \delta \vec{\varphi} \times) \vec{r}_i \quad \dot{\vec{r}}_i \mapsto (1 + \delta \vec{\varphi} \times) \dot{\vec{r}}_i$$

$$\mathcal{L} \left( (1 + \delta \vec{\varphi} \times) \vec{r}_i, (1 + \delta \vec{\varphi} \times) \dot{\vec{r}}_i, t \right) - \mathcal{L} \left( \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \vec{\varphi} \times \dot{\vec{r}}_i = \delta \vec{\varphi} \cdot \left( \vec{r}_i \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} + \dot{\vec{r}}_i \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = 0$$

$$\vec{r}_i \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} + \dot{\vec{r}}_i \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0$$

$$\vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) + \dot{\vec{r}}_i \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_i \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \right) = 0$$

## CAMBIO DI SISTEMA DI RIFERIMENTO

$$\vec{r}_{\text{lab}} = \vec{R} + \vec{r}_{\text{rel}} \quad \vec{v}_{\text{lab}} = \vec{V} + \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{rel}} \quad \vec{a}_{\text{lab}} = \vec{A} + \vec{a}_{\text{rel}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{rel}})$$

FORMULE CHE VALGONO SEMPRE (E SIAMO SICURI PERCHÉ ABBIAMO FATTO I CONTI AL CONTRARIO DEI FISICI CHE LE TIRANO FUORI DAL CAPPELLO MA NON SANNO COME DIMOSTRARLE)

Il sistema di riferimento è  $\Sigma = O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ . Il punto  $P$  è quello rispetto a cui si calcolano  $\vec{L}_P$  e  $\vec{\tau}_P$ . Le particelle  $\alpha$  hanno raggio vettore rispetto ad  $O$   $\vec{r}_\alpha$  e rispetto a  $P$   $\vec{\rho}_\alpha$ , quindi  $\vec{r}_\alpha = \vec{OP} + \vec{\rho}_\alpha$

$$\vec{L}_P := \sum_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha, \quad \vec{\tau}_P := \sum_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha$$

$$\vec{L}_P = \sum_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{OP}) \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha - \sum_\alpha \vec{OP} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \vec{L}_O - \vec{OP} \times \vec{P}$$

$$\left. \frac{d\vec{L}_P}{dt} \right|_\Sigma = \sum_\alpha \dot{\vec{\rho}}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha + \sum_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{\tau}_P + \sum_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \times \cancel{m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha} - \sum_\alpha \dot{\vec{OP}} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \vec{\tau}_P - \dot{\vec{OP}} \times \vec{P}$$

## PROBLEMA DEI DUE CORPI

Assunzioni:

1. Corpi puntiformi
2. Il potenziale dipende solo dalla distanza relativa

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 + V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad M = m_1 + m_2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_2}{m_1 + m_2} & 1 \\ \frac{m_1}{m_1 + m_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(|\vec{r}|)$$

$$L = \vec{R} \times M \dot{\vec{R}} + \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$$

## URTI

---

Fatti incredibili:

1. La  $\vec{p}$  si conserva sempre (non ci sono forze esterne)
  2. Per definizione, se l'urto è elastico, l'energia si conserva
- $m_1, \vec{v}_1, m_2, \vec{v}_2$   
masse e velocità relative al sistema del laboratorio.
  - $\vec{v} := \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{V} = \dot{\vec{R}}, \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
  - $m_1, \vec{v}_{10} = \vec{v}_1 - \vec{V} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}, \quad m_2, \vec{v}_{20} = \vec{v}_2 - \vec{V} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$   
masse e velocità relative al sistema del centro di massa.
  - $\vec{p}_1 = \mu \vec{v} + m_1 \vec{V} \quad \vec{p}_2 = -\mu \vec{v} + m_2 \vec{V}$
  - $\vec{p}_{10} = \vec{p}_1 - m_1 \vec{V} = m_1 \vec{v}_{10} = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} = \mu \vec{v}, \quad \vec{p}_{20} = \vec{p}_2 - m_2 \vec{V} = m_2 \vec{v}_{20} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} = -\mu \vec{v}$
  - $\vec{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \hat{n}_0, \quad \vec{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \hat{n}_0$
  - $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_{10} + \vec{V} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \hat{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}'_{20} + \vec{V} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \hat{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$
  - $\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1 = \mu v \hat{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P} = \mu v \hat{n}_0 + m_1 \vec{V}, \quad \vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2 = -\mu v \hat{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{P} = -\mu v \hat{n}_0 + m_2 \vec{V}$

## PUTTANATE SUGLI ANGOLI

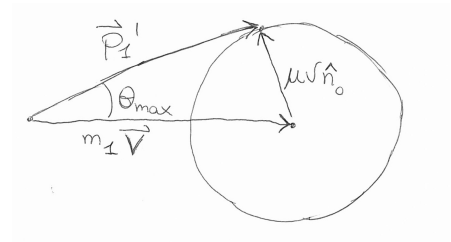
---

### CM FRAME

Angolo qualsiasi. Le palline possono andare dove vogliono.

### LAB FRAME

L'angolo è limitato.  $\sin \theta_{\max} = \frac{\mu v}{m_1 V} = \frac{m_1 v_{10}}{m_1 V} = \frac{v_{10}}{V}$



## PROBLEMI CON MASSA VARIABILE

---

Cosa utile:  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

$\vec{v}_{\text{agg}}$  è la velocità assoluta della particella che si sta aggiungendo

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - m\vec{v} - dm\vec{v}_{\text{agg}} = \vec{F}^{(E)} dt$$

$$dm(\vec{v} - \vec{v}_{\text{agg}}) + m d\vec{v} = \vec{F}^{(E)} dt$$

$$(\vec{v} - \vec{v}_{\text{agg}}) \frac{dm}{dt} + m \vec{a} = \vec{F}^{(E)}$$

## TENSORE D'INERZIA

---

$$T_{ij} = R_{ik}R_{jl}T_{kl}$$

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m^{\alpha} (r_k^{\alpha} r_k^{\alpha} \delta_{ij} - r_i^{\alpha} r_j^{\alpha})$$

## OSCILLAZIONI A PIÙ GRADI DI LIBERTÀ

---

Equazione:  $M_{ij}\ddot{x}_j = -K_{ij}x_j$

Claim:  $x_j = A_j e^{i\omega t}$

$$M_{ij}A_j i^2 \omega^2 e^{i\omega t} = -K_{ij}A_j e^{i\omega t}$$

$$(M_{ij}\omega^2 - K_{ij})A_j = 0$$

Vogliamo  $A \neq 0$  quindi  $\det(M\omega^2 - K) = 0$ . Risolviamo ora per gli  $\omega$  poi troviamo gli  $A$  come  $\text{Ker}(M\omega^2 - K)$ .

Troviamo  $n$  vettori  $A$ . Adesso ho che una generica soluzione si scrive come  $(\tilde{X}) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} e^{i\omega t} (A^{\alpha}) =$

$$(A) \begin{pmatrix} c_1 e^{i\omega_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{i\omega_n t} \end{pmatrix}$$

Ora, invertendo la matrice  $A$  trovo  $\begin{pmatrix} c_1 e^{i\omega_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{i\omega_n t} \end{pmatrix} = (A^{-1}) (\tilde{X})$

Quindi definisco le mie nuove coordinate (che oscillano con frequenze "pure") come  $(Q) = (A^{-1})(X)$ .

L'energia è diagonale:  $E = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\dot{q}_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2)$

## TERMODINAMICA

---

### LEGGI UNIVERSALI

$$\Delta U = Q - \vec{L} \quad U = nC_V T = \frac{1}{\gamma-1} nRT$$

$$\Delta S = nC_V \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad \Delta S = nC_P \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - nR \log\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

### ISOBARA ( $p$ COSTANTE)

$$\Delta U = nC_V \Delta T \quad Q = nC_P \Delta T \quad \vec{L} = nR \Delta T = p \Delta V \quad \Delta S = nC_P \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

### ISOTERMA ( $T$ COSTANTE)

$$\Delta U = 0 \implies Q = \vec{L} \quad Q = nRT \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad \vec{L} = nRT \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad \Delta S = nR \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

### ISOCORA ( $V$ COSTANTE)

$$\Delta U = nC_V \Delta T \quad Q = nC_V \Delta T \quad \vec{L} = 0 \quad \Delta S = nC_V \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

## ADIABATICA REVERSIBILE (SENZA SCAMBIO DI CALORE)

$$\begin{aligned}\Delta U &= nC_V \Delta T & Q &= 0 & L &= nC_V \Delta T = \frac{\Delta(pV)}{1-\gamma} \\ pV^\gamma &= \text{cost} & TV^{\gamma-1} &= \text{cost} & pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= \text{cost}\end{aligned}$$

## RELAZIONI SUI D QUALCOSA

---

$$\begin{aligned}dU + dL &= dQ, \quad pV = nRT \implies p dV + V dp = nR dT, \quad dL = p dV, \quad dU = nC_V dT \\ dU \frac{R}{C_V} &= nR dT = dL + V dp = dQ - dU + V dp \implies dQ = nC_P dT - V dp\end{aligned}$$