TEORIA DEI CAMPI E DI GALOIS

LEMMI DIMOSTRATI

1. (**Formula del grado nelle torri di estensioni**) Siano $K \subseteq F \subseteq L$. Allora $[L : K] = [L : F] \cdot [F : K]$
2. (**Ogni estensione finita è algebrica**) Ma il viceversa è falso...
3. (**Fin.Gen. da elementi Algebrici $\implies$ Finita**) Se F/K è finitamente generata da elementi algebrici, allora F/K è finita
4. (**Esistenza del sottocampo fondamentale**) Ogni campo K contiene un sottocampo fondamentale che può essere $\mathbb{Q}$, oppure $\mathbb{F}_p$
5. (**Teorema fondamentale dell'Algebra**) Il campo $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso
6. (**Esistenza ed unicità della chiusura algebrica**) Sia K campo. Allora $\exists \bar{K}$ chiusura algebrica di K. Inoltre se $\bar{K}$ e $\bar{K}'$ sono chiusure algebriche di K allora $\exists \phi : \bar{K} \to \bar{K}'$ isomorfismo tale che $\phi \mid_K \equiv \text{id}$. Inoltre la se K è infinito, la chiusura algebrica $\bar{K}$ ha la stessa cardinalità di K
7. (**Estensione di Omomorfismi**) $K \subseteq F$ e $\phi : K \to L$ e F/K algebrica. Allora $\exists \tilde{\phi} : F \to L$ tale che $\tilde{\phi} \mid_K \equiv \phi$. Inoltre, se $F = K(\alpha)$ il numero di estensioni possibili di ϕ è uguale al numero di radici *distinte* di $\phi(\mu_\alpha)$ in $\bar{K}$.
8. (**Condizioni equivalenti alla normalità**) F/K algebrica. Allora sono fatti equivalenti:
   - F/K è normale
   - $\forall f \in K[x]$ irriducibile, se f ha una radice in F allora si spezza completamente in F
   - F è il campo di spezzamento di una famiglia di polinomi di $K[x]$
9. (**Criterio della Derivata**) $f \in K[x], \deg f \geq 1$. Allora vale:
   - f ha radici multiple $\Leftrightarrow$ MCD $(f, f') \neq 1$
   - f irriducibile in $K[x]$. Allora f ha radici multiple $\Leftrightarrow f' \equiv 0$
10. (**Corollario utile della Derivata**) $f \in K[x]$ irriducibile. Allora
    - Char $K = 0 \implies f$ è separabile
    - Char $K = p \implies$ Sia r il massimo intero tale che $f(x) = g(x^{p^r})$
      Allora si ha che ogni radice di f ha molteplicità p^r, g è irriducibile e separabile e gli zeri di f sono le radici p^r-esime degli zeri di g
11. (**Caratterizzazione dei campi perfetti**) Se Char $K = 0$ oppure se $K = \mathbb{F}_{p^n}$ allora K è perfetto. In realtà vale che, se Char $K = p$, allora K è perfetto se e solo se il morfismo di Frobenius ($x \mapsto x^p$) è surgettivo
12. (**Grado di separabilità su estensioni semplici**) $L = K(\alpha)$ con α algebrico su K e di polinomio minimo μ_α. Allora
    - $[K(\alpha) : K]_S =$ numero$\{$radici distinte di μ_α in $\bar{K}\}$
    - α è separabile su $K \Leftrightarrow [K(\alpha) : K]_S = [K(\alpha) : K]$
    - Se Char $K = p$ e p^r è la molteplicità di α in μ_α allora $[L : K] = p^r [L : K]_S$
13. (**Il grado di separabilità è moltiplicativo**) $K \subseteq L \subseteq M$ algebriche. Allora $[M : K]_S = [M : L]_S \cdot [L : K]_S$

Proprietà delle estensioni

Proprietà	**Torri**	**Shift**	**Composto**	**Implica**
Finita	✓	✓	✓	Algebrica
Algebrica	✓	✓	✓	
Normale	$\times$	✓	✓	
Separabile				

Proprietà delle chiusure

Chiusura	**Proprietà varie**
Chiusura Algebrica	Se K è infinito $\bar{K}$ ha la stessa cardinalità
Chiusura Normale	Se F/K è finita anche $\tilde{F}/K$ è finita