Topologia Generale

Dimostrazioni e Controesempi

Definizioni delle Proprietà

- **N1** Ogni punto ha una base di intorni numerabile.
- **N2** Lo spazio ha una base di aperti numerabile.
- **Sep** Se esiste un sottoinsieme denso e numerabile.
- **T0** Dati due punti c'è un aperto che li distingue. ($\forall x, y \in X \quad \exists A$ aperto t.c. $x \in A, y \notin A$ oppure $x \notin A, y \in A$)
- **T1** I punti sono chiusi.
- **T2** Punti distinti hanno intorni disgiunti.
- **Reg** Un punto ed un chiuso che non lo contiene hanno intorni disgiunti.
- **Norm** Ogni coppia di chiusi disgiunti ha intorni disgiunti.
- **T3** Reg + T0.
- **T4** Norm + T1.
- **Cpt** Ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento finito.
- **Lind** Ogni ricoprimento di aperti ha un raffinamento numerabile.
- **Conn** Non esistono due aperti propri la cui unione è lo spazio intero. (Vale anche con i chiusi)
- **PathConn** Presi due punti esiste un arco che li connette ($\forall x, y \in X \quad \exists \gamma : [0,1] \to X$ continua t.c. $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$)
- **LocConn** Ogni punto ha una base di intorni connessi.
- **LocPathConn** Ogni punto ha una base di intorni connessi per archi.
- **LocCpt** Ogni punto ha una base di intorni compatti.
- **ParaCpt** Ogni ricoprimento aperto ha un raffinamento localmente finito.
- **Metr** Metrizzabile, ovvero esiste una distanza che induce la topologia.

Proprietà	Sottospazi	Prodotti	Quozienti	Funzioni C^0	Implica
N1	✓	Numerabili			
N2	✓	Numerabili	Aperti	Aperte	
Sep	×	Numerabili		✓	
T0	✓	Arbitrari			
T1	✓	Arbitrari			
T2	✓	Arbitrari			
Reg	✓	Arbitrari			
Norm	Chiusi	×			
T3	✓	Arbitrari			
T4	Chiusi	×			
Cpt	Chiusi	Arbitrari		✓	(+T2) Chiuso
Lind	Chiusi	×			
Conn	×	Arbitrari		✓	
PathConn	×	Arbitrari		✓	Conn
LocConn	Aperti				
LocPathConn	Aperti				
Metr	✓	Numerabili			
ParaCpt	Chiusi	×			

Lemmi insiemistici utili

$f : A \to B$ funzione, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$. Allora valgono:

- $X \subseteq f^{-1}(f(X))$
- $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$
- $f(\cup_i X_i) = \cup_i f(X_i)$
- $f(\cap_i X_i) \subseteq \cap_i f(X_i)$
- Se f è iniettiva allora $f(\cap_i X_i) = \cap_i f(X_i)$
- $f^{-1}(\cup_i Y_i) = \cup_i f^{-1}(Y_i)$
- $f^{-1}(\cap_i Y_i) = \cap_i f^{-1}(Y_i)$

N1

N2

Sep

La Separabilità NON passa ai sottospazi

Usando il fatto (dimostrato dopo) che prodotti numerabili di separabili sono separabili, si consideri $\mathbb{R}_{sf}$, ovvero $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey. Esso è separabile, infatti $\mathbb{Q}_{sf}$ è sicuramente numerabile, inoltre è denso. Sia infatti $x \in \mathbb{R}_{sf}$ e sia U_x un suo intorno. Allora, siccome sono una base per la topologia, $\exists a, b$ t.c. $x \in [a, b) \subseteq U_x$. Per densità dei razionali nell'ordinamento dei reali, si ha $\exists q \in \mathbb{Q}_{sf}$ t.c. $q \in [a, b)$. Allora anche $\mathbb{R}_{sf} \times \mathbb{R}_{sf}$ è separabile, ma non lo è il suo sottospazio $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{sf} \times \mathbb{R}_{sf} \mid x + y = 0\}$: mostriamo infatti che esso ha la topologia discreta come sottospazio. Infatti sia $(x, -x) \in R$, esso è aperto poiché $(x, -x) = [x, x + h) \times [-x, -x + h) \cap R$, con $h > 0$. Quindi abbiamo un insieme di cardinalità del continuo con la topologia discreta, che non può essere separabile.

La Separabilità passa ai prodotti numerabili

Enunciato
$X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, con $D_i \subseteq X_i$ denso e numerabile. Allora anche X è separabile.
Dimostrazione
Sia $a_n \in D_n$ un punto a caso. Prendiamo $D = \{(r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} D_n \mid r_i = a_i \text{ per tutti tranne un numero finito di indici}\}$, ovvero l'insieme che è costituito da prodotti finiti dei D_i in tutte le varie posizioni possibili. Questo insieme è denso: sia $x \in X$, allora $\forall U_x$ intorni abbiamo $\exists A = \prod_{n\in\mathbb{N}}^{FIN}[A_n/X_n]$ t.c. $x \in A \subseteq U_x$. Allora per ogni indice i tale che $\pi_i(A) \neq X_i$ selezioniamo $r_i = d_i \in \pi_i(A)$, mentre per gli altri scegliamo $r_i = a_i$. Allora $(r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in D \cap A$. Inoltre è anche numerabile poiché si può scrivere un suo elemento in questo modo: si denoti con $(i)_2$ la stringa che in base due denota $i \in \mathbb{N}$ con soli zeri e uni. Allora si associ ad un elemento $x = (r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in D$ la stringa ottenuta concatenando le seguenti informazioni: $\forall i, T_i := \begin{cases} 2 & \text{se } r_i = a_i \\ (r_i)_2 & \text{se } r_i \neq a_i \end{cases}$ Questa stringa è infinita ma termina con un numero infinito di "2". Si levino questi numeri e si legga il numero così costruito in base tre. Allora questa è una iniezione nei naturali.
In realtà la separabilità si trasmette anche ai prodotti di cardinalità continua (Marcewski-Hewitt), ma è molto difficile da dimostrare, quindi non lo facciamo.

Immagine $\mathcal{C}^0$ di un separabile è separabile

Enunciato
X separabile. $f : X \to Y \in \mathcal{C}^0$, allora $f(X)$ è separabile.
Dimostrazione
Sia $D \subset X$ il denso e numerabile di X. Allora dico che $f(D) \cap f(X)$ è il denso e numerabile di $f(X)$. Ovviamente è numerabile. Mostriamo che è denso: $f(X) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}^{f(X)} = \overline{f(D) \cap f(X)} \cap f(X)$. dove l'$\subseteq$ vale per una definizione equivalente di continuità e sappiamo che la chiusura di $f(D)$ in $f(X)$ è uguale alla chiusura di $f(D)$ intersecato $f(X)$.

T0

T0 passa ai sottospazi

Enunciato
X T0, $Y \subseteq X \implies Y$ T0.
Dimostrazione
Siano $a, b \in Y$. Allora esiste un aperto $A \subset X$ t.c. $a \in A, b \notin A$ oppure $a \notin A, b \in A$. Allora $B := A \cap Y$ è aperto in Y e vale $a \in B, b \notin B$ oppure $a \notin B, b \in B$, a seconda di quale valeva prima.

Prodotto arbitrario di T0 è T0

Enunciato
$X := \prod_i X_i$, X_i T0 $\forall i$, allora X è T0.
Dimostrazione
Siano $a, b \in X$. Allora $a \neq b \implies \exists j$ t.c. $a_j \neq b_j$. Siccome X_j è T0, ho che $\exists A_j \subset X_j$ aperto t.c. $a_j \in A_j, b_j \notin A_j$ oppure $a_j \notin A_j, b_j \in A_j$. Allora $A := A_j \times \prod_{i\neq j} X_i$ è un aperto di X che fa ciò che vogliamo.

T1

T1 passa ai sottospazi

Enunciato
X T1, $Y \subseteq X \implies Y$ T1.
Dimostrazione
Sia $a \in Y$. Allora $\{a\} \subset X$ è chiuso in X, quindi $\{a\} = \{a\} \cap Y$ è chiuso in Y.

PRODOTTO ARBITRARIO DI T1 È T1

Enunciato
$X := \prod_i X_i$, X_i T1 $\forall i$, allora X è T1.
Dimostrazione
Sia $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Allora $C_j := \{x_j\} \times \prod_{i \neq j} X_i$ è chiuso in $X \quad \forall j$. Inoltre $x = \cap_j C_j$, quindi $\{x\}$ è chiuso in X.

T2

T2 PASSA AI SOTTOSPAZI

Enunciato
X T2, $Y \subseteq X \implies Y$ T2.
Dimostrazione
Siano $a, b \in Y, a \neq b$ e siano $A, B \subseteq X$ gli aperti di X tali che $a \in A, b \in B, A \cap B = \emptyset$. Allora $A \cap Y$ e $B \cap Y$ sono aperti in Y, ancora disgiunti e contengono i due punti.

PRODOTTO ARBITRARIO DI T2 È T2

Enunciato
$X := \prod_i X_i$, X_i T2 $\forall i$, allora X è T2.
Dimostrazione
Siano $a, b \in X, a \neq b$. Allora $\exists j$ t.c. $a_j \neq b_j$. Siano $A_j, B_j \subseteq X_j$ gli aperti di X_j tali che $A_j \cap B_j = \emptyset$, $a_j \in A_j, b_j \in B_j$. Allora $A := A_j \prod \times_{i \neq j} X_i$, $B := B_j \prod \times_{i \neq j} X_i$ sono due aperti di X tali che $a \in A, b \in B$. Inoltre $A \cap B = (A_j \cap B_j) \prod \times_{i \neq j} X_i = \emptyset$.

REG

NORM

T3

T4

CPT

CHIUSO IN UN COMPATTO È COMPATTO

Enunciato
X compatto. $Y \subset X$ chiuso in X, allora Y è compatto.
Dimostrazione
Sia $\{A_\lambda \cap Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ il ricoprimento aperto di Y. Allora considero $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup (X \setminus Y)$ come ricoprimento di X (siccome $X \setminus Y$ è aperto in X). Allora ne esiste un ricoprimento finito, da cui abbiamo $A_1, \ldots, A_n, X \setminus Y$ tali che $Y \subseteq \cup_{i=1}^n A_i$.

LA COMPATTEZZA NON PASSA A SOTTOSPAZI ARBITRARI

Basta considerare $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ come sottoinsieme di $[0, 1]$ con la topologia euclidea. $[0, 1]$ è compatto, mentre $\{(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{3n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento aperto di Y di cui non ne esiste uno finito, perché altrimenti lascia scoperto qualche $\frac{1}{n}$ per qualche n abbastanza grande.

Immagine $\mathcal{C}^0$ di Compatti è compatta

Enunciato
$f : X \to Y$ con X Cpt. Allora $f(X)$ è Cpt.
Dimostrazione
Siano $A_\lambda \subset Y$ aperti in Y t.c. $f(X) \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Consideriamo $B_\lambda := f^{-1}(A_\lambda)$. Essi sono un ricoprimento aperto (perché f è $\mathcal{C}^0$) di X. Per compattezza ne esiste un ricoprimento finito $B_1, \dots, B_n$. Allora $A_1, \dots, A_n$ ricoprono $f(X)$.

Compatto in un T2 è Chiuso

Enunciato
$Y \subseteq X$ compatto, X T2 allora Y è chiuso in X.
Dimostrazione
Mostriamo che $A := X \setminus Y$ è aperto in X: sia $a \in A$, siccome X è T2 abbiamo $\forall y \in Y, \exists A_y, Y_y$ aperti in X t.c. $a \in A_y, y \in Y_y, A_y \cap Y_y = \emptyset$. Allora $\{Y_y\}_{y\in Y}$ sono un ricoprimento aperto di Y, allora ne estraggo un ricoprimento finito $Y_{y_1}, \dots, Y_{y_n}$. Considero ora $U := \cap_{i=1}^n A_{y_n}$ che è un insieme aperto in X (in quanto intersezione di un numero finito di aperti) che è disgiunto da ciascuno degli Y_i ed è quindi disgiunto da Y, ovvero $X \setminus Y$ è aperto.

Lind

Chiuso in un Lindelöf è Lindelöf

Enunciato
X Lindelöf. $Y \subset X$ chiuso in X, allora Y è Lindelöf.
Dimostrazione
Sia $\{A_\lambda \cap Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ il ricoprimento aperto di Y. Allora considero $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup (X \setminus Y)$ come ricoprimento di X (siccome $X \setminus Y$ è aperto in X). Allora ne esiste un ricoprimento numerabile, da cui abbiamo $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, X \setminus Y$ tali che $Y \subseteq \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Conn

Sottospazi di un connesso NON sono connessi

Si prenda $[0, 1]$ con la topologia euclidea e si considerino arbitrari tipi di sottospazi, solitamente non sono connessi. Ad esempio $X = \{0\} \cup \{1\}$.

Immagine $\mathcal{C}^0$ di Connessi è connessa

Enunciato
$f : X \to Y$ con X Conn. Allora $f(X)$ è Conn.
Dimostrazione
Per assurdo siano A_1, A_2 i due aperti in Y che sconnettono $f(X)$. Allora $B_1 := f^{-1}(A_1), B_2 := f^{-1}(A_2)$ sono aperti (sono ancora disgiunti) che sconnettono X, Assurdo.

PathConn

Sottospazi di un connesso per archi NON sono connessi per archi

Si prenda $[0, 1]$ con la topologia euclidea e si considerino arbitrari tipi di sottospazi, solitamente non sono connessi per archi. Ad esempio $X = \{0\} \cup \{1\}$.

Immagine $\mathcal{C}^0$ di Connessi per archi è connessa per archi

Enunciato
$f : X \to Y$ con X PathConn. Allora $f(X)$ è PathConn.
Dimostrazione
Siano $y_1, y_2 \in f(X)$, ovvero $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. Per ipotesi sia $\gamma : [0,1] \to X \in \mathcal{C}^0$ tale che $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$, consideriamo allora $g := f \circ \gamma$, anch'essa continua. Abbiamo $g : [0,1] \to Y \in \mathcal{C}^0$ tale che $g(0) = y_1, g(1) = y_2$.

Connesso per Archi implica Connesso

Enunciato
X PathConn $\implies$ X Conn.
Dimostrazione
Per assurdo siano A_1, A_2 i due aperti in X che lo sconnettono. Siano $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ e si prenda $\gamma : [0,1] \to X \in \mathcal{C}^0$ tale che $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$. Allora $B_1 := \gamma^{-1}(A_1), B_2 := \gamma^{-1}(A_2)$ sono ancora aperti e sconnettono $[0,1]$, Assurdo.

LocConn

LocPathConn

Metr

Sottospazi di Metrizzabili sono Metrizzabili

Ovvio, basta restringere la funzione distanza

ParaCpt

Sorgenfrey