Esercizi Raccolti Di Algebra

Ho voluto raccogliere gli esercizi teorici più carini / difficili che ho trovato in vari libri

Teoria dei Gruppi

Nel seguito G indica un qualsiasi gruppo, viene indicata con e l'unità del gruppo. La notazione usata è quella moltiplicativa. $H \leq G$ indica che H è sottogruppo di G (eventualmente coincidente). $H \lhd G$ indica che H è un sottogruppo normale di G.

1. Ancora da controllare Se G è un gruppo nel quale $\forall a, b \in G \quad (ab)^i = a^i b^i$ per tre interi i consecutivi. Allora G è abeliano.
   Trovare inoltre un controesempio all'abelianità di G nel caso in cui la relazione sussista solo per due interi consecutivi.
2. Se G è un gruppo tale che $\forall a \in G \quad a^2 = e$, allora G è abeliano.
3. Sia G finito di ordine pari. Allora $\exists a \in G, a \neq e$ t.c. $a^2 = e$.
4. Ancora da controllare Sia G tale che l'intersezione di tutti i sottogruppi diversi da (e) è un sottogruppo diverso da (e). Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine finito e con un esempio mostrare che G non è necessariamente finito.
5. Ancora da controllare Se $H \leq G \implies H = (e)$ dimostrare che G è finito ed ha ordine primo.
6. Ancora da controllare Sia $H \leq G$ t.c. $Ha \neq Hb \implies aH \neq bH$. Dimostrare che $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$.
7. Ancora da controllare $H, K \leq G$ entrambi di indice finito ($\mathrm{i}_G H = a, \mathrm{i}_G K = b$). Dimostrare che $H \cap G$ ha indice finito e vale $\mathrm{i}_G(H \cap K) \leq \mathrm{i}_G(H)\mathrm{i}_G(K)$. Trovare inoltre un esempio in cui vale l'uguaglianza.
8. $H \leq G$, $\mathrm{i}_G H$ finito. Dimostrare che esistono solo un numero finito di sottogruppi della forma aHa^{-1} per $a \in G$.
9. $\star$ Sia G finito tale che $3 \nmid \operatorname{ord} G$ e supponiamo che valga $\forall a, b \in G \quad (ab)^3 = a^3 b^3$. Dimostrare che G è abeliano.
10. Ancora da controllare Sia G abeliano e supponiamo che $\exists x, y \in G$ t.c. $\operatorname{ord} x = m, \operatorname{ord} y = n$. Dimostrare che $\exists z \in G$ t.c. $\operatorname{ord} z = \text{m.c.m.}\ (m, n)$.
11. Supponiamo $\exists a, b \in G, a \neq e, b \neq e$ t.c. $a^5 = e, aba^-1 = b^2$. Trovare $\operatorname{ord} b$.
12. $\star$ Ancora da controllare Sia G abeliano e finito tale che il numero delle soluzioni dell'equazione $x^n = e$ è al più n per ogni intero positivo n. Dimostrare che G è ciclico e produrre un controesempio alla tesi nel caso in cui non si supponga G finito.
13. Sia G finito e $A \leq G$ t.c. $\forall x \quad \operatorname{ord}\ (AxA) = k$. Dimostrare che $\forall g \in G \quad gAg^{-1} = A$.
14. Sia $H \leq G$ tale che $\mathrm{i}_G H = 2$. Dimostrare che $H \lhd G$
15. Supponiamo $N, M \lhd G$, $N \cap M = (e)$. Dimostrare allora che $\forall n \in N, m \in M \quad nm = mn$
16. Trovare un gruppo non abeliano nel quale tutti i sottogruppi siano normali.
17. Dare un esempio di gruppo G, $H \leq G$ ed $a \in G$ tali che $aHa^{-1} \subsetneq H$.
18. Dare un esempio di tre sottogruppi $E \subseteq F \subseteq G$ con $E \lhd F, F \lhd G$ ma $E \ntriangleleft G$.
19. $\star$ Sia G finito, e supponiamo che l'automorfismo T sia tale che $T(x) = x \Leftrightarrow x = e$. Inoltre $T^2 = I$. Dimostrare che G è abeliano. (Molto truccoso)
20. $\star$ Sia G finito, e supponiamo che l'automorfismo T mandi più di tre quarti degli elementi di G nel proprio inverso. Dimostrare allora che $T(x) = x^{-1}$ e che G è abeliano. (Molto truccoso)
21. $\star$ Sia G tale che $\operatorname{ord} G = p^2$ con $p \in \mathbb{P}$. Mostrare che allora G è abeliano.

Da dove ho preso gli esercizi

- *Algebra*, I. N. Herstein