

FATTI DI EGA

NOTAZIONI ED INTRODUZIONE

Il corso da cui sono tratti gli enunciati è diviso in alcune parti: nella prima si cerca di dare un'introduzione più concreta alla geometria algebrica attraverso anche esempi di curve in \mathbb{P}^2 , nella seconda si parlerà di varietà quasi-proiettive, e di varietà affini e proiettive, nella terza ci sarà un po' di teoria della dimensione.

PRIMA PARTE

STUDIO DELL'IRRIDUCIBILITÀ DEI POLINOMI "QUADRATICI"

$p(x, y) = y^2 - f(x) \in \mathbb{K}[x][y]$. Se nella fattorizzazione di $f(x) = c \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ con p_i irriducibili e distinti, $\alpha_i > 0$ esiste un i tale che α_i è dispari allora si ha $p(x, y)$ irriducibile. Inoltre se \mathbb{K} è algebricamente chiuso questa condizione è anche necessaria.

STUDIO LOCALE DELLE IPERSUPERFICI AFFINI

$f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], p \in V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$. Sia l retta di \mathbb{A}^n passante per p , ovvero $l = \{p + tv \mid t \in \mathbb{K}\}$ con $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Consideriamo il polinomio $g(t) := f(p + tv) \in \mathbb{K}[t]$ e distinguiamo due casi:

- $g \equiv 0$: Significa che la retta l è contenuta in $V(f)$ e quindi diciamo che l interseca \mathcal{I}_f in p con molteplicità infinita.
- $g \not\equiv 0$, ma $g(0) = 0$ perché $p \in V(f)$. Quindi in $t = 0$ ha una radice con una certa molteplicità $g(t) = t^m h(t)$ con $h(0) \neq 0$. Allora dico che l interseca \mathcal{I}_f in p con molteplicità m .

Se $m > 1$ diciamo che l è tangente a \mathcal{I}_f in p .

Invece diciamo che p è un punto liscio o non singolare di \mathcal{I}_f se esiste almeno una retta l che passa per p e non è tangente.

Fissato un punto p vengono chiamate tangenti principali le rette tangenti che intersecano \mathcal{I}_f con molteplicità massima.

In generale, a meno di una traslazione possiamo supporre $p = (0, 0)$ e $p \in V(f)$. Allora considero una retta per l'origine $l = \{tv \mid t \in \mathbb{K}\}$ e $g(t) := f(tv)$, con $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Allora l è tangente a f in $p \Leftrightarrow g'(0) = 0$. $g'(t) \big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tv) \cdot v_i \big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i$ quindi $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = 0$ e distinguiamo dunque due casi:

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i$ allora p è un punto singolare
- $\exists i$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$ allora p è liscio e l'insieme delle direzioni in \mathbb{K}^n tangenti a \mathcal{I}_f in p è un iperpiano di equazione $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = 0$

Inoltre, se scriviamo $f(x_1, \dots, x_n) = f_m(x) + h(x)$ dove f_m è omogeneo di grado $m \geq 1$ e tutti i monomi di h hanno grado maggiore di m allora abbiamo \mathcal{I}_f è liscia in $p \Leftrightarrow m = 1$ e inoltre sappiamo che ogni retta interseca \mathcal{I}_f in p con molteplicità $\geq m$. E se il campo è infinito, per il principio di identità dei polinomi ho che m è il minimo della molteplicità d'intersezione di l con \mathcal{I}_f in p al variare di l tra le rette in p . Essa viene chiamata molteplicità del punto. Una retta si dice trasversale se $\text{molt}(l) = 1$.

Si chiama cono tangente a \mathcal{I}_f in p l'insieme delle rette che intersecano \mathcal{I}_f in p con molteplicità maggiore del minimo m . è dato dall'equazione $f_m = 0$.

Inoltre la molteplicità di p per \mathcal{I}_f è uguale a $m \Leftrightarrow$ tutte le derivate parziali di f di ordine minore di m si annullano in p e c'è almeno una derivata parziale m -esima che non è nulla.

Diciamo che un punto è un nodo se è singolare di molteplicità due.

OMOGENIZZAZIONE E DISOMOGENEIZZAZIONE

$D : \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $F(x_0, \dots, x_n) \mapsto F(1, x_1, \dots, x_n)$ che è ovviamente un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre.

$H : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ che omogeneizza i polinomi, ovvero dato $f \neq 0$, $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ sia $d = \deg f$. Allora $H(f) := x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$. Notiamo che H NON è un omomorfismo però è moltiplicativo.

Allora valgono:

- H è moltiplicativo: $H(fg) = H(f)H(g)$
- $D \circ H = \text{id}$
- $H \circ D \mid \text{Polinomi Omogenei}$ (F) = F_1 con $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ e vale $F = x_0^m F_1$ e $x_0 \nmid F_1$. Ovvero se $x_0 \mid F$ perdiamo le potenze di x_0 nel polinomio, altrimenti otteniamo la stessa cosa.
- $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ irriducibile $\implies F = H(f)$ irriducibile.
- $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ irriducibile e $\neq x_0 \implies f = D(F)$ irriducibile.

FATTORIZZAZIONE DEI POLINOMI OMOGENEI

Sia F omogeneo, allora scrivo $F = x_0^m G$, con G omogeneo e $x_0 \nmid G$. Considero allora $g := D(G) = D(F) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $g = c \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ con i p_i irriducibili distinti e $\alpha_i > 0$, $c \in \mathbb{K}^*$. Allora $P_i := H(p_i)$ che è ancora irriducibile e $F = x_0^m G = x_0^m H(g) = c x_0^m P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}$. Quindi la fattorizzazione dei polinomi omogenei avviene in una variabile in meno ed i fattori di un polinomio omogeneo sono omogenei.

Se ho K algebricamente chiuso e $F(x_0, x_1)$ omogeneo di grado d , allora $F(x_0, x_1) = x_0^m G(x_0, x_1)$ con G omogeneo e $x_0 \nmid G$. Allora $D(G) = g(x_1) = c \cdot \prod_{i=1}^k (a_i x_1 + b_i)^{\alpha_i}$ e allora $F(x_0, x_1) = c \cdot x_0^m \cdot H(g) = c \cdot x_0^m \cdot \prod_{i=1}^k (a_i x_1 + b_i x_0)^{\alpha_i}$ e quindi se considero $[a_i, b_i] \in \mathbb{P}^1$ per $i = 1, \dots, k$ sono distinti e sono i punti in cui F si annulla (oltre a $[0, 1]$ se $m > 0$) con molteplicità α_i

PUNTI SINGOLARI DI $y^2 - p(x) = 0 \subseteq \mathbb{A}^2$

Sia p un polinomio di $\deg p = d \geq 3$ e $f(x, y) = y^2 - p(x)$. Troviamo i punti singolari del sottoinsieme di \mathbb{A}^2

dato da $f(x, y) = 0$. Serve necessariamente che (devono annullarsi tutte le derivate parziali)
$$\begin{cases} y^2 = p(x) \\ y = 0 \\ p'(x) = 0 \end{cases}$$

e quindi
$$\begin{cases} y = 0 \\ p(x) = 0 \\ p'(x) = 0 \end{cases}$$
 ovvero se e solo se p ha radici multiple. Quindi i punti singolari sono quelli del tipo

$(0, a)$ con a radice multipla del polinomio p .

Studiamo ora cosa avviene nei punti singolari: $f(x, y) = y^2 - (x - a)^\alpha q(x)$ con $\alpha \geq 2$, $q(\alpha) \neq 0$. Eseguiamo allora il cambio di coordinate affini $u := x - a$, $v := y$. $f(u, v) = v^2 - u^\alpha q_1(u)$ con $q_1(0) \neq 0$. La molteplicità allora è 2. Inoltre se $\alpha = 2$ abbiamo un nodo, mentre se $\alpha > 2$, $v = 0$ è l'unica tangente principale ed abbiamo quindi una cuspide.

La chiusura proiettiva della curva è $F(x, y, z) = y^2 z^{d-2} - P(x, z) = 0$. Vediamo i punti in cui $z = 0$ (cioè dove intersechiamo la retta all'infinito). $F(x, y, 0) = -P(x, 0) = -a_d x^d = 0$ e quindi l'unico punto improprio è $x = 0, z = 0, y = 1$. Uso ora la carta affine $y \neq 0$ ed ottengo $z^{d-2} - P(x, z)$ e quindi se $d = 3$ ho un punto liscio, se $d > 3$ ho un punto singolare di molteplicità $d - 2$ e l'unica tangente principale è $z = 0$, se $d = 3$ allora la molteplicità d'intersezione tra $z = 0$ e il punto è 3. $p = [0, 1, 0]$ è liscio e la retta tangente interseca l in p con molteplicità 3, cioè p è un flesso.

STUDIO LOCALE DELLE IPERSUPERFICI PROIETTIVE

Lo facciamo passando alle carte affini: supponiamo di avere $[f]$ di \mathbb{A}^n e ci associamo $[F]$ ipersuperficie proiettiva (detta chiusura proiettiva) $F = H(f)$ e inoltre data $[F]$ di \mathbb{P}^n associamo $[D(F)]$ chiamato parte affine.

TEOREMA DI EULERO PER LE FUNZIONI OMOGENEE

$F \in K[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo di grado d . Allora vale che $d \cdot F(x) = \sum_{i=0}^n x_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$

PUNTI SINGOLARI DI IPERSUPERFICI PROIETTIVE

(Supponiamo $\text{Char } K = 0$, anche se non sono sicuro che serva) Sia $p \in V(F) \subseteq \mathbb{P}^n$. $p = [1, a_1, \dots, a_n] =$

$[1, a]$. Sia $f = D(F) = F(1, x)$ allora p è singolare per $F \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} F(1, a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, a) = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$ quindi mettere $x_0 = 1$ prima o dopo aver derivato non fa nessuna differenza.

Allora usando il teorema di Eulero si ha $\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \quad i = 0, \dots, n$

SPAZIO TANGENTE A F IN a (APPLICATO)

$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i) = 0$ è come fare $\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot x_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot a_i$ e, supponendo che $p \in V(F)$ si ha (eulero) $= \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot x_i$ ovvero siccome la chiusura proiettiva si ottiene omogeneizzando con x_0 lo spazio tangente proiettivo è $\sum_{i=0}^n x_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0$

TEOREMA DI BÈZOUT

$\mathcal{C} = [F], \mathcal{D} = [G]$, con $m = \deg \mathcal{C}, n = \deg \mathcal{D}, K$ infinito. Allora si ha

1. Se il numero di intersezioni tra \mathcal{C} e \mathcal{D} è $\geq mn$ allora \mathcal{C} e \mathcal{D} hanno una componente in comune
2. Se K è algebricamente chiuso e \mathcal{C} e \mathcal{D} non hanno componenti in comune, allora $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ consta di esattamente mn punti se contati con molteplicità

COROLLARI DEL TEOREMA DI BÈZOUT

- (K algebricamente chiuso) $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}^n$ con $n \geq 2$ è un'ipersuperficie riducibile allora \mathcal{F} è singolare.
- (K algebricamente chiuso) $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ una curva ridotta (ovvero nella fattorizzazione non compaiono componenti multiple) allora \mathcal{C} ha un numero finito di punti singolari.
- Siano $p_1, \dots, p_5 \in \mathbb{P}^2$ cinque punti distinti. Quante coniche passano per p_1, \dots, p_5 ?
- $p_1, \dots, p_5 \in \mathcal{Q}$ conica. Allora p_1, \dots, p_5 sono in posizione generale $\Leftrightarrow \mathcal{Q}$ è liscia.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI MOLTEPLICITÀ D'INTERSEZIONE TRA DUE CURVE PIANE

$\mathcal{C} = [f], \mathcal{D} = [g] \subseteq \mathbb{A}^2, p \in \mathbb{A}^2$. Vorremmo definire la molteplicità dell'intersezione di f e g in p $I(f \cap g, p)$ in modo che valgano:

1. $I(f \cap g, p) = +\infty \Leftrightarrow f, g$ hanno una componente in comune a cui p appartiene
2. $I(f \cap g, p) \in \mathbb{N}$ e $I(f \cap g, p) = 0 \Leftrightarrow p \notin V(f) \cap V(g)$
3. $I(f \cap g, p) = I(g \cap f, p)$
4. f, g rette distinte e $p \in V(f) \cap V(g)$ allora $I(g \cap f, p) = 1$
5. $I(f \cap g, p)$ è invariante per affinità

6. Dato $a \in K[x, y]$ si ha $I(f \cap g, p) = I(f \cap (g + af), p)$

7. Se $f = \prod_i f_i$ e $g = \prod_j g_j$ allora deve valere che $I(f \cap g, p) = \sum_{i,j} I(f_i \cap g_j, p)$

Queste proprietà determinano univocamente i numeri di intersezione. L'idea è, data una curva in x e y di abbassare il grado in x , supponendo che fino al grado $n - 1$ i numeri di intersezione siano ben definiti e dimostrare che lo sono anche per n .

PRIMA DEFINIZIONE DI MOLTEPLICITÀ D'INTERSEZIONE

$p = (a, b)$ e si scompongano $f = f_1 a_1$, $g = g_1 b_1$ tali che $a_1(p) \neq 0$, $b_1(p) \neq 0$. Allora si ha $I(f \cap g, p) :=$ molteplicità di $x = a$ come radice del risultante $\text{Ris}_y(f_1, g_1)$ in un sistema di coordinate generico

SECONDA DEFINIZIONE DI MOLTEPLICITÀ D'INTERSEZIONE

$p = (a, b)$, $\mathcal{M}_p = (x - a, y - b) \subseteq K[x, y]$. \mathcal{M}_p è il nucleo della $V_p : K[x, y] \rightarrow K$ definita da $f \mapsto f(p)$ mappa di valutazione. \mathcal{M}_p è un ideale massimale. Allora localizziamo $\mathcal{O}_p := K[x, y]_{\mathcal{M}_p}$. Ora presi $f, g \in K[x, y]$ consideriamo la K -algebra $\frac{\mathcal{O}_p}{(f, g)}$. Definiamo la molteplicità dell'intersezione come $I(f \cap g, p) = \dim_K \frac{\mathcal{O}_p}{(f, g)}$

QUADRICHE DI \mathbb{P}^n

Ci chiediamo quando siano singolari ($\text{Char } K \neq 2$). Sia $x \in K^{n+1}$ e sia $Q(x) = {}^t x A x = \sum A_{ij} x_i x_j$ con A matrice $(n+1) \times (n+1)$ simmetrica e sia $p = [v] \in \mathbb{P}^n$. Allora notiamo che $\frac{\partial Q}{\partial x_i}(v) = \sum a_{ij} v_j = (Av)_i$ e quindi v è singolare per la quadrica $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x_i}(v) = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow Av = 0$. Quindi $\text{Sing } Q = \mathbb{P}(\text{Ker } A)$ la cui dimensione è $n - \text{rk } A$, ovvero Q è liscia se e solo se ha rango massimo.

PUNTI DI FLESSO SU CURVE PROIETTIVE

($\text{Char } K \neq 2$) Sia F curva di \mathbb{P}^2 e sia f la sua parte affine. $(0, 0) = p \in V(f)$. Vogliamo cercare una condizione affinché p sia un flesso. Supponiamo prima che p sia un punto liscio. Scrivendo f come "Somma di Taylor" si vede che i termini di grado 1 e 2 sono una conica affine e quindi vorremmo che la conica fosse riducibile per avere un punto di flesso. Quindi p è di flesso \Leftrightarrow il determinante dell'hessiano formale di F è uguale a 0. Siccome $\deg \det H(F) = 3d(d-2)$ i flessi sono abbastanza (per Bézout). (E l'hessiano è identicamente nullo se e solo se F è unione di rette)

CUBICA LISCIA IN FORMA DI WEIERSTRASS

$\mathcal{C} = [F]$ cubica liscia, $\text{Char } K \neq 2, 3$ e sia $O \in \mathcal{C}$ flesso. Allora \exists un sistema di coordinate omogenee $[z, x, y]$ su \mathbb{P}^2 tale che $O = [0, 0, 1]$ e \mathcal{C} ha equazione affine $y^2 = x^3 + ax + b$ con $\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0$ (Non stiamo supponendo K algebricamente chiuso)

CUBICA LISCIA IN FORMA DI LEGENDRE

Se $p(x) = x^3 + ax + b$ in forma di Weierstrass ha tutte le radici in K , allora \mathcal{C} può essere messa in forma di Legendre: $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ con $\lambda \neq 0, 1$

FLESSI DI UNA CUBICA LISCIA SU UN CAMPO ALGEBRICAMENTE CHIUSO

\mathcal{C} cubica liscia e K algebricamente chiuso. Scegliamo un flesso O e mettiamo \mathcal{C} in forma di Weierstrass $y^2 = x^3 + ax + b = p(x)$ rispetto ad O . Cerco i punti di \mathbb{A}^2 in cui \mathcal{C} interseca $H(\mathcal{C})$: otteniamo 9 flessi che sono tali che se $p_1, p_2 \in \mathcal{C}$ sono flessi, allora la retta che passa per p_1, p_2 interseca \mathcal{C} in un terzo flesso. Inoltre il gruppo delle proiettività g di \mathbb{P}^2 tali che $g\mathcal{C} = \mathcal{C}$ agiscono transitivamente sui punti di flesso. Abbiamo inoltre 12 rette che passano per i punti di flesso e ogni retta passa per 3 punti di flesso. I 9 flessi e le 12 rette che li congiungono formano una configurazione isomorfa al piano affine su \mathbb{F}_3 .

BIRAPPORTO, PROIETTIVITÀ E J-INVARIANTE

Ci chiediamo quando esiste una proiettività di \mathbb{P}^1 che porta una quaterna ordinata di punti in un'altra. Risposta: solo se hanno lo stesso birapporto. Siano $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^1$ punti distinti e le $z_i = \frac{x_i}{x_0}$ le loro coordinate affini $\in K \cup \{+\infty\}$. Dico che il birapporto è la coordinata affine di z_4 nel sistema di coordinate su \mathbb{P}^1 in cui $z_1 = 0, z_2 = +\infty, z_3 = 1$. Quindi $\text{Bir}(p_1, \dots, p_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$. Vogliamo ora la condizione per quaterne non ordinate, quindi notiamo che permutando i punti si ottengono sei valori collegati del birapporto: $\{\beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta}{1 - \beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}\}$ ovvero se e solo se hanno uguale j -invariante. $j : K \setminus \{0, 1\} \rightarrow K$ definita da $j(t) = \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t - 1)^2}$, dove il j -invariante viene calcolato sul birapporto delle quaterne. In realtà si può calcolare il birapporto anche sulle rette.

DUE CUBICHE LISCIE SU UN CAMPO ALGEBRICAMENTE CHIUSO SONO PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI SE E SOLO SE HANNO LO STESSO j -INVARIANTE

CURVE PIANE LISCIE SU $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$

SISTEMA LINEARE DI CURVE

Fissato $d \geq 1$ il grado consideriamo $K[x_0, x_1, x_2]_d = \{\text{polinomi omogenei di grado } d\} \cup \{0\}$ che è uno spazio vettoriale su K di dimensione $\binom{d+2}{2}$ e sia $V_d := \mathbb{P}(K[x_0, x_1, x_2]_d)$, chiamato sistema lineare completo delle curve di grado d , che è uno spazio proiettivo i cui punti sono le curve piane di grado d . Un sistema lineare di curve di grado d è un sottospazio proiettivo $W \subseteq V_d$. Se $\dim W = 1$, W si dice fascio.

IMPOSIZIONE DEL PASSAGGIO PER UN PUNTO

$p = [a, b, c] \in \mathbb{P}^2$. $V_d(p) := \{[F] \in V_d \mid F(p) = 0\}$ è un iperpiano, sottospazio di V_d definito da una equazione lineare. In generale posso fissare un po' di punti $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}^2$ ed ottenere $V_d(p_1, \dots, p_k) := \bigcap_{i=1}^k V_d(p_i)$ che è un sistema lineare di dimensione che dipende da come sono disposti i punti ma ha codimensione al più k .

CONDIZIONI INDIPENDENTI PER LE CUBICHE

(K infinito) Siano $p_1, \dots, p_8 \in \mathbb{P}^2$ (anche coincidenti) tali che

- Non esiste una retta che contiene quattro dei p_i
- Non esiste una conica che passa per sette dei p_i

Allora p_1, \dots, p_8 impongono condizioni indipendenti alle cubiche, cioè $\dim V_3(p_1, \dots, p_8) = 1$

Corollario: se ho due cubiche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ senza componenti comuni che si intersecano in 9 punti distinti p_1, \dots, p_9 . Se \mathcal{C} è una cubica che passa per p_1, \dots, p_8 allora \mathcal{C} passa anche per p_9 .

SECONDA PARTE: VARIETÀ

TOPOLOGIA DI ZARISKI SU \mathbb{A}^n

TOPOLOGIA DI ZARISKI SU \mathbb{P}^n

IRRIDUCIBILITÀ

- $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso. Allora X è irriducibile $\Leftrightarrow I(X) \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ è un ideale primo \Leftrightarrow dati $U, V \subseteq X$ aperti non vuoti di X si ha $U \cap V \neq \emptyset$
- X irriducibile \Leftrightarrow dati $U, V \subseteq X$ aperti non vuoti si ha che $U \cap V \neq \emptyset$. In particolare se X è irriducibile ogni aperto è denso.
- $Y \subseteq X$. Y irriducibile $\Leftrightarrow \bar{Y}$ irriducibile
- $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ chiuso. Allora Y è irriducibile $\Leftrightarrow \mathcal{C}Y$ (il cono) è irriducibile in \mathbb{A}^{n+1}

TEOREMA DI FATTORIZZAZIONE IN IRRIDUCIBILI

Dato $Y \subseteq X$ chiuso una decomposizione in irriducibili di Y è $Y = Z_1 \cup \dots \cup Z_k$ con Z_i chiusi irriducibili. La decomposizione si dice irridondante o minimale se $\forall i \neq j \quad Z_i \not\subseteq Z_j$.

Negli spazi topologici Noetheriani (X, τ) ogni chiuso $Y \subseteq X$ ammette una decomposizione in irriducibili e, se minimale, essa è unica a meno di permutazioni degli irriducibili.

CHIUSI DI \mathbb{A}^1 E DI \mathbb{A}^2

I chiusi di \mathbb{A}^1 sono \mathbb{A}^1 , \emptyset e gli insiemi finiti di punti, ovvero la topologia di Zariski su \mathbb{A}^1 coincide con la cofinita.

I chiusi di \mathbb{A}^2 sono unioni finite di punti e di ipersuperfici.

CHIUSURA PROIETTIVA DI CHIUSI ALGEBRICI

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso. Allora la chiusura proiettiva è la chiusura di X secondo Zariski nello spazio proiettivo \mathbb{P}^n nel quale \mathbb{A}^n è naturalmente immerso. Non basta omogeneizzare i generatori dell'ideale (vedi cubica gobba), serve prendere ogni elemento dell'ideale, omogeneizzarlo e poi prendere l'ideale omogeneo generato. $I(\bar{X}) = (H(f), f \in I(X))$

NULLSTELLENSATZ

Se K è un campo algebricamente chiuso, $J \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ideale. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $V(J) = \emptyset \implies 1 \in J$
- J massimale $\implies \exists p \in \mathbb{A}^n$ t.c. $I(p) = J$
- $I(V(J)) = \sqrt{J}$

Quindi nel caso di K algebricamente chiuso abbiamo una corrispondenza biunivoca tra gli ideali radicali ed i chiusi di Zariski. Inoltre abbiamo anche le sottocorrispondenze 1 : 1 tra ideali primi e chiusi irriducibili e tra ideali massimali e punti di \mathbb{A}^n

VARIETÀ QUASI-PROIETTIVE

Seguono le varie definizioni:

- **(Varietà Quasi-proiettiva)** È un localmente chiuso in uno spazio proiettivo, ovvero è intersezione di un chiuso e di un aperto. $Z \cap U \subseteq \mathbb{P}^n$ dove Z è chiuso e U è aperto.
- **(Funzioni Regolari su VQP)** Data $X \subseteq \mathbb{P}^n$ VQP sia $f : X \rightarrow K$. Allora f si dice funzione regolare se $\forall p \in X \quad \exists U_p \subseteq X$ aperto tale che $\exists A, B \in K[x_0, \dots, x_n]$ t.c. A, B sono omogenei dello stesso grado con $B(q) \neq 0 \quad \forall q \in U_p$ e $f(q) = \frac{A(q)}{B(q)} \quad \forall q \in U_p$. (Notiamo che questo tipo di funzioni sono ben definite su \mathbb{P}^n , ovvero sono costanti sulle classi di equivalenza)
La K -algebra delle funzioni regolari su X si indica con $\mathcal{O}_X(X)$
- **(Morfismi di VQP)** Siano X, Y due VQP e supponiamo di avere $f : X \rightarrow Y$. Allora f si dice morfismo se
 1. f è continua (Che è una richiesta piuttosto debole)
 2. $\forall V \subseteq Y$ aperto e $\phi : V \rightarrow K$ regolare allora $\phi \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow K$ è regolare (che è una condizione di natura locale)

Notiamo che l'identità è un morfismo e che i morfismi sono stabili per composizione. Diciamo che un morfismo di VQP è un isomorfismo se è bigettivo e la sua inversa insiemistica è anch'essa un morfismo di VQP

VARIETÀ AFFINI

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso affine. Allora $X = \bar{X} \cap \mathbb{A}^n$ è una VQP attraverso l'identificazione di \mathbb{A}^n con un sottoinsieme di \mathbb{P}^n . Notiamo che ora le funzioni regolari su X diventano rapporti di polinomi non necessariamente omogenei, né dello stesso grado, ovvero $f : X \rightarrow K$ allora f è regolare se $\forall p \in X \quad \exists U_p \subseteq X$ intorno aperto e $a, b \in K[x_1, \dots, x_n]$ tale che $b(q) \neq 0 \quad \forall q \in U_p$ e $f(q) = \frac{a(q)}{b(q)} \quad \forall q \in U_p$.

Nel caso speciale in cui $b = 1$ e $U = X$ f viene detta funzione polinomiale. Attraverso $r_X : K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ definita da $f \mapsto f|_X$ (che è un omomorfismo di K -algebre) notiamo che $\text{Ker } r_X = I(X)$ e usando il primo teorema di isomorfismo abbiamo $K[X] := \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{I(X)} \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ che viene detto anello delle coordinate di X o algebra affine di X , molto importante per i chiusi affini su un campo algebricamente chiuso, poiché come vedremo caratterizza completamente i chiusi affini.

Abbiamo una forma "Relativa" del Nullstellensatz, come corrispondenza $1 : 1$ tra gli ideali radicali di $K[X]$ e i sottoinsiemi chiusi $Y \subseteq X$.

SU K ALGEBRICAMENTE CHIUSO r_X È UN ISOMORFISMO DI K -ALGEBRE

MORFISMI DA UNA VQP IN \mathbb{A}^m

Data $X \subseteq \mathbb{P}^n$ VQP vorrei descrivere i morfismi $X \xrightarrow{f} \mathbb{A}^m$. Vale che $f : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ è un morfismo di VQP se e solo se le componenti di f sono funzioni regolari.

VARIETÀ AFFINI

X VQP si dice varietà affine se X è isomorfo ad un chiuso di uno spazio affine.

ATTENZIONE: Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso e scegliamo $f \in K[X] \setminus 0$ e diciamo $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ è un aperto principale. Avevamo già osservato che gli aperti principali formano una base della topologia di Zariski di X . Mostriamo ora che X_f è una varietà affine.

DUALITÀ ALGEBRO-GEOMETRICA

$f : X \rightarrow Y$ morfismo di VQP. Allora $\exists f^* : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ chiamato pullback definito da $\phi \mapsto \phi \circ f$ ed è un morfismo di K -algebre.

Inoltre se f è un isomorfismo di VQP allora f^* è un isomorfismo di K -algebre.

TERZA PARTE: DIMENSIONE

VARIE ED EVENTUALI

LA CUBICA GOBBA

Fonte inesauribile di patologie e di controesempi. $C = \{y - x^2 = z - xy = 0\} \subseteq \mathbb{A}^3$ che è anche il grafico di $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2$ definita da $x \mapsto (x^2, x^3)$.