

ALGEBRA 2

ANELLI

- Se A è un anello finito allora $A = A^* \sqcup \mathcal{D}(A)$
- $f : A \rightarrow B$ allora $\text{Im } f \cong \frac{A}{\text{Ker } f}$
- $I \subseteq A$ ideale, $B \subseteq A$ sottoanello allora vale $\frac{I+B}{I} \cong \frac{B}{I \cap B}$
- $I, J \subseteq A$ ideali e $I \subseteq J$. Allora vale $\frac{A}{\frac{A}{J}} \cong \frac{A}{J}$
Si ha inoltre la corrispondenza tra gli ideali di $\frac{A}{J}$ e gli ideali $J \subseteq A$ tali che $I \subseteq J$. In questa corrispondenza i primi ed i massimali si corrispondono
- $IJ \subseteq I \cap J$. Se vale $I + J = 1$ allora $IJ = I \cap J$
- È FALSO che $I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$. FALSO
- $I \subseteq \sqrt{I}$
- $(A \text{ dominio}) a \text{ primo} \implies a \text{ irriducibile}$
- $(A \text{ UFD}) a \text{ irriducibile} \implies a \text{ primo}$
- Se $H \subseteq A \times B$ è ideale allora $H = I \times J$ con $I \subseteq A, J \subseteq B$ ideali
- $A \cong A_1 \times A_2 \Leftrightarrow \exists e \in A, e \neq 0, 1 \quad e^2 = e$
- $\mathcal{D}(A) = \cup_{a \notin A^*} (0 : a) = \cup_{a \notin A^*} \sqrt{(0 : a)} = \sqrt{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{D}(A)$, anche se non è necessariamente un ideale
- $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sottoinsiemi di A . Allora $\cup_{\lambda \in \Lambda} \sqrt{E_\lambda} = \sqrt{\cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda}$
- Sia A dominio con un numero infinito di elementi e $|A^*| < \infty$ allora A possiede infiniti ideali massimali
- I massimale $\implies I$ primo $\implies I$ primario. Inoltre $A \text{ dominio} \Leftrightarrow (0)$ ideale primo
- Sono equivalenti:
 - A ha un unico ideale massimale
 - $\exists \mathfrak{m} \subseteq A$ ideale massimale t.c. $\forall a \in A \setminus \mathfrak{m} \implies a \notin A^*$
 - $\exists \mathfrak{m} \subseteq A$ ideale massimale t.c. ogni elemento della forma $1 + \mathfrak{m}$ è invertibile
- $a \in \mathcal{J}(A) \Leftrightarrow \forall b \in A \quad 1 - ab \in A^*$
- $\sqrt{I} = \cap_{I \subseteq P \text{ primi}} P$
- **(Lemma di Scansamento)** P_1, \dots, P_n ideali primi. Sia $I \subseteq A$ ideale t.c. $I \subseteq \cup_{i=1}^n P_i$. Allora $\exists j$ t.c. $I \subseteq P_j$
- I_1, \dots, I_n ideali e P ideale primo. $\cap_{i=1}^n I_i \subseteq P \implies \exists j$ t.c. $I_j \subseteq P$. Inoltre se $P = \cap_i I_i$ allora $\exists j$ t.c. $I_j = P$
- **(Teorema cinese)** Siano $I_1, \dots, I_n \subseteq A$ ideali tali che $I_i + I_j = 1$. Allora $\forall a_1, \dots, a_n \in A \quad \exists a \in A$ t.c. $a \equiv a_i \pmod{I_i}$
- A anello c.u. Allora si ha che
 - $f \in A[x]$ è un'unità $\Leftrightarrow f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ con $a_i \in A$ tali che $a_0 \in A^*$ e $a_i \in \mathcal{N}(A) \quad \forall i \geq 1$
 - $f \in A[x]$ è nilpotente $\Leftrightarrow \forall i \quad a_i \in \mathcal{N}(A)$

- $f \in A[x]$ è divisore di zero $\Leftrightarrow \exists c \in A, c \neq 0$ t.c. $cf = 0$

Si ha inoltre per gli anelli di polinomi che

- I primo $\Leftrightarrow I[x]$ primo
- I primario $\Leftrightarrow I[x]$ primario

NON è vero che tutti gli ideali di $A[x]$ sono del tipo $I[x]$, come ad esempio (x)

- Gli ideali primi di $\mathbb{Z}[x]$ sono dei seguenti tipi:
 - (0)
 - $(p)[x]$ con $p \in \mathbb{P}$
 - $(f(x))$ con f irriducibile
 - $(p, f(x))$ con $p \in \mathbb{P}$ e f irriducibile modulo p (Questi sono anche massimali)
- $u \in A^*, a \in \mathcal{N}(A)$, allora $u + a \in A^*$ (Somma di un nilpotente e di un invertibile è invertibile)
- I primo $\implies I$ irriducibile
- In $A[x]$ si ha $\mathcal{N}(A[x]) = \mathcal{J}(A[x])$ (Mentre in generale vale solo che $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{J}(A)$)
- Sia $\phi : A \rightarrow B$ omomorfismo di anelli. Allora
 - $\phi(\mathcal{N}(A)) \subseteq \mathcal{N}(B)$
 - Se ϕ è surgettivo allora $\phi(\mathcal{J}(A)) \subseteq \mathcal{J}(B)$
 - A semilocale (con un numero finito di ideali massimali) $\implies \phi(\mathcal{J}(A)) = \mathcal{J}(B)$
- A PID $\implies \mathcal{J}(A) = \mathcal{N}(A)$
- A t.c. ogni ideale è primo $\implies A$ è un campo
- A t.c. ogni ideale primo è principale $\implies A$ è un anello ad ideali principali
- \sqrt{I} massimale $\implies I$ primario.
- I primario, $J \not\subseteq \sqrt{I} \implies \sqrt{I : J^i} = \sqrt{I} \forall i$
- $I = \sqrt{I}$ e $h \notin I \implies I : h$ è radicale
- **(Teorema della base di Hilbert)** Se A è un anello Nötheriano, allora $A[x]$ è Nötheriano
- Se A è locale, \mathfrak{m} il suo ideale massimale e Q è \mathfrak{m} -primario, allora si ha $(\frac{A}{Q})_{\frac{\mathfrak{m}}{Q}} \cong \frac{A}{Q}$

BASI DI GRÖBNER

IDEALI MONOMIALI

Un ideale monomiale in $K[x_1, \dots, x_n]$ è un ideale generato dai monomi

- **(Criterio di appartenenza)** Sia I un ideale monomiale e $f \in K[x_1, \dots, x_n], f = \sum_{\beta} c_{\beta} x^{\beta}$ con $c_{\beta} \in K$. Allora $f \in I \Leftrightarrow \forall \beta x^{\beta} \in I$
- **(Lemma di Dickson)** Ogni ideale monomiale è finitamente generato. (La frontiera minimale di un ideale monomiale è unica, e viene detta Escalière)
- **(Operazioni con ideali monomiali)** Siano $I_1 = (m_1, \dots, m_k)$ e $I_2 = (n_1, \dots, n_s)$ con m_i, n_j monomi. Allora si ha
 - $I_1 + I_2 = (m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_s)$
 - $I_1 \cap I_2 = (\text{MCD}_{i,j}(m_i, n_j))$

- $I_1 \cdot I_2 = (m_i \cdot n_j)_{i,j}$
- **(Iatto)** $(I, m \cdot n) = (I, m) \cap (I, n)$ se $\text{MCD}(m, n) = 1$ come monomi
- I primo $\Leftrightarrow I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ (ed è massimale solo se le variabili compaiono tutte, ma DEVE essere monomiale)
- $I = \sqrt{I}$ (ovvero I è radicale) $\Leftrightarrow \sqrt{m_i} = m_i \forall i$
- I è primario $\Leftrightarrow I = (x_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, x_{i_k}^{\alpha_k}, m_1, \dots, m_s)$ dove $m_1, \dots, m_s \in K[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$
- I è irriducibile $\Leftrightarrow I = (x_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, x_{i_k}^{\alpha_k})$
- $I \cdot J = I \cap J \Leftrightarrow \forall i, j \quad \text{MCD}(m_i, n_j) = 1$
- $I : J = \cap_i (I : n_i)$ e $I : (n_i) = (\frac{m_j}{\text{MCD}(n_i, m_j)})_j$

- Notare che usando la terza relazione del punto precedente possiamo spezzare ogni ideale monomiale in ideali primari e utilizzando $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ si possono calcolare anche gli ideali primi associati. Inoltre con la decomposizione in primari si calcolano bene i divisori di zero, i nilpotenti, etc.

ORDINAMENTI MONOMIALI COMUNI

- LEX $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Dico che $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow$ In $\alpha - \beta$ la prima coordinata $\neq 0$ è positiva
- DEGLEX Sia $|\alpha| := \sum_i \alpha_i$. Allora $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow$ si ha $|\alpha| \geq |\beta|$ oppure $|\alpha| = |\beta|$ e vale $\alpha \geq \beta$ con LEX
- DEGREVLEX $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow |\alpha| > |\beta|$ oppure si ha $|\alpha| = |\beta|$ e in $\alpha - \beta$ l'ultima coordinata $\neq 0$ è negativa

BASI DI GRÖBNER E ALGORITMO DI DIVISIONE

- **(Algoritmo di Divisione)** Siano $f_1, \dots, f_k, f \in K[x_1, \dots, x_n]$ allora $\exists a_1, \dots, a_k, r \in K[x_1, \dots, x_n]$ tali che $f = \sum_i a_i f_i + r$ e $\deg(a_i f_i) \leq \deg(f)$. Inoltre se $r = \sum_\alpha r_\alpha x^\alpha$ si ha che se $r_\alpha \neq 0$ allora $x^\alpha \in (\text{lt}(f_1), \dots, \text{lt}(f_k))$
Notiamo che posso fare dei passaggi "a mano" prima di partire con l'algoritmo di divisione e lui funzionerà comunque. La cosa importante è ricordarsi di soddisfare la condizione $\deg(a_i f_i) \leq \deg(f)$ ad ogni passaggio.
- **(Base di Gröbner)** Un insieme di polinomi g_1, \dots, g_k generatori di un ideale I i cui leading term generano $\text{lt}(I)$ si dicono base di Gröbner. Sono equivalenti inoltre:
 - $\forall f \quad \exists! r$ resto della divisione di f per $\{g_1, \dots, g_k\}$
 - $\forall f \in I = (g_1, \dots, g_k)$ si ha $r = 0$ dall'algoritmo di divisione
 - $\forall i, j \quad S(g_i, g_j)$ ha resto $r = 0$ nell'algoritmo di divisione

Dove per divisione si intende un risultato che soddisfi le ipotesi dell'algoritmo di divisione

- **(Base di Gröbner ridotta)** Una BdG $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ si dice ridotta se è minimale per inclusione e inoltre
 - $\text{lc}(g_i) = 1 \quad \forall i$
 - $(\deg(g_1), \dots, \deg(g_k))$ sono un'escalière per $\deg(I)$
 - $\forall g_i \quad g_i = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ allora $x^\alpha \notin \text{lt}(G \setminus \{g_i\})$

Teorema: La base ridotta è unica. Per ridurre una BdG basta prendere ciascun elemento g ed effettuare la divisione per $G \setminus \{g\}$

- **(S-polinomio)** Dati $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ e supponiamo $f = c_\alpha x^\alpha + f_1$ e $g = d_\beta x^\beta + g_1$ con $\deg f = \alpha, \deg g = \beta$. Allora dico S-polinomio tra f, g il polinomio definito da $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ con $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{c_\alpha x^\alpha} f - \frac{x^\gamma}{d_\beta x^\beta} g$$

APPLICAZIONI E COMPUTAZIONI

- **(Eliminazione di LEX)** $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ allora $I_k = I \cap K[x_{k+1}, \dots, x_n]$ è il k -esimo ideale di eliminazione. Vale il teorema: Se G è una BdG rispetto a LEX con $x_1 \geq \dots \geq x_n$ allora $\forall k = 1, \dots, n-1$ si ha che $G_k = G \cap K[x_{k+1}, \dots, x_n]$ è BdG di I_k
- **(Cose calcolabili)** Dati $I, J \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ e note le loro due BdG si ha
 - **(Intersezione)** $I \cap J = (tI, (1-t)J) \cap K[x_1, \dots, x_n]$ dove quindi bisognerà usare l'ordinamento LEX con t come variabile più pesante per poter usare eliminazione
 - **(Colon)** Se $\text{BdG}(J) = \{h_1, \dots, h_r\}$ allora $I : J = \bigcap_{i=1}^r (I : h_i)$.
Se ora ho $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ e voglio calcolare $I : (f) = \{g \mid gf \in I\}$ allora ho che $I : (f) = \frac{1}{f} \cdot (I \cap (f))$, ovvero se $\text{BdG}(I \cap (f)) = \{g_1 f, \dots, g_k f\}$ allora ho $\text{BdG}(I : (f)) = \{g_1, \dots, g_k\}$
 - **(Ker di morfismi)** Sia $\Phi : K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K[y_1, \dots, y_n]$ tale che $f_i(Y) := \Phi(x_i)$. Allora si ha $\text{Ker } \Phi = (x_1 - f_1(Y), \dots, x_n - f_n(Y)) \cap K[x_1, \dots, x_n]$ ovvero bisogna calcolare l'ideale di eliminazione senza le Y
 - **(Appartenenza al radicale)** $f \in \sqrt{I} \Leftrightarrow 1 \in (I, 1 - tf)$ e NON serve K algebricamente chiuso
- **(Sistemi di equazioni polinomiali)** Cerchiamo le soluzioni comuni di $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$ in K^n . Valgono:
 - **(Esistenza di soluzioni)** Se K è algebricamente chiuso, il sistema non ha soluzioni se e solo se $1 \in I = (f_1, \dots, f_n)$, che si vede subito se c'è o meno con una BdG
 - **(Teorema di Estensione)** $I = (f_1, \dots, f_k)$ e supponiamo K algebricamente chiuso. $I_1 = I \cap K[x_2, \dots, x_n]$ e $\beta \in \mathcal{V}(I_1)$. $f_i = c_i(x_2, \dots, x_n) \cdot x_1^{n_i} + \dots \in K[x_2, \dots, x_n][x_1]$. Se $\beta \notin \mathcal{V}(c_1, \dots, c_k)$ allora $\exists a \in K$ t.c. $(a, \beta) \in \mathcal{V}(I)$. Ovvero se i termini davanti alle potenze più alte di x_1 non si annullano tutti su β allora posso estendere β ad una radice di I .
 - **(Conseguenza di Estensione)** Se la BdG è del tipo $\{x_1^{N_1} + \dots, x_2^{N_2} + \dots, \dots, x_k^{N_k} + \dots\}$ (deve essere di questa forma in tutte le variabili) allora la varietà è finita.
 - **(Soluzioni finite)** K algebricamente chiuso. $I \subseteq A$. Allora sono fatti equivalenti:
 - * $|\mathcal{V}(I)| < \infty$ ($\mathcal{V}(I)$ è costituita da un numero finito di punti)
 - * $\forall i = 1, \dots, n \quad \exists m_i$ t.c. $x_i^{m_i} \in \text{lt}(I)$
 - * $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ BdG di I allora $\forall i = 1, \dots, n \quad \exists h_i \in \mathbb{N} \quad \exists g_r \in G$ t.c. $\text{lt}(g_r) \mid x_i^{h_i}$
 - * $\dim_K \frac{A}{I} < \infty$
 - * $\dim I = 0$ (come dimensione di Krull)

Inoltre vale che una K -base di $\frac{A}{I}$ è $\{x^\alpha \text{ t.c. } x^\alpha \notin \text{lt}(I)\}$, e anche $\dim_K \frac{A}{I} = |\mathcal{V}(I)|$
 Osservazione: Il nullstellensatz serve solo per la freccia che $|\mathcal{V}(I)| < \infty$ implica una delle altre. Per le frecce inverse non serve.

IDEALI E VARIETÀ

Siano $I, J, H \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ideali e V varietà affine. Allora vale

- $I \subseteq J \implies \mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(I)$
- $I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$
- $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$
- $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(J) \implies \mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$
- $\mathcal{V}(I + J) = \mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J)$
- $\mathcal{V}(I \cdot J) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J)$
- $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\sqrt{I})$

- $\mathcal{V}(I, JH) = \mathcal{V}(I, J) \cup \mathcal{V}(I, H)$

Valgono inoltre i seguenti fatti:

- V è irriducibile $\implies \exists$ primo t.c. $V = \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ (il viceversa è vero se K è algebricamente chiuso)
- Ogni varietà affine si decompone come unione di un numero finito di varietà irriducibili. Tale decomposizione si può minimizzare nel modo seguente: se compaiono due varietà irriducibili una contenuta dentro l'altra si toglie dall'unione la più piccola. La decomposizione minimalizzata è unica a meno dell'ordine con cui compaiono i fattori irriducibili
- $V = \{\alpha\}$ con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ allora $\mathcal{I}(V) = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ è un ideale massimale. (Se K è algebricamente chiuso allora I è massimale se e solo se è di quella forma)
- **(Nullstellensatz)** K algebricamente chiuso. Allora $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ e si ha:
 - **(Forma debole)** $\mathcal{V}(I) = \emptyset \Leftrightarrow 1 \in I$
 - **(Forma forte)** $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$
- **(Normalizzazione di Nöther)** K infinito. Se f è un polinomio in $K[x_1, \dots, x_n]$ t.c. $f \notin I_1 = K[x_2, \dots, x_n]$ (ovvero x_1 compare) allora $\exists \phi$ cambio lineare di coordinate tale che $\phi(f) = c \cdot x_1^N + \bar{f}$ con $\deg_{x_1} \bar{f} < N$ e $c \neq 0$ costante.
- K algebricamente chiuso. Se I è radicale allora $I = \cap_{i=1}^k P_i$ con P_i primi. (Basta decomporre la varietà)

RISULTANTE

- **(Definizione di Risultante)** Sia R un dominio d'integrità, $f, g \in R[x]$ e $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^m b_i x^i$. Definiamo allora la matrice di Sylvester come

$$\text{Sylv}(f, g) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & \dots & 0 \\ \hline b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & 0 \end{bmatrix}$$

Ed il risultante di f e g è $\text{Ris}(f, g) = \det \text{Sylv}(f, g)$

- **(Definizione alternativa)** $\text{Ris}(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) = a_n^m \cdot \prod_{f(\alpha_i)=0} g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_m^n \cdot \prod_{g(\beta_j)=0} f(\beta_j)$ dove le α_i e le β_j sono le radici rispettivamente di f e di g , con molteplicità
- **(Proprietà del risultante)** Valgono le seguenti proprietà:
 - $\text{Ris}(f, g) = (-1)^{mn} \text{Ris}(g, f)$
 - $\text{Ris}(af, g) = a^n \text{Ris}(f, g)$ con $a \in R$ scalare
 - $\text{Ris}(f, ag) = a^m \text{Ris}(f, g)$ con $a \in R$ scalare
 - $\text{Ris}(a, b) = 1$ dove $a, b \in R$ sono scalari
 - $\text{Ris}(f, g) = 0 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \overline{R}$ t.c. $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ (ovvero il risultante è nullo se e solo se f e g hanno una radice in comune nella chiusura algebrica del campo delle frazioni di R). Inoltre, se R è UFD allora le due precedenti sono equivalenti a $\exists h \in R[x]$ t.c. $\deg h > 0, h \mid f, h \mid g$
 - $f, g \in R[x]$ e $\deg f = n, \deg g = m$, allora $\text{Ris}(f, g) = Af + Bg$ con $A, B \in R[x]$ e $\deg A < m, \deg B < n$

- $\text{Ris}(f, h_1 \cdot h_2) = \text{Ris}(f, h_1) \cdot \text{Ris}(f, h_2)$
- $\text{Ris}(f, hf + g) = a_m^{\deg(hf+g) \cdot \deg g} \cdot \text{Ris}(f, g)$ [ATTENZIONE: della formula a fianco non sono completamente sicuro]
- In molti casi vale che $\text{Ris}(f, g) |_{\alpha} = \text{Ris}(f|_{\alpha}, g|_{\alpha})$ dove con $|_{\alpha}$ si intende la valutazione in α . Bisogna solo stare attenti che almeno uno dei coefficienti direttivi valutati sia non nullo, altrimenti cambia la dimensione della matrice di Sylvester e di conseguenza anche il polinomio che definisce il risultante
- Può essere comodo sapere che, detti a_i e b_j i coefficienti di f e di g , si ha che $\text{Ris}(f, g) \in \mathbb{Z}[a_i, b_j]$
- **(Trucchi utili con il risultante)** Dati $f = \prod_i (x - \alpha_i)$ e $g = \prod_j (x - \beta_j)$, allora si possono costruire i seguenti polinomi:
 - $\text{Ris}_y(f(x - y), g(y))$ ha radici $\gamma_{i,j} = \alpha_i + \beta_j$
 - $\text{Ris}_y(f(x + y), g(y))$ ha radici $\gamma_{i,j} = \alpha_i - \beta_j$
 - $\text{Ris}_y(y^{\deg f} f(\frac{x}{y}), g(y))$ ha radici $\gamma_{i,j} = \alpha_i \cdot \beta_j$
 - Se $g(0) \neq 0$ allora $\text{Ris}_y(f(xy), g(y))$ ha radici $\gamma_{i,j} = \frac{\alpha_i}{\beta_j}$

MODULI

PRIMI FATTI

- **(Fregatura dei Moduli)** Attenzione che le seguenti cose non sono sempre vere su moduli generici:
 - Non sempre esiste una base
 - Un sistema di generatori minimale non è necessariamente una base
 - Un insieme libero massimale non è necessariamente una base
 - Due sistemi di generatori minimali non hanno necessariamente la stessa cardinalità (e nemmeno gli insiemi liberi massimali)
- **(Cardinalità di una base di un modulo libero)** Se un modulo M è libero, allora ogni base ha la stessa cardinalità. Inoltre ogni insieme di generatori di M ha cardinalità maggiore o uguale a quella di una base.
- **(Omomorfismi di A-Moduli)** Dati due A -Moduli M ed N , allora si ha che anche $\text{Hom}_A(M, N)$ è un A -modulo con le operazioni di somma e di prodotto scalare effettuate in arrivo. (Notare che questa proprietà è particolarmente strana e ci tornerà utile più volte).
Inoltre si può notare come dato un omomorfismo $f : M \rightarrow N$ di A -moduli si ha che $\text{Ker } f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ ed $\text{Im } f = \{f(m) \mid m \in M\}$ sono entrambi due sottomoduli rispettivamente di M e di N . Allora possiamo anche sempre definire $\text{coKer } f = \frac{N}{\text{Im } f}$
- **(Fatti di base e definizioni di operazioni importanti)** Valgono le seguenti cose:
 - $\text{Hom}_A(A, M) \cong_{A\text{-mod}} M$. Infatti conoscere il valore di $f(1)$ caratterizza tutto l'omomorfismo f , visto che è di A -moduli
 - $L \subseteq N \subseteq M$ allora vale $\frac{M}{N} \cong_{A\text{-mod}} \frac{\frac{M}{L}}{\frac{N}{L}}$
 - $M_1, M_2 \subseteq M$ sottomoduli. $M_1 + M_2 := \{m_1 + m_2 \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$ allora vale che $\frac{M_1 + M_2}{M_2} \cong_{A\text{-mod}} \frac{M_1}{M_1 \cap M_2}$
 - ($\frac{A}{I}$ -moduli) Dato $I \subseteq A$ ideale ed M modulo si può definire $IM = \{\sum_i a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M\}$ e si verifica che è un sottomodulo di M . Inoltre vale che $\frac{M}{IM}$ è anche un $\frac{A}{I}$ -modulo.
Possiamo invece notare che M non è sempre un $\frac{A}{I}$ -modulo. Ci possiamo però riuscire se $I \subseteq (0 : M) = \{a \in A \mid aM \subseteq (0)\}$.

– **(Somma diretta e prodotto)** Dati $\{M_i\}_{i \in I}$ una famiglia di A -moduli si definisce

$$\oplus_i M_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in M_i, a_i \neq 0 \text{ solo per un numero finito di indici}\}$$

Inoltre si definisce

$$\prod_i M_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in M_i\}$$

senza la condizione di sopra.

Se l'insieme I di indici è finito allora si ha che $\oplus_i M_i = \prod_i M_i$. Valgono inoltre le seguenti proprietà universali per somma diretta e prodotto:

- * Dati $\{M_i\}_{i \in I}$ A -moduli, si hanno $M_i \hookrightarrow^{j_i} \oplus_i M_i$ date da $m_i \mapsto (0, \dots, 0, m_i, 0, \dots)$. Allora per ogni assegnamento di $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ con $\varphi_i : M_i \rightarrow N$ omomorfismi di A -moduli, esiste unico $\tilde{\phi} : \oplus_i M_i \rightarrow N$ tale che $\varphi_i = \tilde{\phi} \circ j_i$
- * Dati $\{M_i\}_{i \in I}$ A -moduli, si hanno $\prod_i M_i \rightarrow^{\pi_i} M_i$ le proiezioni date da $m = (m_j)_{j \in I} \mapsto m_i$. Allora per ogni assegnamento di $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ con $\varphi_i : M_i \rightarrow N$ omomorfismi di A -moduli, esiste unico $\tilde{\phi} : \prod_i M_i \rightarrow N$ tale che $\varphi_i = \pi_i \circ \tilde{\phi}$
- **(Morfismi da un modulo libero)** Sia M un A -modulo libero e sia $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ una sua base. Allora dati $n_1, \dots, n_k \in N$ (N è un altro A -modulo) si ha che $\exists! \Phi : M \rightarrow N$ tale che $\Phi(s_i) = n_i$, Φ morfismo di A -moduli
- **(Rango di un modulo libero)** Sia M un A -modulo libero con base $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ finita. Allora ogni altra base di M ha cardinalità k . Se M è libero con base di cardinalità k si dice che M ha rango k ($\text{rk } M = k$)
- $\text{Hom}_A(A^n, M) \cong M^n$.
- M è un A -modulo finitamente generato $\Leftrightarrow M \cong \frac{A^k}{\text{Ker } \varphi}$ per un certo $k \in \mathbb{N}$ e per un certo φ . Se $M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle$ si ha $\varphi : A^k \rightarrow M$ definito da $e_i \mapsto m_i$. Allora $M \cong \frac{A^k}{\text{Ker } \varphi}$. Il viceversa è ovvio.
- **(Hamilton-Cayley)** Sia M un A -modulo finitamente generato, $I \subseteq A$ ideale. Sia $\varphi \in \text{Hom}_A(M, M)$ endomorfismo tale che $\phi(M) \subseteq IM$. Allora $\exists b_0, \dots, b_{n-1} \in I$ t.c. $\phi^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \phi^i = 0$ in $\text{Hom}_A(M, M)$
- **(Nakayama)** Come corollario di Hamilton-Cayley si ottengono le seguenti tre versioni di Nakayama:
 - Sia M un A -modulo finitamente generato, $I \subseteq A$ ideale t.c. $M = IM$. Allora $\exists a \in A$ t.c. $a \equiv 1 \pmod{I}$ e $a \cdot M = 0$ (Basta applicare HC a $\varphi = \text{id}$)
 - Sia M un A -modulo finitamente generato, $\mathcal{J}(A)$ radicale di Jacobson, $I \subseteq \mathcal{J}(A)$ ideale di A tale che $M = IM$. Allora $M = 0$ (Usiamo il Nakayama precedente ed usiamo la caratterizzazione del radicale di Jacobson)
 - Sia M un A -modulo finitamente generato, N un sottomodulo, $I \subseteq \mathcal{J}(A)$ ideale di A . Se $M = N + IM$ allora $M = N$ (Usando il Nakayama precedente basta mostrare che $\frac{M}{N} = I(\frac{M}{N})$ così che $\frac{M}{N} = (0) \Rightarrow M = N$ e questo è piuttosto semplice)

Come corollario otteniamo che se A è un anello locale e \mathfrak{m} un suo ideale massimale, M un A -modulo finitamente generato. Allora se n_1, \dots, n_k sono elementi di M tali che si ha che $\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}$ generano $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ come $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ -modulo (ovvero come spazio vettoriale) allora n_1, \dots, n_k generano M come A -modulo (considerare $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \frac{M}{\mathfrak{m}M}$ e usare Nakayama 3)

Come altro corollario sia M un A -modulo finitamente generato, $f \in \text{End}_A(M)$ surgettivo $\Rightarrow f$ è un isomorfismo.

- **(Funtori f^* e g_*)** Se ho $f : P \rightarrow M$ allora posso considerare $f^* : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N)$ definito da $\phi \mapsto \phi \circ f$. Notiamo che è contravariante. Inoltre dato $g : M \rightarrow P$ si ha $g_* : \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, P)$ definito da $\psi \mapsto g \circ \psi$, che è covariante.

OMOMORFISMI TRA MODULI LIBERI E FORMA NORMALE DI SMITH

- Ogni elemento di $\text{Hom}_A(A^m, A^n)$ si può rappresentare in modo unico come matrice, quindi mi basta sapere dove vanno gli e_i base di A^m per sapere dove vanno tutti gli altri elementi. Inoltre una matrice sarà invertibile se e solo se il suo determinante è un elemento invertibile dell'anello (Basta usare l'aggiunta sapendo che $MM^* = (\det M)\text{id}$)
- S, T matrici si dicono equivalenti per righe se $\exists P$ invertibile tale che $PS = T$, equivalenti per colonne se $\exists Q$ invertibile tale che $SQ = T$ e si dicono equivalenti se $\exists P, Q$ tali che $PSQ = T$
- Se A è PID, allora si ha che ogni matrice è equivalente ad una matrice diagonale (D si dice diagonale se $D_{ij} = 0$ quando $i \neq j$).
Il trucco fondamentale è che sui blocchetti 2×2 riesco a triangolarli. Infatti, usando che A è PID si ha $d = \text{MCD}(a, b)$ e quindi $\exists s, t$ t.c. $d = as + bt$ ovvero

$$\begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -\frac{b}{d} \\ t & \frac{a}{d} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ w & x \end{pmatrix}$$

e trasponendo la relazione si riesce anche a portare in forma triangolare superiore.

Il modo generale di procedere è piuttosto semplice: con il metodo precedente si pongono a zero tutti i numeri sulla prima riga tranne il primo, a questo punto si mettono a zero tutti i numeri sulla prima colonna tranne il primo, e si procede riga-colonna fino a quando non sono nulli sia tutti i numeri sulla prima riga che sulla prima colonna (tranne ovviamente il primo). Questa cosa deve succedere prima o poi. Quando accade si ricorre per induzione sulla sottomatrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene levando la prima riga e la prima colonna.

- **(Forma normale di Smith)** A PID. Vogliamo dare una forma canonica alle matrici che rappresentano gli omomorfismi tra moduli liberi. Una matrice diagonale D si dice in forma di Smith se $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n$ con $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$

- **(Ogni matrice diagonale si può portare in forma di Smith)** Infatti data $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ e detto $d = \text{MCD}(a, b) = as + bt$ si computa $\begin{pmatrix} s & t \\ -\frac{b}{d} & \frac{a}{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{tb}{d} \\ 1 & \frac{sa}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{ab}{d} \end{pmatrix}$

- **(Caratterizzazione tramite ideali determinanti)** Se S è una matrice definiamo $\Delta_i(S)$ come l'ideale generato dai determinanti delle sottomatrici $i \times i$ di S . Se S, T $m \times n$ sono equivalenti allora $\Delta_i S = \Delta_i T \quad \forall i$. Se D_1 e D_2 sono matrici in forma di Smith allora D_1 è equivalente a D_2 se e solo se $d_i^{(1)}$ e $d_i^{(2)}$ differiscono di un invertibile (ovvero sono associati). Inoltre si ha che i d_i sono $d_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$ per $i \geq 1$ (dove convenzionalmente $\Delta_0 = 1$)

- **(Sottomoduli di moduli liberi su PID)** Se M è un A -modulo libero con A PID e $N \subseteq M$ sottomodulo, allora N è libero e inoltre vale che $\text{rk } N \leq \text{rk } M$

- **(Teorema di struttura di moduli f.g. su PID)** Ogni modulo finitamente generato su PID si scrive come somma diretta di moduli ciclici. M f.g. su PID (ovvero è quoziente di un modulo libero). $M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle$. Allora $A^n \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$ con $f(e_i) = m_i$ e $f(a_1, \dots, a_n) = \sum_i a_i m_i$ ovvero $M \cong \frac{A^n}{\text{Ker } f}$ e $\text{Ker } f \subseteq A^n$ è un sottomodulo di modulo libero.

Sapendo che ogni sottomodulo di modulo libero su PID è libero abbiamo che $A^m \xrightarrow{\phi} A^k \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$ allora $M \cong \frac{A^m}{\text{Ker } f} \cong \frac{A^k}{\text{Im } \phi} \cong \text{coKer } \phi \cong \bigoplus_i \frac{A}{(d_i)} \cong \bigoplus_i \langle z_i \rangle$ con $d_i = \text{Ann}(z_i)$

- Se $M = \langle m \rangle$ è un A -modulo ciclico allora $M \cong \frac{A}{\text{Ann}(m)}$
- $M = \frac{A}{J}$ come A -modulo. Dato $a \in A$ si ha $(a) \cdot M \cong \frac{A}{(J \cdot (a))}$
- $A^n \cong A^m \Leftrightarrow n = m$

- $\phi : A^m \rightarrow A^n$ surgettivo e $m < n \implies A = 0$
- $M = \frac{A}{J_1} \oplus \frac{A}{J_2}$, con $I \subseteq A$ ideale. Allora valgono:
 - $IM \cong \frac{I+J_1}{J_1} \oplus \frac{I+J_2}{J_2}$
 - $\frac{M}{IM} \cong \frac{A}{I+J_1} \oplus \frac{A}{I+J_2}$
- Sia M un A -modulo finitamente generato su PID allora M si scrive come somma diretta di moduli ciclici $M = \langle m_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle m_k \rangle$
- Se ho due catene di ideali $I_n \subseteq \dots \subseteq I_1, J_m \subseteq \dots \subseteq J_1$ con $n \geq m$, e supponiamo $M = \bigoplus_{k=1}^n \frac{A}{I_k} = \bigoplus_{i=1}^m \frac{A}{J_i}$ allora $J_1 = \dots = J_{n-m} = A$ e $I_i = J_{n-m+i}$
- Se A è un dominio ed M un A -modulo, allora chiamiamo sottomodulo di torsione $\tau(M) = \{m \in M \mid \text{Ann}(m) \neq 0\} \subseteq M$.
 - $f \in \text{Hom}_A(M, N) \implies f(\tau(M)) \subseteq \tau(N)$
 - Data $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ esatta $\implies 0 \rightarrow \tau(M) \rightarrow \tau(N) \rightarrow \tau(P) \rightarrow 0$ è esatta ma non a destra
 - M f.g. su A PID. Allora $M \cong \tau(M) \oplus A^k$ per un qualche k
- M si dice modulo p -primario se $\text{Ann}(M) = (p^s)$
- **(Riassunto di tutto)** M f.g. su A PID. allora valgono:
 - $M = (\bigoplus_{i=1}^m \frac{A}{(d_i)}) \oplus A^k$ con $d_1 \mid \dots \mid d_m$ non necessariamente distinti, unicamente determinati a meno di associati. Tali d_i si chiamano fattori invarianti di M .
 - $M \cong (\bigoplus_{p_i} M_{p_i}) \oplus A^k$ dove gli M_{p_i} sono moduli ciclici p_i -primari di torsione. Tutti i $p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$ si chiamano divisori elementari di M .
 Infatti se $\tau(M) = \bigoplus_i \frac{A}{(d_i)}$ con $d_i \in A$ PID allora se $d_i = p_{i_1}^{s_{i_1}} \dots p_{i_k}^{s_{i_k}} \implies \frac{A}{(d_i)} = \bigoplus_{j=1}^k \frac{A}{p_{i_j}^{s_{i_j}}}$

PRODOTTO TENSORE

- **(Proprietà universale)** Sia R un anello, M, N due R -moduli. Un prodotto tensore di M e N è un R -modulo denotato con $M \otimes_R N$ con una mappa $\tau : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ bilineare tale che $\forall \phi : M \times N \rightarrow P$ bilineare (con P un generico R -modulo) $\exists ! \tilde{\phi} : M \otimes_R N \rightarrow P$ tale che $\phi = \tilde{\phi} \circ \tau$
 Deriva dalla definizione che se un tale modulo esiste allora è unico a meno di unico isomorfismo.
 Si può costruire in maniera piuttosto semplice sui moduli prendendo l' R -modulo libero generato dagli elementi di $M \times N$ e quotizzando per il sottomodulo delle relazioni, ovvero il generato da $i(m_1 + m_2, n) - i(m_1, n) - i(m_2, n), i(m, n_1 + n_2) - i(m, n_1) - i(m, n_2), i(r \cdot m, n) - r i(m, n), i(m, r n) - r i(m, n)$
- **(Tensori semplici)** Una cosa della forma $m \otimes n$ in $M \otimes_R N$ è detto tensore semplice. L'insieme dei tensori semplici genera $M \otimes_R N$ come R -modulo. Inoltre se $\{m_\alpha\}$ genera M e $\{n_\beta\}$ genera N , allora $\{m_\alpha \otimes n_\beta\}$ genera $M \otimes_R N$
- **(Formule di uguaglianza)** Valgono le seguenti cose, alcune ovvie alcune meno:
 - $R \otimes_R M \cong M$
 - $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$
 - $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$
 - $(M \oplus N) \otimes_R P \cong (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$ (vale anche per somme dirette infinite)
 - $\frac{R}{I} \otimes_R M \cong \frac{M}{IM}$
 - $M_p \otimes_{A_p} N_p = (M \otimes_A N)_p$
 - $\frac{A}{I} \otimes_A \frac{A}{J} \cong \frac{A}{I+J}$
 - $\text{Hom}_A(\frac{A}{I}, \frac{A}{J}) \cong \frac{(J:I)}{J}$ [Non fatta in classe]

- **(Aggiunzione con Hom)** M, N, P tre R -moduli. Allora vale che $\text{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \cong \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(N, P))$ dove l'isomorfismo è naturale (e vale in particolare anche a livello di R -moduli)
- **(Esattezza a destra)** Essendo aggiunto sinistro il funtore $-\otimes_R M$ (o anche $M \otimes_R -$, che è canonicamente equivalente al primo) è esatto a destra, cioè:
 $M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ è esatta $\Leftrightarrow \forall Q \quad M \otimes Q \rightarrow N \otimes Q \rightarrow P \otimes Q \rightarrow 0$ è esatta
- **(Implicazioni varie)**
 - M, N f.g. $\implies M \otimes_R N$ f.g.
 - M, N liberi $\implies M \otimes_R N$ libero

ANELLO E MODULO DELLE FRAZIONI

- **(Anello delle frazioni)** A anello ed $S \subseteq A$ moltiplicativamente chiuso ($1 \in S, s, t \in S \implies st \in S$). Allora l'insieme $A \times S$ quozientato per la relazione di equivalenza $(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \neq 0 \in S$ t.c. $u(at - bs) = 0$ è un anello dotato di una mappa $A \rightarrow \frac{A \times S}{\sim}$ tale per cui ogni elemento di S va a finire in un invertibile.
 Gode inoltre della proprietà universale per la quale per ogni altro anello B e morfismo di anelli $g : A \rightarrow B$ tale che tutti gli elementi di S vadano a finire in elementi invertibili di B , allora questo morfismo si spezza in modo unico attraverso il passaggio per $S^{-1}A := \frac{A \times S}{\sim}$
- **(Nullità dell'anello delle frazioni)** $0 \in S \Leftrightarrow S^{-1}A = 0$
- **(Ideali di $S^{-1}A$)** Valgono le seguenti affermazioni sugli ideali di $S^{-1}A$:
 - Ogni ideale di $S^{-1}A$ è un ideale esteso
 - Sia $I \subseteq A$ ideale. Allora $I^e = 1 \Leftrightarrow I \cap S \neq \emptyset$
 - $I^{ec} = \bigcup_{s \in S} (I : s)$
 - C'è una corrispondenza biunivoca tra gli ideali primi di A che non intersecano S ed i primi di $S^{-1}A$. Infatti:
 - * Se Q è primo in $S^{-1}A$ allora Q^c è primo in A (e questo è sempre vero)
 - * P primo in $A, P \cap S = \emptyset \implies S^{-1}P$ primo
 - P_1, P_2 ideali primi. Allora si ha $S^{-1}P_1 = S^{-1}P_2 \implies P_1 = P_2$
 - $Q \subseteq A$ ideale P -primario. Allora se $S \cap P \neq \emptyset$ si ha $S^{-1}Q = S^{-1}A$
 Se $S \cap P = \emptyset$ allora $S^{-1}Q$ è $S^{-1}P$ -primario ed inoltre $(S^{-1}Q)^c = Q$
- **(S^{-1} e le altre operazioni)** Potremmo dire in linea di massima che S^{-1} commuta con tutte le operazioni principali, purché siano finite:
 - $S^{-1}(I + J) = S^{-1}I + S^{-1}J$
 - $S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J$
 - $S^{-1}(I \cdot J) = (S^{-1}I) \cdot (S^{-1}J)$
 - $S^{-1}\sqrt{I} = \sqrt{S^{-1}I}$
- **(Modulo delle frazioni)** Sia M un A -modulo ed $S \subseteq A$ un insieme moltiplicativamente chiuso. Allora definiamo $S^{-1}M := \frac{S \times M}{\sim}$ dove $(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow \exists u \in S \quad u(s'm - sm') = 0$ ed indicheremo con $\frac{m}{s}$ la classe di equivalenza.
 $S^{-1}M$ ha una struttura di $S^{-1}A$ -modulo. Inoltre si può facilmente verificare che S^{-1} è un funtore dalla categoria degli A -moduli a quella degli $S^{-1}A$ -moduli, dove dato $f : M \rightarrow N$ morfismo si può definire $S^{-1}f : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ come $(S^{-1}f)(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s}$
- **(S^{-1} è un funtore esatto)** Si ha che S^{-1} è esatto, ovvero se $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ è una sequenza esatta di A -moduli allora $S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P$ è una sequenza esatta di $S^{-1}A$ -moduli.
 In particolare omomorfismi iniettivi o surgettivi rimangono rispettivamente iniettivi o surgettivi

- (**S^{-1} e le altre operazioni**) Siano $M, P \subseteq N$ sotto A -moduli, $S \subseteq A$ moltiplicativamente chiuso. Allora S^{-1} commuta con somme finite, intersezioni finite e quozienti, ovvero vale che
 - $S^{-1}(M + P) = S^{-1}M + S^{-1}P$
 - $S^{-1}(M \cap P) = S^{-1}M \cap S^{-1}P$
 - $S^{-1}(\frac{N}{M}) \cong \frac{S^{-1}N}{S^{-1}M}$ dove l'isomorfismo è come $S^{-1}A$ -moduli
 - Se M è f.g. allora $\text{Ann}(S^{-1}M) = S^{-1}\text{Ann}(M)$
 - Sapendo che $(N : P) = \text{Ann}(\frac{N+P}{N})$ si può mostrare che se P è f.g. allora $S^{-1}(N : P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$

Valgono inoltre le seguenti uguaglianze furbe:

- $S^{-1}A \otimes_A M = S^{-1}M$
- $S^{-1}(M \otimes_A N) \cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$
- (**Correlazione tra anello e modulo delle frazioni e prodotto tensore**) Vale che $S^{-1}A \otimes_A M = S^{-1}M$. Inoltre abbiamo anche dimostrato che $S^{-1}A$ è un A -modulo piatto, ovvero $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$ rimane iniettiva tensorizzando per il piatto, cioè $0 \rightarrow S^{-1}A \otimes_A M \xrightarrow{S^{-1}A \otimes_A f} S^{-1}A \otimes_A N$ per l'osservazione precedente.
- (**Altri fatti**)
 - $f : A \rightarrow B$ omomorfismo di anelli, $S \subseteq A$ moltiplicativamente chiuso e $T = f(S)$. Allora $S^{-1}B \cong T^{-1}B$ come $S^{-1}A$ -moduli
 - $S \subseteq A$ molt. chiuso. Diciamo che S è saturato se $xy \in S \implies x \in S, y \in S$. Si ha allora che:
 - * S saturato $\Leftrightarrow S = A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \cap S = \emptyset} \mathfrak{p}$
 - * Se S è un sistema molt. chiuso allora $\exists! \bar{S} \subseteq \bar{A}$ con \bar{S} saturato e minimale rispetto alla proprietà di contenere S .
 - * $\bar{S}^{-1}A \cong S^{-1}A$

LOCALIZZAZIONE E PROPRIETÀ LOCALI

- (**Definizione**) A anello, $\mathfrak{p} \subseteq A$ ideale primo e consideriamo $S = A \setminus \mathfrak{p}$ che è moltiplicativamente chiuso. Allora $A_{\mathfrak{p}} := S^{-1}A$ si dice localizzazione a \mathfrak{p} . Si ha che $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello locale, dove l'unico ideale massimale è $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\}$
- (**Proprietà locali**) P è una proprietà per A anello oppure per M modulo si dice che è locale se P vale per A (o per M) $\Leftrightarrow P$ vale per $A_{\mathfrak{p}}$ (o $M_{\mathfrak{p}}$) $\forall \mathfrak{p}$ primo
- (**Essere nullo è una proprietà locale (e anche massimale)**) M un A -modulo. TFAE:
 - $M = 0$
 - $M_{\mathfrak{p}} = 0 \quad \forall \mathfrak{p}$ primo
 - $M_{\mathfrak{m}} = 0 \quad \forall \mathfrak{m}$ massimale
- (**Per un omomorfismo essere iniettivo (o surgettivo) è una proprietà locale (e anche massimale)**) Sia $f : M \rightarrow N$. TFAE:
 - f iniettivo (surgettivo)
 - $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ iniettivo (surgettivo) $\forall \mathfrak{p}$ primo
 - $f_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ iniettivo (surgettivo) $\forall \mathfrak{m}$ massimale

Per l'iniettività basta mostrare che $\text{Ker } f_{\mathfrak{p}} = (\text{Ker } f)_{\mathfrak{p}}$ e usare che $M = 0$ è locale. Ugual per la surgettività con i coKer

- (**Essere ridotto è una proprietà locale**) Un anello infatti è ridotto se $\mathcal{N}(A) = 0$ e abbiamo mostrato che $S^{-1}\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(S^{-1}A)$, ovvero $N(A) = 0 \Leftrightarrow N(A)_{\mathfrak{p}} = N(A_{\mathfrak{p}}) = 0 \quad \forall \mathfrak{p}$ primo

- **(Dominio NON è una proprietà locale)**
- **(L'esattezza è una proprietà locale e massimale)** $M \rightarrow N \rightarrow P$ è esatta in N se e solo se lo sono le sequenze localizzate ai primi o ai massimali [Questo ci viene detto da D.A. ma non è stato fatto a lezione]

SUCCESSIONI ESATTE DI MODULI

- La successione $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \rightarrow 0$ è esatta \Leftrightarrow la successione $0 \rightarrow \text{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_A(M_1, N)$ è esatta $\forall N$ A -moduli.
- La successione $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ è esatta \Leftrightarrow la successione $0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M_1) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_A(N, M_2)$ è esatta $\forall N$ A -moduli.
- **(Successioni che spezzano)** Data una successione esatta corta di A -moduli $0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \rightarrow 0$ si ha TFAE:
 - $N \cong M \oplus P$
 - $\exists r : N \rightarrow M$ t.c. $r \circ \alpha = \text{id}_M$
 - $\exists s : P \rightarrow N$ t.c. $\beta \circ s = \text{id}_P$
- **(Proprietà estremi-intermedio)** Sia $0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \rightarrow 0$ una successione esatta di A -moduli. Allora valgono le seguenti:
 - M, P f.g. $\implies N$ f.g. (Il viceversa non vale)
- **(Moduli Proiettivi)** P si dice proiettivo se vale una delle seguenti, tutte equivalenti:
 - Data $\phi : M \twoheadrightarrow N$ surgettivo si ha $\forall f : P \rightarrow N, \exists g : P \rightarrow M$ tale che $f = \phi \circ g$
 - $\forall g : M \twoheadrightarrow N$ surgettiva l'omomorfismo indotto $\text{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_A(P, N)$ è surgettivo
 - Ogni successione esatta corta $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ spezza
 - P è sommando diretto di un modulo libero (ovvero $\exists F$ libero t.c. $F = P \oplus C$)
 - $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ esatta $\Leftrightarrow 0 \rightarrow \text{Hom}_A(P, K) \rightarrow \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N) \rightarrow 0$ esatta
Ovvero anche $\text{Hom}_A(P, -)$ è un funtore esatto

Hanno inoltre le seguenti proprietà rispetto ad alcune costruzioni:

- $P_1 \oplus P_2$ proiettivo $\Leftrightarrow P_1$ e P_2 sono proiettivi
- P_1, P_2 proiettivi $\implies P_1 \otimes_R P_2$ proiettivo (il viceversa non vale)
- **(Moduli Iniettivi)** Q si dice modulo iniettivo se vale una delle seguenti, tutte equivalenti:
 - Per ogni $f : N \hookrightarrow M$ iniettiva e $g : N \rightarrow Q$ si ha $\exists G : M \rightarrow Q$ tale che $g = G \circ f$
 - Ogni successione esatta $0 \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ spezza
 - $\forall g : N \hookrightarrow M$ iniettiva l'omomorfismo indotto $\text{Hom}_A(M, Q) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_A(N, Q)$ è iniettivo
 - Per ogni $I \subseteq A$ ideale vale la caratterizzazione (1) con $N = I$ e $M = A$
Si può dire anche per ogni I ideale di A si ha che ogni $f : I \rightarrow Q$ si estende ad una funzione $\tilde{f} : A \rightarrow Q$ [Su questa serbiamo qualche dubbio]
 - $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ esatta $\Leftrightarrow 0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(K, Q) \rightarrow 0$ esatta
Ovvero anche $\text{Hom}_A(-, Q)$ è un funtore esatto

Hanno inoltre le seguenti proprietà rispetto ad alcune costruzioni:

- $Q_1 \oplus Q_2$ iniettivo $\Leftrightarrow Q_1, Q_2$ iniettivi
- NON è invece detto che P_1, P_2 iniettivo $\implies P_1 \otimes P_2$ iniettivo FALSO

- **(Moduli Piatti)** N è un R -modulo piatto se il funtore $N \otimes_R -$ è esatto
Valgono le seguenti proprietà rispetto alle costruzioni:
 - N, M piatti $\Leftrightarrow N \oplus M$ piatto
 - N, M piatti $\Rightarrow N \otimes_R M$ piatto (il viceversa non vale)
 - $S^{-1}R$ è un R -modulo piatto $\forall S \subseteq R$ moltiplicativamente chiusi

Per quozienti si può controllare la piatezza sapendo che le seguenti sono equivalenti:

- $a \in a^2 A$
- aA è sommando diretto di A
- $\frac{A}{aA}$ è A -piatto
- **(Implicazioni varie)**
 - Libero \Rightarrow Proiettivo (Il viceversa vale se A è PID oppure anche se A è locale e P f.g.)
 - Proiettivo \Rightarrow Piatto (Viene da Libero \Rightarrow Piatto, piuttosto semplice da mostrare usando che $L = \bigoplus_{\mathbb{N}} R^{(\mathbb{N})}$ se L è libero ed utilizzando il fatto che un modulo proiettivo è un sommando diretto di un modulo libero).
 - Il viceversa non vale. Ad esempio \mathbb{Q} come \mathbb{Z} -modulo

MODULI NÖTHERIANI ED ARTINIANI

- **(Definizione)** Se (Σ, \leq) è un insieme parzialmente ordinato allora sono equivalenti:
 - Ogni catena ascendente è stazionaria
 - Ogni sottoinsieme diverso dal vuoto ha un elemento massimale
- Sia ora A un anello, M un A -modulo e $\Sigma = \{N \subseteq M \text{ sottomodulo}\}$. Se (Σ, \subseteq) soddisfa una delle due condizioni equivalenti di cui sopra, M viene detto A -modulo Nötheriano [ACC]
Se invece è (Σ, \supseteq) a soddisfare una delle due condizioni, M viene detto A -modulo Artiniano [DCC]
Un anello A si dice Artiniano (Nötheriano) se è Artiniano (Nötheriano) come A -modulo su sè stesso
- **(Condizione equivalente alla Nötherianità)** M è un A -modulo Nötheriano \Leftrightarrow ogni sottomodulo è f.g.
- **(Passaggio per sequenze esatte)** Sia $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ una sequenza esatta corta. Allora vale che:
 - N Nötheriano $\Leftrightarrow M, P$ Nötheriani
 - N Artiniano $\Leftrightarrow M, P$ Artiniani

Come corollari si ottengono i seguenti:

- M_1, \dots, M_n Nötheriani $\Leftrightarrow \bigoplus_i M_i$ Nötheriano
- A Nötheriano e M A -modulo f.g. $\Rightarrow M$ Nötheriano
- A Nötheriano e $I \subseteq A$ ideale $\Rightarrow \frac{A}{I}$ Nötheriano
- $f: A \twoheadrightarrow B$ surgettiva. Allora A Nötheriano $\Rightarrow B$ Nötheriano
- A Nötheriano $\Rightarrow S^{-1}A$ Nötheriano (per la corrispondenza tra ideali)
- Vale inoltre che A Nötheriano $\Rightarrow A[x]$ Nötheriano (Base di Hilbert)
- **(Lemmi per i Nötheriani)** Valgono le seguenti cose a caso:
 - A Nötheriano. Ogni ideale contiene allora una potenza del suo radicale, ovvero $\forall I \subseteq A \quad \exists n \text{ t.c. } (\sqrt{I})^n \subseteq I$
 - A Nötheriano, \mathfrak{m} ideale massimale. Allora TFAE:

- * Q è \mathfrak{m} -primario
- * $\sqrt{Q} = \mathfrak{m}$
- * $\exists n \quad \mathfrak{m}^n \subseteq Q \subseteq \mathfrak{m}$

- **(Teoremi per gli Artiniani)**

- A è Artiniano $\Leftrightarrow A$ è Nötheriano e $\dim A = 0$ [Non dimostrato]
- **(Teorema di Struttura per anelli artiniani)** A è Artiniano $\Leftrightarrow A = \bigoplus_i A_i$ con gli A_i Artiniani e Locali. La decomposizione è unica a meno di isomorfismi [Non dimostrato]
- A Artiniano $\implies A$ semilocale

DECOMPOSIZIONE PRIMARIA

- **(Decomposizione primaria di un ideale)** $I \subseteq A$ ideale si dice decomponibile se si può scrivere come intersezione di un numero finito di ideali primari Q_1, \dots, Q_n come $I = \bigcap_i Q_i$. (Definiamo inoltre primi associati ad una decomposizione $P_i := \sqrt{Q_i}$)
- **(Minimalizzazione di una decomposizione)** Se $P_i = P_j$ in una decomposizione allora vale che $Q_i \cap Q_j$ è ancora primario e posso quindi sostituirlo al posto di Q_i e Q_j (Vale ancora che $\sqrt{Q_i \cap Q_j} = P_i = P_j$). Una decomposizione si dice minimale o irridondante se $P_i \neq P_j \quad \forall i \neq j$ e $\bigcap_{i \neq j} Q_j \not\subseteq Q_i$

- **(Proposizione tecniche)** Q primario e $P = \sqrt{Q}$, $a \in A$. Allora valgono le seguenti:

- Se $a \in Q$ si ha $(Q : a) = 1$
- Se $a \notin Q$ allora $(Q : a)$ è P -primario, ovvero $Q : a$ è primario e $\sqrt{Q : a} = P$
- Se $a \notin P$ allora $(Q : a) = Q$

Notare che se dovessi avere un ideale J finitamente generato al posto di a , basta ricordare che $(Q : \sum_i J_i) = \bigcap_i (Q : J_i)$ per ricavarne le relative proposizioni

- **(Unicità dei primi associati)** Sia $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ con $\sqrt{Q_i} = P_i$ e supponiamo la scrittura minimale. Allora i P_i sono indipendenti dalla decomposizione ed inoltre vale che $\{P_1, \dots, P_n\} = \{\sqrt{I : a} \text{ primi} \mid a \in A\}$ (Ovvero $\forall a \in A$ faccio $\sqrt{I : a}$. Se $\sqrt{I : a}$ è primo allora lo prendo.
- **(Primi minimali)** Data una decomposizione minimale di I , considero i primi associati P_i . Tra questi posso considerare i primi minimali per inclusione (detti primi minimali). In particolare i primi minimali associati ad I sono quelli tali che $\forall P$ primo tale che $I \subseteq P$ allora si ha $\exists i$ tale che $P_i \subseteq P$ dove P_i è un primo minimale.
- **(Nilradicale)** In particolare se (0) è decomponibile allora $\mathcal{N}(A) = \bigcap_{P_i \text{ minimali di } (0)} P_i$
- **(Caratterizzazione dell'unione dei primi associati)** $I = \bigcap_i Q_i$ minimale con $P_i = \sqrt{Q_i}$ allora $\{a \in A \mid (I : a) \neq I\} = \bigcup_i P_i$
- **(Divisori di Zero)** Se (0) è decomponibile allora si ha $\mathcal{D}(A) = \bigcup_{0 \neq a \in A} \sqrt{0 : a}$ e se $(0) = \bigcap_i Q_i$ allora $\sqrt{0 : a} = \bigcap_{a \notin Q} \sqrt{Q : a} = \bigcap_{a \notin Q_i} P_i \subseteq P_i$, ovvero $\mathcal{D}(A) \subseteq \bigcup_i P_i$ e visto che $P_i = \sqrt{0 : a}$ si ha $P_i \subseteq \mathcal{D}(A)$
- **(Decomposizione Primaria con S^{-1})** $S \subseteq A$ e $I = \bigcap_i Q_i$ minimale. Siano inoltre $P_1, \dots, P_m, P_{m+1}, \dots, P_n$ i primi associati ordinati in modo che $S \cap P_i = \emptyset$ con $i \leq m$ e che $S \cap P_j \neq \emptyset$ se $j \geq m+1$. Allora si ha che $S^{-1}I = \bigcap_i S^{-1}Q_i = \bigcap_{i \leq m} S^{-1}Q_i$ e quindi $(S^{-1}I)^c = Q_1 \cap \dots \cap Q_m$. "Facendo così abbiamo ucciso le componenti i cui primi intersecano S "
- **(Unicità dei primari minimali)** Per il lemma di sopra abbiamo l'unicità dei primari minimali. Infatti visto che P_i è minimale si ha $S = A \cap P_i$ e allora $S \cap P_j \quad \forall j \neq i$ e quindi Q_i non dipende dalla decomposizione perché anche i P_i non dipendono dalla decomposizione.
- **(Esistenza della Decomposizione Primaria)** Mostriamo che in un anello Nötheriano ogni ideale è decomponibile, nei seguenti due step:

- Dimostriamo prima che $I \subseteq A$ ideale, con A Nötheriano, allora $I = \cap_i I_i$ dove gli I_i sono ideali irriducibili (ovvero tali che $I_i = J \cap K \implies I = J$ oppure $I = K$)
- Ogni irriducibile in un Nötheriano è primario

PRONTUARIO DI COSE UTILI (DA ASCARI)

OPERAZIONI TRA IDEALI

$\forall a, b, c, d$ ideali di A valgono le seguenti:

- $a(b + d) = ab + ad$
- $ab \subseteq a \cap b$
- $(a + b)(a \cap b) \subseteq ab$
- $a \subseteq (a : b)$
- $(a : b)b \subseteq a$
- $((a : b) : c) = ((a : c) : b) = (a : bc)$
- $(\cap_i a_i : b) = \cap_i (a_i : b)$
- $(a : \sum_i b_i) = \cap_i (a : b_i)$
- $a \subseteq \sqrt{a}$
- $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a \cap b} = \sqrt{a} \cap \sqrt{b}$
- $\sqrt{a + b} = \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
- Due ideali a e b si dicono coprimi se $a + b = 1$.
- $a + b = 1, a + d = 1 \implies a + bd = 1$
- $a + b = 1 \implies ab = a \cap b$

ESTENSIONE E CONTRAZIONE

Sia dato un morfismo di anelli $\phi : A \rightarrow B$. Allora si hanno le due operazioni di estensione e contrazione. Indicheremo con a gli ideali di A e con b ideali di B . Allora vale che:

- $a \subseteq a^{ec}$
- $b \supseteq b^{ce}$
- $a^{ece} = a^e$
- $b^{cec} = b^c$
- L'insieme degli ideali contratti e di quelli estesi sono in biggezione tramite le operazioni di estensione e contrazione
- $(a_1 + a_2)^e = a_1^e + a_2^e$
- $(a_1 \cap a_2)^e \subseteq a_1^e \cap a_2^e$
- $(a_1 a_2)^e = a_1^e a_2^e$
- $(a_1 : a_2)^e \subseteq (a_1^e : a_2^e)$
- $(\sqrt{a})^e \subseteq \sqrt{a^e}$

- $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$
- $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$
- $(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c \mathfrak{b}_2^c$
- $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$
- $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c = \sqrt{\mathfrak{b}^c}$
- Inoltre si ha che se \mathfrak{b} è primo (primario) (radicale) allora \mathfrak{b}^c è primo (primario) (radicale)
- Se \mathfrak{a} è principale (finitamente generato) allora \mathfrak{a}^e è principale (finitamente generato)

S^{-1} E CORRISPONDENZE TRA IDEALI

- \mathfrak{b} radicale (primario) (primo) $\Leftrightarrow \mathfrak{b}^c$ radicale (primario) (primo)
- \mathfrak{b} massimale $\Leftrightarrow \mathfrak{b}^c$ massimale tra quelli che non intersecano S
- \mathfrak{a} primo (primario) (massimale) tale che $\mathfrak{a} \cap S = \emptyset \implies \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ ed \mathfrak{a}^e primo (primario) (massimale)
- \mathfrak{b} principale (finitamente generato) $\implies \mathfrak{b}^c$ principale (finitamente generato) (Con A dominio vale anche il viceversa)

Vale inoltre che:

- $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$
- $(\sqrt{\mathfrak{a}})^e = \sqrt{\mathfrak{a}^e}$
- Se \mathfrak{a}_2 è f.g. allora $(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e = (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$

Inoltre se A è dominio (UFD) (PID) (Nötheriano) allora $S^{-1}A$ è dominio (UFD) (PID) (Nötheriano)