

# ESERCIZI RACCOLTI DI ALGEBRA

Ho voluto raccogliere gli esercizi teorici più carini / difficili che ho trovato in vari libri

## TEORIA DEI GRUPPI

---

Nel seguito  $G$  indica un qualsiasi gruppo, viene indicata con  $e$  l'unità del gruppo. La notazione usata è quella moltiplicativa.  $H \leq G$  indica che  $H$  è sottogruppo di  $G$  (eventualmente coincidente).  $H \triangleleft G$  indica che  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$ .

1. **Ancora da controllare** Se  $G$  è un gruppo nel quale  $\forall a, b \in G \quad (ab)^i = a^i b^i$  per tre interi  $i$  consecutivi. Allora  $G$  è abeliano.  
Trovare inoltre un controesempio all'abelianità di  $G$  nel caso in cui la relazione sussista solo per due interi consecutivi.
2. Se  $G$  è un gruppo tale che  $\forall a \in G \quad a^2 = e$ , allora  $G$  è abeliano.
3. Sia  $G$  finito di ordine pari. Allora  $\exists a \in G, a \neq e$  t.c.  $a^2 = e$ .
4. **Ancora da controllare** Sia  $G$  tale che l'intersezione di tutti i sottogruppi diversi da  $(e)$  è un sottogruppo diverso da  $(e)$ . Dimostrare che ogni elemento di  $G$  ha ordine finito e con un esempio mostrare che  $G$  non è necessariamente finito.
5. **Ancora da controllare** Se  $H \leq G \implies H = (e)$  dimostrare che  $G$  è finito ed ha ordine primo.
6. **Ancora da controllare** Sia  $H \leq G$  t.c.  $Ha \neq Hb \implies aH \neq bH$ . Dimostrare che  $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$ .
7. **Ancora da controllare**  $H, K \leq G$  entrambi di indice finito ( $i_G H = a, i_G K = b$ ). Dimostrare che  $H \cap K$  ha indice finito e vale  $i_G(H \cap K) \leq i_G(H)i_G(K)$ . Trovare inoltre un esempio in cui vale l'uguaglianza.
8.  $H \leq G, i_G H$  finito. Dimostrare che esistono solo un numero finito di sottogruppi della forma  $aHa^{-1}$  per  $a \in G$ .
9. ★ Sia  $G$  finito tale che  $3 \nmid \text{ord } G$  e supponiamo che valga  $\forall a, b \in G \quad (ab)^3 = a^3 b^3$ . Dimostrare che  $G$  è abeliano.
10. **Ancora da controllare** Sia  $G$  abeliano e supponiamo che  $\exists x, y \in G$  t.c.  $\text{ord } x = m, \text{ord } y = n$ . Dimostrare che  $\exists z \in G$  t.c.  $\text{ord } z = \text{m.c.m.}(m, n)$ .
11. Supponiamo  $\exists a, b \in G, a \neq e, b \neq e$  t.c.  $a^5 = e, aba^{-1} = b^2$ . Trovare  $\text{ord } b$ .
12. ★ **Ancora da controllare** Sia  $G$  abeliano e finito tale che il numero delle soluzioni dell'equazione  $x^n = e$  è al più  $n$  per ogni intero positivo  $n$ . Dimostrare che  $G$  è ciclico e produrre un controesempio alla tesi nel caso in cui non si supponga  $G$  finito.
13. Sia  $G$  finito e  $A \leq G$  t.c.  $\forall x \quad \text{ord}(AxA) = k$ . Dimostrare che  $\forall g \in G \quad gAg^{-1} = A$ .
14. Sia  $H \leq G$  tale che  $i_G H = 2$ . Dimostrare che  $H \triangleleft G$ .
15. Supponiamo  $N, M \triangleleft G, N \cap M = (e)$ . Dimostrare allora che  $\forall n \in N, m \in M \quad nm = mn$ .
16. Trovare un gruppo non abeliano nel quale tutti i sottogruppi siano normali.
17. Dare un esempio di gruppo  $G, H \leq G$  ed  $a \in G$  tali che  $aHa^{-1} \subsetneq H$ .
18. Dare un esempio di tre sottogruppi  $E \subseteq F \subseteq G$  con  $E \triangleleft F, F \triangleleft G$  ma  $E \not\triangleleft G$ .
19. **Ancora da controllare** Sia  $G$  tale che  $\text{ord } G = p^2$  con  $p \in \mathbb{P}$ . Mostrare che allora  $G$  è abeliano.

## DA DOVE HO PRESO GLI ESERCIZI

---

- *Algebra*, I. N. Herstein