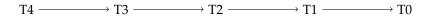
# TOPOLOGIA GENERALE

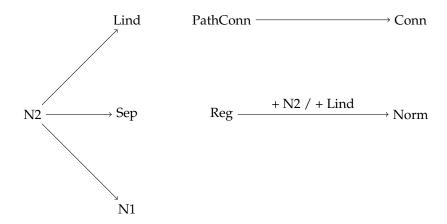
#### DEFINIZIONI DELLE PROPRIETÀ

- N1 Ogni punto ha una base di intorni numerabile.
- N2 Lo spazio ha una base di aperti numerabile.
- Sep Se esiste un sottoinsieme denso e numerabile.
- T0 Dati due punti c'è un aperto che li distingue.  $(\forall x,y \in X \exists A \text{ aperto t.c. } x \in A, y \notin A \text{ oppure } x \notin A, y \in A)$
- T1 I punti sono chiusi.
- T2 Punti distinti hanno intorni disgiunti.
- Reg Un punto ed un chiuso che non lo contiene hanno intorni disgiunti.
- Norm Ogni coppia di chiusi disgiunti ha intorni disgiunti.
  - T3 Reg + T0.
  - T4 Norm + T1.
  - Cpt Ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento finito.
- Lind Ogni ricoprimento di aperti ha un raffinamento numerabile.
- Conn Non esistono due aperti propri la cui unione è lo spazio intero. (Vale anche con i chiusi)
- PathConn Presi due punti esiste un arco che li connette  $(\forall x,y\in X\ \exists \gamma:[0,1]\to X$  continua t.c.  $\gamma(0)=x,\gamma(1)=y)$
- LocConn Ogni punto ha una base di intorni connessi.
- LocPathConn Ogni punto ha una base di intorni connessi per archi.
  - LocCpt Ogni punto ha una base di intorni compatti.
  - ParaCpt Ogni ricoprimento aperto ha un raffinamento localmente finito.
    - Metr Metrizzabile, ovvero esiste una distanza che induce la topologia.

Da aggiungere:

Metr: Sep ;=¿ N2 ;=¿ Lind, Metr =¿ N1, Metr: Cpt =¿ Sep, N2: Cpt ;=¿ SeqCpt, Cpt =¿ ParaCpt, ParaCpt + T2 =¿ Norm.





## **EQUIVALENZE**

- (Condizione equivalente per essere una base) Dato X insieme e  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  esiste una topologia su X di cui  $\mathcal{B}$  è una base se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:  $X = \cap \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$  e per ogni coppia  $A, B \in \mathcal{B}$  e per ogni punto  $x \in A \cap B$  esiste  $C \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in C \subseteq A \cap B$ .
- (Condizioni equivalenti alla continuità) f è continua  $\Leftrightarrow$  controimmagine di aperti è aperta  $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X \quad f(\bar{A}) \subseteq f(A) \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall U \text{ t.c. } f(x) \in U \quad \exists V \text{ t.c. } x \in V \quad f(V) \subseteq U.$
- (Condizioni equivalenti ad essere un omeomorfismo)  $f:X\to Y$  continua. Allora f è un omeomorfismo  $\Leftrightarrow f$  è chiusa e biggettiva  $\Leftrightarrow f$  è aperta e biggettiva.
- (Condizioni che implicano essere immersione) Sia  $f: X \to Y$  continua. Allora se f è chiusa ed iniettiva, essa è un'immersione chiusa. Se invece f è aperta ed iniettiva, allora è un'immersione aperta.
- (Condizioni equivalenti alla sconnessione) X è sconnesso  $\Leftrightarrow X$  è unione disgiunta di due aperti propri  $\Leftrightarrow X$  è unione disgiunta di due chiusi propri.

#### CONNESSIONE

- (Multilemma sulla connessione) Sia Y connesso e  $f: X \to Y$  una funzione *continua* (?) e surgettiva tale che  $f^{-1}(y)$  è connesso  $\forall y \in Y$ . Se f è aperta oppure se f è chiusa, allora anche X è connesso.
- (Connessione della chiusura) Sia Y un sottospazio connesso di X, e sia  $Y\subseteq W\subseteq \bar{Y}$ . Allora anche W è connesso.
- (Chiusura delle componenti connesse) Le componenti connesse sono chiuse.
- (Estensione delle componenti connesse) Supponiamo di avere  $\{Z_{\lambda}\}_{{\lambda}\in{\Lambda}}$  t.c.  $Z_i$  è connesso  $\forall i$  e tali che  $\forall i,j\in{\Lambda}$   $\exists i=k_1,k_2,\ldots,k_n=j\in{\Lambda}$  tali che  $Z_{k_l}\cap Z_{k_{l+1}}\neq\emptyset$ . Allora  $\cup_{{\lambda}\in{\Lambda}}Z_{\lambda}$  è connesso.

### COMPATTEZZA

• (**Heine-Borel**) Un sottospazio  $K \subset \mathbb{R}^n$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

- (Multilemma sulla compattezza) Sia Y compatto e  $f: X \to Y$  una funzione chiusa. Se  $f^{-1}(y)$  è compatto  $\forall y \in Y$ , allora anche X è compatto.
- (Catene discendenti di compatti) Siano  $K_i$  chiusi e compatti tali che ...  $\subset K_2 \subset K_1$  una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico. Allora  $\cap_i K_i \neq \emptyset$ .
- (Lemma di Wallace) X, Y spazi topologici.  $A \subseteq X, B \subseteq Y$  sottospazi compatti e  $W \subset X \times Y$  un aperto tale che  $A \times B \subseteq W$ . Allora  $\exists U \subseteq X, V \subseteq Y$ , aperti tali che  $A \subseteq U, B \subseteq V, U \times V \subseteq W$ .
- (Compatti hanno proiezioni chiuse) Se X è compatto, la proiezione  $p: X \times Y \to Y$  è un'applicazione chiusa.
- (Localmente compatto  $\implies$  ammette un ricoprimento fondamentale in compatti).

#### COMPATTIFICAZIONI

- (La compattificazione di Alexandroff è  $T_2$ )  $\hat{X}$  è di Hausdorff se e solo se X è di Hausdorff ed ogni punto di X possiede un intorno compatto.
- (Immersioni aperte si estendono ad Alexandroff)  $f: X \to Y$  immersione aperta. Allora l'applicazione  $g: Y \to \hat{X}$  definita da  $g(y) := \left\{ \begin{array}{cc} x & \text{se } y = f(x) \\ \infty & \text{se } y \notin f(X) \end{array} \right.$  è continua. In particolare ogni spazio topologico compatto di Hausdorff Y coincide con la compattificazione di Alexandroff di  $Y \setminus \{y\} \quad \forall y \in Y$

#### ALTRI LEMMI

- (Continuità e ricoprimenti fondamentali) Sia  $\mathcal A$  un ricoprimento fondamentale di X. Un'applicazione  $f:X\to Y$  è continua  $\Leftrightarrow \forall A\in \mathcal A$  la restrizione  $f\mid_A:A\to Y$  è continua.
- ([0,1] è tutto quanto) L'intervallo [0,1] per la topologia euclidea è connesso, connesso per archi, compatto, localmente connesso, localmente connesso per archi, localmente compatto.
- (Ricoprimenti localmente finiti) I ricoprimenti aperti ed i ricoprimenti chiusi localmente finiti sono fondamentali.

#### SOTTOSPAZI

- (**Passaggio della chiusura**)  $Y \subseteq X$  sottospazio,  $A \subseteq Y$ . Allora la chiusura di A in Y è uguale all'intersezione di Y con la chiusura di A in X.
- (**Passaggio di aperti-chiusi**)  $Y \subseteq X$ ,  $Z \subseteq Y$ . Allora si hanno:
  - se Y aperto in X, allora Z aperto in  $Y \Leftrightarrow Z$  aperto in X
  - se Y chiuso in X, allora Z chiuso in  $Y \Leftrightarrow Z$  chiuso in X
  - se Y intorno di y, allora Z intorno di y in  $Y \Leftrightarrow Z$  intorno di y in X

#### TOPOLOGIE COMUNI

- (Topologia discreta)  $\tau = \mathcal{P}(X)$  quindi ogni insieme è aperto. è indotta dalla distanza discreta:  $d(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{array} \right.$
- (Topologia indiscreta)  $\tau = \{\emptyset, X\}$ , la meno fine tra tutte le topologie.

- (Topologia euclidea su  $\mathbb{R}$ ) Un sottoinsieme  $U\subseteq\mathbb{R}$  è aperto se e solo se è unione di intervalli aperti.
- (Topologia della semicontinuità superiore di  $\mathbb{R}$ ) Gli aperti non vuoti sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma  $(-\infty, a)$ , al variare di  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

## **M**ETRIZZABILITÀ

• (Proprietà di un metrico) Sia X spazio metrico. Allora X è T2.

## CHE PROPRIETÀ PASSANO A COSA?

Vediamo alcune proprietà degli spazi

Attenzione! Non vi fidate troppo delle cose in rosso perchè devo ancora verificare i risultati

Proprietà	Sottospazi	Prodotti	Quozienti	Funzioni $\mathcal{C}^0$	Implica
N1	$\checkmark$	Numerabili			
N2	<b>✓</b>	Numerabili	Aperti	Aperte	
Sep	×	Numerabili		<b>✓</b>	
T0	<b>✓</b>	Arbitrari			
T1	<b>✓</b>	Arbitrari			
T2	<b>✓</b>	Arbitrari			
Reg	<b>✓</b>	Arbitrari			
Norm	Chiusi	×			
T3	<b>✓</b>	Arbitrari			
T4	Chiusi	×			
Cpt	Chiusi	Arbitrari		<b>✓</b>	(+T2) Chiuso
Lind	Chiusi	×			
Conn	×	Arbitrari		<b>✓</b>	
PathConn	×	Arbitrari		<b>✓</b>	Conn
LocConn	Aperti				
LocPathConn	Aperti				
Metr	<b>✓</b>	Numerabili			
ParaCpt	Chiusi	×			