FATTI UTILI DI GAAL

19 giugno 2015

NOTAZIONE

- V spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$
- f endomorfismo di V
- λ autovalore di f
- $\chi_f(t)$ è il polinomio caratteristico di f
- $m_f(t)$ è il polinomio minimo di f
- J_f la forma di Jordan di f
- M_λ la sottomatrice di J_f relativa all'autospazio generalizzato V'_λ
- φ prodotto scalare su V
- q forma quadratica su V
- $\sigma(\varphi) = (i_+, i_-, i_0)$ la segnatura di φ (il campo deve essere $\mathbb{R}$)
- $\omega(\varphi)$ l'indice di Witt di φ
- $\Psi^V : V \to V^{**}$ è l'isomorfismo canonico tra uno spazio vettoriale ed il suo biduale
- H, L sottospazi affini, W_H, W_L le loro giaciture
- Dato ϕ prodotto scalare, definiamo $\phi_y : V \to \mathbb{K}$ t.c. $x \mapsto \phi_y(x) = \phi(x, y)$ e $F_\phi : V \to V^*$ t.c. $y \mapsto \phi_y$

SISTEMI LINEARI

Cosa si conserva nella riduzione di Gauss
Sia $Ax = b$ un sistema lineare e $Sx = c$ la sua ridotta a scala

- L'insieme delle soluzioni di $Ax = b$ è uguale a quello delle soluzioni di $Sx = c$
- Ker A = Ker S
- rk A = rk S (ma in generale Im $A \neq$ Im S, solo le loro dimensioni sono uguali)
- Siano $S^{j_1}, \dots, S^{j_r}$, dove $r = \text{rk}\, S$, le colonne corrispondenti ai pivot di S; allora $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ è una base di Im A

Risolubilità
Attraverso considerazioni piuttosto stupide si nota che un sistema $Ax = b$ è risolubile $\Leftrightarrow$ $Sx = c$ è risolubile $\Leftrightarrow$ considerando la matrice $S' = (S \mid c)$ tutti i suoi pivot stanno nelle colonne di S (ovvero c non contiene alcun pivot)

Rappresentazione Cartesiana e Parametrica

Passaggio da Parametrica a Cartesiana
Abbiamo il sottospazio nella forma $\text{Im}\, B$ con B matrice. Allora consideriamo $B' = (B \mid X)$ con X colonna "formale" delle coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. A questo punto riduciamo a scalini la matrice B', facendo tutti i passaggi anche sulla colonna "formale". Sappiamo ora che le righe in fondo alla matrice S' (la ridotta a scala di B') sono nulle su tutta S (la ridotta a scala di B), quindi anche gli ultimi termini in $X_{S'}$ (ultima colonna di S') devono essere nulli (altrimenti il sistema non è risolubile). Abbiamo così trovato le equazioni cartesiane che definiscono il nostro sottospazio.

Passaggio da Cartesiana a Parametrica
Siccome abbiamo il sottospazio nella forma $\text{Ker}\, A$ con A matrice, l'unica cosa da fare è risolvere il sistema lineare associato, prendere una base del sottospazio trovato e mettere i vettori in questione (che stanno nello spazio delle coordinate, per cui è lecita l'identificazione tra vettori e matrici colonna) come colonne nella nuova matrice della forma parametrica.

Applicazioni Lineari

- f lineare è iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker}\, f = \{0\}$
- Se $f : V \to W$ è lineare e $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti, allora anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono linearmente indipendenti
- (**Formula delle Dimensioni**) $f : V \to W$ lineare $\implies \dim V = \dim \text{Im}\, f + \dim \text{Ker}\, f$
- $f : V \to V$ lineare è iniettiva $\Leftrightarrow$ è surgettiva

Rappresentazione in Base

- Data una base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, ad ogni vettore v è naturalmente associata la n-upla delle sue componenti (sotto forma di matrice $n \times 1$). L'isomorfismo di passaggio in coordinate induce una corrispondenza tra V e $\mathbb{K}^n$ che sono e restano però due spazi diversi.
$$[v]_\mathcal{B} : V \to \mathfrak{M}(n, 1, \mathbb{K})$$
$$v = \sum_i a_i b_i \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_\mathcal{B}$$
- Introduciamo inoltre la rappresentazione in base di un'applicazione lineare $f : V \to W$, usando $\mathcal{B}$ base di V e $\mathcal{T}$ base di W: rappresentiamo f con la matrice $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{T}}{[f]}$ che ha come colonna i-esima la rappresentazione del vettore $f(b_i)$ come matrice colonna $[f(b_i)]_\mathcal{T}$

- Applicazione di una funzione ad un vettore: $[f(v)]_{\mathcal{S}} = \underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}{[f]}\ [v]_{\mathcal{B}}$
- Composizione di funzioni: $\underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}{[g \circ f]} = \underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{R}}{[g]}\ \underset{\mathcal{R}\leftarrow\mathcal{B}}{[f]}$
- Cambio di base: $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}{[f]} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}{[\mathrm{id}]}\ \underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}}{[f]}\ \underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}{[\mathrm{id}]}$
- Le matrici del cambio di base sono una l'inversa dell'altra: $\underset{\mathcal{R}\leftarrow\mathcal{B}}{[\mathrm{id}]} = \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{R}}{[\mathrm{id}]}\right)^{-1}$
- Inoltre le applicazioni lineari $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ sono in corrispondenza biunivoca con le $\mathfrak{M}(n, m, \mathbb{K})$ attraverso l'isomorfismo di passaggio in coordinate (ovvero ogni matrice induce naturalmente un'applicazione lineare $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n :: v \mapsto L_M v$ attraverso la moltiplicazione tra matrici e l'identificazione dei numeri risultati con lo spazio delle coordinate)

Achtung! Non confondete i vettori (elementi dello spazio vettoriale V) con la n-upla di numeri che viene usata per rappresentarli. Molto spesso si confondono le cose perché le matrici $n \times 1$ usate per rappresentare i vettori dello spazio vettoriale delle coordinate $\mathbb{K}^n$ (visto come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, i cui vettori si possono scrivere come $(a_1, \ldots, a_n)$) hanno come numeri nelle celle gli stessi $a_1, \ldots, a_n$ perché vengono solitamenti scritti usando le coordinate dei vettori rispetto alla base standard di $\mathbb{K}$.

Rango

- ?

Determinante

SD-equivalenza

Diagonalizzabilità e Forma di Jordan

- $m_f(t) \mid \chi_f(t)$. Inoltre tutti i fattori del polinomio caratteristico sono contenuti nel polinomio minimo (hanno un esponente più basso ma mai nullo)
- Se $q(t) \in I_f$ allora $m_f(t) \mid q(t)$. Quindi gli autovalori di f devono essere radici del polinomio $q(t)$
- f è triangolabile $\Leftrightarrow \chi_f(t)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}$
- f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \chi_f(t)$ è completamente fattorizzabile e, per ogni λ autovalore, $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda) \Leftrightarrow m_f(t)$ è square-free (ovvero non ha radici doppie)
- Esiste una base ciclica per $f \Leftrightarrow m_f(t) = \pm\chi_f(t)$
- f è nilpotente $\Leftrightarrow \chi_f(t) = \pm t^n$
- M_λ ha dimensione $\mu_a(\lambda) \times \mu_a(\lambda)$.

- La massima taglia dei blocchetti di Jordan in M_λ è uguale all'esponente del fattore $(t-\lambda)$ nel polinomio minimo di f

- M_λ contiene un numero di blocchetti di Jordan pari a $\mu_g(\lambda)$. Più precisamente

$$\text{dim Ker } (f-\lambda \text{ id})^k - \text{dim Ker } (f-\lambda \text{ id})^{k-1}$$

  è il numero di blocchetti di Jordan di taglia *almeno* k

- Se W è f-invariante, allora $\chi_{f|_W}(t) \mid \chi_f(t)$. Inoltre $I_f \subseteq I_{f|_W}$ da cui $m_{f|_W}(t) \mid m_f(t)$.
  In particolare, per decomposizione primaria, se $\chi_{f|_W}(t) = (\lambda_1 - t)^{\alpha_1} \dots (\lambda_h - t)^{\alpha_h}$ possiamo scrivere W come

$$W = \text{Ker } (f\mid_W - \lambda_1 \text{ id})^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker } (f\mid_W - \lambda_h \text{ id})^{\alpha_h}$$

  Ovvero W si scrive come $W = W \cap V'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W \cap V'_{\lambda_h}$
  Supponiamo ora di sapere che $m_f(t) = \pm\chi_f(t)$, ovvero che, jordanizzando f, si ottiene un solo blocco di Jordan per ogni autovalore. Dimostriamo allora che esistono un numero finito di sottospazi W, f-invarianti e di dimensione fissata.
  Indichiamo con $m = \text{dim } W$. Siano $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_r$ iv ettori della base di Jordan di $W \cap V'_\lambda$. Restringendoci ora ad un solo $W \cap V'_\lambda$: se $a_k v_k + \dots + a_1 v_1 \in W$ allora (applicando f e togliendo λ volte il vettore originario) anche $a_k v_{k-1} + \dots + a_2 v_1 \in W$. Applicando lo stesso ragionamento un po' di volte si ottiene che $v_1 \in W$ da cui, procedendo a ritroso, anche $v_2, v_3, \dots, v_k \in W$. Ovvero se W contiene una combinazione di vettori della base di Jordan, allora contiene anche tutti quelli precedenti (siamo nell'assunzione che per ogni autovalore esista un solo blocco di Jordan). Per dimensioni si finisce.

Prodotti Scalari e Forme Bilineari

Achtung!
Per questa sezione assumiamo che $\mathbb{K}$ sia un campo a caratteristica diversa da 2

- $\varphi(u,v) = \frac{q(u+v)-q(u)-q(v)}{2}$ (Formula di Polarizzazione). In particolare se tutti i vettori sono isotropi $\varphi \equiv 0$

- Rad φ e Rad $\varphi\mid_W$ non hanno alcuna relazione sensata tra loro

- φ definito (o semidefinito) $\implies$ $\varphi\mid_W$ definito (o semidefinito)

- Il rango di φ è invariante per congruenza così come, su $\mathbb{R}$, il segno del determinante. Al contrario, il determinante in generale cambia (cioè non serve a un cazzo).

- $V = U \oplus \text{Rad } \varphi \implies \varphi\mid_U$ è non degenere

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora φ anisotropo $\Leftrightarrow$ φ è definito
  Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora φ anisotropo $\Leftrightarrow$ dim $(V) = 1$ e φ non degenere

Fatti da conoscere

- Se φ è non degenere, allora $\omega(\varphi) \leq \frac{\text{dim } V}{2}$

- Sia (V, φ), φ non degenere, $n = \dim V$
  Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\omega(\varphi) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
  Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\omega(\varphi) = \min\{i_+, i_-\}$
- F_ϕ è un isomofismo (canonico) $\Leftrightarrow$ ϕ è non degenere. Ogni $g \in V^*$ è quindi ϕ-rappresentabile in modo unico (Teorema di Riesz)

Proprietà di Ortogonale, Annullatore, ϕ-Rappresentabilità e Aggiunto

Ortogonale
Siano $S, T \subseteq V$ (non necessariamente sottospazi)

- $S^\perp$ è un sottospazio di V
- $S \subseteq T \implies T^\perp \subseteq S^\perp$ (rovescia le inclusioni)
- $S^\perp = \text{Span}\,(S)^\perp$
- $S \subseteq S^{\perp\perp}$ (in generale non sono uguali)
- $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$
- $U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$
- $\dim\,(W^\perp) = \dim\,(V) - \dim\,(W) + \dim\,(W \cap \text{Rad}\ \varphi)$
  (Se φ è non degenere, allora vale $W \cap \text{Rad}\ \varphi = \{0\}$ ma non è detto che $W \oplus W^\perp = V$ né che $W \cap W^\perp = \{0\}$)
- $\dim\,(W^\perp) + \dim\,(W) \geq \dim\,(V)$
- $\varphi\,|_W$ è non degenere $\Leftrightarrow V = W \oplus W^\perp$

Annullatore
Sia $S \subseteq V$.

- Ann S è sottospazio vettoriale di V^*
- $S \subseteq T \implies$ Ann $T \subseteq$ Ann S (ovvero rovescia le inclusioni)
- U sottospazio vettoriale di V, $\dim U = k \implies \dim \text{Ann}\ U = n - k$
- Ann S = Ann (Span S)
- $f \in V^*$, Ann $f = \Psi^V(\text{Ker}\ f)$
- U sottospazio vettoriale di V, Ann Ann $U = \Psi^V(U)$

Morfismo di Rappresentazione

- F_ϕ è lineare
- Ker F_ϕ = Rad ϕ

- Im F_ϕ = Ann Rad ϕ
- U sottospazio di V. Se ϕ è non degenere, allora $F_\phi(U^\perp) =$ Ann U

Aggiunto

- f^* è lineare
- $f^{**} = f$ (è un'involuzione)
- Ker $f^* =$ (Im $f)^\perp$
- Im $f^* =$ (Ker $f)^\perp$
- Se $\mathcal{B}$ è base di V, $A = \mathfrak{m}_\mathcal{B}(f)$, $A^* = \mathfrak{m}_\mathcal{B}(f^*)$, $M = \mathfrak{m}_\mathcal{B}(\phi)$, allora $A^* = M^{-1t}AM$

Spazi Euclidei

Nel seguito avremo (V, φ) spazio euclideo, ovvero con φ definito positivo.

- In uno spazio euclideo non esistono vettori isotropi non nulli (φ è definito positivo) ed esistono basi ortonormali
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V. Allora esiste una base ortonormale $\{w_1, \ldots, w_n\}$ di V tale che Span $(w_1, \ldots, w_j) =$ Span $(v_1, \ldots, v_j) \quad \forall j$ (Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt)
- $f \in$ End (V) e triangolabile, allora esiste $\mathcal{B}$ base di V ortonormale ed a bandiera per f
- $f \in$ End (V) t.c. $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y) \forall x, y \in V$, allora f è un isomorfismo (ovvero è iniettivo e surgettivo)
- $\mathcal{B}$ base ortonormale di (V, φ), $f \in End(V)$, $A = \mathfrak{m}_\mathcal{B}(f)$. Allora $f \in \mathrm{O}(V, \varphi) \Leftrightarrow {}^tAA = I$
- (V, φ) euclideo, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormale di V, $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base di V, $M = \mathfrak{m}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})$. Allora $\mathcal{B}'$ è ortonormale $\Leftrightarrow M$ è ortogonale
- $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ triangolabile. Allora $\exists M \in \mathrm{O}(n)$ t.c. $M^{-1}AM = T$ triangolare. Ovvero, se una matrice è triangolabile, allora si può triangolare anche con una matrice ortogonale.
- f è ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow f$ è autoaggiunto (Teorema Spettrale Reale)
- V spazio vettoriale reale, $\varphi, \psi \in$ PS (V), con φ definito positivo. Allora $\exists\mathcal{B}$ base di V ortonormale per φ ed ortogonale per ψ (Ortogonalizzazione Simultanea)
- $A \in$ Sym $(n, \mathbb{R})$ matrice simmetrica *ad entrate reali*. Allora $\exists P \in \mathrm{O}(n)$ t.c. $P^{-1}AP = {}^tPAP = D$ diagonale.
- Una matrice simmetrica *ad entrate reali* è definita positiva $\Leftrightarrow$ ha tutti gli autovalori positivi
- Se $f = f^*$, $\lambda \neq \mu$ autovalori per f, allora $V_\lambda \perp V_\mu$
- $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Allora A è simmetrica $\Leftrightarrow A^tA = {}^tAA$ e A è triangolabile

- A matrice simmetrica *ad entrate reali*. Allora A è definita positiva $\Leftrightarrow \exists! S$ simmetrica definita positiva t.c. $A = S^2$
- $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Allora $\exists! S \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$ definita positiva e $P \in \mathrm{O}(n)$ t.c. $A = SP$ (decomposizione polare)
- f, g endomorfismi autoaggiunti t.c. $f \circ g = g \circ f$. Allora esiste una base ortonormale di V fatta da autovettori sia per f che per g

Isometrie di uno spazio Euclideo In questa sezione $f : V \to V$ è una generica applicazione (NON per forza lineare)
Sono fatti equivalenti:

- $f \in \mathrm{O}(V, \varphi)$
- $f \in \mathrm{End}\,(V)$ e $\| f(v) \| = \| v \| \; \forall v \in V$
- $f(0) = 0$ e $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall x, y \in V$
- $f \in \mathrm{End}\,(V)$ e $\forall \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormale di V, $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è base ortonormale di V
- $f \in \mathrm{End}\,(V)$ e $\exists \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormale di V t.c. $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è base ortonormale di V
- $f \in \mathrm{End}\,(V)$ e $f^* \circ f = \mathrm{id}$

Spazi Affini e Affinità

- $f : A \to B$ è affine $\Leftrightarrow \exists \varphi : V \to W$ lineare tale che $\forall P_0 \in A$ valga $f(P) = f(P_0) + \varphi(\overrightarrow{P_0 P})$
- Grassmann Affine: $\dim\,(H + L) = \dim\,(H) + \dim\,(L) + 1 - \dim\,(W_H \cap W_L)$
- Un'affinità in $\mathbb{K}^n$ si scrive come $f(X) = MX + N$, con $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ e $N \in \mathbb{K}^n$
- Il gruppo delle affinità in $\mathbb{K}^n$ si può vedere come sottogruppo di $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ attraverso l'omomorfismo $(X \mapsto MX + N) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$
- Due qualunque $(k+1)$-uple di punti di $\mathbb{K}^n$ affinemente indipendenti $F_1 = \{P_0, \ldots, P_k\}$ e $F_2 = \{Q_0, \ldots, Q_k\}$ sono affinemente equivalenti, ovvero esiste (ed è unica) $g \in \mathrm{Aff}\,(\mathbb{K}^n)$ t.c. $g(P_i) = Q_i \quad \forall i$

Elementi di Geometria Affine Euclidea in $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$

Nel seguito S e S' sono sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$

Relazione di Ortogonalità

- **Ortogonalità tra sottospazi affini** S, S' sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Si dice che S e S' sono ortogonali ($S \perp S' \Leftrightarrow W_s \subseteq W_{S'}^{\perp} \Leftrightarrow W_{S'} \subseteq W_S^{\perp}$)

- Se H è l'iperpiano di equazione $B \cdot X + d = 0$, allora B è $\perp$ ad H
- **Retta $\perp$ Retta** r, r' rette di equazioni parametriche rispettivamente $X = At + C$, $X = A't + C'$ ($t \in \mathbb{R}$). Allora $r \perp r' \Leftrightarrow A \cdot A' = 0$
- **Retta $\perp$ Iperpiano** r retta di equazione $X = At + C$ ($t \in \mathbb{R}$), H iperpiano di equazione $B \cdot X + d = 0$. Allora $r \perp H \Leftrightarrow A \parallel B$
- Se $S' \perp S$ con dim $S = k$ allora dim $S' \leq n - k$
- $\forall d \in \{0, \dots, n-k\} \exists S'$ sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ t.c. $S' \perp S$ e dim $S' = d$
- Tutti i sottospazi affini S' di $\mathbb{R}^n$ t.c. $S' \perp S$ e dim $S' = n - k$ sono paralleli fra loro e ciascuno di essi interseca S in uno ed un solo punto
- $\forall P \in \mathbb{R}^n \quad \exists! S'$ sottospazio affine t.c. $S' \perp S$ e dim $S' = n - k$ e $P \in S'$
- **Iperpiano ortogonale ad una retta e passante per un punto** r retta, $P \in \mathbb{R}^n$, Allora $\exists! H$ iperpiano passante per P ed ortogonale ad r. Tale piano interseca r in uno ed un solo punto P_0. Se r ha equazione parametrica $X = At + C$ allora H ha equazione cartesiana $A \cdot X = A \cdot P$
- **Iperpiano $\perp$ Iperpiano** H, H' iperpiani di equazioni rispettivamente $B \cdot X + d = 0$, $B' \cdot X + d' = 0$. Allora $H \perp H' \Leftrightarrow B \cdot B' = 0$

Distanza tra Sottospazi Affini

- **Definizione** $P \in \mathbb{R}^n$. $d(P, S) = \inf\{d(P, X) \mid X \in S\}$
- **Distanza Punto - Iperpiano** H iperpiano di equazione $B \cdot X + d = 0$, $P \in \mathbb{R}^n$. Allora $d(P, H) = \frac{|B \cdot P + d|}{||B||}$
- **Distanza tra due Rette**
  Se $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$ allora $d(r_1, r_2) = 0$
  Se $r_1 \parallel r_2$ allora $d(r_1, r_2) = d(P, r_2) \quad \forall P \in r_1$
  Se le due rette sono sghembe $r_1 = \{X \mid X = A_1 t + C_1, t \in \mathbb{R}\}$, $r_2 = \{X \mid X = A_2 t + C_2, t \in \mathbb{R}\}$. Voglio trovare una retta l perpendicolare sia ad r_1 che ad r_2 e tale che le intersechi entrambe. Voglio quindi due punti t_0 e θ_0 che risolvano

  $$\begin{pmatrix} A_1 \cdot A_1 & -A_2 \cdot A_1 \\ A_1 \cdot A_2 & -A_2 \cdot A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \cdot A_2 - C_1 \cdot A_1 \\ C_2 \cdot A_2 - C_1 \cdot A_2 \end{pmatrix}$$

  Questo sistema ha sempre soluzione, poichè se le rette r_1 e r_2 sono sghembe la matrice è invertibile.

ISOMETRIE

Nel seguito supponiamo che f sia un'isometria di V. Diamo le definizioni dei vari tipi di isometrie fondamentali

- Chiamiamo Isometrie le funzioni in $\text{Isom}(V, d) = \{f : V \to V \mid d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \forall P, Q \in V\}$
- f è una Simmetria se $f^2 = \text{id}$

- f è una Riflessione se $f^2 = \text{id}$ e $\text{Fix}\,(f)$ è un iperpiano affine, ovvero $\dim \text{Giac Fix}\,(f) = n-1$
- f è una Rotazione se $\dim \text{Giac Fix}\,(f) = n-2$
- f è una Glissoriflessione (o Glide) se è composizione di una riflessione ρ e di una traslazione parallela a Fix (ρ)
- f è una Riflessione Rotatoria se è composizione di una riflessione ρ e di una rotazione attorno ad una retta ortogonale a Fix (ρ)
- f è un'Avvitamento (o Twist) se è composizione di una rotazione R e di una traslazione (non banale) parallela a Fix (R)

Ora qualche teorema sulle Isometrie:

- Ogni f isometria si scrive $f(X) = AX + B$, con $A \in \text{O}(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$
- Ogni $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ è composizione di al più $n+1$ riflessioni
- $f(X) = AX + B$ è diretta se è composizione di un numero pari di riflessioni $\Leftrightarrow$ det $(A) = 1$. Si dice inversa se è composizione di un numero dispari di riflessioni $\Leftrightarrow$ det $(A) = -1$.

Classificazione delle Isometrie in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Isometrie in $\mathbb{R}^2$
Ogni isometria di $\mathbb{R}^2$ è una Traslazione, una Rotazione, una Riflessione oppure una Glissoriflessione

Nome	Punti Fissi	Tipo	Composta da
Traslazione	$\emptyset$	Diretta	Traslazione
Rotazione	$\{P\}$	Diretta	2 Riflessioni
Riflessione	Retta	Inversa	Riflessione
Glissoriflessione (o Glide)	$\emptyset$	Inversa	Riflessione ρ + traslazione $\parallel$ a Fix(ρ)

Isometrie in $\mathbb{R}^3$
Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ è una Traslazione, una Rotazione, una Riflessione, una Glissoriflessione, un Avvitamento o una Riflessione Rotatoria

Nome	Punti Fissi	Tipo	Composta da
Traslazione	$\emptyset$	Diretta	Traslazione
Rotazione	Retta	Diretta	2 Riflessioni
Riflessione	Piano	Inversa	Riflessione
Glissoriflessione (o Glide)	$\emptyset$	Inversa	Riflessione ρ + traslazione $\parallel$ a Fix(ρ)
Avvitamento (o Twist)	$\emptyset$	Diretta	Rotazione R traslazione $\parallel$ a Fix(R)
Riflessione Rotatoria	$\{P\} = \text{Fix}\,(R) \cap \text{Fix}\,(\rho)$	Inversa	Riflessione ρ + Rotazione R t.c. Fix $(\rho) \perp$ Fix (R)

Coniche e Quadriche

- Una Quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione ${}^tXAX + 2({}^tBX) + c = 0$ in $\mathbb{K}^n$ si può immergere in $\mathbb{K}^{n+1}$ attraverso la matrice $\widetilde{Q} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & c \end{array}\right)$
- $\mathcal{Q} = [f]$, $\widetilde{X} = \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right)$; $f(X) = 0 \ \Leftrightarrow \ {}^t\widetilde{X}\widetilde{Q}\widetilde{X} = 0$
- Sia $g \in$ Aff $(\mathbb{K}^n)$ $g(X) = MX + N$; questa può essere vista come applicazione lineare in $\mathbb{K}^{n+1}$ la cui matrice associata è $\widetilde{M_N} = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$. Inoltre, detta $\widetilde{H}$ la matrice di immersione in $\mathbb{K}^{n+1}$ di $\mathcal{H} = [f \circ g]$, si ha che $\widetilde{H} = {}^t\widetilde{M_N}\widetilde{Q}\widetilde{M_N}$
- $\widetilde{H} = {}^t\widetilde{M_N}\widetilde{Q}\widetilde{M_N} = \left(\begin{array}{c|c} {}^tMAM & {}^tM(AN+B) \\ \hline {}^t({}^tM(AN+B)) & {}^tNAN + 2({}^tNB) + c \end{array}\right)$
- Una quadrica $\mathcal{C}$ è a centro $\Leftrightarrow$ il sistema $AT + B = 0$ è risolubile (ovvero $\exists T \in \mathbb{K}^n$ che lo risolve)

Classificazione delle Coniche in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}^2$

Coniche in $\mathbb{R}^2$

Conica	Equazione	Nome	($\mathbf{rk}\ A, \mathbf{rk}\ Q, \omega(A), \omega(Q)$)
1	$x^2 - y = 0$	Parabola	$(1, 3, 1, 1)$
2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Ellisse Immaginaria	$(2, 3, 0, 0)$
3	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Ellisse Reale	$(2, 3, 0, 1)$
4	$x^2 - y^2 + 1 = 0$	Iperbole	$(2, 3, 1, 1)$
5	$x^2 + y^2 = 0$	Rette Complesse Incidenti	$(2, 2, 0, 1)$
6	$x^2 - y^2 = 0$	Rette Incidenti	$(2, 2, 1, 2)$
7	$x^2 + 1 = 0$	Rette Complesse Parallele	$(1, 2, 1, 1)$
8	$x^2 - 1 = 0$	Rette Parallele	$(1, 2, 1, 2)$
9	$x^2 = 0$	Retta Doppia	$(1, 1, 1, 2)$

Coniche in $\mathbb{C}^2$

Conica	Equazione	Nome	($\mathbf{rk}\ A, \mathbf{rk}\ Q$)
1	$x^2 - y = 0$	Parabola	$(1, 3)$
2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Ellisse	$(2, 3)$
3	$x^2 + y^2 = 0$	Rette Incidenti	$(2, 2)$
4	$x^2 + 1 = 0$	Rette Parallele	$(1, 2)$
5	$x^2 = 0$	Retta Doppia	$(1, 1)$

Classificazione delle Quadriche in $\mathbb{R}^3$

Quadriche in $\mathbb{R}^3$

Quadrica	Equazione	Nome	$(\textbf{rk}\ A, \textbf{rk}\ Q, \omega(A), \omega(Q))$
1	$x^2+y^2+z^2+1=0$	Ellissoide Immaginario	$(3,4,0,0)$
2	$x^2+y^2+z^2-1=0$	Ellissoide	$(3,4,0,1)$
3	$x^2+y^2-z^2-1=0$	Iperboloide a una falda	$(3,4,1,2)$
4	$x^2+y^2-z^2+1=0$	Iperboloide a due falde	$(3,4,1,1)$
5	$x^2+y^2+z^2=0$	Cono Immaginario	$(3,3,0,1)$
6	$x^2+y^2-z^2=0$	Cono Reale	$(3,3,1,2)$
7	$x^2+y^2=0$	Piani Complessi Incidenti	$(2,2,1,2)$
8	$x^2-y^2=0$	Piani Incidenti	$(2,2,2,3)$
9	$x^2=0$	Piano Doppio	$(1,1,2,3)$
10	$x^2+y^2+1=0$	Cilindro Immaginario	$(2,3,1,1)$
11	$x^2-y^2+1=0$	Cilindro Iperbolico	$(2,3,2,2)$
12	$x^2+y^2-1=0$	Cilindro Ellittico	$(2,3,1,2)$
13	$x^2-1=0$	Piani Paralleli	$(1,2,2,3)$
14	$x^2+1=0$	Piani Complessi Paralleli	$(1,2,2,2)$
15	$x^2+y^2-z=0$	Paraboloide Ellittico	$(2,4,1,1)$
16	$x^2-y^2-z=0$	Paraboloide Iperbolico (Sella)	$(2,4,2,2)$
17	$x^2-z=0$	Cilindro Parabolico	$(1,3,2,2)$

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE IN $\mathbb{R}^n$ E $\mathbb{C}^n$

Quadriche in $\mathbb{R}^n$
$p=i_+(A)$, $r=\text{rk}\ A$

Equazione	Nome	Note
$x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_r^2+d=0$, con $d=0,1$	A centro	rk $Q=d+$ rk A
$x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_r^2-x_n=0$	Paraboloide	rk $Q=2+$ rk A

Quadriche in $\mathbb{C}^n$

Equazione	Nome	Note
$x_1^2+\ldots+x_r^2+d=0$, con $d=0,1$	A centro	$r=$ rk A, rk $Q=d+$ rk A
$x_1^2+\ldots+x_r^2-x_n=0$	Paraboloidi	$r=$ rk A, rk $Q=2+$ rk A

FORME CANONICHE DI MATRICI SPECIALI

Forma canonica delle Matrici Ortogonali in $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$
Ogni matrice ortogonale $R\in O(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ è tale che ${}^tRR=I$ e per ogni λ autovettore si ha $\|\lambda\|=1$. Inoltre, una matrice M è ortogonale $\Leftrightarrow$ le righe (e le colonne) di M formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. det $M=\pm1$

La forma canonica è $R = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& R_{\theta_1} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& R_{\theta_k} \end{pmatrix}$, dove gli R_θ sono matrici 2×2 che si scrivono come $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

Come trasformano le Cose?

Matrici che rappresentano applicazioni lineari
Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, $F_\mathcal{B} = \mathfrak{m}_\mathcal{B}(f)$. Se cambio base alla matrice dell'applicazione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{S}$, ovvero se voglio scrivere $F_\mathcal{S} = \mathfrak{m}_\mathcal{S}(f)$ rispetto a $F_\mathcal{B}$, devo costruire una matrice M che mangia coordinate pensate in base $\mathcal{S}$ e le sputa pensate in base $\mathcal{B}$.
Voglio cioè $M = \left(\begin{array}{c|c|c} [s_1]_\mathcal{B} & \cdots & [s_n]_\mathcal{B} \end{array} \right) = \mathfrak{m}_{\mathcal{S},\mathcal{B}}(\text{id})$
Allora si ha $F_\mathcal{S} = M^{-1} F_\mathcal{B} M$

Matrici che rappresentano prodotti scalari
Sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare, $\Phi_\mathcal{B} = \mathfrak{m}_\mathcal{B}(\varphi)$. Se cambio base alla matrice del prodotto scalare da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{S}$, ovvero se voglio scrivere $\Phi_\mathcal{S} = \mathfrak{m}_\mathcal{S}(\varphi)$ rispetto a $\Phi_\mathcal{B}$, devo costruire una matrice M che mangia coordinate pensate in base $\mathcal{S}$ e le sputa pensate in base $\mathcal{B}$.
Voglio cioè $M = \left(\begin{array}{c|c|c} [s_1]_\mathcal{B} & \cdots & [s_n]_\mathcal{B} \end{array} \right) = \mathfrak{m}_{\mathcal{S},\mathcal{B}}(\text{id})$
Allora si ha $\Phi_\mathcal{S} = {}^t M \Phi_\mathcal{B} M$

Coniche attraverso Affinità
Sia $\Psi(X) = MX + N$ un'affinità. Se scrivo $\Psi(\mathcal{Q}) = \mathcal{C}$ sto intendendo che "il supporto di $\mathcal{Q}$" va a finire in $\mathcal{C}$ se gli applico l'affinità, mentre le equazioni trasformano con l'inversa dell'affinità. Quindi se $\mathcal{Q} = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ allora $\mathcal{C} = \{(x,y) \mid g(\Psi^{-1}(x,y)) = 0\}$

Identità e Fatti Utili

- $E^{\alpha\beta}_{ij} := \delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}$ e sono una base dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$
- $E^{\alpha\beta} + E^{\beta\alpha}$ sono una base delle matrici simmetriche
- $E^{\alpha\beta} - E^{\beta\alpha}$ sono una base delle matrici antisimmetriche

- Le $(I + E^{\alpha\beta})$ con $\alpha \neq \beta$ sono matrici invertibili molto semplici (le matrici invertibili non sono un sottospazio, quindi non ha senso parlare di base). $(I - E^{\alpha\beta})$ è l'inversa
- $E^{\alpha\beta}E^{\rho\sigma} = \delta_{\beta\rho}E^{\alpha\sigma}$
- $[E^{\alpha\beta}A]_{ij} = \delta_{i\alpha}A_{\beta j}$ (porta la β-esima riga di A nella α-esima riga della matrice prodotto)
- $[AE^{\alpha\beta}]_{ij} = \delta_{j\beta}A_{i\alpha}$ (porta la α-esima colonna di A nella β-esima colonna della matrice prodotto)
- $[E^{\alpha\beta}AE^{\rho\sigma}]_{ij} = \delta_{i\alpha}\delta_{\sigma j}A_{\beta\rho} = cE^{\alpha\sigma}$ dove $c = [A]_{\beta\rho}$ (quindi esce una matrice che ha l'elemento $A_{\beta\rho}$ come unico elemento non nullo nel posto $\alpha\sigma$)
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (matrice 2×2) allora si ha $A^{-1} = \frac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$
- Ogni matrice A (a coefficienti in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$) è simile alla sua trasposta ${}^tA$ (hanno le stesse dimensioni dei Ker negli invarianti di similitudine)
- $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ t.c. $AX = XA \quad \forall X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ sono del tipo $A = \lambda I$ (si dimostra mettendo al posto di X tutte le $E^{\alpha\beta}$)
- $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ t.c. $AD = DA$, **con D matrice diagonale fissata** soddisfano $A_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0 \quad \forall i, j$ dove $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$. Cioè se chiamiamo $\mu_1, \ldots, \mu_k$ gli autovalori di D (senza molteplicità), e riordiniamo la base di D in modo che siano in ordine crescente, abbiamo
$$D = \left(\begin{array}{c|c|c} M_{\mu_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & M_{\mu_k} \end{array}\right) \qquad A = \left(\begin{array}{c|c|c} \star & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \star \end{array}\right)$$
con $M_{\mu_i} = \begin{pmatrix} \mu_i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i \end{pmatrix}$
- $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ t.c. $AS = SA \quad \forall S \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, **con S simmetrica** sono $A = \lambda I$
- $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ t.c. $AH = HA \quad \forall H \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, **con H antisimmetrica** sono $A = \lambda I$
- Le matrici di un certo rango fissato $r > 0$ (qualunque) generano come spazio vettoriale tutte le matrici $n \times n$ (Le $E^{\alpha\beta}$ vengono generate tutte piuttosto in fretta)
- dim Simmetriche $= \frac{n(n+1)}{2}$, dim Antisimmetriche $= \frac{n(n-1)}{2}$