

ESERCIZI RACCOLTI DI ALGEBRA

Ho voluto raccogliere gli esercizi teorici più carini / difficili che ho trovato in vari libri. Le stelle ★ (da 1 a 3) indicano la difficoltà dei problemi, mentre le psi dorate Ψ indicano la bellezza.

TEORIA DEI GRUPPI

Nel seguito G indica un qualsiasi gruppo, viene indicata con e l'unità del gruppo. La notazione usata è quella moltiplicativa. $H \subseteq G$ indica che H è sottogruppo di G (eventualmente coincidente). $H \triangleleft G$ indica che H è un sottogruppo normale di G .

1. Se G è un gruppo nel quale $\forall a, b \in G \quad (ab)^i = a^i b^i$ per tre interi i consecutivi. Allora G è abeliano. Trovare inoltre un controesempio all'abelianità di G nel caso in cui la relazione sussista solo per due interi consecutivi.
2. Se G è un gruppo tale che $\forall a \in G \quad a^2 = e$, allora G è abeliano.
3. Sia G tale che l'intersezione di tutti i sottogruppi diversi da (e) è un sottogruppo diverso da (e) . Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine finito e con un esempio mostrare che G non è necessariamente finito.
4. Se $H \subsetneq G \implies H = (e)$ dimostrare che G è finito ed ha ordine primo.
5. Sia $H \subseteq G$ t.c. $Ha \neq Hb \implies aH \neq bH$. Dimostrare che $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$.
6. Ψ $H, K \subseteq G$ entrambi di indice finito ($i_G H = a, i_G K = b$ e non è detto che G sia finito). Dimostrare che $H \cap K$ ha indice finito e vale $i_G(H \cap K) \leq i_G(H)i_G(K)$. Trovare un esempio dove valga l'uguale ed uno dove valga il minore stretto.
7. $H \subseteq G, i_G H$ finito. Dimostrare che esistono solo un numero finito di sottogruppi della forma aHa^{-1} per $a \in G$.
8. ★ Sia G finito tale che $3 \nmid \text{ord } G$ e supponiamo che valga $\forall a, b \in G \quad (ab)^3 = a^3 b^3$. Dimostrare che G è abeliano.
9. ★ Sia G abeliano e supponiamo che $\exists x, y \in G$ t.c. $\text{ord } x = m, \text{ord } y = n$. Dimostrare che $\exists z \in G$ t.c. $\text{ord } z = \text{m.c.m.}(m, n)$.
10. Ψ Supponiamo $\exists a, b \in G, a \neq e, b \neq e$ t.c. $a^5 = e, aba^{-1} = b^2$. Trovare $\text{ord } b$.
11. ★ Ancora da controllare Sia G abeliano e finito tale che il numero delle soluzioni dell'equazione $x^n = e$ è al più n per ogni intero positivo n . Dimostrare che G è ciclico e produrre un controesempio alla tesi nel caso in cui non si supponga G finito.
12. ★ Sia G finito e $A \subseteq G$ t.c. $\forall x \quad \text{ord}(AxA) = k$. Dimostrare che $\forall g \in G \quad gAg^{-1} = A$.
13. Sia $H \subseteq G$ tale che $i_G H = 2$. Dimostrare che $H \triangleleft G$.
14. Supponiamo $N, M \triangleleft G, N \cap M = (e)$. Dimostrare allora che $\forall n \in N, m \in M \quad nm = mn$.
15. Trovare un gruppo non abeliano nel quale tutti i sottogruppi siano normali.
16. Dare un esempio di gruppo $G, H \subseteq G$ ed $a \in G$ tali che $aHa^{-1} \subsetneq H$.
17. Dare un esempio di tre sottogruppi $E \subseteq F \subseteq G$ con $E \triangleleft F, F \triangleleft G$ ma $E \not\triangleleft G$.
18. ★ ★ Sia G finito, e supponiamo che l'automorfismo T sia tale che $T(x) = x \Leftrightarrow x = e$. Inoltre $T^2 = I$. Dimostrare che G è abeliano.
19. ★ ★ Sia G finito, e supponiamo che l'automorfismo T mandi più di tre quarti degli elementi di G nel proprio inverso. Dimostrare allora che $T(x) = x^{-1}$ e che G è abeliano.

20. ★ Ψ Sia G un gruppo di ordine $2n$. Supponiamo che la metà degli elementi di G siano di ordine 2 e che l'altra metà formi un sottogruppo H di ordine n . Dimostrare che H ha ordine dispari ed è un sottogruppo abeliano di G .
21. ★ ★ Sia G tale che $\text{ord } G = p^2$ con $p \in \mathbb{P}$. Mostrare che allora G è abeliano. (Traccia della soluzione: dimostrare che G ha un sottogruppo normale di ordine p e che questo è contenuto nel centro di G . Poi dire che G è abeliano poiché $G/Z(G)$ è ciclico)
22. ★ Sia G tale che $\text{ord } (G) = pq$, con p, q primi distinti. E supponiamo esistano $H, K \triangleleft G$, con $\text{ord } H = p, \text{ord } K = q$. Dimostrare che G è ciclico.

DA DOVE HO PRESO GLI ESERCIZI

- *Algebra*, I. N. Herstein