Cose di Cose

Coordinate Polari

$\vec{r} = r\hat{r} \quad \vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z} \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$

Coordinate Sferiche

$\vec{r} = r\hat{r} \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{\varphi} = \dot{\varphi}\left(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}\right) + \dot{\theta}\hat{\varphi}$

Campo Centrale

$\vec{F} = f\left(|\,\vec{r}\,|\right)\hat{r} \qquad \vec{L_0} = \vec{\text{cost}} \quad V = -\int_{z_0}^{z} f\left(|\,\vec{r}\,|\right)\, \mathrm{d}\vec{r}$

$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = -f\left(|\,\vec{r}\,|\right)\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = -f\left(|\,\vec{r}\,|\right)\hat{r}$

Potenziale Efficace

Sapendo che $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z} \quad E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r)\right)$

Viriale

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{p} + \vec{r}\cdot\vec{F} = \vec{v}\cdot m\vec{v} - \vec{r}\cdot\nabla V = 2T - \alpha V$
$V\left(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n\right) = \lambda^\alpha V\left(x_1, \ldots, x_n\right)$
$\frac{1}{\tau}\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right) = 2\langle T\rangle - \alpha\langle V\rangle$ e passando al limite in $\tau \to 0$ (siccome $\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right)$ è limitato poiché per ipotesi il moto (ovvero $\vec{r}$) è limitato e $\vec{p}$ anche (essendo la massa limitata e la velocità anch'essa periodica e quindi limitata))
$\implies 2\langle T\rangle = \alpha\langle V\rangle$

Conservazione dell'Energia

$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(m\ddot{x} - F\right)\dot{x} = 0$

Identità del Cazzo

$A\cdot(B\times C) = B\cdot(C\times A) = C\cdot(A\times B)$
$A\times(B\times C) = B\,(A\cdot C) - C\,(A\cdot B)$
$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\rho\sigma} = \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}$

Lagrangiana

$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2 - V(q_i) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{q}_i\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \implies m_i\ddot{q}_i = F_i$

Invarianza nel tempo

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}_i) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}=0 \quad E=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\dot{q}-\mathcal{L}$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\ddot{q}-\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\ddot{q}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\dot{q}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\ddot{q}=\dot{q}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\right)=0$$

Invarianza per traslazioni

$$r_i \mapsto r_i+\varepsilon\delta_i$$
$$\mathcal{L}(r_i+\varepsilon\delta_i,\dot{r}_i,t)-\mathcal{L}(r_i,\dot{r}_i,t)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i}\varepsilon\delta_i=0 \implies 0=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{r}_i)$$

Invarianza per Rotazioni

$$\vec{r}_i \mapsto (\mathbb{1}+\delta\vec{\varphi}\times)\vec{r}_i \quad \dot{\vec{r}}_i \mapsto (\mathbb{1}+\delta\vec{\varphi}\times)\dot{\vec{r}}_i$$
$$\mathcal{L}\Big((\mathbb{1}+\delta\vec{\varphi}\times)\vec{r}_i,(\mathbb{1}+\delta\vec{\varphi}\times)\dot{\vec{r}}_i,t\Big)-\mathcal{L}\Big(\vec{r}_i,\dot{\vec{r}}_i,t\Big)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i}\cdot\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{\varphi}\times\dot{\vec{r}}_i=\delta\vec{\varphi}\cdot\left(\vec{r}_i\times\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i}+\dot{\vec{r}}_i\times\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\right)=0$$
$$\vec{r}_i\times\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i}+\dot{\vec{r}}_i\times\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}=0$$
$$\vec{r}_i\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\right)+\dot{\vec{r}}_i\times\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i\times\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i\times m_i\dot{\vec{r}}_i\right)=0$$

Cambio di Sistema di Riferimento

$$\vec{r}_{\text{lab}}=\vec{R}+\vec{r}_{\text{rel}} \quad \vec{v}_{\text{lab}}=\vec{V}+\vec{v}_{\text{rel}}+\vec{\omega}\times\vec{r}_{\text{rel}} \quad \vec{a}_{\text{lab}}=\vec{A}+\vec{a}_{\text{rel}}+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{rel}}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{\text{rel}}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\text{rel}})$$

Formule che valgono sempre (e siamo sicuri perché abbiamo fatto i conti al contrario dei fisici che le tirano fuori dal cappello ma non sanno come dimostrarle)

Il sistema di riferimento è $\Sigma=O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$. Il punto P è quello rispetto a cui si calcolano $\vec{L}_P$ e $\vec{\tau}_P$. Le particelle α hanno raggio vettore rispetto ad O r_α e rispetto a P $\vec{\rho}_\alpha$, quindi $r_\alpha=\vec{OP}+\vec{\rho}_\alpha$
$$\vec{L}_P:=\sum_\alpha\vec{\rho}_\alpha\times m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha, \quad \vec{\tau}_P:=\sum_\alpha\vec{\rho}_\alpha\times m_\alpha\ddot{\vec{r}}_\alpha$$
$$\vec{L}_P=\sum_\alpha\vec{\rho}_\alpha\times m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha=\sum_\alpha\left(\vec{r}_\alpha-\vec{OP}\right)\times m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha=\sum_\alpha\vec{r}_\alpha\times m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha-\sum_\alpha\vec{OP}\times m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha=\vec{L}_O-\vec{OP}\times\vec{P}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_P}{\mathrm{d}t}\right|_\Sigma=\sum_\alpha\dot{\vec{\rho}}_\alpha\times m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha+\sum_\alpha\vec{\rho}_\alpha\times m_\alpha\ddot{\vec{r}}_\alpha=\vec{\tau}_P+\cancel{\sum_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha\times m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha}-\sum_\alpha\dot{\vec{OP}}\times m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha=\vec{\tau}_P-\dot{\vec{OP}}\times\vec{P}$$

Problema dei due Corpi

Assunzioni:

1. Corpi puntiformi
2. Il potenziale dipende solo dalla distanza relativa

$$E=\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}+V(|\,\vec{r}_2-\vec{r}_1\,|)$$
$$\begin{Bmatrix}\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1 & \vec{R}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}\\ \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} & M=m_1+m_2\end{Bmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\vec{r}_1\\ \vec{r}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{m_2}{m_1+m_2} & 1\\ \frac{m_1}{m_1+m_2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{r}\\ \vec{R}\end{pmatrix}$$

$E = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V\left(|\,\vec{r}\,|\right)$
$L = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$

URTI

Fatti incredibili:

1. La $\vec{p}$ si conserva sempre (non ci sono forze esterne)

2. Per definizione, se l'urto è elastico, l'energia si conserva

$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$
$m_1, \quad \vec{v}_1, \quad m_2, \quad \vec{v}_2$ masse e velocità relative al sistema del laboratorio.
$\vec{v} := \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \qquad \vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{V} = \dot{\vec{R}}$
$m_1, \quad \vec{v}_{10} = \vec{v}_1 - \vec{V} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{v}, \quad m_2, \quad \vec{v}_{20} = \vec{v}_2 - \vec{V} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{v}$ sono le masse e le velocità relative al sistema del centro di massa.
$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
$\vec{p}_{10} = m_1 \vec{v}_{10} = \frac{m_2 m_1}{m_1+m_2} \vec{v} = \mu \vec{v}, \qquad \vec{p}_{20} = m_2 \vec{v}_{20} = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \vec{v} = -\mu \vec{v}$
$\vec{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v \hat{n}_0, \qquad \vec{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v \hat{n}_0$
$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_{10} + \vec{V} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v \hat{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1+m_2}, \qquad \vec{v}'_2 = \vec{v}'_{20} + \vec{V} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v \hat{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1+m_2}$
$\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1 = \mu v \hat{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{P} = \mu v \hat{n}_0 + m_1 \vec{V}, \qquad \vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2 = -\mu v \hat{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{P} = -\mu v \hat{n}_0 + m_2 \vec{V}$

PUTTANATE SUGLI ANGOLI

CM FRAME

Angolo qualsiasi. Le palline possono andare dove vogliono.

LAB FRAME

L'angolo è limitato. $\sin \theta_{\text{max}} = \frac{v_{\text{rel}}}{v_{\text{CM}}}$

PROBLEMI CON MASSA VARIABILE

Cosa utile: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$
$\vec{v}_{\text{agg}}$ è la velocità assoluta della particella che si sta aggiungendo
$(m + \,\mathrm{d}m)\,(\vec{v} + \,\mathrm{d}\vec{v}) - m\vec{v} - \,\mathrm{d}m \vec{v}_{\text{agg}} = \vec{F}^{(E)}\,\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}m \left(\vec{v} - \vec{v}_{\text{agg}}\right) + m\,\mathrm{d}\vec{v} = \vec{F}^{(E)}\,\mathrm{d}t$
$\left(\vec{v} - \vec{v}_{\text{agg}}\right) \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\vec{a} = \vec{F}^{(E)}$

TENSORE D'INERZIA

$T_{ij} = R_{ik} R_{jl} T_{kl}$
$I_{ij} = \sum_\alpha m^\alpha \left(r_k^\alpha r_k^\alpha \delta_{ij} - r_i^\alpha r_j^\alpha\right)$

Oscillazioni a più gradi di libertà

Equazione: $M_{ij}\ddot{x}_j = -K_{ij}x_j$
Claim: $x_j = A_j e^{i\omega t}$
$M_{ij}A_j i^2\omega^2 e^{i\omega t} = -K_{ij}A_j e^{i\omega t}$
$\left(M_{ij}\omega^2 - K_{ij}\right)A_j = 0$
Vogliamo $A \neq 0$ quindi det $(M\omega^2 - K) = 0$. Risolviamo ora per gli ω poi troviamo gli A come Ker $(M\omega^2 - K)$.
Troviamo n vettori A. Adesso ho che una generica soluzione si scrive come $\left(\tilde{X}\right) = \sum_\alpha c_\alpha e^{i\omega t}\left(A^\alpha\right) = (A)\begin{pmatrix} c_1 e^{i\omega_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{i\omega_n t}\end{pmatrix}$

Ora, invertendo la matrice A trovo $\begin{pmatrix} c_1 e^{i\omega_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{i\omega_n t}\end{pmatrix} = \left(A^{-1}\right)\left(\tilde{X}\right)$

Quindi definisco le mie nuove coordinate (che oscillano con frequenze "pure") come $(Q) = \left(A^{-1}\right)(X)$.
L'energia è diagonale: $E = \sum_\alpha \frac{1}{2}m_\alpha(\dot{q}_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2)$

Termodinamica

Leggi Universali

$\Delta U = Q - \vec{L}$ $\quad U = nC_V T = \frac{1}{\gamma-1}nRT$
$S = nC_V \log T + nR\log\left(\frac{V}{n}\right)$ $\quad S = nC_P \log T - nR\log p$

Isobara (p costante)

$\Delta U = nC_V\Delta T$ $\quad Q = nC_P\Delta T$ $\quad \vec{L} = nR\Delta T = p\Delta V$ $\quad \Delta S = nC_P\log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

Isoterma (T costante)

$\Delta U = 0 \implies Q = \vec{L}$ $\quad Q = nRT\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $\quad \vec{L} = nRT\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $\quad \Delta S = nR\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

Isocora (V costante)

$\Delta U = nC_V\Delta T$ $\quad Q = nC_V\Delta T$ $\quad \vec{L} = 0$ $\quad \Delta S = nC_V\log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

Adiabatica reversibile (senza scambio di calore)

$\Delta U = nC_V\Delta T$ $\quad Q = 0$ $\quad \vec{L} = nC_V\Delta T = \frac{\Delta(pV)}{1-\gamma}$
$pV^\gamma = \text{cost}$ $\quad TV^{\gamma-1} = \text{cost}$ $\quad pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{cost}$