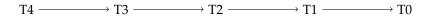
TOPOLOGIA GENERALE

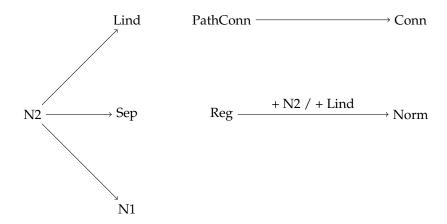
DEFINIZIONI DELLE PROPRIETÀ

- N1 Ogni punto ha una base di intorni numerabile.
- N2 Lo spazio ha una base di aperti numerabile.
- Sep Se esiste un sottoinsieme denso e numerabile.
- T0 Dati due punti c'è un aperto che li distingue. $(\forall x,y \in X \exists A \text{ aperto t.c. } x \in A, y \notin A \text{ oppure } x \notin A, y \in A)$
- T1 I punti sono chiusi.
- T2 Punti distinti hanno intorni disgiunti.
- Reg Un punto ed un chiuso che non lo contiene hanno intorni disgiunti.
- Norm Ogni coppia di chiusi disgiunti ha intorni disgiunti.
 - T3 Reg + T0.
 - T4 Norm + T1.
 - Cpt Ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento finito.
- Lind Ogni ricoprimento di aperti ha un raffinamento numerabile.
- Conn Non esistono due aperti propri la cui unione è lo spazio intero. (Vale anche con i chiusi)
- PathConn Presi due punti esiste un arco che li connette $(\forall x,y\in X\ \exists \gamma:[0,1]\to X$ continua t.c. $\gamma(0)=x,\gamma(1)=y)$
- LocConn Ogni punto ha una base di intorni connessi.
- LocPathConn Ogni punto ha una base di intorni connessi per archi.
 - LocCpt Ogni punto ha una base di intorni compatti.
 - ParaCpt Ogni ricoprimento aperto ha un raffinamento localmente finito.
 - Metr Metrizzabile, ovvero esiste una distanza che induce la topologia.

Da aggiungere:

Metr: Sep ;=¿ N2 ;=¿ Lind, Metr =¿ N1, Metr: Cpt =¿ Sep, N2: Cpt ;=¿ SeqCpt, Cpt =¿ ParaCpt, ParaCpt + T2 =¿ Norm.





EQUIVALENZE

- (Condizione equivalente per essere una base) Dato X insieme e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ esiste una topologia su X di cui \mathcal{B} è una base se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti due condizioni: $X = \cap \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ e per ogni coppia $A, B \in \mathcal{B}$ e per ogni punto $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subseteq A \cap B$.
- (Condizioni equivalenti alla continuità) f è continua \Leftrightarrow controimmagine di aperti è aperta $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X \quad f(\bar{A}) \subseteq f(A) \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall U \text{ t.c. } f(x) \in U \quad \exists V \text{ t.c. } x \in V \quad f(V) \subseteq U.$
- (Condizioni equivalenti ad essere un omeomorfismo) $f:X\to Y$ continua. Allora f è un omeomorfismo $\Leftrightarrow f$ è chiusa e biggettiva $\Leftrightarrow f$ è aperta e biggettiva.
- (Condizioni che implicano essere immersione) Sia $f: X \to Y$ continua. Allora se f è chiusa ed iniettiva, essa è un'immersione chiusa. Se invece f è aperta ed iniettiva, allora è un'immersione aperta.
- (Condizioni equivalenti alla sconnessione) X è sconnesso $\Leftrightarrow X$ è unione disgiunta di due aperti propri $\Leftrightarrow X$ è unione disgiunta di due chiusi propri.

CONNESSIONE

- (Multilemma sulla connessione) Sia Y connesso e $f: X \to Y$ una funzione *continua* (?) e surgettiva tale che $f^{-1}(y)$ è connesso $\forall y \in Y$. Se f è aperta oppure se f è chiusa, allora anche X è connesso.
- (Connessione della chiusura) Sia Y un sottospazio connesso di X, e sia $Y\subseteq W\subseteq \bar{Y}$. Allora anche W è connesso.
- (Chiusura delle componenti connesse) Le componenti connesse sono chiuse.
- (Estensione delle componenti connesse) Supponiamo di avere $\{Z_{\lambda}\}_{{\lambda}\in{\Lambda}}$ t.c. Z_i è connesso $\forall i$ e tali che $\forall i,j\in{\Lambda}$ $\exists i=k_1,k_2,\ldots,k_n=j\in{\Lambda}$ tali che $Z_{k_l}\cap Z_{k_{l+1}}\neq\emptyset$. Allora $\cup_{{\lambda}\in{\Lambda}}Z_{\lambda}$ è connesso.

COMPATTEZZA

• (**Heine-Borel**) Un sottospazio $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

- (Multilemma sulla compattezza) Sia Y compatto e $f: X \to Y$ una funzione chiusa. Se $f^{-1}(y)$ è compatto $\forall y \in Y$, allora anche X è compatto.
- (Catene discendenti di compatti) Siano K_i chiusi e compatti tali che ... $\subset K_2 \subset K_1$ una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico. Allora $\cap_i K_i \neq \emptyset$.
- (Lemma di Wallace) X, Y spazi topologici. $A \subseteq X, B \subseteq Y$ sottospazi compatti e $W \subset X \times Y$ un aperto tale che $A \times B \subseteq W$. Allora $\exists U \subseteq X, V \subseteq Y$, aperti tali che $A \subseteq U, B \subseteq V, U \times V \subseteq W$.
- (Compatti hanno proiezioni chiuse) Se X è compatto, la proiezione $p: X \times Y \to Y$ è un'applicazione chiusa.
- (Localmente compatto \implies ammette un ricoprimento fondamentale in compatti).

COMPATTIFICAZIONI

- (La compattificazione di Alexandroff è T_2) \hat{X} è di Hausdorff se e solo se X è di Hausdorff ed ogni punto di X possiede un intorno compatto.
- (Immersioni aperte si estendono ad Alexandroff) $f: X \to Y$ immersione aperta. Allora l'applicazione $g: Y \to \hat{X}$ definita da $g(y) := \left\{ \begin{array}{cc} x & \text{se } y = f(x) \\ \infty & \text{se } y \notin f(X) \end{array} \right.$ è continua. In particolare ogni spazio topologico compatto di Hausdorff Y coincide con la compattificazione di Alexandroff di $Y \setminus \{y\} \quad \forall y \in Y$

ALTRI LEMMI

- (Continuità e ricoprimenti fondamentali) Sia $\mathcal A$ un ricoprimento fondamentale di X. Un'applicazione $f:X\to Y$ è continua $\Leftrightarrow \forall A\in \mathcal A$ la restrizione $f\mid_A:A\to Y$ è continua.
- ([0,1] è tutto quanto) L'intervallo [0,1] per la topologia euclidea è connesso, connesso per archi, compatto, localmente connesso, localmente connesso per archi, localmente compatto.
- (Ricoprimenti localmente finiti) I ricoprimenti aperti ed i ricoprimenti chiusi localmente finiti sono fondamentali.

SOTTOSPAZI

- (**Passaggio della chiusura**) $Y \subseteq X$ sottospazio, $A \subseteq Y$. Allora la chiusura di A in Y è uguale all'intersezione di Y con la chiusura di A in X.
- (**Passaggio di aperti-chiusi**) $Y \subseteq X$, $Z \subseteq Y$. Allora si hanno:
 - se Y aperto in X, allora Z aperto in $Y \Leftrightarrow Z$ aperto in X
 - se Y chiuso in X, allora Z chiuso in $Y \Leftrightarrow Z$ chiuso in X
 - se Y intorno di y, allora Z intorno di y in $Y \Leftrightarrow Z$ intorno di y in X

TOPOLOGIE COMUNI

- (Topologia discreta) $\tau = \mathcal{P}(X)$ quindi ogni insieme è aperto. è indotta dalla distanza discreta: $d(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{array} \right.$
- (Topologia indiscreta) $\tau = \{\emptyset, X\}$, la meno fine tra tutte le topologie.

- (Topologia euclidea su \mathbb{R}) Un sottoinsieme $U\subseteq\mathbb{R}$ è aperto se e solo se è unione di intervalli aperti.
- (Topologia della semicontinuità superiore di \mathbb{R}) Gli aperti non vuoti sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma $(-\infty, a)$, al variare di $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

METRIZZABILITÀ

• (Proprietà di un metrico) Sia X spazio metrico. Allora X è T2.

CHE PROPRIETÀ PASSANO A COSA?

Vediamo alcune proprietà degli spazi

Attenzione! Non vi fidate troppo delle cose in rosso perchè devo ancora verificare i risultati

Proprietà	Sottospazi	Prodotti	Quozienti	Funzioni \mathcal{C}^0	Implica
N1	\checkmark	Numerabili			
N2	✓	Numerabili	Aperti	Aperte	
Sep	×	Numerabili		✓	
T0	✓	Arbitrari			
T1	✓	Arbitrari			
T2	✓	Arbitrari			
Reg	✓	Arbitrari			
Norm	Chiusi	×			
T3	✓	Arbitrari			
T4	Chiusi	×			
Cpt	Chiusi	Arbitrari		✓	(+T2) Chiuso
Lind	Chiusi	×			
Conn	×	Arbitrari		\checkmark	
PathConn	×	Arbitrari		✓	Conn
LocConn	Aperti				
LocPathConn	Aperti				
Metr	✓	Numerabili			
ParaCpt	Chiusi	×			