# Topologia Generale

## Equivalenze

- (**Condizione equivalente per essere una base**) Dato $X$ insieme e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ esiste una topologia su $X$ di cui $\mathcal{B}$ è una base se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti due condizioni: $X = \cap\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ e per ogni coppia $A, B \in \mathcal{B}$ e per ogni punto $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subseteq A \cap B$.
- (**Condizioni equivalenti alla continuità**) $f$ è continua $\Leftrightarrow$ controimmagine di aperti è aperta $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall U$ t.c. $f(x) \in U \quad \exists V$ t.c. $x \in V \quad f(V) \subseteq U$.
- (**Condizioni equivalenti ad essere un omeomorfismo**) $f : X \to Y$ continua. Allora $f$ è un omeomorfismo $\Leftrightarrow$ $f$ è chiusa e biggettiva $\Leftrightarrow$ $f$ è aperta e biggettiva.
- (**Condizioni che implicano essere immersione**) Sia $f : X \to Y$ continua. Allora se $f$ è chiusa ed iniettiva, essa è un'immersione chiusa. Se invece $f$ è aperta ed iniettiva, allora è un'immersione aperta.
- (**Condizioni equivalenti alla sconnessione**) $X$ è sconnesso $\Leftrightarrow$ $X$ è unione disgiunta di due aperti propri $\Leftrightarrow$ $X$ è unione disgiunta di due chiusi propri.

## Connessione

- (**Multilemma sulla connessione**) Sia $Y$ connesso e $f : X \to Y$ una funzione *continua* (?) e surgettiva tale che $f^{-1}(y)$ è connesso $\forall y \in Y$. Se $f$ è aperta oppure se $f$ è chiusa, allora anche $X$ è connesso.
- (**Connessione della chiusura**) Sia $Y$ un sottospazio connesso di $X$, e sia $Y \subseteq W \subseteq \bar{Y}$. Allora anche $W$ è connesso.
- (**Chiusura delle componenti connesse**) Le componenti connesse sono chiuse.
- (**Estensione delle componenti connesse**) Supponiamo di avere $\{Z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ t.c. $Z_i$ è connesso $\forall i$ e tali che $\forall i, j \in \Lambda \quad \exists i = k_1, k_2, \dots, k_n = j \in \Lambda$ tali che $Z_{k_l} \cap Z_{k_{l+1}} \neq \emptyset$. Allora $\cup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ è connesso.

## Compattezza

- (**Heine-Borel**) Un sottospazio $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.
- (**Multilemma sulla compattezza**) Sia $Y$ compatto e $f : X \to Y$ una funzione chiusa. Se $f^{-1}(y)$ è compatto $\forall y \in Y$, allora anche $X$ è compatto.
- (**Catene discendenti di compatti**) Siano $K_i$ chiusi e compatti tali che $\ldots \subset K_2 \subset K_1$ una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico. Allora $\cap_i K_i \neq \emptyset$.
- (**Lemma di Wallace**) $X, Y$ spazi topologici. $A \subseteq X, B \subseteq Y$ sottospazi compatti e $W \subset X \times Y$ un aperto tale che $A \times B \subseteq W$. Allora $\exists U \subseteq X, V \subseteq Y$, aperti tali che $A \subseteq U, B \subseteq V, U \times V \subseteq W$.
- (**Compatti hanno proiezioni chiuse**) Se $X$ è compatto, la proiezione $p : X \times Y \to Y$ è un'applicazione chiusa.
- (**Localmente compatto $\implies$ ammette un ricoprimento fondamentale in compatti**).

## COMPATTIFICAZIONI

- (**La compattificazione di Alexandroff è $T_2$**) $\hat{X}$ è di Hausdorff se e solo se $X$ è di Hausdorff ed ogni punto di $X$ possiede un intorno compatto.
- (**Immersioni aperte si estendono ad Alexandroff**) $f : X \to Y$ immersione aperta. Allora l'applicazione $g : Y \to \hat{X}$ definita da $g(y) := \begin{cases} x & \text{se } y = f(x) \\ \infty & \text{se } y \notin f(X) \end{cases}$ è continua. In particolare ogni spazio topologico compatto di Hausdorff $Y$ coincide con la compattificazione di Alexandroff di $Y \setminus \{y\} \quad \forall y \in Y$

## ALTRI LEMMI

- (**Continuità e ricoprimenti fondamentali**) Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento fondamentale di $X$. Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua $\Leftrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{A}$ la restrizione $f\ |_A : A \to Y$ è continua.
- ($[0,1]$ **è connesso e compatto**) L'intervallo $[0,1]$ per la topologia euclidea è connesso, connesso per archi e compatto.
- (**Ricoprimenti localmente finiti**) I ricoprimenti aperti ed i ricoprimenti chiusi localmente finiti sono fondamentali.

## TOPOLOGIE COMUNI

- (**Topologia discreta**) $\tau = \mathcal{P}(X)$ quindi ogni insieme è aperto. è indotta dalla distanza discreta: $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$
- (**Topologia indiscreta**) $\tau = \{\emptyset, X\}$, la meno fine tra tutte le topologie.
- (**Topologia euclidea su $\mathbb{R}$**) Un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ è aperto se e solo se è unione di intervalli aperti.
- (**Topologia della semicontinuità superiore di $\mathbb{R}$**) Gli aperti non vuoti sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma $(-\infty, a)$, al variare di $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

## CHE PROPRIETÀ PASSANO A COSA?

Vediamo alcune proprietà degli spazi

| **Proprietà** | **Sottospazi** | **Prodotti** | **Quozienti** | **Funzioni $\mathcal{C}^0$** | **Implica** |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_0$ | | | | | |
| $T_1$ | | | | | $T_0$ |
| $T_2$ | ✓ | Finiti | | | $T_1$ |
| Cpt | Chiusi | Arbitrari | | ✓ | (+$T_2$) chiuso |
| Conn | | Arbitrari | | ✓ | |
| Path-Conn | | Finiti | | ✓ | Conn |