Cose di Cose

Coordinate Polari

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad \vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z} \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

Coordinate Sferiche

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{\varphi} = \dot{\varphi}\left(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}\right) + \dot{\theta}\hat{\varphi}$$

Campo Centrale

$$\vec{F} = f\left(|\,\vec{r}\,|\right)\hat{r} \qquad \vec{L_0} = \vec{\text{cost}} \quad V = -\int_{z_0}^{z} f\left(|\,\vec{r}\,|\right)\,\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = -f\left(|\,\vec{r}\,|\right)\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = -f\left(|\,\vec{r}\,|\right)\hat{r}$$

Potenziale Efficace

Sapendo che $\vec{L_z} = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$ $\quad E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r)\right)$

Viriale

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{p} + \vec{r}\cdot\vec{F} = \vec{v}\cdot m\vec{v} - \vec{r}\cdot\nabla V = 2T - \alpha V$
$V\left(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n\right) = \lambda^\alpha V\left(x_1, \ldots, x_n\right)$
$\frac{1}{\tau}\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right) = 2\langle T\rangle - \alpha\langle V\rangle$ e passando al limite in $\tau \to 0$ (siccome $\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right)$ è limitato poiché per ipotesi il moto (ovvero $\vec{r}$) è limitato e $\vec{p}$ anche (essendo la massa limitata e la velocità anch'essa periodica e quindi limitata))
$\implies 2\langle T\rangle = \alpha\langle V\rangle$

Conservazione dell'Energia

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(m\ddot{x} - F\right)\dot{x} = 0$$

Identità del Cazzo

$A\cdot(B\times C) = B\cdot(C\times A) = C\cdot(A\times B)$
$A\times(B\times C) = B\,(A\cdot C) - C\,(A\cdot B)$
$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\rho\sigma} = \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}$

Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2 - V(q_i) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{q}_i\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \implies m_i\ddot{q}_i = F_i$$

Invarianza nel tempo

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}_i) \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad E = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q} - \mathcal{L}$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\ddot{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\ddot{q} - \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\dot{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\ddot{q} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\ddot{q} = \dot{q}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\right)\right) = 0$$

Invarianza per traslazioni

$$r_i \mapsto r_i + \varepsilon\delta_i$$
$$\mathcal{L}(r_i + \varepsilon d_i, \dot{r}_i, t) - \mathcal{L}(r_i, \dot{r}_i, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_i}\varepsilon\delta_i = 0 \implies 0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{r}_i)$$

Invarianza per Rotazioni

$$\vec{r}_i \mapsto (\mathbb{1} + \delta\vec{\varphi}\times)\vec{r}_i \quad \dot{\vec{r}}_i \mapsto (\mathbb{1} + \delta\vec{\varphi}\times)\dot{\vec{r}}_i$$
$$\mathcal{L}\left((\mathbb{1} + \delta\vec{\varphi}\times)\vec{r}_i, (\mathbb{1} + \delta\vec{\varphi}\times)\dot{\vec{r}}_i, t\right) - \mathcal{L}\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i}\cdot\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{\varphi}\times\dot{\vec{r}}_i = \delta\vec{\varphi}\cdot\left(\vec{r}_i\times\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i} + \dot{\vec{r}}_i\times\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\right) = 0$$
$$\vec{r}_i\times\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i} + \dot{\vec{r}}_i\times\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i} = 0$$
$$\vec{r}_i\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\right) + \dot{\vec{r}}_i\times\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i\times\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i\times m_i\dot{\vec{r}}_i\right) = 0$$

Cambio di Sistema di Riferimento

$$\vec{r}_{\mathrm{lab}} = \vec{R} + \vec{r}_{\mathrm{rel}} \quad \vec{v}_{\mathrm{lab}} = \vec{V} + \vec{v}_{\mathrm{rel}} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{rel}} \quad \vec{a}_{\mathrm{lab}} = \vec{A} + \vec{a}_{\mathrm{rel}} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\mathrm{rel}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{\mathrm{rel}} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{rel}})$$

Problema dei due Corpi

Assunzioni:

1. Corpi puntiformi
2. Il potenziale dipende solo dalla distanza relativa

$$E = \frac{1}{2}m_1\ddot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\ddot{\vec{r}}_2^{\,2} + V(|\,\vec{r}_2 - \vec{r}_1\,|)$$
$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \\ \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} & M = m_1 + m_2 \end{array}\right\}$$
$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_2}{m_1+m_2} & 1 \\ \frac{m_1}{m_1+m_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix}$$
$$E = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + V(|\,\vec{r}\,|)$$
$$L = \vec{R}\times M\dot{\vec{R}} + \vec{r}\times\mu\dot{\vec{r}}$$

Urti

Fatti incredibili:

1. La $\vec{p}$ si conserva sempre (non ci sono forze esterne)
2. Per definizione, se l'urto è elastico, l'energia si conserva

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Puttanate sugli angoli

CM Frame

Angolo qualsiasi. Le palline possono andare dove vogliono.

LAB FRAME

L'angolo è limitato. $\sin\theta_{\text{max}} = \frac{v_{\text{rel}}}{v_{\text{CM}}}$

PROBLEMI CON MASSA VARIABILE

Cosa utile: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$
$(m + \,\mathrm{d}m)\,(\vec{v} + \,\mathrm{d}\vec{v}) - m\vec{v} - \,\mathrm{d}m\vec{v}_{\text{agg}} = \vec{F}^{(E)}\,\mathrm{d}t$
$\left(\vec{v} - \vec{v}_{\text{agg}}\right)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\vec{a} = \vec{F}^{(E)}$

TENSORE D'INERZIA

$T_{ij} = R_{ik}R_{jl}T_{kl}$
$I_{ij} = \sum_\alpha m^\alpha\left(r_k^\alpha r_k^\alpha \delta_{ij} - r_i^\alpha r_j^\alpha\right)$

OSCILLAZIONI A PIÙ GRADI DI LIBERTÀ

Equazione: $M_{ij}\ddot{x}_j = -K_{ij}x_j$
Claim: $x_j = A_j e^{i\omega t}$
$M_{ij}A_j i^2\omega^2 e^{i\omega t} = -K_{ij}A_j e^{i\omega t}$
$\left(M_{ij}\omega^2 - K_{ij}\right)A_j = 0$
Vogliamo $A \neq 0$ quindi det $(M\omega^2 - K) = 0$. Risolviamo ora per gli ω poi troviamo gli A come Ker $(M\omega^2 - K)$.
Troviamo n vettori A. Adesso ho che una generica soluzione si scrive come $\left(\tilde{X}\right) = \sum_\alpha c_\alpha e^{i\omega t}\,(A^\alpha) = (A)\begin{pmatrix} c_1 e^{i\omega_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{i\omega_n t}\end{pmatrix}$
Ora, invertendo la matrice A trovo $\begin{pmatrix} c_1 e^{i\omega_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{i\omega_n t}\end{pmatrix} = \left(A^{-1}\right)\left(\tilde{X}\right)$
Quindi definisco le mie nuove coordinate (che oscillano con frequenze "pure") come $(Q) = \left(A^{-1}\right)(X)$.
L'energia è diagonale: $E = \sum_\alpha \frac{1}{2}m_\alpha(\dot{q}_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2)$