FATTI DI EGA

NOTAZIONI ED INTRODUZIONE

Il corso da cui sono tratti gli enunciati è diviso in alcune parti: nella prima si cerca di dare un'introduzione più concreta alla geometria algebrica attraverso anche esempi di curve in $\mathbb{P}^2$, nella seconda si parlerà di varietà quasi-proiettive, e di varietà affini e proiettive, nella terza ci sarà un po' di teoria della dimensione.

PRIMA PARTE

STUDIO DELL'IRRIDUCIBILITÀ DEI POLINOMI "QUADRATICI"

$p(x, y) = y^2 - f(x) \in \mathbb{K}[x][y]$. Se nella fattorizzazione di $f(x) = c \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ con p_i irriducibili e distinti, $\alpha_i > 0$ esiste un i tale che α_i è dispari allora si ha $p(x, y)$ irriducibile. Inoltre se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso questa condizione è anche necessaria.

STUDIO LOCALE DELLE IPERSUPERFICI AFFINI

$f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $p \in V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$. Sia l retta di $\mathbb{A}^n$ passante per p, ovvero $l = \{p+tv \mid t \in \mathbb{K}\}$ con $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Consideriamo il polinomio $g(t) := f(p + tv) \in \mathbb{K}[t]$ e distinguiamo due casi:

- $g \equiv 0$: Significa che la retta l è contenuta in $V(f)$ e quindi diciamo che l interseca $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità infinita.
- $g \not\equiv 0$, ma $g(0) = 0$ perché $p \in V(f)$. Quindi in $t = 0$ ha una radice con una certa molteplicità $g(t) = t^m h(t)$ con $h(0) \neq 0$. Allora dico che l interseca $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità m.

Se $m > 1$ diciamo che l è tangente a $\mathcal{I}_f$ in p.
Invece diciamo che p è un punto liscio o non singolare di $\mathcal{I}_f$ se esiste almeno una retta l che passa per p e non è tangente.
Fissato un punto p vengono chiamate tangenti principali le rette tangenti che intersecano $\mathcal{I}_f$ con molteplicità massima.

In generale, a meno di una traslazione possiamo supporre $p = (0, 0)$ e $p \in V(f)$. Allora considero una retta per l'origine $l = \{tv \mid t \in \mathbb{K}\}$ e $g(t) := f(tv)$, con $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.
Allora l è tangente a f in $p \Leftrightarrow g'(0) = 0$. $g'(t) \mid_{t=0}= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tv) \cdot v_i \mid_{t=0}= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i$ quindi $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = 0$ e distinguiamo dunque due casi:

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i$ allora p è un punto singolare
- $\exists i$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$ allora p è liscio e l'insieme delle direazioni in $\mathbb{K}^n$ tangenti a $\mathcal{I}_f$ in p è un iperpiano di equazione $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = 0$

Inoltre, se scriviamo $f(x_1, \dots, x_n) = f_m(\boldsymbol{x}) + h(\boldsymbol{x})$ dove f_m è omogeneo di grado $m \geq 1$ e tutti i monomi di h hanno grado maggiore di m allora abbiamo $\mathcal{I}_f$ è liscia in $p \Leftrightarrow m = 1$ e inoltre sappiamo che ogni retta interseca $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità $\geq m$. E se il campo è infinito, per il principio di identità dei polinomi ho che m è il minimo della molteplicità d'intersezione di l con $\mathcal{I}_f$ in p al variare di l tra le rette in p. Essa viene chiamata molteplicità del punto. Una retta si dice trasversale se molt $(l) = 1$.

Si chiama cono tangente a $\mathcal{I}_f$ in p l'insieme delle rette che intersecano $\mathcal{I}_f$ in p con molteplicità maggiore del minimo m. è dato dall'equazione $f_m = 0$.

Inoltre la molteplicità di p per $\mathcal{I}_f$ è uguale a $m \Leftrightarrow$ tutte le derivate parziali di f di ordine minore di m si annullano in p e c'è almeno una derivata parziale m-esima che non è nulla.

Diciamo che un punto è un nodo se è singolare di molteplicità due.

Omogenizzazione e Disomogeneizzazione

$D : \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \to \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $F(x_0, \dots, x_n) \mapsto F(1, x_1, \dots, x_n)$ che è ovviamente un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre.
$H : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ che omogeneizza i polinomi, ovvero dato $f \neq 0$, $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ sia $d = \deg f$. Allora $H(f) := x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$. Notiamo che H NON è un omomorfismo però è moltiplicativo.
Allora valgono:

- H è moltiplicativo: $H(fg) = H(f)H(g)$
- $D \circ H = \text{id}$
- $H \circ D \mid_{\text{Polinomi Omogenei}} (F) = F_1$ con $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ e vale $F = x_0^m F_1$ e $x_0 \nmid F_1$. Ovvero se $x_0 \mid F$ perdiamo le potenze di x_0 nel polinomio, altrimenti otteniamo la stessa cosa.
- $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ irriducibile $\implies F = H(f)$ irriducibile.
- $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ irriducibile e $\neq x_0 \implies f = D(F)$ irriducibile.

Fattorizzazione dei Polinomi Omogenei

Sia F omogeneo, allora scrivo $F = x_0^m G$, con G omogeneo e $x_0 \nmid G$. Considero allora $g := D(G) = D(F) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $g = c \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ con i p_i irriducibili distinti e $\alpha_i > 0$, $c \in \mathbb{K}^*$. Allora $P_i := H(p_i)$ che è ancora irriducibile e $F = x_0^m G = x_0^m H(g) = c x_0^m P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}$. Quindi la fattorizzazione dei polinomi omogenei avviene in una variabile in meno ed i fattori di un polinomio omogeneo sono omogenei.
Se ho K algebricamente chiuso e $F(x_0, x_1)$ omogeneo di grado d, allora $F(x_0, x_1) = x_0^m G(x_0, x_1)$ con G omogeneo e $x_0 \nmid G$. Allora $D(G) = g(x_1) = c \cdot \prod_{i=1}^k (a_i x_1 + b_i)^{\alpha_i}$ e allora $F(x_0, x_1) = c \cdot x_0^m \cdot H(g) = c \cdot x_0^m \cdot \prod_{i=1}^k (a_i x_1 + b_i x_0)^{\alpha_i}$ e quindi se considero $[a_i, b_i] \in \mathbb{P}^1$ per $i = 1, \dots, k$ sono distinti e sono i punti in cui F si annulla (oltre a $[0, 1]$ se $m > 0$) con molteplicità α_i

Punti singolari di $y^2 - p(x) = 0 \subseteq \mathbb{A}^2$

Sia p un polinomio di $\deg p = d \geq 3$ e $f(x, y) = y^2 - p(x)$. Troviamo i punti singolari del sottoinsieme di $\mathbb{A}^2$ dato da $f(x, y) = 0$. Serve necessariamente che (devono annullarsi tutte le derivate parziali) $\begin{cases} y^2 = p(x) \\ y = 0 \\ p'(x) = 0 \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} y = 0 \\ p(x) = 0 \\ p'(x) = 0 \end{cases}$ ovvero se e solo se p ha radici multiple. Quindi i punti singolari sono quelli del tipo $(0, a)$ con a radice multipla del polinomio p.
Studiamo ora cosa avviene nei punti singolari: $f(x, y) = y^2 - (x - a)^\alpha q(x)$ con $\alpha \geq 2, q(\alpha) \neq 0$. Eseguiamo allora il cambio di coordinate affini $u := x - a, v := y$. $f(u, v) = v^2 - u^\alpha q_1(u)$ con $q_1(0) \neq 0$. La molteplicità allora è 2. Inoltre se $\alpha = 2$ abbiamo un nodo, mentre se $\alpha > 2$, $v = 0$ è l'unica tangente principale ed abbiamo quindi una cuspide.
La chiusura proiettiva della curva è $F(x, y, z) = y^2 z^{d-2} - P(x, z) = 0$. Vediamo i punti in cui $z = 0$ (cioè dove intersechiamo la retta all'infinito). $F(x, y, 0) = -P(x, 0) = -a_d x^d = 0$ e quindi l'unico punto improprio è $x = 0, z = 0, y = 1$. Uso ora la carta affine $y \neq 0$ ed ottengo $z^{d-2} - P(x, z)$ e quindi se $d = 3$ ho un punto liscio, se $d > 3$ ho un punto singolare di molteplicità $d - 2$ e l'unica tangente principale è $z = 0$, se $d = 3$ allora la molteplicità d'intersezione tra $z = 0$ e il punto è 3. $p = [0, 1, 0]$ è liscio e la retta tangente interseca l in p con molteplicità 3, cioè p è un flesso.

Studio locale delle Ipersuperfici Proiettive

Lo facciamo passando alle carte affini: supponiamo di avere $[f]$ di $\mathbb{A}^n$ e ci associamo $[F]$ ipersuperficie proiettiva (detta chiusura proiettiva) $F = H(f)$ e inoltre data $[F]$ di $\mathbb{P}^n$ associamo $[D(F)]$ chiamato parte affine.

Teorema di Eulero per le funzioni omogenee

$F \in K[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo di grado d. Allora vale che $d \cdot F(x) = \sum_{i=0}^n x_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$

Punti singolari di Ipersuperfici Proiettive

(Supponiamo Char $K = 0$, anche se non sono sicuro che serva) Sia $p \in V(F) \subseteq \mathbb{P}^n$. $p = [1, a_1, \dots, a_n] = [1, a]$. Sia $f = D(F) = F(1, x)$ allora p è singolare per F $\Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} F(1, a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, a) = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$ quindi mettere $x_0 = 1$ prima o dopo aver derivato non fa nessuna differenza. Allora usando il teorema di Eulero si ha $\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \quad i = 0, \dots, n$

Spazio tangente a F in a (applicato)

$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i) = 0$ è come fare $\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot x_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot a_i$ e, supponendo che $p \in V(F)$ si ha (eulero) $= \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot x_i$ ovvero siccome la chiusura proiettiva si ottiene omogeneizzando con x_0 lo spazio tangente proiettivo è $\sum_{i=0}^n x_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0$

Teoria del Risultante

A dominio d'integrità commutativo unitario. $F, G \in A[y]$, $F = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_m y^m$, $G = b_0 + b_1 y + \ldots + b_n y^n$ dove $a_i, b_i \in A$ allora

$$Ris_y(F, G) := \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & \dots & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_m \\ \hline b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b_n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Teorema di Bèzout

$\mathcal{C} = [F], \mathcal{D} = [G]$, con $m = \deg \mathcal{C}, n = \deg \mathcal{D}$, K infinito. Allora si ha

1. Se il numero di intersezioni tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ è $> mn$ allora $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ hanno una componente in comune
2. Se K è algebricamente chiuso e $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ non hanno componenti in comune, allora $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ consta di esattamente mn punti se contati con molteplicità

Corollari del Teorema di Bèzout

- (K algebricamente chiuso) $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}^n$ con $n \geq 2$ è un'ipersuperficie riducibile allora $\mathcal{F}$ è singolare.
- (K algebricamente chiuso) $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ una curva ridotta (ovvero nella fattorizzazione non compaiono componenti multiple) allora $\mathcal{C}$ ha un numero finito di punti singolari.
- Siano $p_1, \dots, p_5 \in \mathbb{P}^2$ cinque punti distinti. Quante coniche passano per $p_1, \dots, p_5$?
- $p_1, \dots, p_5 \in \mathcal{Q}$ conica. Allora $p_1, \dots, p_5$ sono in posizione generale $\Leftrightarrow \mathcal{Q}$ è liscia.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI MOLTEPLICITÀ D'INTERSEZIONE TRA DUE CURVE PIANE

$\mathcal{C} = [f], \mathcal{D} = [g] \subseteq \mathbb{A}^2, p \in \mathbb{A}^2$. Vorremmo definire la molteplicità dell'intersezione di f e g in p $I(f \cap g, p)$ in modo che valgano:

1. $I(f \cap g, p) = +\infty \Leftrightarrow f, g$ hanno una componente in comune a cui p appartiene
2. $I(f \cap g, p) \in \mathbb{N}$ e $I(f \cap g, p) = 0 \Leftrightarrow p \notin V(f) \cap V(g)$
3. $I(f \cap g, p) = I(g \cap f, p)$
4. f, g rette distinte e $p \in V(f) \cap V(g)$ allora $I(g \cap f, p) = 1$
5. $I(f \cap g, p)$ è invariante per affinità
6. Dato $a \in K[x, y]$ si ha $I(f \cap g, p) = I(f \cap (g + af), p)$
7. Se $f = \prod_i f_i$ e $g = \prod_j g_j$ allora deve valere che $I(f \cap g, p) = \sum_{i,j} I(f_i \cap g_j, p)$

Queste proprietà determinano univocamente i numeri di intersezione. L'idea è, data una curva in x e y di abbassare il grado in x, supponendo che fino al grado $n-1$ i numeri di intersezione siano ben definiti e dimostrare che lo sono anche per n.

PRIMA DEFINIZIONE DI MOLTEPLICITÀ D'INTERSEZIONE

$p = (a, b)$ e si scompongano $f = f_1 a_1$, $g = g_1 b_1$ tali che $a_1(p) \neq 0$, $b_1(p) \neq 0$. Allora si ha $I(f \cap g, p) :=$ molteplicità di $x = a$ come radice del risultante $\text{Ris}_y(f_1, g_1)$ in un sistema di coordinate generico

SECONDA DEFINIZIONE DI MOLTEPLICITÀ D'INTERSEZIONE

$p = (a, b)$, $\mathcal{M}_p = (x - a, y - b) \subseteq K[x, y]$. $\mathcal{M}_p$ è il nucleo della $V_p : K[x, y] \to K$ definita da $f \mapsto f(p)$ mappa di valutazione. $\mathcal{M}_p$ è un ideale massimale. Allora localizziamo $\mathcal{O}_p := K[x, y]_{\mathcal{M}_p}$. Ora presi $f, g \in K[x, y]$ consideriamo la K-algebra $\frac{\mathcal{O}_p}{(f,g)}$. Definiamo la molteplicità dell'intersezione come $I(f \cap g, p) = \dim_K \frac{\mathcal{O}_p}{(f,g)}$

QUADRICHE DI $\mathbb{P}^n$

Ci chiediamo quando siano singolari (Char $K \neq 2$). Sia $x \in K^{n+1}$ e sia $Q(x) = {}^t x A x = \sum A_{ij} x_i x_j$ con A matrice $(n+1) \times (n+1)$ simmetrica e sia $p = [v] \in \mathbb{P}^n$. Allora notiamo che $\frac{\partial Q}{\partial x_i}(v) = \sum a_{ij} v_j = (Av)_i$ e quindi v è singolare per la quadrica $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x_i}(v) = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow Av = 0$. Quindi $\text{Sing } Q = \mathbb{P}(\text{Ker } A)$ la cui dimensione è $n - \text{rk } A$, ovvero $\mathcal{Q}$ è liscia se e solo se ha rango massimo.

PUNTI DI FLESSO SU CURVE PROIETTIVE

(Char $K \neq 2$) Sia F curva di $\mathbb{P}^2$ e sia f la sua parte affine. $(0, 0) = p \in V(f)$. Vogliamo cercare una condizione affinchè p sia un flesso. Supponiamo prima che p sia un punto liscio. Scrivendo f come "Somma di Taylor" si vede che i termini di grado 1 e 2 sono una conica affine e quindi vorremmo che la conica fosse riducibile per avere un punto di flesso. Quindi p è di flesso $\Leftrightarrow$ il determinante dell'hessiano formale di F è uguale a 0. Siccome $\deg \det H(F) = 3d(d-2)$ i flessi sono abbastanza (per Bèzout). (E l'hessiano è identicamente nullo se e solo se F è unione di rette)

CUBICA LISCIA IN FORMA DI WEIERSTRASS

$\mathcal{C} = [F]$ cubica liscia, Char $K \neq 2, 3$ e sia $O \in \mathcal{C}$ flesso. Allora $\exists$ un sistema di coordinate omogenee $[z, x, y]$ su $\mathbb{P}^2$ tale che $O = [0, 0, 1]$ e $\mathcal{C}$ ha equazione affine $y^2 = x^3 + ax + b$ con $\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0$ (Non stiamo supponendo K algebricamente chiuso)

CUBICA LISCIA IN FORMA DI LEGENDRE

Se $p(x) = x^3 + ax + b$ in forma di Weierstrass ha tutte le radici in K, allora $\mathcal{C}$ può essere messa in forma di Legendre: $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ con $\lambda \neq 0, 1$

Flessi di una cubica liscia su un campo algebricamente chiuso

$\mathcal{C}$ cubica liscia e K algebricamente chiuso. Scegliamo un flesso O e mettiamo $\mathcal{C}$ in forma di Weierstrass $y^2 = x^3 + ax + b = p(x)$ rispetto ad O. Cerco i punti di $\mathbb{A}^2$ in cui $\mathcal{C}$ interseca $H(\mathcal{C})$: otteniamo 9 flessi che sono tali che se $p_1, p_2 \in \mathcal{C}$ sono flessi, allora la retta che passa per p_1, p_2 interseca $\mathcal{C}$ in un terzo flesso.
Inoltre il gruppo delle proiettività g di $\mathbb{P}^2$ tali che $g\mathcal{C} = \mathcal{C}$ agiscono transitivamente sui punti di flesso.
Abbiamo inoltre 12 rette che passano per i punti di flesso e ogni retta passa per 3 punti di flesso. I 9 flessi e le 12 rette che li congiungono formano una configurazione isomorfa al piano affine su $\mathbb{F}_3$.

Birapporto, Proiettività e j-invariante

Ci chiediamo quando esiste una proiettività di $\mathbb{P}^1$ che porta una quaterna ordinata di punti in un'altra. Risposta: solo se hanno lo stesso birapporto. Siano $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^1$ punti distinti e le $z_i = \frac{x_1}{x_0}$ le loro coordinate affini $\in K \cup \{+\infty\}$. Dico che il birapporto è la coordinata affine di z_4 nel sistema di coordinate su $\mathbb{P}^1$ in cui $z_1 = 0, z_2 = +\infty, z_3 = 1$. Quindi Bir $(p_1, \dots, p_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$
Vogliamo ora la condizione per quaterne non ordinate, quindi notiamo che permutando i punti si ottengono sei valori collegati del birapporto: $\{\beta, \frac{1}{\beta}, 1-\beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\beta-1}{\beta}\}$ ovvero se e solo se hanno uguale j-invariante.
$j : K \setminus \{0, 1\} \to K$ definita da $j(t) = \frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}$, dove il j-invariante viene calcolato sul birapporto delle quaterne.
In realtà si può calcolare il birapporto anche sulle rette.

Due cubiche liscie su un campo algebricamente chiuso sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso j-invariante

Curve piane liscie su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

Sistema lineare di Curve

Fissato $d \geq 1$ il grado consideriamo $K[x_0, x_1, x_2]_d = \{$polinomi omogenei di grado $d\} \cup \{0\}$ che è uno spazio vettoriale su K di dimensione $\binom{d+2}{2}$ e sia $V_d := \mathbb{P}(K[x_0, x_1, x_2]_d)$, chiamato sistema lineare completo delle curve di grado d, che è uno spazio proiettivo i cui punti sono le curve piane di grado d. Un sistema lineare di curve di grado d è un sottospazio proiettivo $W \subseteq V_d$. Se dim $W = 1$, W si dice fascio.

Imposizione del passaggio per un punto

$p = [a, b, c] \in \mathbb{P}^2$. $V_d(p) := \{[F] \in V_d \mid F(p) = 0\}$ è un iperpiano, sottospazio di V_d definito da una equazione lineare. In generale posso fissare un po' di punti $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}^2$ ed ottenere $V_d(p_1, \dots, p_k) := \cap_{i=1}^k V_d(p_i)$ che è un sistema lineare di dimensione che dipende da come sono disposti i punti ma ha codimensione al più k.

Condizioni indipendenti per le Cubiche

(K infinito) Siano $p_1, \dots, p_8 \in \mathbb{P}^2$ (anche coincidenti) tali che

- Non esiste una retta che contiene quattro dei p_i
- Non esiste una conica che passa per sette dei p_i

Allora $p_1, \dots, p_8$ impongono condizioni indipendenti alle cubiche, cioè dim $V_3(p_1, \dots, p_8) = 1$
Corollario: se ho due cubiche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ senza componenti comuni che si intersecano in 9 punti distinti $p_1, \dots, p_9$. Se $\mathcal{C}$ è una cubica che passa per $p_1, \dots, p_8$ allora $\mathcal{C}$ passa anche per p_9.

SECONDA PARTE: VARIETÀ

TOPOLOGIA DI ZARISKI SU $\mathbb{A}^n$

TOPOLOGIA DI ZARISKI SU $\mathbb{P}^n$

IRRIDUCIBILITÀ

- $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso. Allora X è irriducibile $\Leftrightarrow I(X) \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ è un ideale primo $\Leftrightarrow$ dati $U, V \subseteq X$ aperti non vuoti di X si ha $U \cap V \neq \emptyset$
- X irriducibile $\Leftrightarrow$ dati $U, V \subseteq X$ aperti non vuoti si ha che $U \cap V \neq \emptyset$. In particolare se X è irriducibile ogni aperto è denso.
- $Y \subseteq X$. Y irriducibile $\Leftrightarrow \bar{Y}$ irriducibile
- $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ chiuso. Allora Y è irriducibile $\Leftrightarrow \mathcal{C}Y$ (il cono) è irriducibile in $\mathbb{A}^{n+1}$

TEOREMA DI FATTORIZZAZIONE IN IRRIDUCIBILI

Dato $Y \subseteq X$ chiuso una decomposizione in irriducibili di Y è $Y = Z_1 \cup \ldots \cup Z_k$ con Z_i chiusi irriducibili.
La decomposizione si dice irridondante o minimale se $\forall i \neq j \quad Z_i \not\subseteq Z_j$.
Negli spazi topologici Noetheriani (X, τ) ogni chiuso $Y \subseteq X$ ammette una decomposizione in irriducibili e, se minimale, essa è unica a meno di permutazioni degli irriducibili.

CHIUSI DI $\mathbb{A}^1$ E DI $\mathbb{A}^2$

I chiusi di $\mathbb{A}^1$ sono $\mathbb{A}^1$, $\emptyset$ e gli insiemi finiti di punti, ovvero La topologia di Zariski su $\mathbb{A}^1$ coincide con la cofinita.
I chiusi di $\mathbb{A}^2$ sono unioni finite di punti e di ipersuperfici.

IPERSUPERFICI

Con K algebricamente chiuso intederemo ora per ipersuperficie il luogo di zeri di un'equazione e non più l'equazione stessa. Infatti se $X = V(f)$ ipersuperficie ($J = (f)$) allora se $f = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ con p_i irriducibili e distinti, $\alpha_i \geq 0$, si ha $I(X) = \sqrt{(f)} = (p_1 \cdot \ldots \cdot p_k)$ e $V(f) = V(p_1) \cup \ldots \cup V(p_k)$ e, a meno di fattori multipli, il supporto le identifica univocamente.

CHIUSURA PROIETTIVA DI CHIUSI ALGEBRICI

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso. Allora la chiusura proiettiva è la chiusura di X secondo Zariski nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ nel quale $\mathbb{A}^n$ è naturalmente immerso. Non basta omogeneizzare i generatori dell'ideale (vedi cubica gobba), serve prendere ogni elemento dell'ideale, omogeneizzaarlo e poi prendere l'ideale omogeneo generato. $I(\bar{X}) = (H(f), f \in I(X))$, ma se X è un'ipersuperficie, allora ovviamente basta omogeneizzare la singola equazione (tanto le altre sono tutte sue multipli).

NULLSTELLENSATZ

Se K è un campo algebricamente chiuso, $J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ideale. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $V(J) = \emptyset \implies 1 \in J$
- J massimale $\implies \exists p \in \mathbb{A}^n$ t.c. $I(p) = J$
- $I(V(J)) = \sqrt{J}$

Quindi nel caso di K algebricamente chiuso abbiamo una corrispondenza biunivoca tra gli ideali radicali ed i chiusi di Zariski. Inoltre abbiamo anche le sottocorrispondenze $1:1$ tra ideali primi e chiusi irriducibili e tra ideali massimali e punti di $\mathbb{A}^n$

VARIETÀ QUASI-PROIETTIVE

Seguono le varie definizioni:

- (**Varietà Quasi-proiettiva**) É un localmente chiuso in uno spazio proiettivo, ovvero è intersezione di un chiuso e di un aperto. $Z \cap U \subseteq \mathbb{P}^n$ dove Z è chiuso e U è aperto.
- (**Funzioni Regolari su VQP**) Data $X \subseteq \mathbb{P}^n$ VQP sia $f : X \to K$. Allora f si dice funzione regolare se $\forall p \in X \quad \exists U_p \subseteq X$ aperto tale che $\exists A, B \in K[x_0, \ldots, x_n]$ t.c. A, B sono omogenei dello stesso grado con $B(q) \neq 0 \quad \forall q \in U_p$ e $f(q) = \frac{A(q)}{B(q)} \quad \forall q \in U_p$. (Notiamo che questo tipo di funzioni sono ben definite su $\mathbb{P}^n$, ovvero sono costanti sulle classi di equivalenza)
  La K-algebra delle funzioni regolari su X si indica con $\mathcal{O}_X(X)$
- (**Morfismi di VQP**) Siano X, Y due VQP e supponiamo di avere $f : X \to Y$. Allora f si dice morfismo se
  1. f è continua (Che è una richiesta piuttosto debole)
  2. $\forall V \subseteq Y$ aperto e $\phi : V \to K$ regolare allora $\phi \circ f : f^{-1}(V) \to K$ è regolare (che è una condizione di natura locale)

  Notiamo che l'identità è un morfismo e che i morfismi sono stabili per composizione. Diciamo che un morfismo di VQP è un isomorfismo se è biggettivo e la sua inversa insiemistica è anch'essa un morfismo di VQP

VARIETÀ AFFINI

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso affine. Allora $X = \bar{X} \cap \mathbb{A}^n$ è una VQP attraverso l'identificazione di $\mathbb{A}^n$ con un sottoinsieme di $\mathbb{P}^n$. Notiamo che ora le funzioni regolari su X diventano rapporti di polinomi non necessariamente omogenei, né dello stesso grado, ovvero $f : X \to K$ allora f è regolare se $\forall p \in X \quad \exists U_p \subseteq X$ intorno aperto e $a, b \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tale che $b(q) \neq 0 \quad \forall q \in U_p$ e $f(q) = \frac{a(q)}{b(q)} \quad \forall q \in U_p$.
Nel caso speciale in cui $b = 1$ e $U = X$ f viene detta funzione polinomiale. Attraverso $r_X : K[x_1, \ldots, x_n] \to \mathcal{O}_X(X)$ definita da $f \mapsto f \mid_X$ (che è un omomorfismo di K-algebre) notiamo che Ker $r_X = I(X)$ e usando il primo teorema di isomorfismo abbiamo $K[X] := \frac{K[x_1,\ldots,x_n]}{I(X)} \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ che viene detto anello delle coordinate di X o algebra affine di X, molto importante per i chiusi affini su un campo algebricamente chiuso, poiché come vedremo caratterizza completamente i chiusi affini.
Abbiamo una forma "Relativa" del Nullstellensatz, come corrispodenza $1 : 1$ tra gli ideali radicali di $K[X]$ e i sottoinsiemi chiusi $Y \subseteq X$.

SU K ALGEBRICAMENTE CHIUSO r_X È UN ISOMORFISMO DI K-ALGEBRE

K algebricamente chiuso, allora $r_X : \frac{K[x_1,\ldots,x_n]}{I(X)} = K[X] \to \mathcal{O}_X(X)$ definita da $f \mapsto f \mid_X$ è un'isomorfismo di K-algebre. Ovviamente è un morfismo di K-algebre ed è iniettivo per come lo abbiamo costruito (quozientando sul ker).
Sia allora $\phi \in \mathcal{O}_X(X)$ e $J := \{f \in K[X] \mid f\phi \in K[X]\} \subseteq K[X]$ ideale. Allora dico che $V(J) = \emptyset$ (da cui seguirebbe per NSS che $1 \in J$ e quindi $1 = \sum^{\text{Finita}} a_i(x) f_i(x)$ con $a_i \in K[X]$ e $f_i \in J$. Allora avrei $\phi = \sum_i a_i(f_i\phi)$ e sappiamo che $f_i\phi \in K[X]$ per definizione delle f_i).
Fissiamo allora $p \in X$ e mostriamo che $p \notin V(J)$. Decomponiamo per prima cosa X in irriducibili e li separiamo in base a se contengono p oppure no:

$$X = \underbrace{(X_1 \cup \ldots \cup X_k)}\text{ che contengono } p \cup \underbrace{(X_{k+1} \cup \ldots \cup X_s)}\text{ che non contengono } p$$

Allora $\exists U_p$ aperto di X tale che $p \in U_p$ e $a, b \in K[X]$ tali che $\phi \mid_{U_p} \equiv \frac{a}{b}$. Consideriamo la funzione $b\phi - a = 0$ su U_p ma $U_p \cap X_i \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \ldots, k$ e quindi U_p è denso in $X_1 \cup \ldots \cup X_k$, da cui segue $b\phi - a = 0$ su $X_1 \cup \ldots \cup X_k$ perchè il luogo di zeri di una funzione regolare è un chiuso.
Inoltre, siccome $p \notin X_{k+1} \cup \ldots \cup X_s$ allora (per definizione di chiusi di Zariski) $\exists c \in K[X], c \in I(X_{k+1} \cup \ldots \cup X_s)$ t.c. $c(p) \neq 0$ allora $c(b\phi - a) \equiv 0$ su tutto X ma allora $ca \in K[X]$ e si ha $ac = (cb)\phi$ e quindi $cb \in J$ ma allora $(cb)(p) \neq 0$

Morfismi da una VQP in $\mathbb{A}^m$

Data $X \subseteq \mathbb{P}^n$ VQP vorrei descrivere i morfismi $X \xrightarrow{f} \mathbb{A}^m$. Vale che $f : X \to \mathbb{A}^m$ è un morfismo di VQP se e solo se le componenti di f sono funzioni regolari.

Varietà Affini

X VQP si dice varietà affine se X è isomorfo ad un chiuso di uno spazio affine.
ATTENZIONE: Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso e scegliamo $f \in K[X] \setminus 0$ e diciamo $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ è un aperto principale. Avevamo già osservato che gli aperti principali formano una base della topologia di Zariski di X. Mostriamo ora che X_f è una varietà affine. (Basta "mandare gli zeri all'infinito", come nel Rabinowitsch trick) e quindi otteniamo il risultato che ogni VQP ha una base di aperti affini.

Dualità Algebro-Geometrica

$f : X \to Y$ morfismo di VQP. Allora $\exists f^* : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ chiamato pullback definito da $\phi \mapsto \phi \circ f$ ed è un morfismo di K-algebre.
Inoltre se f è un isomorfismo di VQP allora f^* è un isomorfismo di K-algebre.
Notiamo che se X è un chiuso affine allora $K[X]$ è una K-algebra finitamente generata e ridotta, ovvero senza nilpotenti.
Ciò ci permette di determinare $K[X_f]$ per X_f un aperto principale. (Usare l'isomorfismo dato dal fatto che gli aperti principali sono affini e passando alla star localizzare ad f)

Funzioni Regolari su tutto $\mathbb{P}^n$

K algebricamente chiuso, allora ogni funzione regolare su tutto $\mathbb{P}^n$ è costante. (Piuttosto agile, ad esempio su $\mathbb{P}^1$ considerare i due aperti principali con le loro equazioni $f = p(t) = q(\frac{1}{t})$)

K algebricamente chiuso, $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è una VQP

K algebricamente chiuso. Se copriamo $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con due aperti $U = \{x \neq 0\}$ e $V = \{y \neq 0\}$ che sono affini, si ha $K[U] = K[\mathbb{A}^2]_x = K[x,y]_x$ e $K[V] = K[x,y]_y$. Allora $\alpha : X \to \mathbb{A}^2$ l'immersione mi da l'applicazione di pullback α^*. Mostrando ora che è iniettiva e surgettiva vediamo che X non è una VQP perché abbiamo un ideale fantasma ($M = (x,y)$ che è massimale, ma $V_X(M) = \emptyset$) e quindi fallisce il Nullstellensatz relativo.

Lemmi e definizioni un po' casuali

- Un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ di VQP si dice dominante se la sua immagine è densa.
- Nel caso affine (se X e Y sono affini), f è dominante se e solo se f^* è iniettiva.
- In generale i morfismi non sono né aperti né chiusi.
- Diciamo che un insieme è costruibile se è un'unione finita di localmente chiusi. (Non lo dimostreremo, ma l'immagine di ogni morfismo è un costruibile)
- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ è denso con la topologia di Zariski.
- $K[\mathbb{A}^n] \cong K[x_1, \ldots, x_n]$
- $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$ chiusi. Allora $f : X \to Y$ morfismo si dice immersione chiusa se $Z = f(X)$ è chiuso e $X \xrightarrow{f} Z$ è un isomorfismo.
  Vale che f è un'immersione chiusa $\Leftrightarrow$ f^* è surgettiva.
- X, Y **affini**. Allora $\phi : K[Y] \to K[X]$ omomorfismo di K-algebre $\implies$ $\exists! f : X \to Y$ morfismo tale che $\phi = f^*$
- X, Y **affini**, $f : X \to Y$ morfismo. Allora f è isomorfismo se e solo se f^* lo è (insomma abbiamo il viceversa se le varietà sono affini)

Mappa di Veronese

$\mathcal{V}_{1,2} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ definita da $[x_0, x_1] \mapsto [x_0^2, x_0x_1, x_1^2]$ è ben definita, continua, ed è un morfismo che ha come immagine $\operatorname{Im} \mathcal{V}_{1,2} = \{y_0y_2 - y_1^2 = 0\}$, viene detta mappa di Veronese.
$\mathcal{V}_{a,b} : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^N$ è la mappa di Veronese, dove a è la dimensione dello spazio di partenza e b è il grado dei monomi in arrivo e quindi $N = \binom{n+k}{k} - 1$ e su $\mathbb{P}^N$ abbiamo le coordinate z_I dove I è un multiindice di lunghezza k e di grado n. La mappa di veronese è quindi definita da $\mathcal{V}_{a,b}([x_0, \dots, x_k]) = [x^I]_I$ al variare di tutti i multiindici I ed è un morfismo.
Il fatto che gli x^I commutino tra di loro ci dice quali sono le condizioni sulle coordinate immagine. Sia $\Sigma_{k,N} := \{z_Iz_J = z_{I'}z_{J'} \mid \forall I, J, I', J' \text{ t.c. } I+J = I'+J'\}$ che è quindi definito da una collezione di quadriche.
È chiaro che $\operatorname{Im} \mathcal{V}_{k,N} \subseteq \Sigma_{k,N}$ e definiamo l'inversa $g : \Sigma_{k,N} \to \mathbb{P}^k$ mostrando che ci sono alcune coordinate che non si annullano mai e prendendo stringhe di queste...
Tutta questa trafila serve per dimostrare che il complementare **in** $\mathbb{P}^n$ di un'ipersuperficie proiettiva è un chiuso affine, infatti la mappa di Veronese ci da un isomorfismo con l'immagine e il complementare di ipersuperfici nel proiettivo attraverso la mappa diventa un chiuso proiettivo tolto un piano (linearizza il polinomio) che è quindi un chiuso affine.

VQP Prodotto

Vogliamo costruire il prodotto (in senso categorico) di due VQP X e Y. Un prodotto di X e Y è una VQP Z tale che $\exists p_1 : Z \to X, p_2 : Z \to Y$ morfismi tali che $\forall f : W \to X, g : W \to Y$ morfismi $\exists! \phi : W \to Z$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ W \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Basta dimostrare l'esistenza di Z perché l'unicità è ovvia a meno di unico isomorfismo. Supponiamo infatti di avere due prodotti $(Z_1, p_1, p_2), (Z_2, q_1, q_2)$. Allora presi i due unici morfismi ϕ, ψ dati dall'essere prodotti si ha:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ Z_1 \arrow[ur, "p_1"] \arrow[rr, dashed, "\psi\circ\phi"] \arrow[dr, "p_2"'] & & Z_1 \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

E siccome anche l'identità fa commutare il diagramma si ha per unicità che $\psi \circ \phi = \text{id}$.

Nel caso di varietà affini si ha $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{m+n}$. Infatti prese le proiezioni naturali sulle componenti si verifica la proprietà universale sapendo che una mappa a valori in uno spazio affine è un morfismo se e solo se le sue componenti sono funzioni regolari.
ATTENZIONE: $\mathbb{A}^{m+n}$ NON ha la topologia prodotto, ne ha una più fine (quella di Zariski su $\mathbb{A}^{m+n}$)
Nel caso di varietà affini si verifica agilmente che se $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$ sono due chiusi allora $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ è un chiuso ed è il prodotto di X e di Y.
L'anello delle coordinate del prodotto è $K[X \times Y] = K[X] \otimes_K K[Y]$ Il prodotto di due spazi proiettivi si fa immergendoli in un proiettivo più grosso attraverso la mappa di Segre e si mostra che il morfismo così ottenuto è in realtà una biggezione con l'immagine.
La mappa di Segre è: $S_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ definita da $([x_i], [y_j]) \mapsto [x_iy_j]$. e definito $\Sigma_{n,m} = \{[z_{i,j}] \mid \text{rk}\,[z_{i,j}] \leq 1\}$ che si nota essere un chiuso in quanto intersezione di quadriche si hanno le due proiezioni / morfismi su $\mathbb{P}^n$ e su $\mathbb{P}^m$ dati da righe e colonne della matrice.

Una base di chiusi del prodotto di due spazi proiettivi è data dal luogo di zeri di un polinomio biomogeneo (anche di gradi diversi). In particolare, anche in questo caso la topologia del prodotto è più fine della topologia prodotto.

Il caso generale del prodotto di VQP segue in maniera semplice: siano X, Y VQP. Allora $X = U \cap Z \subseteq \mathbb{P}^n$ e $Y = V \cap W \subseteq \mathbb{P}^m$ con U, V aperti e Z, W chiusi. Considero allora $X \times Y$ come sottoinsieme di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ dato da $(U \times V) \cap (Z \times W)$ e si nota che $U \times V$ e $Z \times W$ sono rispettivamente aperto e chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Quindi $X \times Y$ è una VQP. Inoltre si vede anche che se X, Y sono proiettive allora anche $X \times Y$ è una varietà proiettiva e che se X, Y sono affini allora anche $X \times Y$ è affine.

Quasi-T2 e proprietà del prodotto

Faremo un po' di striccheggi che in topologia generale si fanno se lo spazio è T2, ma qui ci riusciamo anche senza!

- (**Diagonale chiusa nel prodotto**) $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ è un chiuso
- (**Due morfismi coincidono su un chiuso**) Siano $f, g : X \to Y$ due morfismi. Allora $Z = \{x \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X. (e quindi in particolare se due morfismi coincidono su un denso allora $f = g$)

Inoltre X, Y irriducibili come VQP $\implies$ $X \times Y$ è irriducibile (cosa che non è ovvia poiché la topologia del prodotto è molto fine)

Cose casuali

1. Diciamo che G è un gruppo algebrico se
   - G è una VQP
   - G è un gruppo
   - Le funzioni di inverso e di moltiplicazione sono morfismi
2. Se X è una varietà proiettiva allora $P_2 : X \times Y \to Y$ (la proiezione) è una mappa chiusa $\forall Y$ VQP (Si dice che X è universalmente chiusa)
3. X proiettiva. $f : X \to Y$ morfismo. Allora f è una mappa chiusa
4. Se X è proiettiva e connessa, $f : X \to K$ è regolare allora f è costante.

Terza Parte: Geometria Birazionale

Funzioni razionali (parziali)

Varie ed Eventuali

La Cubica Gobba

Fonte inesauribile di patologie e di controesempi. $\mathcal{C} = \{y - x^2 = z - xy = 0\} \subseteq \mathbb{A}^3$ che è anche il grafico di $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ definita da $x \mapsto (x^2, x^3)$.