Fatti di Analisi 2

Convergenze Varie

- (**Puntuale**) Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ se $\forall x \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \qquad | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$
- (**Uniforme**) Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \quad \forall x \qquad | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$
- (**Assoluta**) Una serie di funzioni $\Sigma_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge assolutamente se le serie $\Sigma_{n=0}^{+\infty} | f_n(x) |$ converge puntualmente
- (**Totale / Normale**) Una serie di funzioni $\Sigma_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente (al suo limite) in A se vale che $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in A} | f_n(x) | < +\infty$
- Assoluta $\implies$ Puntuale
- Uniforme $\implies$ Puntuale
- Totale $\implies$ Uniforme, Assoluta

Passaggio al Limite

Nel seguito si usa $f_n(x)$ per indicare una generica successione di funzioni, $f(x)$ il suo limite (dove esiste)

- (**Continuità del Limite**) Se le $f_n(x)$ definitivamente sono continue, e la convergenza è uniforme, allora $f(x)$ è continua.
- (**Derivabilità**)
- (**Integrabilità**)

Problemi di Cauchy

Nel seguito parliamo di un problema del seguente tipo: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

- (**Esistenza ed Unicità Locali**)
- (**Teorema di Peano, Esistenza Locale**)
- (**Unicità Globale**)
- (**Esistenza Globale**)

Soluzione di Equazioni Differenziali Comuni

- (**Lineari del prim'ordine**) Data l'equazione $y' = a(x)y(x) + b(x)$ (detta $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, \mathrm{d}t$ una primitiva di $a(x)$) si ottiene, moltiplicando entrambi i membri per $e^{A(x)}$, la soluzione generale $y(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, \mathrm{d}t + c$.