

EVALUATION SUR LA BASE DE PLUSIEURS CRITÈRES

Année académique 2016/2017

Nous nous intéressons ici aux problèmes d'évaluation des alternatives, ou encore de classement des alternatives de la meilleure à la moins bonne, en tenant compte de plusieurs points de vue ou critères très souvent contradictoires entre eux. Le domaine scientifique dédié à la résolution de ce type de problème est appelé Aide MultiCritère à la Décision (AMCD). C'est une branche de la recherche opérationnelle qui a pour but d'aider le décideur à analyser de manière scientifique un problème de décision avec plusieurs critères ou points de vue, et de lui apporter une aide dans sa prise de décision finale. En ce sens là, elle diffère des autres disciplines de la recherche opérationnelle telle que l'optimisation.

Un problème de décision multicritère suppose alors l'existence d'un ensemble d'alternatives X sur lequel se portera la décision et un ensemble fini de n critères $N = \{1, \dots, n\}$ dont on doit tenir compte dans le processus de décision. À chaque critère i , on associe un attribut représenté par un ensemble X_i correspondant aux évaluations de chaque alternative suivant le critère i . Il est donc possible d'identifier une alternative (action ou option) x comme un élément du produit cartésien $X = X_1 \times \dots \times X_n$, c'est-à-dire $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$. On notera par X' le sous-ensemble de X constitué des alternatives de travail, c'est-à-dire, des alternatives pour lesquelles le décideur souhaite avoir une décision.

1 Exemple introductif : concours d'artistes

Dix jeunes artistes sans producteur participent à une émission de concours de chant à forte audience, dont le vainqueur verra sa maquette produite par une célèbre maison de disques. Chaque candidat interprète à cette occasion, devant un jury, une chanson de son propre répertoire. Le jury se subdivise en trois sous-jurys : un sous-jury constitué de professionnels de la chorégraphie, un autre de professionnels de la chanson et de la voix, et le dernier, formé de professionnels de la musique. Les six candidats sont évalués sur les trois critères (à maximiser) suivants :

1. **Chorégraphie** : La maîtrise de la chorégraphie par le candidat pour sa prestation. Les évaluations sur ce critère sont données sous forme d'étoiles \star . Il y a quatre membres dans ce sous-jury et chacun d'entre eux note le candidat de 0 à $\star\star\star\star$. Le meilleur candidat en chorégraphie sera celui qui recueillera le plus grand nombre d'étoiles.
2. **Chanson** : la qualité d'interprétation d'une chanson par le candidat. Le sous-jury chanson évalue les candidats de manière classique, en leur attribuant des notes entre 0 et 20.
3. **Musique** : La capacité à jouer des instruments de musique est aussi prise en compte à ce niveau. Les évaluations des candidats par le sous-jury musique sont données entre 0 et 100.

Les évaluations obtenues par les candidats sont données par le tableau ci-après :

Candidats	1 : Chorégraphie	2 : Chanson	3 : Musique
<i>a</i> : Yvanessa	***** **	17	70
<i>b</i> : Michaël	***** *****	17	60
<i>c</i> : Jessica	***** **	8	70
<i>d</i> : Frank	***** *****	8	60
<i>e</i> : Suzanne	***** ***** *	10	45
<i>f</i> : Désiré	***** ***** **	10	45
<i>g</i> : Marie	***	7	70
<i>h</i> : Florence	*****	12	50
<i>i</i> : Eden	***** ***** *****	14	40
<i>j</i> : Angel	***	8	80
<i>k</i> : Bibiane	***** ***** ***** *	18	30

D'après les notations utilisées, on a $X' = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ et $N = \{1, 2, 3\}$. L'attribut associé au critère chanson est $X_2 = [0, 20]$.

2 Méthode 1 : Évaluation par une somme pondérée

Évaluer une alternative a par une somme pondérée revient à lui attribuer une note globale $U(a)$ définie par la fonction

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i u_i(x_i) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X \quad (1)$$

où

- $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, est une fonction d'utilité marginale associée à l'attribut X_i , et déterminée le plus souvent par une normalisation de l'échelle.
- $w_i, i = 1, \dots, n$, est le poids associé au critère i .

3 Méthode 2 : Évaluation par une somme pondérée avec prise en compte de l'interaction entre critères

Évaluer une alternative a par une somme pondérée avec interaction revient à lui attribuer une note globale $U^i(a)$ définie par la fonction

$$U^i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n v_i u_i(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j \in N} I_{ij} |u_i(x_i) - u_j(x_j)| \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X \quad (2)$$

où

- $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, est une fonction d'utilité marginale associée à l'attribut X_i , et déterminée le plus souvent par une normalisation de l'échelle.
- $v_i, i = 1, \dots, n$, est le poids associé au critère i .
- $I_{ij}, i, j \in N, i \neq j$, est l'indice d'interaction entre les critères i et j .

Les paramètres v_i et I_{ij} sont déterminés par des quantités réelles μ_i et μ_{ij} (associées aux singletons et aux paires) telles que :

- $0 \leq \mu_i \leq 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$
- $0 \leq \mu_{ij} \leq 1, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$
- $\mu_{ij} \geq \mu_i, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$
- $I_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in N, i \neq j$
- $I_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j, \quad \forall i, j \in N, i \neq j$
- $v_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- $v_i = \mu_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in N, j \neq i} I_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- $\sum_{i=1}^n v_i = 1$

4 Méthode 3 : Évaluation par la méthode ELECTRE TRI

La méthode ELECTRE TRI est une approche d'Aide MultiCritère à la Décision qui vise à résoudre des problèmes d'affectation (classification).

On suppose dans notre exemple que les poids associés aux trois critères sont donnés par le vecteur $W = (3; 2; 4)$.

En concertation, les membres du jury définissent ensemble trois classes (appelées aussi catégories) homogènes de candidats : “Très Bon” (catégorie C_3), “Bon” (catégorie C_2) et “Moyen” (C_1). Les membres du jury souhaitent donc affecter chaque candidat à une des trois catégories “Très Bon”, “Bon” et “Moyen” via la méthode ELECTRE TRI.

Chaque catégorie C_i est délimitée par une frontière supérieure notée b_{i+1} et une frontière inférieure b_i . Les frontières b_{i+1} et b_i sont appelés “profils” et représentent des candidats de référence qui peuvent être fictifs. Il y a une dominance paréto-strictte entre b_{i+1} et b_i . Par exemple,

- C_1 est délimitée par b_2 et b_1 ;
- C_2 est délimitée par b_3 et b_2 ;
- C_3 est délimitée par b_4 et b_3 .

Ainsi, comme l’affectation se fait dans 3 catégories distinctes, b_3 représente la frontière entre les classes état “Très Bon” et état “Bon”, et b_2 la frontière entre les classes état “Bon” et état “Moyen”.

Le principe de la méthode ELECTRE TRI consiste non pas à comparer les candidats entre eux, mais à les comparer aux quatre candidats de référence b_4, b_3, b_2 et b_1 dont les scores sur chaque critère sont résumés à la Table 1.

	1 :Chorégraphie	2 :Chanson	3 :Musique
b_4	***** ***** ***** *****	20	100
b_3	***** ***** **	16	70
b_2	***** *****	12	45
b_1	0	0	0

TABLE 1 – Matrice de performance des profils

Ainsi, l'affectation d'un candidat à une catégorie dépendra de sa comparaison aux profils b_4, b_3, b_2 et b_1 . Plus formellement, l'affectation des candidats dans les catégories se base sur le concept de sur-classement. On dira qu'un candidat H surclasse le profil b_i et on note $H \mathcal{S} b_i$ si H est au moins aussi bon que b_i sur tous les critères.

Étape 1 : Détermination des indices de concordance partiels

Pour chaque critère j , l'indice de concordance partiel entre le candidat H et le profil b_i est donné par :

- Si la fonction g_j est à maximiser :

$$c_j(H, b_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(H) \geq g_j(b_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad c_j(b_i, H) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(b_i) \geq g_j(H) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Si la fonction g_j est à minimiser :

$$c_j(H, b_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(b_i) \geq g_j(H) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad c_j(b_i, H) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(H) \geq g_j(b_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $g_j(H)$ et $g_j(b_i)$ représentant respectivement le score de H et b_i sur le critère j .

Étape 2 : Détermination des indices de concordance globaux

L'indice de concordance global entre le candidat H et le profil b_i est donnée par la formule suivante :

$$C(H, b_i) = \frac{\sum_{j=1}^n k_j c_j(H, b_i)}{\sum_{j=1}^n k_j} \quad C(b_i, H) = \frac{\sum_{j=1}^n k_j c_j(b_i, H)}{\sum_{j=1}^n k_j}$$

où k_j est le poids du critère j et n le nombre de critères.

Étape 3 : Détermination de la relation de surclassement \mathcal{S}

La relation de surclassement se définit à l'aide de l'indice de coupe λ , appelé seuil de majorité, qui représente le paramètre déterminant la situation de préférence entre le candidat H et le profil b_i . Ainsi pour le candidat H et un profil b_i :

- H surclasse b_i et on notera $H \mathcal{S} b_i$ si et seulement si $C(H, b_i) \geq \lambda$.
- b_i surclasse H et on notera $b_i \mathcal{S} H$ si et seulement si $C(b_i, H) \geq \lambda$.

Étape 4 : Procédures d'affectation

Supposons qu'on a r catégories C_1, \dots, C_r , délimitées chacune par deux profils b_i et b_{i+1} .

Deux procédures d'affectation de le candidat H sont possibles :

1. **Procédure pessimiste** : pour chaque candidat H , faire décroître les indices des profils de r jusqu'au premier indice k tel que $H \mathcal{S} b_k$. Le candidat H est alors affecté à la catégorie C_k .

Dans notre exemple, cette procédure revient à comparer successivement H à b_4, b_3, b_2 et b_1 . Si $H \mathcal{S} b_i$ alors H est affecté à la catégorie C_i .

2. **Procédure optimiste** : pour chaque candidat H , faire croître les indices des profils de 1 jusqu’au premier indice k tel que $b_k \mathcal{S} H$. Le candidat H est alors affecté à la catégorie C'_{k-1} .

Dans notre exemple, cette procédure revient à comparer successivement H à b_1, b_2, b_3 et b_4 . Si $b_i \mathcal{S} H$ alors H est affecté à la catégorie C'_{i-1} .

5 Travail à faire

L’objectif de ce projet est de développer en langage Python un programme qui implémente les trois méthodes d’évaluation décrites ci-dessus (Somme pondérée, Somme pondérée avec interaction, ELECTRE TRI). Ces trois méthodes seront testées sur des données issues du magazine “60 millions de consommateurs” et des données sur les lycées de France disponibles sur le site

<https://www.data.gouv.fr/fr/topics/education-et-recherche/>.

Contraintes imposées

- L’ensemble des alternatives, le nombre de critères, la matrice de performance et les paramètres de chaque méthode (nombre de catégories, poids des critères, indices d’interaction, paramètres μ_i et μ_{ij} , seuil de majorité λ , profils, ...) seront stockés dans un ou plusieurs fichiers Excel ou équivalent. Les données stockées dans ces fichiers seront les input du programme à implémenter.
- Certains paramètres des méthodes pourront être rentrés (fixés) directement par l’utilisateur dans un ou plusieurs fichiers Excel ou équivalent.
- Certains paramètres des méthodes pourront être obtenus par une représentation des préférences de l’utilisateur. Dans ce cas, le programme devra résoudre un système d’inéquations linéaires ou un programme linéaire, en utilisant par exemple la librairie python CVXOPT ou numpy.
- On considérera au minimum 2 catégories pour la méthode ELECTRE TRI.
- On considérera au minimum 2 critères.
- Le poids associé à chaque critère sera compris entre 1 et 10.
- La paréto dominance stricte entre les profils devra être respectée.
- L’indice de coupe λ sera compris entre 0.5 et 1.
- Il faudra tenir compte du fait que le fichier des données peut contenir à la fois une partie des critères à maximiser et l’autre à minimiser.
- Le programme devra comporter au moins les fonctions `EvalOptimiste` et `EvalPessimiste` (dont les paramètres seront définis par chaque groupe) qui retourneront respectivement l’affectation optimiste et pessimiste à partir de la méthode ELECTRE TRI.
- Le programme devra comporter au moins les fonctions `EvalWeightedSum` (dont les paramètres seront définis par chaque groupe) qui retournera le classement des alternatives obtenu à partir de la méthode Somme pondérée.
- Le programme devra comporter au moins les fonctions `EvalWeightedSumInteract` (dont les paramètres seront définis par chaque groupe) qui retournera le classement des alternatives obtenu à partir de la méthode Somme pondérée avec interaction.
- Les résultats des différentes approches devront être rendus sous fichier Excel ou équivalent contenant pour chaque alternatives, ses évaluations suivant chaque critère, sa note globale (pour les méthodes de somme pondérée) et la catégorie à laquelle elle est affectée (pour la méthode ELECTRE TRI).
- Dans la mesure du possible, les résultats des différentes approches devront être affichés, sous forme d’un tableau, sur un navigateur internet. Le lecteur pourra alors voir pour chaque alternative, ses évaluations

suivant chaque critère, sa note globale (pour les méthodes de somme pondérée) et la catégorie à laquelle elle est affectée (pour la méthode ELECTRE TRI).

- Les codes sources produits devront être le plus générique possible.

Tests imposés :

- Chaque groupe recevra un jeu de données issu du magazine “60 millions de consommateurs” et devra répondre à la question : Est ce que le classement obtenu par ce magazine peut être expliqué par les trois méthodes implémentées ? Il s’agira ici de déterminer trois modèles d’évaluation (somme pondérée, somme pondérée avec interaction, ELECTRE TRI) associés à ce jeu de données.
- Chaque groupe proposera à partir d’un jeu de données sur les lycées de France (indicateurs 2015 du site <https://www.data.gouv.fr>) un classement d’au moins 30 Lycées d’une région de France (une région différente par groupe). Les classements obtenus, en appliquant chacune des trois méthodes, devra être comparé à celui obtenu par des média tels l’Express ou le Monde,

Rapport à rendre

- Le rapport devra être rendu sous forme d’un rapport .pdf et de fichier(s) source .py et .html savamment commentés, les fichiers Excel ou équivalent contenant les données, le tout envoyé par mail à brice.mayag@dauphine.fr.
- Le rapport contiendra une conclusion où le groupe donnera son sentiment sur les principes d’évaluation en général.
- La liste de tous les membres du groupe devra être indiquée dans le rapport papier .pdf, le mail et dans le(s) fichier(s) source.
- **Date limite d’envoi du rapport et des fichiers : Mardi 14 Mars 2017 à 23h59**. Tout retard sera sanctionné. La soutenance des projets, d’une dizaine de minutes par projet, est prévue le **17 Mars 2017**.