Esercizi Raccolti Di Algebra

Ho voluto raccogliere gli esercizi teorici più carini / difficili che ho trovato in vari libri. Le stelle $\star$ (da 1 a 3) indicano la difficoltà dei problemi, mentre le psi dorate Ψ indicano la bellezza.

Teoria dei Gruppi

Nel seguito G indica un qualsiasi gruppo, viene indicata con e l'unità del gruppo. La notazione usata è quella moltiplicativa. $H \sqsubseteq G$ indica che H è sottogruppo di G (eventualmente coincidente). $H \lhd G$ indica che H è un sottogruppo normale di G.

1. Se G è un gruppo nel quale $\forall a, b \in G \quad (ab)^i = a^i b^i$ per tre interi i consecutivi. Allora G è abeliano. Trovare inoltre un controesempio all'abelianità di G nel caso in cui la relazione sussista solo per due interi consecutivi.
2. Se G è un gruppo tale che $\forall a \in G \quad a^2 = e$, allora G è abeliano.
3. Sia G tale che l'intersezione di tutti i sottogruppi diversi da (e) è un sottogruppo diverso da (e). Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine finito e con un esempio mostrare che G non è necessariamente finito.
4. Se $H \sqsubsetneq G \implies H = (e)$ dimostrare che G è finito ed ha ordine primo.
5. Sia $H \sqsubseteq G$ t.c. $Ha \neq Hb \implies aH \neq bH$. Dimostrare che $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$.
6. Ψ $H, K \sqsubseteq G$ entrambi di indice finito ($\mathrm{i}_G H = a, \mathrm{i}_G K = b$ e non è detto che G sia finito). Dimostrare che $H \cap K$ ha indice finito e vale $\mathrm{i}_G(H \cap K) \leqslant \mathrm{i}_G(H)\mathrm{i}_G(K)$. Trovare un esempio dove valga l'uguale ed uno dove valga il minore stretto.
7. $H \sqsubseteq G$, $\mathrm{i}_G H$ finito. Dimostrare che esistono solo un numero finito di sottogruppi della forma aHa^{-1} per $a \in G$.
8. $\star$ Sia G finito tale che $3 \nmid \operatorname{ord} G$ e supponiamo che valga $\forall a, b \in G \quad (ab)^3 = a^3 b^3$. Dimostrare che G è abeliano.
9. $\star$ Sia G abeliano e supponiamo che $\exists x, y \in G$ t.c. $\operatorname{ord} x = m, \operatorname{ord} y = n$. Dimostrare che $\exists z \in G$ t.c. $\operatorname{ord} z =$ m.c.m. (m, n).
10. Ψ Supponiamo $\exists a, b \in G, a \neq e, b \neq e$ t.c. $a^5 = e, aba^{-1} = b^2$. Trovare $\operatorname{ord} b$.
11. $\star$ Ancora da controllare Sia G abeliano e finito tale che il numero delle soluzioni dell'equazione $x^n = e$ è al più n per ogni intero positivo n. Dimostrare che G è ciclico e produrre un controesempio alla tesi nel caso in cui non si supponga G finito.
12. $\star$ Sia G finito e $A \sqsubseteq G$ t.c. $\forall x \quad \operatorname{ord}(AxA) = k$. Dimostrare che $\forall g \in G \quad gAg^{-1} = A$.
13. Sia $H \sqsubseteq G$ tale che $\mathrm{i}_G H = 2$. Dimostrare che $H \lhd G$
14. Supponiamo $N, M \lhd G$, $N \cap M = (e)$. Dimostrare allora che $\forall n \in N, m \in M \quad nm = mn$
15. Trovare un gruppo non abeliano nel quale tutti i sottogruppi siano normali.
16. Dare un esempio di gruppo G, $H \sqsubseteq G$ ed $a \in G$ tali che $aHa^{-1} \subsetneq H$.
17. Dare un esempio di tre sottogruppi $E \subseteq F \subseteq G$ con $E \lhd F, F \lhd G$ ma $E \ntriangleleft G$.
18. $\star\star$ Sia G finito, e supponiamo che l'automorfismo T sia tale che $T(x) = x \Leftrightarrow x = e$. Inoltre $T^2 = I$. Dimostrare che G è abeliano.
19. $\star\star$ Sia G finito, e supponiamo che l'automorfismo T mandi più di tre quarti degli elementi di G nel proprio inverso. Dimostrare allora che $T(x) = x^{-1}$ e che G è abeliano.

20. ⋆ Ψ Sia G un gruppo di ordine $2n$. Supponiamo che la metà degli elementi di G siano di ordine 2 e che l'altra metà formi un sottogruppo H di ordine n. Dimostrare che H ha ordine dispari ed è un sottogruppo abeliano di G.

21. ⋆ ⋆ Sia G tale che ord $G = p^2$ con $p \in \mathbb{P}$. Mostrare che allora G è abeliano. (Traccia della soluzione: dimostrare che G ha un sottogruppo normale di ordine p e che questo è contenuto nel centro di G. Poi dire che G è abeliano poiché $G/Z(G)$ è ciclico)

22. ⋆ Sia G tale che ord $(G) = pq$, con p, q primi distinti. E supponiamo esistano $H, K \lhd G$, con ord $H = p$, ord $K = q$. Dimostrare che G è ciclico.

Da dove ho preso gli esercizi

- *Algebra*, I. N. Herstein