FATTI DI EGA

NOTAZIONI ED INTRODUZIONE

Il corso da cui sono tratti gli enunciati è diviso in alcune parti: nella prima si cerca di dare un'introduzione più concreta alla geometria algebrica attraverso anche esempi di curve in $\mathbb{P}^2$, nella seconda si fanno altre cose... bla bla bla...

ENUNCIATI PRIMA PARTE

- (**Irriducibilità di** $y^2-f(x)$) $p(x,y)=y^2-f(x)\in\mathbb{K}[x][y]$. Se nella fattorizzazione di $f(x)=c\cdot p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ con p_i irriducibili e distinti, $\alpha_i>0$ esiste un i tale che α_i è dispari allora si ha $p(x,y)$ irriducibile. Inoltre se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso questa condizione è anche necessaria.

STUDIO LOCALE DELLE IPERSUPERFICI

$f\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$, $p\in V(f)\subseteq\mathbb{A}^n$. Sia l retta di $\mathbb{A}^n$ passante per p, ovvero $l=\{p+tv\mid t\in\mathbb{K}\}$ con $v\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}$.

Consideriamo il polinomio $g(t):=f(p+tv)\in\mathbb{K}[t]$ e distinguiamo due casi:

- $g\equiv 0$: Significa che la retta l è contenuta in $V(f)$ e quindi diciamo che l interseca $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità infinita.
- $g\not\equiv 0$, ma $g(0)=0$ perché $p\in V(f)$. Quindi in $t=0$ ha una radice con una certa molteplicità $g(t)=t^m h(t)$ con $h(0)\neq 0$. Allora dico che l interseca $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità m.

Se $m>1$ diciamo che l è tangente a $\mathcal{I}_f$ in p.
Invece diciamo che p è un punto liscio o non singolare di $\mathcal{I}_f$ se esiste almeno una retta l che passa per p e non è tangente.
Fissato un punto p vengono chiamate tangenti principali le rette tangenti che intersecano $\mathcal{I}_f$ con molteplicità massima.

In generale, a meno di una traslazione possiamo supporre $p=(0,0)$ e $p\in V(f)$. Allora considero una retta per l'origine $l=\{tv\mid t\in\mathbb{K}\}$ e $g(t):=f(tv)$, con $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}$.
Allora l è tangente a f in $p\Leftrightarrow g'(0)=0$. $g'(t)\ |_{t=0}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(tv)\cdot v_i\ |_{t=0}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\cdot v_i$ quindi $g'(0)=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\cdot v_i=0$ e distinguiamo dunque due casi:

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)=0\quad\forall i$ allora p è un punto singolare
- $\exists i$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\neq 0$ allora p è liscio e l'insieme delle direazioni in $\mathbb{K}^n$ tangenti a $\mathcal{I}_f$ in p è un iperpiano di equazione $\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\cdot v_i=0$

Inoltre, se scriviamo $f(x_1,\dots,x_n)=f_m(\boldsymbol{x})+h(\boldsymbol{x})$ dove f_m è omogeneo di grado $m\geq 1$ e tutti i monomi di h hanno grado maggiore di m allora abbiamo $\mathcal{I}_f$ è liscia in $p\Leftrightarrow m=1$ e inoltre sappiamo che ogni retta interseca $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità $\geq m$. E se il campo è infinito, per il principio di identità dei polinomi ho che m è il minimo della molteplicità d'intersezione di l con $\mathcal{I}_f$ in p al variare di l tra le rette in p. Essa viene chiamata molteplicità del punto. Una retta si dice trasversale se molt $(l)=1$.

Si chiama cono tangente a $\mathcal{I}_f$ in p l'insieme delle rette che intersecano $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità maggiore del minimo m. è dato dall'equazione $f_m=0$.

Inoltre la molteplicità di p per $\mathcal{I}_f$ è uguale a $m\Leftrightarrow$ tutte le derivate parziali di f di ordine minore di m si annullano in p e c'è almeno una derivata parziale m-esima che non è nulla.