FATTI DI ANALISI 2

CONVERGENZE VARIE

- (**Puntuale**) Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ se $\forall x \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \qquad | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$
- (**Uniforme**) Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \quad \forall x \qquad | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$
- (**Assoluta**) Una serie di funzioni $\Sigma_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge assolutamente se le serie $\Sigma_{n=0}^{+\infty} | f_n(x) |$ converge puntualmente
- (**Totale / Normale**) Una serie di funzioni $\Sigma_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente (al suo limite) in A se vale che $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in A} | f_n(x) | < +\infty$
- Assoluta $\implies$ Puntuale
- Uniforme $\implies$ Puntuale
- Totale $\implies$ Uniforme, Assoluta

PASSAGGIO AL LIMITE

Nel seguito si usa $f_n(x)$ per indicare una generica successione di funzioni, $f(x)$ il suo limite (dove esiste)

- (**Continuità del Limite**) Se le $f_n(x)$ definitivamente sono continue, e la convergenza è uniforme, allora $f(x)$ è continua.
- (**Derivabilità del Limite**) Se le $f_n(x)$ convergono in un punto $\bar{x}$ ad $f(\bar{x})$ e le derivate $f'_n(x)$ convergono uniformemente ad una funzione $g(x)$ allora si ha che le $f_n(x)$ convergono uniformemente ad una funzione derivabile $f(x)$ tale che $f'(x) = g(x)$
- (**Integrabilità del Limite**) Se le $f_n(x)$ convergono uniformemente alla $f(x)$ limite allora si ha $\lim_{n \to \infty} \int f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int f(t) dt$

PROBLEMI DI CAUCHY

Nel seguito parliamo di un problema del seguente tipo: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Con $f : U \to \mathbb{R}^n$ è una funzione continua definita su un aperto. Indicheremo una generica soluzione con $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ con $x_0 \in I$, tale che $\forall x \in I \quad (x, \varphi(x)) \in U$ e $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ e che $\varphi(x_0) = y_0$

- (**Cauchy-Lipschitz, Esistenza ed Unicità Locali**) Se f è continua e localmente lipschitziana in y uniformemente rispetto a x, allora $\exists! \varphi$ soluzione **locale** di classe $\mathcal{C}^1$
- (**Teorema di Peano, Esistenza Locale**) Per garantire l'esistenza locale (ma non l'unicità!) basta che f sia continua
- Si assuma che l'equazione $y' = f(x, y)$ abbia esistenza ed unicità locale in ogni punto di U. Allora si ha
  Unicità Globale (ovvero se due soluzioni coincidono in un punto allora coincidono in tutto l'intervallo);

Dominio Aperto delle soluzioni massimali (una soluzione massimale ha come dominio un intervallo aperto);
Fuga dai compatti delle soluzioni massimali (ovvero una soluzione massimale esce definitivamente da ogni sottoinsieme compatto di U)

- (**Esistenza e Unicità Globale**) Supponendo che la funzione f sia continua e localmente lipschitziana rispetto a y (ovvero ipotesi di Cauchy-Lipschitz) e se si ha che per ogni intervallo compatto K: $\exists A_K, B_K > 0 \qquad || f(x,y) || \geq A_K || y || + B_K \quad \forall (x,y) \in K \times \mathbb{R}^n$ allora per ogni $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ il problema ha una ed una sola soluzione definita su *tutto* I (supponiamo abbia soluzione limitata, allora deve fuggire dai compatti dove la f è definita, ma se prendiamo il compatto delimitato dal bound della lipschitzianità, la funzione non può fuggirne localmente)

Soluzione di Equazioni Differenziali Comuni

- (**Lineari del prim'ordine**) Data l'equazione $y' = a(x)y(x) + b(x)$ (detta $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, \mathrm{d}t$ una primitiva di $a(x)$) si ottiene, moltiplicando entrambi i membri per $e^{A(x)}$, la soluzione generale $y(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, \mathrm{d}t + c$

- (**A variabili separabili**) Data l'equazione $y' = g(x)f(y)$ si ha $\int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int g(x)\, \mathrm{d}x$ e calcolando le primitive si risolve il problema