# FATTI DI ALGEBRA

## TEORIA DEI GRUPPI

Nel seguito $G$ indica un qualsiasi gruppo, viene indicata con $e$ l'unità del gruppo. La notazione usata è quella moltiplicativa. $H \leq G$ indica che $H$ è sottogruppo di $G$ (eventualmente coincidente). $H \lhd G$ indica che $H$ è un sottogruppo normale di $G$.

- Due qualsiasi laterali destri di $H \leq G$ in $G$ ($Ha$ e $Hb$) sono in corrispondenza biunivoca attraverso la funzione $ah \mapsto bh$
- Esiste inoltre una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei laterali destri e quello dei laterali sinistri di uno stesso sottogruppo $H$
- (**Teorema di Lagrange**) $G$ finito e $H \leq G$, allora ord $H \mid$ ord $G$
- $G$ finito, $a \in G$ allora ord $a \mid$ ord $G$ e $a^{\text{ord}\, G} = e$
- (**Ciclicità degli ordini primi**) $G$ finito con ordine primo (ord $G = p \in \mathbb{P}$), allora $G$ è ciclico
- (**Sottogruppo prodotto**) $H, K \leq G$. Allora $HK \leq G \Leftrightarrow HK = KH$
- (**Ordine del prodotto**) $H, K \leq G$ con $H$ e $K$ sottogruppi finiti. Supponiamo che $HK \leq G$. Allora ord $(HK) = \frac{\text{ord}\,(H)\text{ord}\,(K)}{\text{ord}\,(H \cap K)}$
- (**Gruppo quoziente**) Se $N \lhd G$, allora anche $G/N$ è un gruppo. Inoltre se $G$ è finito, vale ord $(G/N) = \frac{\text{ord}\,(G)}{\text{ord}\,(N)}$
- (**Proiezione al quoziente**) $N \lhd G$. $\Phi : G \mapsto G/N$ definita da $\Phi(g) = Ng$ è un omomorfismo surgettivo.
- (**Normalità del Ker**) $\Phi : G \mapsto H$ omomorfismo surgettivo. $K = \text{Ker}\, \Phi \implies K \lhd G$
- (**Immagini inverse**) $\Phi : G \mapsto H$ omomorfismo. Ker $\Phi = K \implies \Phi^{-1}\Phi(x) = Kx$
- (**Primo teorema di Omomorfismo**) $\Phi : G \mapsto H$ omomorfismo surgettivo con $K = \text{Ker}\, \Phi$. Allora $G/K \cong H$.
- (**Teorema di Cauchy**) Sia $p \in \mathbb{P}$ t.c. $p \mid$ ord $G$. Esiste allora $a \neq e$ t.c. $a^p = e$
- (**Teorema di Sylow**) Sia $p \in \mathbb{P}$ t.c. $p^\alpha \mid$ ord $G, p^{\alpha+1} \nmid$ ord $G$. Allora $G$ ha un sottogruppo di ordine $p^\alpha$. Inoltre se $G$ è abeliano tale sottogruppo è unico.
- (**Corrispondenza tra gruppi normali**) Sia $\Phi : G \mapsto G'$ omomorfismo surgettivo. $K = \text{Ker}\, \Phi$. Dato $H' \leq G'$ si definisca $H = \{x \in G \mid \Phi(x) \in H'\}$.
  Si ha che $H \leq G$ t.c. $K \subseteq H$. Inoltre se $H' \lhd G'$ allora $H \lhd G$. L'associare $H'$ ad $H$ stabilisce una corrispondenza biunivoca dell'insieme di tutti i sottogruppi di $G'$ sull'insieme di tutti i sottogruppi di $G$ che contengono $K$
- (**Secondo teorema di Omomorfismo**) $\Phi : G \mapsto G'$ omomorfismo surgettivo, $K = \text{Ker}\, \Phi$. Si prenda ora $N' \lhd G'$ e sia $N = \{x \in G \mid \Phi(x) \in N'\}$. Allora $G/N \cong G'/N'$ oppure, in modo equivalente, $G/N \cong (G/K)/(N/K)$.
- (**Caratterizzazione degli automorfismi interni**) Int $G \cong G/Z$ con $Z = C(G)$ centro di $G$. Inoltre Int $G \lhd$ Aut $G$

## CARATTERISTICHE DI $S_n$

- $S_n$ NON è abeliano per $n \geq 3$. Infatti $(12)$ e $(13)$ non commutano
- Il centro di $S_n$ è banale per $n \geq 3$. Per questo motivo $S_n$ NON è nilpotente per $n \geq 3$
- $S_n$ per $n \neq 2, 6$ è un gruppo completo poiché non ha centro ed ogni automorfismo è interno

# LAYOUT COMPLETO DI $S_4$

$S_4$ è il gruppo delle permutazioni di quattro elementi. $A_4$ è il gruppo delle permutazioni pari. $V_4$ è il gruppo dei prodotti di 2-cicli disgiunti ($V_4 = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$). $D_8$ è il gruppo diedrale di ordine otto.

$S_4$ contiene le seguenti permutazioni:

- 1 identità: $()$
- 6 2-cicli: $(12), (13), (14), (23), (24), (34)$
- 3 prodotti di 2-cicli: $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$
- 8 3-cicli: $(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)$
- 6 4-cicli: $(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)$

Altre caratteristiche di $S_4$:

- Abbiamo che $S_4$ è risolubile considerando la catena $(e) \subseteq V_4 \subseteq A_4 \subseteq S_4$
- $A_4 \lhd S_4$ (Poiché ha indice $2$)
- $V_4 \lhd S_4$ (conti)
- $D_8 \leq S_4$ (prendendo $D_8 = \{(), (1234), (13)(24), (1432), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$)