

# ESERCIZI RACCOLTI DI ALGEBRA

Ho voluto raccogliere gli esercizi teorici più carini / difficili che ho trovato in vari libri. Le stelle ★ (da 1 a 3) indicano la difficoltà dei problemi, mentre le psi dorate Ψ indicano la bellezza.

## TEORIA DEI GRUPPI

---

Nel seguito  $G$  indica un qualsiasi gruppo, viene indicata con  $e$  l'unità del gruppo. La notazione usata è quella moltiplicativa.  $H \subseteq G$  indica che  $H$  è sottogruppo di  $G$  (eventualmente coincidente).  $H \triangleleft G$  indica che  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$ .

1. Se  $G$  è un gruppo nel quale  $\forall a, b \in G \quad (ab)^i = a^i b^i$  per tre interi  $i$  consecutivi. Allora  $G$  è abeliano. Trovare inoltre un controesempio all'abelianità di  $G$  nel caso in cui la relazione sussista solo per due interi consecutivi.
2. Se  $G$  è un gruppo tale che  $\forall a \in G \quad a^2 = e$ , allora  $G$  è abeliano.
3. Sia  $G$  tale che l'intersezione di tutti i sottogruppi diversi da  $(e)$  è un sottogruppo diverso da  $(e)$ . Dimostrare che ogni elemento di  $G$  ha ordine finito e con un esempio mostrare che  $G$  non è necessariamente finito.
4. Se  $H \subsetneq G \implies H = (e)$  dimostrare che  $G$  è finito ed ha ordine primo.
5. Sia  $H \subseteq G$  t.c.  $Ha \neq Hb \implies aH \neq bH$ . Dimostrare che  $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$ .
6. Ψ  $H, K \subseteq G$  entrambi di indice finito ( $i_G H = a, i_G K = b$  e non è detto che  $G$  sia finito). Dimostrare che  $H \cap K$  ha indice finito e vale  $i_G(H \cap K) \leq i_G(H)i_G(K)$ . Trovare un esempio dove valga l'uguale ed uno dove valga il minore stretto.
7.  $H \subseteq G, i_G H$  finito. Dimostrare che esistono solo un numero finito di sottogruppi della forma  $aHa^{-1}$  per  $a \in G$ .
8. ★ Sia  $G$  finito tale che  $3 \nmid \text{ord } G$  e supponiamo che valga  $\forall a, b \in G \quad (ab)^3 = a^3 b^3$ . Dimostrare che  $G$  è abeliano.
9. ★ Sia  $G$  abeliano e supponiamo che  $\exists x, y \in G$  t.c.  $\text{ord } x = m, \text{ord } y = n$ . Dimostrare che  $\exists z \in G$  t.c.  $\text{ord } z = \text{m.c.m.}(m, n)$ .
10. Ψ Supponiamo  $\exists a, b \in G, a \neq e, b \neq e$  t.c.  $a^5 = e, aba^{-1} = b^2$ . Trovare  $\text{ord } b$ .
11. ★ Ancora da controllare Sia  $G$  abeliano e finito tale che il numero delle soluzioni dell'equazione  $x^n = e$  è al più  $n$  per ogni intero positivo  $n$ . Dimostrare che  $G$  è ciclico e produrre un controesempio alla tesi nel caso in cui non si supponga  $G$  finito.
12. ★ Sia  $G$  finito e  $A \subseteq G$  t.c.  $\forall x \quad \text{ord}(AxA) = k$ . Dimostrare che  $\forall g \in G \quad gAg^{-1} = A$ .
13. Sia  $H \subseteq G$  tale che  $i_G H = 2$ . Dimostrare che  $H \triangleleft G$ .
14. Supponiamo  $N, M \triangleleft G, N \cap M = (e)$ . Dimostrare allora che  $\forall n \in N, m \in M \quad nm = mn$ .
15. Trovare un gruppo non abeliano nel quale tutti i sottogruppi siano normali.
16. Dare un esempio di gruppo  $G, H \subseteq G$  ed  $a \in G$  tali che  $aHa^{-1} \subsetneq H$ .
17. Dare un esempio di tre sottogruppi  $E \subseteq F \subseteq G$  con  $E \triangleleft F, F \triangleleft G$  ma  $E \not\triangleleft G$ .
18. ★ ★ Sia  $G$  finito, e supponiamo che l'automorfismo  $T$  sia tale che  $T(x) = x \Leftrightarrow x = e$ . Inoltre  $T^2 = I$ . Dimostrare che  $G$  è abeliano.
19. ★ ★ Sia  $G$  finito, e supponiamo che l'automorfismo  $T$  mandi più di tre quarti degli elementi di  $G$  nel proprio inverso. Dimostrare allora che  $T(x) = x^{-1}$  e che  $G$  è abeliano.

20. ★ Ψ Sia  $G$  un gruppo di ordine  $2n$ . Supponiamo che la metà degli elementi di  $G$  siano di ordine 2 e che l'altra metà formi un sottogruppo  $H$  di ordine  $n$ . Dimostrare che  $H$  ha ordine dispari ed è un sottogruppo abeliano di  $G$ .
21. ★ ★ Sia  $G$  tale che  $\text{ord } G = p^2$  con  $p \in \mathbb{P}$ . Mostrare che allora  $G$  è abeliano. (Traccia della soluzione: dimostrare che  $G$  ha un sottogruppo normale di ordine  $p$  e che questo è contenuto nel centro di  $G$ . Poi dire che  $G$  è abeliano poiché  $G/Z(G)$  è ciclico)
22. ★ Sia  $G$  tale che  $\text{ord } (G) = pq$ , con  $p, q$  primi distinti. E supponiamo esistano  $H, K \triangleleft G$ , con  $\text{ord } H = p$ ,  $\text{ord } K = q$ . Dimostrare che  $G$  è ciclico.

## DA DOVE HO PRESO GLI ESERCIZI

---

- *Algebra*, I. N. Herstein