Fatti di Analisi

Definizione *(F_σ)* Si dice F_σ un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ che sia unione numerabile di chiusi, ovvero se si può scrivere

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Definizione *(Insieme trascurabile)* Si dice che un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è trascurabile (ovvero ha misura di Lebesgue nulla) se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n)$

Definizione *(Funzione oscillazione)* Di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (dove Ω è uno spazio metrico) si definisce la funzione oscillazione $\Theta_f : \Omega \to \mathbb{R}$ come:

$$\Theta_f(x) := \lim_{r\to 0^+} \operatorname{diam}(f(\mathrm{B}_r(x)))$$

Proprietà importanti:

- $\bar{x}$ è un punto di discontinuità $\Leftrightarrow \Theta_f(\bar{x}) > 0$.
- Θ_f è una funzione semicontinua inferiormente.
- Definizione equivalente: $\Theta_f(x) = \left(\limsup_{y\to x} f(y)\right) - (\liminf_{y\to x} f(y))$.

Caratterizzazione della Riemann-integrabilità Una funzione è Riemann-integrabile se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

Teorema fondamentale del calcolo integrale, versione pro $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) e f' Riemann-integrabile. Allora vale $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$

Teorema di Darboux Le derivate mappano connessi in connessi.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ovunque derivabile, e si ponga $\alpha := f'(a), \beta := f'(b)$. Possiamo wlog supporre che $\alpha \leq \beta$. Allora si ha, $\forall \alpha < \lambda < \beta \quad \exists \xi \in (a, b)$ t.c. $f'(\xi) = \lambda$.

Dimostrazione Si consideri la funzione $g(x) := f(x) - \lambda x$. Questa funzione è continua (essendo λ fissato e f continua) e definita sul compatto $[a, b]$. Quindi ammette massimo e/o minimo. Siccome g è anche derivabile si ha, nel punto di massimo $0 = g'(M) = f'(M) - \lambda \Rightarrow f'(M) = \lambda$.

Punti di discontinuità di una funzione reale Una funzione f ha punti di discontinuità che sono un F_σ

Dimostrazione Si consideri la funzione oscillazione di f: $\Theta_f(x)$. Fissata una "soglia di oscillazione" ν si ha che $\mathfrak{Osc}_f^{\geq\nu} := \{x \mid \Theta_f(x) \geq \nu\}$ è un chiuso (Si dimostri che se c'è un punto y sul quale si accumula una successione (y_n) di punti t.c. $\Theta_f(y_n) \geq \nu$ allora si ha $\Theta_f(y) \geq \nu$). Ora, siccome i punti di discontinuità sono tutti e soli quelli con oscillazione maggiore di zero, si ha $\mathfrak{Disc}_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{Osc}_f^{\geq\frac{1}{n}}$, ovvero unione numerabile di chiusi.

Discontinuità di una funzione semicontinua inferiormente I punti di discontinuità di una funzione semicontinua inferiormente sono di prima categoria (ovvero unione numerabile di chiusi a parte interna vuota).

Prima Categoria - Misura di Lebesgue nulla Non c'è nessuna implicazione tra queste due; ovvero esistono insiemi di prima categoria ma di misura positiva ed insiemi a misura nulla di seconda categoria.

Operatori Differenziali

Come cambiano i differenziali

Cartesiane $\rightarrow$ Polari

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Convergenze Varie

- (**Puntuale**) Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ se $\forall x \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \qquad | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$
- (**Uniforme**) Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \quad \forall x \qquad | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$
- (**Assoluta**) Una serie di funzioni $\Sigma_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge assolutamente se le serie $\Sigma_{n=0}^{+\infty} | f_n(x) |$ converge puntualmente
- (**Totale / Normale**) Una serie di funzioni $\Sigma_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente (al suo limite) in A se vale che $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in A} | f_n(x) | < +\infty$
- Assoluta $\implies$ Puntuale
- Uniforme $\implies$ Puntuale
- Totale $\implies$ Uniforme, Assoluta

Passaggio al Limite

Nel seguito si usa $f_n(x)$ per indicare una generica successione di funzioni, $f(x)$ il suo limite (dove esiste)

- (**Continuità del Limite**) Se le $f_n(x)$ definitivamente sono continue, e la convergenza è uniforme, allora $f(x)$ è continua.
- (**Derivabilità del Limite**) Se le $f_n(x)$ convergono in un punto $\bar{x}$ ad $f(\bar{x})$ e le derivate $f_n'(x)$ convergono uniformemente ad una funzione $g(x)$ allora si ha che le $f_n(x)$ convergono uniformemente ad una funzione derivabile $f(x)$ tale che $f'(x) = g(x)$
- (**Integrabilità del Limite**) Se le $f_n(x)$ convergono uniformemente alla $f(x)$ limite allora si ha $\lim_{n\to\infty} \int f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int f(t) dt$

PROBLEMI DI CAUCHY

Nel seguito parliamo di un problema del seguente tipo: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Con $f : U \to \mathbb{R}^n$ è una funzione continua definita su un aperto. Indicheremo una generica soluzione con $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ con $x_0 \in I$, tale che $\forall x \in I \quad (x, \varphi(x)) \in U$ e $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ e che $\varphi(x_0) = y_0$

- (**Cauchy-Lipschitz, Esistenza ed Unicità Locali**) Se f è continua e localmente lipschitziana in y uniformemente rispetto a x, allora $\exists! \varphi$ soluzione **locale** di classe $\mathcal{C}^1$

- (**Teorema di Peano, Esistenza Locale**) Per garantire l'esistenza locale (ma non l'unicità!) basta che f sia continua

- Si assuma che l'equazione $y' = f(x,y)$ abbia esistenza ed unicità locale in ogni punto di U. Allora si ha
  Unicità Globale (ovvero se due soluzioni coincidono in un punto allora coincidono in tutto l'intervallo);
  Dominio Aperto delle soluzioni massimali (una soluzione massimale ha come dominio un intervallo aperto);
  Fuga dai compatti delle soluzioni massimali (ovvero una soluzione massimale esce definitivamente da ogni sottoinsieme compatto di U)

- (**Esistenza e Unicità Globale**) Supponendo che la funzione f sia continua e localmente lipschitziana rispetto a y (ovvero ipotesi di Cauchy-Lipschitz) e se si ha che per ogni intervallo compatto K: $\exists A_K, B_K > 0 \qquad || f(x,y) || \geq A_K \, || y || + B_K \quad \forall (x,y) \in K \times \mathbb{R}^n$ allora per ogni $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ il problema ha una ed una sola soluzione definita su *tutto* I (supponiamo abbia soluzione limitata, allora deve fuggire dai compatti dove la f è definita, ma se prendiamo il compatto delimitato dal bound della lipschitzianità, la funzione non può fuggirne localmente)

SOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI COMUNI

- (**Lineari del prim'ordine**) Data l'equazione $y' = a(x)y(x) + b(x)$ (detta $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$ una primitiva di $a(x)$) si ottiene, moltiplicando entrambi i membri per $e^{A(x)}$, la soluzione generale $y(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,\mathrm{d}t + c$

- (**A variabili separabili**) Data l'equazione $y' = g(x)f(y)$ si ha $\int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$ e calcolando le primitive si risolve il problema