Fatti di EPS

17 giugno 2015

Cose in Generale

- Se vari eventi $A_1, \ldots, A_n$ sono indipendenti, allora anche i loro complementari $A_1^C, \ldots, A_n^C$ sono indipendenti
- **Legge dei grandi numeri**: $X_1, \ldots$ successione di v.a. i.i.d. , $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Allora vale $\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} = 0$
- Var $[X] = 0 \Leftrightarrow X$ è costante

Funzioni Generatrici

Si indica con $G_X(t)$ la funzione generatrice della variabile aleatoria X

- $G_X(t) = G_Y(t) \Leftrightarrow X$ e Y sono equidistribuite
- Se X e Y sono indipendenti, allora $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t)$
- $\mathbb{E}[X] = \lim_{t\to 1^-} G'_X(t)$
- $\mathbb{E}[X(X-1)] = \lim_{t\to 1^-} G''_X(t)$
- Var $[[]X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lim_{t\to 1^-}(G''_X(t) + G'_X(t) - (G'_X(t))^2)$

Probabilità generale

- Sia X una v.a. reale. Sono equivalenti le due seguenti affermazioni:
  1) X ha densità f
  2) $\forall \varphi$ reale, boreliana e limitata, vale la formula
  $$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, \mathrm{d}x$$
- Siano X_n e X v.a. , F_n ed F le relative funzioni di ripartizione; supponiamo inoltre che F sia continua (cioè la legge di X sia diffusa). Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:
  1) la successione $(X_n)_{n\geq 1}$ converge a X in legge
  2) $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$

Tabella delle Distribuzioni di Probabilità Discrete

Nome	$p(k) = P\{X = k\}$	$G(t)$ **generatrice**	$\mathbb{E}[X]$	**Var** $[X]$	**Condizioni**
Geometrica	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{tp}{1-t(1-p)}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$p \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$
Binomiale	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$[1 + p(t-1)]^n$	np	$np(1-p+np)$	$p \in (0,1)$, $k \in \{0,$
Poisson	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$	$e^{\lambda(t-1)}$	λ	λ	$\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$
Binomiale negativa					
Ipergeometrica					

La binomiale negativa : si ripete in condizioni di indipendenza un esperimento che ha probabilità p di successo fino a che questo si realizza k volte. La variabile conta il numero di tentativi che è stato necessario effetuare.
L'ipergeometrica: Consideriamo un'urna contentente r sfere rosse e b sfere bianche , ed in essa compiamo n estrazioni senza reimussolamento. Consideriamo la v.a. che conta il numero di sfere rosse che sono state estratte.

Tabella delle Distribuzioni di Probabilità Continue

Nome	$f(x)$ **densità**	$\mathbb{E}[X]$	**Var** $[X]$	**Condizioni**
Uniforme	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a < x < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$a < b$
Esponenziale	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda > 0$
Gamma	$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)}\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{r}{\lambda}$		$r > 0, \lambda > 0$
Gaussiana	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$\sigma > 0, m \in \mathbb{R}$

Nome	**Com'è definita**
Chi-Quadro	$\chi^2(n) \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ (Se $(X_1, \ldots, X_n)$ sono gaussiane indipendenti $N(0,1)$, allora $X_1^2 + .$
Student	$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ indipendenti, allora $T(n)$ ha legge $\frac{\sqrt{n}X}{\sqrt{Y}}$

Somma di variabili aleatorie In questa sezione si presuppone che le variabili siano indipendenti.

- $X \sim \Gamma(r_1, \lambda), Y \sim \Gamma(r_2, \lambda) \implies X + Y \sim \Gamma(r_1 + r_2, \lambda)$
- $X \sim \Gamma(r, \lambda) \implies tX \sim \Gamma(r, \frac{\lambda}{t})$
- $X \sim \Gamma(r, \lambda) \implies \mathbb{E}[X^\beta] = \frac{\Gamma(r+\beta)}{\Gamma(r)\lambda^\beta}$
- $X \sim N(m_1, \sigma_1^2), Y \sim N(m_2, \sigma_2^2) \implies X + Y \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- $X \sim N(0,1) \implies X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Definizioni e Lemmi

- **Disuguaglianza di Schwartz**: f, g quadrato sommabili. Allora il prodotto fg è sommabile e vale $\left|\int fg \, \mathrm{d}\boldsymbol{m}\right| \leq \sqrt{\int f^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{m}}\sqrt{\int g^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{m}}$.
  Inoltre, se sopra vale l'uguaglianza, allora f e g coincidono a meno di una costante moltiplicativa (ovvero $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $f = \lambda g$ q.o.)
- **Disuguaglianza di Markov**: X v.a. a valori positivi, t costante positiva. Allora vale $t\mathbf{P}\{X \geq t\} \leq \mathbb{E}[X]$
- **Disuguaglianza di Chebishev**: X v.a. dotata di momento secondo. Allora vale $t^2\mathbf{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\} \leq \text{Var}\,[X]$