FATTI GENERALI DI ANALISI 1

Definizione *(F_σ)*
Si dice F_σ un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ che sia unione numerabile di chiusi, ovvero se si può scrivere

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

Definizione *(Insieme trascurabile)*
Si dice che un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è trascurabile (ovvero ha misura di Lebesgue nulla) se $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n)$

Definizione *(Funzione oscillazione)*
Di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (dove Ω è uno spazio metrico) si definisce la funzione oscillazione $\Theta_f : \Omega \to \mathbb{R}$ come:

$$\Theta_f(x) := \lim_{r\to 0^+} \text{diam}(f(\mathrm{B}_r(x)))$$

Proprietà importanti:

- $\bar{x}$ è un punto di discontinuità $\Leftrightarrow \Theta_f(\bar{x}) > 0$.
- Θ_f è una funzione semicontinua inferiormente.
- Definizione equivalente: $\Theta_f(x) = \big(\limsup_{y\to x} f(y)\big) - (\liminf_{y\to x} f(y))$.

Caratterizzazione della Riemann-integrabilità
Una funzione è Riemann-integrabile se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

Teorema fondamentale del calcolo integrale, versione pro
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) e f' Riemann-integrabile. Allora vale $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, \mathrm{d}t$

Teorema di Darboux
Le derivate mappano connessi in connessi.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ovunque derivabile, e si ponga $\alpha := f'(a), \beta := f'(b)$. Possiamo wlog supporre che $\alpha \leq \beta$. Allora si ha, $\forall\alpha < \lambda < \beta \quad \exists\xi \in (a, b)$ t.c. $f'(\xi) = \lambda$.

Dimostrazione
Si consideri la funzione $g(x) := f(x) - \lambda x$. Questa funzione è continua (essendo λ fissato e f continua) e definita sul compatto $[a, b]$. Quindi ammette massimo e/o minimo. Siccome g è anche derivabile si ha, nel punto di massimo $0 = g'(M) = f'(M) - \lambda \Rightarrow f'(M) = \lambda$.

Punti di discontinuità di una funzione reale
Una funzione f ha punti di discontinuità che sono un F_σ

Dimostrazione
Si consideri la funzione oscillazione di f: $\Theta_f(x)$. Fissata una "soglia di oscillazione" ν si ha che $\mathfrak{Osc}_f^{\geq\nu} := \{x \mid \Theta_f(x) \geq \nu\}$ è un chiuso (Si dimostri che se c'è un punto y sul quale si accumula una successione (y_n) di punti t.c. $\Theta_f(y_n) \geq \nu$ allora si ha $\Theta_f(y) \geq \nu$). Ora, siccome i punti di discontinuità sono tutti e soli quelli con oscillazione maggiore di zero, si ha $\mathfrak{Disc}_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{Osc}_f^{\geq\frac{1}{n}}$, ovvero unione numerabile di chiusi.

Discontinuità di una funzione semicontinua inferiormente
I punti di discontinuità di una funzione semicontinua inferiormente sono di prima categoria (ovvero unione numerabile di chiusi a parte interna vuota).

Prima Categoria - Misura di Lebesgue nulla
Non c'è nessuna implicazione tra queste due; ovvero esistono insiemi di prima categoria ma di misura positiva ed insiemi a misura nulla di seconda categoria.