

# FATTI DI ALGEBRA

## TEORIA DEI GRUPPI

---

Nel seguito  $G$  indica un qualsiasi gruppo, viene indicata con  $e$  l'unità del gruppo. La notazione usata è quella moltiplicativa.  $H \leq G$  indica che  $H$  è sottogruppo di  $G$  (eventualmente coincidente).  $H \triangleleft G$  indica che  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$ .

- Due qualsiasi laterali destri di  $H \leq G$  in  $G$  ( $Ha$  e  $Hb$ ) sono in corrispondenza biunivoca attraverso la funzione  $ah \mapsto bh$
- Esiste inoltre una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei laterali destri e quello dei laterali sinistri di uno stesso sottogruppo  $H$
- **(Teorema di Lagrange)**  $G$  finito e  $H \leq G$ , allora  $\text{ord } H \mid \text{ord } G$
- $G$  finito,  $a \in G$  allora  $\text{ord } a \mid \text{ord } G$  e  $a^{\text{ord } G} = e$
- **(Ciclicità degli ordini primi)**  $G$  finito con ordine primo ( $\text{ord } G = p \in \mathbb{P}$ ), allora  $G$  è ciclico
- **(Sottogruppo prodotto)**  $H, K \leq G$ . Allora  $HK \leq G \Leftrightarrow HK = KH$
- **(Ordine del prodotto)**  $H, K \leq G$  con  $H$  e  $K$  sottogruppi finiti. Supponiamo che  $HK \leq G$ . Allora  $\text{ord}(HK) = \frac{\text{ord}(H)\text{ord}(K)}{\text{ord}(H \cap K)}$
- **(Gruppo quoziente)** Se  $N \triangleleft G$ , allora anche  $G/N$  è un gruppo. Inoltre se  $G$  è finito, vale  $\text{ord}(G/N) = \frac{\text{ord}(G)}{\text{ord}(N)}$
- **(Proiezione al quoziente)**  $N \triangleleft G$ .  $\Phi : G \mapsto G/N$  definita da  $\Phi(g) = Ng$  è un omomorfismo surgettivo.
- **(Normalità del Ker)**  $\Phi : G \mapsto H$  omomorfismo surgettivo.  $K = \text{Ker } \Phi \implies K \triangleleft G$
- **(Immagini inverse)**  $\Phi : G \mapsto H$  omomorfismo.  $\text{Ker } \Phi = K \implies \Phi^{-1}\Phi(x) = Kx$
- **(Primo teorema di Omomorfismo)**  $\Phi : G \mapsto H$  omomorfismo surgettivo con  $K = \text{Ker } \Phi$ . Allora  $G/K \cong H$ .
- **(Teorema di Cauchy)** Sia  $p \in \mathbb{P}$  t.c.  $p \mid \text{ord } G$ . Esiste allora  $a \neq e$  t.c.  $a^p = e$
- **(Teorema di Sylow)** Sia  $p \in \mathbb{P}$  t.c.  $p^\alpha \mid \text{ord } G$ ,  $p^{\alpha+1} \nmid \text{ord } G$ . Allora  $G$  ha un sottogruppo di ordine  $p^\alpha$ . Inoltre se  $G$  è abeliano tale sottogruppo è unico.
- **(Corrispondenza tra gruppi normali)** Sia  $\Phi : G \mapsto G'$  omomorfismo surgettivo.  $K = \text{Ker } \Phi$ . Dato  $H' \leq G'$  si definisca  $H = \{x \in G \mid \Phi(x) \in H'\}$ . Si ha che  $H \leq G$  t.c.  $K \subseteq H$ . Inoltre se  $H' \triangleleft G'$  allora  $H \triangleleft G$ . L'associare  $H'$  ad  $H$  stabilisce una corrispondenza biunivoca dell'insieme di tutti i sottogruppi di  $G'$  sull'insieme di tutti i sottogruppi di  $G$  che contengono  $K$
- **(Secondo teorema di Omomorfismo)**  $\Phi : G \mapsto G'$  omomorfismo surgettivo,  $K = \text{Ker } \Phi$ . Si prenda ora  $N' \triangleleft G'$  e sia  $N = \{x \in G \mid \Phi(x) \in N'\}$ . Allora  $G/N \cong G'/N'$  oppure, in modo equivalente,  $G/N \cong (G/K)/(N/K)$ .
- **(Caratterizzazione degli automorfismi interni)**  $\text{Int } G \cong G/Z$  con  $Z = C(G)$  centro di  $G$

## CARATTERISTICHE DI $S_n$

---

- $S_n$  NON è abeliano per  $n \geq 3$ . Infatti (12) e (13) non commutano
- Il centro di  $S_n$  è banale per  $n \geq 3$ . Per questo motivo  $S_n$  NON è nilpotente per  $n \geq 3$
- $S_n$  per  $n \neq 2, 6$  è un gruppo completo poiché non ha centro ed ogni automorfismo è interno

## LAYOUT COMPLETO DI $S_4$

---

$S_4$  è il gruppo delle permutazioni di quattro elementi.  $A_4$  è il gruppo delle permutazioni pari.  $V_4$  è il gruppo dei prodotti di 2-cicli disgiunti ( $V_4 = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ).  $D_8$  è il gruppo diedrale di ordine otto.

$S_4$  contiene le seguenti permutazioni:

- 1 identità:  $()$
- 6 2-cicli:  $(12), (13), (14), (23), (24), (34)$
- 3 prodotti di 2-cicli:  $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$
- 8 3-cicli:  $(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)$
- 6 4-cicli:  $(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)$

Altre caratteristiche di  $S_4$ :

- Abbiamo che  $S_4$  è risolubile considerando la catena  $(e) \subseteq V_4 \subseteq A_4 \subseteq S_4$
- $A_4 \triangleleft S_4$  (Poiché ha indice 2)
- $V_4 \triangleleft S_4$  (conti)
- $D_8 \leq S_4$  (prendendo  $D_8 = \{(), (1234), (13)(24), (1432), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$ )