Topologia Generale

Dimostrazioni e Controesempi

Definizioni delle Proprietà

N1 Ogni punto ha una base di intorni numerabile.

N2 Lo spazio ha una base di aperti numerabile.

Sep Se esiste un sottoinsieme denso e numerabile.

T0 Dati due punti c'è un aperto che li distingue. ($\forall x, y \in X \quad \exists A$ aperto t.c. $x \in A, y \notin A$ oppure $x \notin A, y \in A$)

T1 I punti sono chiusi.

T2 Punti distinti hanno intorni disgiunti.

Reg Un punto ed un chiuso che non lo contiene hanno intorni disgiunti.

Norm Ogni coppia di chiusi disgiunti ha intorni disgiunti.

T3 Reg + T0.

T4 Norm + T1.

Cpt Ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento finito.

Lind Ogni ricoprimento di aperti ha un raffinamento numerabile.

Conn Non esistono due aperti propri la cui unione è lo spazio intero. (Vale anche con i chiusi)

PathConn Presi due punti esiste un arco che li connette ($\forall x, y \in X \quad \exists \gamma : [0,1] \to X$ continua t.c. $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$)

LocConn Ogni punto ha una base di intorni connessi.

LocPathConn Ogni punto ha una base di intorni connessi per archi.

LocCpt Ogni punto ha una base di intorni compatti.

ParaCpt Ogni ricoprimento aperto ha un raffinamento localmente finito.

Metr Metrizzabile, ovvero esiste una distanza che induce la topologia.

Proprietà	Sottospazi	Prodotti	Quozienti	Funzioni C^0	Implica
N1	✓	Numerabili			
N2	✓	Numerabili	Aperti	Aperte	
Sep	×	Numerabili		✓	
T0	✓	Arbitrari			
T1	✓	Arbitrari			
T2	✓	Arbitrari			
Reg	✓	Arbitrari			
Norm	Chiusi	×			
T3	✓	Arbitrari			
T4	Chiusi	×			
Cpt	Chiusi	Arbitrari		✓	(+T2) Chiuso
Lind	Chiusi	×			
Conn	×	Arbitrari		✓	
PathConn	×	Arbitrari		✓	Conn
LocConn	Aperti				
LocPathConn	Aperti				
Metr	✓	Numerabili			
ParaCpt	Chiusi	×			

Lemmi insiemistici utili

$f : A \to B$ funzione, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$. Allora valgono:

- $X \subseteq f^{-1}(f(X))$
- $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$
- $f(\cup_i X_i) = \cup_i f(X_i)$
- $f(\cap_i X_i) \subseteq \cap_i f(X_i)$
- Se f è iniettiva allora $f(\cap_i X_i) = \cap_i f(X_i)$
- $f^{-1}(\cup_i Y_i) = \cup_i f^{-1}(Y_i)$
- $f^{-1}(\cap_i Y_i) = \cap_i f^{-1}(Y_i)$

N1

N2

Sep

T0

T1

T2

Reg

Norm

T3

T4

Cpt

Immagine $\mathcal{C}^0$ di Compatti è compatta

Enunciato
$f : X \to Y$ con X Cpt. Allora $f(X)$ è Cpt.
Dimostrazione
Siano $A_\lambda \subset Y$ aperti in Y t.c. $f(X) \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Consideriamo $B_\lambda := f^{-1}(A_\lambda)$. Essi sono un ricoprimento aperto (perché f è $\mathcal{C}^0$) di X. Per compattezza ne esiste un ricoprimento finito $B_1, \ldots, B_n$. Allora $A_1, \ldots, A_n$ ricoprono $f(X)$.

Lind

Conn

Immagine $\mathcal{C}^0$ di Connessi è connessa

Enunciato
$f : X \to Y$ con X Conn. Allora $f(X)$ è Conn.
Dimostrazione
Per assurdo siano A_1, A_2 i due aperti in Y che sconnettono $f(X)$. Allora $B_1 := f^{-1}(A_1), B_2 := f^{-1}(A_2)$ sono aperti (sono ancora disgiunti) che sconnettono X, Assurdo.

PathConn

Immagine $\mathcal{C}^0$ di Connessi per archi è connessa per archi

Enunciato
$f : X \to Y$ con X PathConn. Allora $f(X)$ è PathConn.
Dimostrazione
Siano $y_1, y_2 \in f(X)$, ovvero $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. Per ipotesi sia $\gamma : [0,1] \to X \in \mathcal{C}^0$ tale che $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$, consideriamo allora $g := f \circ \gamma$, anch'essa continua. Abbiamo $g : [0,1] \to Y \in \mathcal{C}^0$ tale che $g(0) = y_1, g(1) = y_2$.

Connesso per Archi implica Connesso

Enunciato
X PathConn $\implies$ X Conn.
Dimostrazione
Per assurdo siano A_1, A_2 i due aperti in X che lo sconnettono. Siano $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ e si prenda $\gamma : [0,1] \to X \in \mathcal{C}^0$ tale che $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$. Allora $B_1 := \gamma^{-1}(A_1), B_2 := \gamma^{-1}(A_2)$ sono ancora aperti e sconnettono $[0,1]$, Assurdo.

LocConn

LocPathConn

Metr

Sottospazi di Metrizzabili sono Metrizzabili

Ovvio, basta restringere la funzione distanza

ParaCpt