Oscillatore armonico smorzato: soluzione generale

Una massa attaccata a una molla e immersa in un mezzo resistente è soggetta a una forza $F = -\beta\dot{x} - kx$. Il secondo principio della dinamica traduce il problema nella seguente equazione differenziale per $x(t)$:

$$F = ma \quad \rightarrow \quad -\beta\dot{x} - kx = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0.$$

con m, β e k reali positivi. L'equazione caratteristica è $m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$ e ha radici

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_o^2} = -p \pm i\omega_1,$$

dove ho definito tre nuove costanti, che hanno tutte dimensioni dell'inverso di un tempo: $\omega_o = \sqrt{k/m}$, reale positivo, pulsazione dell'oscillatore libero (quello con $\beta = 0$); $p = \beta/2m$, reale positivo; e infine $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - p^2}$, che è reale se $p < \omega_o$, nullo se $p = \omega_o$, e immaginario puro ($\omega_1 = iq$ con q reale positivo) se $p > \omega_o$. Nel primo caso ($p < \omega_o$) le radici λ_1 e λ_2 sono complesse coniugate, nel secondo ($p = \omega_o$) reali coincidenti e nel terzo ($p > \omega_o$) reali e distinte. I tre casi corrispondono ai regimi *sottosmorzato*, *critico* e *sovrasmorzato* dell'oscillatore, a seconda del rapporto fra la rapidità di smorzamento p e la pulsazione ω_o dell'oscillatore libero. Partendo da λ_1 e λ_2 ottengo in modo standard la soluzione generale $x(t)$ per ciascuno dei tre diversi regimi separatamente, ma alla fine noto che la posizione in funzione del tempo $t>0$ si riassume con un'unica formula che vale in tutti e tre i regimi:

$$x(t) = \left[x_o \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{\omega_1}(v_o + p x_o)\sin(\omega_1 t)\right] e^{-pt}\,, \tag{1}$$

dove x_o e v_o sono posizione e velocità iniziali, cioè per $t=0$; e quindi la velocità per $t>0$ è

$$\dot{x}(t) = \left[v_o \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{\omega_1}\left({\omega_o}^2 x_o + p v_o\right)\sin(\omega_1 t)\right] e^{-pt}\,.$$

Studiamo questa soluzione. Per $\beta = 0$ non c'è smorzamento, $p = 0$ e $\omega_1 = \omega_o$; ritroviamo, giustamente, l'oscillatore armonico libero: $x(t) = [x_o \cos(\omega_0 t) + (v_o/\omega_0)\sin(\omega_1 t)]$. Per $\beta \neq 0$, $p \neq 0$, lo smorzamento c'è, e si danno i tre casi detti prima, che qui elenco in ordine diverso:

1. $p < \omega_o$ (ovvero $\omega_o > p = \beta/2m$)
   oscillazioni *sottosmorzate*, esprimibili anche come $x(t) = Ae^{-pt}\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$

2. $p > \omega_o$ (ovvero $\omega_o < p = \beta/2m$)
   oscillazioni *sovrasmorzate*, esprimibili anche ($q = \sqrt{p^2 - \omega_o^2}$ reale positivo) come

   $$x(t) = \left[x_o \cosh(qt) + \frac{1}{q}(v_o + p x_o)\sinh(qt)\right] e^{-pt}\,,$$

   in quanto $\omega_1 = iq$ (vedi definizioni), $\sin(iqt) = i\sinh(qt)$, e $\cos(iqt) = \cosh(qt)$.

3. $p = \omega_o$ (ovvero $\omega_o = p = \beta/2m$)
   in questo *regime critico* $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - p^2} = 0$, e la formula riassuntiva (1) sembra non aver senso (c'è un ω_1 a denominatore); invece essa risulta corretta anche nel caso limite $p \to \omega_o$, cioè nel limite $\omega_1 \to 0$. Infatti:

   $$\lim_{\omega_1 \to 0} x(t) = \left\{x_o \lim_{\omega_1 \to 0} \cos(\omega_1 t) + \lim_{\omega_1 \to 0}\left[\frac{1}{\omega_1}(v_o + p x_o)\sin(\omega_1 t)\right]\right\} e^{-pt} = \Big[x_o + (v_o + p x_o)\,t\Big] e^{-pt}$$

   che è la stessa soluzione che si ottiene trattando separatamente il caso $p = \omega_o$, osservando che qui due radici dell'equazione caratteristica sono coincidenti, ed applicando la teoria delle equazioni differenziali appropriata a questa circostanza.

Discuteremo a lezione la fisica delle oscillazioni sottosmorzate e il regime critico; a casa dovreste invece rivedervi tutti gli oscillatori di questi ultimi giorni e verificare quel che avete capito. Per farlo suggerisco i seguenti problemi:

Problema 1 - Oscillatore sovrasmorzato

Nel regime sovrasmorzato appena discusso un punto materiale parte a $t = 0$ dalla posizione x_o con velocità iniziale v_o. (a) Determinare le condizioni iniziali x_o, v_o tali che il punto materiale raggiunga l'origine $x = 0$ e la superi, passando dall'altra parte rispetto a x_o. (b) Determinare, con tali condizioni iniziali, l'istante $t_1 > 0$ nel quale il punto attraversa l'origine. (c) Sempre in tal caso, determinare l'istante $t_2 > t_1$ nel quale il punto arresta la sua corsa e inverte il moto, tornando (definitivamente) verso l'origine. (d) Definitivamente: è vero? perché?

Problema 2 - Massa pesante e molla

Determinare la legge del moto di una massa m vincolata a muoversi lungo l'asse verticale, appesa verticalmente ad una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla, in presenza di gravità.