Funzioni Omogenee e differenziabilità

Lemmi preliminari

Funzioni omogenee sono asintoticamente equivalenti alla norma

Se $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è continua, omogenea di ordine $a \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0 \implies f(x) > 0$, allora $f(x) \simeq || x ||^a$ quando $x \to 0$. Infatti la continuità di f implica $sup_{||y||=1} f(y) \leq C$, per compattezza di $\{|| y ||= 1\}$. Quindi si ha $f(x) =|| x ||^a f(\frac{x}{||x||}) \leq || x ||^a \sup_{||y||=1} f(y) = C || x ||^a$. L'altra disuguaglianza ($f(x) \geq D || x ||^a$) segue nello stesso modo prendendo l'$\inf$.

Versione Semplice

Continuità

Consideriamo una funzione $F(x,y)$ definita da $F(x,y) = \begin{cases} \frac{P_a(x,y)}{Q_b(x,y)} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{altrimenti} \end{cases}$ dove $P_a(x,y)$ e $Q_b(x,y)$ sono funzioni continue ed omogenee di ordine rispettivamente a e b, entrambi positivi $(a, b > 0)$.
Supponiamo inoltre che $Q_b(x,y)$ sia tale che $|| (x,y) ||= 1 \implies Q_b(x,y) \neq 0$.

1. Se $a > b$ e $c = 0$, allora F è continua anche in $(0,0)$.
   Infatti (per il lemma preliminare) $|| \frac{P_a(x,y)}{Q_b(x,y)} || \leq C || (x,y) ||^{a-b} = o(1)$ per $(x,y) \to (0,0)$
2. Se $a < b$ la funzione F non è limitata oppure $F(x,y) = 0$ in un piccolo intorno di $(0,0)$
3. Se $a = b$, allora $L(\theta) = \lim_{r \to 0^+} F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{P_a(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_b(\cos\theta, \sin\theta)}$
4. Se $a = b$, ed esistono $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ tali che $L(\theta_1) \neq L(\theta_2)$, allora F NON è continua in $(0,0)$
5. Se $a = b$ e per ogni $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ si ha $L(\theta_1) = L(\theta_2) = L$, allora F è costante.

Per la 2., 3., 4., 5. basta usare l'identità $F(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^{a-b} F(\cos\theta, \sin\theta)$

Differeziabilità

Consideriamo la funzione $F(x,y)$ definita come sopra e supponiamo che le funzioni P_a e Q_b siano differenziabili su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Vediamo per quali valori di a, b la funzione $F(x,y)$ ammette un'estensione differenziabile in $(0,0)$

1. Se $a - b > 1$ allora $F(x,y)$ è differenziabile anche nell'origine.
   Infatti (sempre per il lemma preliminare) si ha $| F(x) | \leq C || x ||^{a-b} = o(|| x ||)$ per $x \to 0$ e si ha quindi che $F(h) - F(0) = 0 + o(|| x ||)$ ovvero che F è differenziabile in (0.0) con differenziale nullo.
2. Se $0 < a - b < 1$ allora $F(x,y)$ NON è differenziabile nell'origine.
   Infatti supponiamo per assurdo che F sia differenziabile in $(0,0)$. Allora $\exists v \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(x) + \langle v \mid x \rangle = o(|| x ||)$ per x sufficientemente piccoli. Usando l'omogeneità di F, del prodotto scalare e degli o-piccoli, si ha che (sostituendo λx al posto di x) $\lambda^{a-b-1} F(x) + \langle v \mid x \rangle = o(|| x ||)$ per λ sufficientemente piccoli. Ma questo è impossibile poiché nel limite $\lambda \to 0$ si ha che LHS NON è un $o(|| x ||)$.
3. Se $a - b < 0$ F non è differenziabile perché non è nemmeno continua in $(0,0)$
4. Se $a - b = 0$ F è differenziabile se e solo se è costante
5. Se $a - b = 1$ F è differenziabile se e solo se è una funzione lineare.

VERSIONE POTENTE

Consideriamo ora la funzione $F(x)$ definita da $F(x) = \begin{cases} \frac{P_a(x)+o(||x||^a)}{Q_b(x)+o(||x||^b} & \text{se } x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \\ c & \text{altrimenti} \end{cases}$ Usando la relazione

$$\frac{P_a(r\cos\theta, r\sin\theta) + o(r^a)}{Q_b(r\cos\theta, r\sin\theta) + o(r^b)} = r^{a-b}\left(\frac{P_a(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_b(\cos\theta, \sin\theta)} + o(1)\right)$$

si trovano i seguenti casi:

1. Se $a > b$ e $c = 0$ la funzione F è continua
2. Se $a < b$ ed esiste y_0 tale che $|| \; y_0 \; ||= 1$ e $P_a(y_0) \neq 0$, allora la funzione F NON è limitata in un intorno di zero.
3. Se $a < b$ e $P_a(y) \equiv 0$ allora $F(x) = o(|| \; x \; ||^{a-b})$

Allo stesso modo (ovvero usando la stessa relazione) si ottiene:

1. Se $a - b > 1$ e $c = 0$ la funzione F è differenziabile
2. ...