

ALGEBRA 2

ANELLI

- Se A è un anello finito allora $A = A^* \sqcup \mathcal{D}(A)$
- $f : A \rightarrow B$ allora $\text{Im } f \cong \frac{A}{\text{Ker } f}$
- $I \subseteq A$ ideale, $B \subseteq A$ sottoanello allora vale $\frac{I+B}{I} \cong \frac{B}{I \cap B}$
- $I, J \subseteq A$ ideali e $I \subseteq J$. Allora vale $\frac{\frac{A}{I}}{\frac{J}{I}} \cong \frac{A}{J}$
Si ha inoltre la corrispondenza tra gli ideali di $\frac{A}{I}$ e gli ideali $J \subseteq A$ tali che $I \subseteq J$. In questa corrispondenza i primi ed i massimali si corrispondono
- $IJ \subseteq I \cap J$. Se vale $I + J = 1$ allora $IJ = I \cap J$
- È FALSO che $I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$. FALSO
- $I \subseteq \sqrt{I}$
- $(A \text{ dominio}) a \text{ primo} \implies a \text{ irriducibile}$
- $(A \text{ UFD}) a \text{ irriducibile} \implies a \text{ primo}$
- Se $H \subseteq A \times B$ è ideale allora $H = I \times J$ con $I \subseteq A, J \subseteq B$ ideali
- $A \cong A_1 \times A_2 \Leftrightarrow \exists e \in A, e \neq 0, 1 \quad e^2 = e$
- $\mathcal{D}(A) = \cup_{a \notin A^*} (0 : a) = \cup_{a \notin A^*} \sqrt{(0 : a)} = \sqrt{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{D}(A)$, anche se non è necessariamente un ideale
- $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sottoinsiemi di A . Allora $\cup_{\lambda \in \Lambda} \sqrt{E_\lambda} = \sqrt{\cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda}$
- Sia A dominio con un numero infinito di elementi e $|A^*| < \infty$ allora A possiede infiniti ideali massimali
- I massimale $\implies I$ primo $\implies I$ primario. Inoltre A dominio $\Leftrightarrow (0)$ ideale primo
- Sono equivalenti:
 - A ha un unico ideale massimale
 - $\exists \mathfrak{m} \subseteq A$ ideale massimale t.c. $\forall a \in A \setminus \mathfrak{m} \implies a \notin A^*$
 - $\exists \mathfrak{m} \subseteq A$ ideale massimale t.c. ogni elemento della forma $1 + \mathfrak{m}$ è invertibile
- $a \in \mathcal{J}(A) \Leftrightarrow \forall b \in A \quad 1 - ab \in A^*$
- $\sqrt{I} = \cap_{I \subseteq P \text{ primi}} P$
- **(Lemma di Scansamento)** P_1, \dots, P_n ideali primi. Sia $I \subseteq A$ ideale t.c. $I \subseteq \cup_{i=1}^n P_i$. Allora $\exists j$ t.c. $I \subseteq P_j$
- I_1, \dots, I_n ideali e P ideale primo. $\cap_{i=1}^n I_i \subseteq P \implies \exists j$ t.c. $I_j \subseteq P$. Inoltre se $P = \cap_i I_i$ allora $\exists j$ t.c. $I_j = P$
- **(Teorema cinese)** Siano $I_1, \dots, I_n \subseteq A$ ideali tali che $I_i + I_j = 1$. Allora $\forall a_1, \dots, a_n \in A \quad \exists a \in A$ t.c. $a \equiv a_i \pmod{I_i}$
- A anello c.u. Allora si ha che
 - $f \in A[x]$ è un'unità $\Leftrightarrow f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ con $a_i \in A$ tali che $a_0 \in A^*$ e $a_i \in \mathcal{N}(A) \quad \forall i \geq 1$
 - $f \in A[x]$ è nilpotente $\Leftrightarrow \forall i \quad a_i \in \mathcal{N}(A)$

- $f \in A[x]$ è divisore di zero $\Leftrightarrow \exists c \in A, c \neq 0$ t.c. $cf = 0$

Si ha inoltre per gli anelli di polinomi che

- I primo $\Leftrightarrow I[x]$ primo
- I primario $\Leftrightarrow I[x]$ primario

NON è vero che tutti gli ideali di $A[x]$ sono del tipo $I[x]$, come ad esempio (x)

- Gli ideali primi di $\mathbb{Z}[x]$ sono dei seguenti tipi:
 - (0)
 - $(p)[x]$ con $p \in \mathbb{P}$
 - $(f(x))$ con f irriducibile
 - $(p, f(x))$ con $p \in \mathbb{P}$ e f irriducibile modulo p (Questi sono anche massimali)
- $u \in A^*, a \in \mathcal{N}(A)$, allora $u + a \in A^*$ (Somma di un nilpotente e di un invertibile è invertibile)
- I primo $\implies I$ irriducibile
- In $A[x]$ si ha $\mathcal{N}(A[x]) = \mathcal{J}(A[x])$ (Mentre in generale vale solo che $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{J}(A)$)
- Sia $\phi : A \rightarrow B$ omomorfismo di anelli. Allora
 - $\phi(\mathcal{N}(A)) \subseteq \mathcal{N}(B)$
 - Se ϕ è surgettivo allora $\phi(\mathcal{J}(A)) \subseteq \mathcal{J}(B)$
 - A semilocale (con un numero finito di ideali massimali) $\implies \phi(\mathcal{J}(A)) = \mathcal{J}(B)$
- A PID $\implies \mathcal{J}(A) = \mathcal{N}(A)$
- A t.c. ogni ideale è primo $\implies A$ è un campo
- A t.c. ogni ideale primo è principale $\implies A$ è un anello ad ideali principali

BASI DI GRÖBNER

IDEALI MONOMIALI

Un ideale monomiale in $K[x_1, \dots, x_n]$ è un ideale generato dai monomi

- **(Criterio di appartenenza)** Sia I un ideale monomiale e $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, $f = \sum_{\beta} c_{\beta} x^{\beta}$ con $c_{\beta} \in K$. Allora $f \in I \Leftrightarrow \forall \beta x^{\beta} \in I$
- **(Lemma di Dickson)** Ogni ideale monomiale è finitamente generato. (La frontiera minimale di un ideale monomiale è unica, e viene detta Escalièr)
- **(Operazioni con ideali monomiali)** Siano $I_1 = (m_1, \dots, m_k)$ e $I_2 = (n_1, \dots, n_s)$ con m_i, n_j monomi. Allora si ha
 - $I_1 + I_2 = (m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_s)$
 - $I_1 \cap I_2 = (\text{MCD}_{i,j}(m_i, n_j))$
 - $I_1 \cdot I_2 = (m_i \cdot n_j)_{i,j}$
 - **(Iatto)** $(I, m \cdot n) = (I, m) \cap (I, n)$ se $\text{MCD}(m, n) = 1$ come monomi
 - I primo $\Leftrightarrow I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ (ed è massimale solo se le variabili compaiono tutte, ma DEVE essere monomiale)
 - $I = \sqrt{I}$ (ovvero I è radicale) $\Leftrightarrow \sqrt{m_i} = m_i \forall i$
 - I è primario $\Leftrightarrow I = (x_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, x_{i_k}^{\alpha_k}, m_1, \dots, m_s)$ dove $m_1, \dots, m_s \in K[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$
 - I è irriducibile $\Leftrightarrow I = (x_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, x_{i_k}^{\alpha_k})$

- $I \cdot J = I \cap J \Leftrightarrow \forall i, j \quad \text{MCD}(m_i, n_j) = 1$
- $I : J = \cap_i (I : n_i)$ e $I : (n_i) = (\frac{m_j}{\text{MCD}(n_i, m_j)})_j$
- Notare che usando la terza relazione del punto precedente possiamo spezzare ogni ideale monomiale in ideali primari e utilizzando $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ si possono calcolare anche gli ideali primi associati. Inoltre con la decomposizione in primari si calcolano bene i divisori di zero, i nilpotenti, etc.

ORDINAMENTI MONOMIALI COMUNI

- LEX $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Dico che $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow$ In $\alpha - \beta$ la prima coordinata $\neq 0$ è positiva
- DEGLEX Sia $|\alpha| := \sum_i \alpha_i$. Allora $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow$ si ha $|\alpha| \geq |\beta|$ oppure $|\alpha| = |\beta|$ e vale $\alpha \geq \beta$ con LEX
- DEGREVLEX $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow |\alpha| > |\beta|$ oppure si ha $|\alpha| = |\beta|$ e in $\alpha - \beta$ l'ultima coordinata $\neq 0$ è negativa
- **(Algoritmo di Divisione)** Siano $f_1, \dots, f_k, f \in K[x_1, \dots, x_n]$ allora $\exists a_1, \dots, a_k, r \in K[x_1, \dots, x_n]$ tali che $f = \sum_i a_i f_i + r$ e $\deg(a_i f_i) \leq \deg(f)$. Inoltre se $r = \sum_\alpha r_\alpha x^\alpha$ si ha che se $r_\alpha \neq 0$ allora $x^\alpha \in (\text{lt}(f_1), \dots, \text{lt}(f_k))$