Appunti di Elementi di Topologia Algebrica

Simone Riccio
(dalle lezioni del Prof. Mario Salvetti)

19 ottobre 2025

Indice

1 Omologia Singolare

1.1 Omologia ridotta

Definizione 1.1 (Complesso di catene aumentato)**.**
Sia X spazio topologico. Il ***complesso di catene aumentato*** $\tilde{C}(X)$ *di X è il complesso di catene:*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \tilde{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} \tilde{C}_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

dove $\epsilon : \tilde{C}_0(X) \to \mathbb{Z}$ è l'omomorfismo di aumentazione definito da:

$$\epsilon\left(\sum_i n_i\sigma_i\right) = \sum_i n_i$$

per ogni catena singolare $\sum_i n_i\sigma_i \in \tilde{C}_0(X)$.

Proposizione 1.1. *Sia X spazio topologico, $H(X), \tilde{H(X)}$ rispettivamente l'omologia singolare e l'omologia singolare ridotta con coefficienti in $\mathbb{Z}$.*
Vale:

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(X) & n > 0 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} & n = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Il fatto di dimostra, applicando il teorema del morfismo di connessione alla successione esatta:

$$0 \to \tilde{C}(X) \to C(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

Qui intendo con $\mathbb{Z}$ il complesso di catene che in grado 0 è $\mathbb{Z}$ e in tutti gli altri gradi è $\{0\}$.
Dunque si ha in omologia la successione esatta lunga:

$$\cdots \to H_1(\mathbb{Z}) \cong \{0\} \to \tilde{H}_0(X) \to H_0(X) \to H_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$$

e dato che la successione **scinde**, si ottiene l'isomorfismo voluto. □

Osservazione 1.1 (Cosa significa che la successione scinde?)**.**
Vedi teorema 102 del libro di Algebra 2.
Una successione esatta corta:

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

si dice che ***scinde*** *se esiste un isomorfismo $\varphi : B \to A \oplus C$ tale che il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \oplus C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ed è equivalente a dire che esiste un morfismo $s : C \to B$ tale che $g \circ s = \mathrm{id}_C$ (sezione destra) oppure un morfismo $r : B \to A$ tale che $r \circ f = \mathrm{id}_A$ (sezione sinistra).

1.2 Omotopia di catene e di mappe continue

Definizione 1.2 (Omotopia di complessi di catene)**.**
Siano (C_*, ∂_*^C) e (D_*, ∂_*^D) due complessi di catene e $f_\#, g_\# : C_* \to D_*$ due mappe di complessi di catene.
*Un'**omotopia** tra $f_\#$ e $g_\#$ è una famiglia di omomorfismi di gruppi abeliani:*

$$p_q : C_q \to D_{q+1}$$

tale che:

$$\partial_q^D \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial_q^C = g_q - f_q$$

Proposizione 1.2 (Mappe di catene omotope di inducono la stessa mappa in omologia)**.**
Siano (C_*, ∂_*^C) e (D_*, ∂_*^D) due complessi di catene e $f_\#, g_\# : C_* \to D_*$ due mappe di complessi di catene omotope.
Allora le mappe indotte $f_*, g_* : H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ sono uguali per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione.
Sia $[c] \in H_n(C_*)$ una classe di omologia, con $c \in Z_n(C_*)$.
Allora:

$$g_n(c) - f_n(c) = \partial_n^D(p_n(c)) + p_{n-1}(\underbrace{\partial_n^C(c)}_{=0}) = \partial_n^D(p_n(c))$$

Dunque $g_n(c)$ e $f_n(c)$ differiscono per un bordo, e quindi rappresentano la stessa classe di omologia in $H_n(D_*)$.
Quindi $g_*([c]) = f_*([c])$ per ogni $[c] \in H_n(C_*)$, da cui si conclude che $g_* = f_*$. □

Definizione 1.3 (Omotopia di mappe continue)**.**
Siano X, Y spazi topologici e $f, g : X \to Y$ due mappe continue.
*Una **omotopia** tra f e g è una mappa continua:*

$$F : X \times I \to Y$$

tale che:

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

Teorema 1.1 (Invarianza omotopica dell'omologia singolare)**.**
Siano X, Y spazi topologici e $f, g : X \to Y$ due mappe continue omotope.
Allora le mappe indotte $f_*, g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ sono uguali per ogni $n \geq 0$.
Di conseguenza:

$$X \sim Y \implies H_n(X) \cong H_n(Y) \text{ per ogni } n \geq 0.$$

Dimostrazione.

1. Se F è un'omotopia tra f e g, definiamo le mappe:

$$\eta_s : X \to X \times I : x \mapsto (x, s) \quad s \in I$$

   che formano un'omotopia tra η_0 e η_1.
   Si ha che $f = F \circ \eta_0$ e $g = F \circ \eta_1$.
   Dunque se mostriamo che $(\eta_0)_* = (\eta_1)_*$, si ottiene per funtorialità che $f_* = g_*$.

2. Assumendo che due mappe omotope nel senso dei complessi di catene inducono la stessa mappa in omologia, dobbiamo mostrare che $(\eta_0)_\#$ e $(\eta_1)_\#*$ sono omotope nel senso dei complessi di catene. Vogliamo costruire un'omotopia di complessi di catene:

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & C_{q+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\eta_{0\#}"'] \arrow[d, shift left, "\eta_{1\#}"] & C_q(X) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\eta_{0\#}"'] \arrow[d, shift left, "\eta_{1\#}"] & C_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\eta_{0\#}"'] \arrow[d, shift left, "\eta_{1\#}"] & {} \\ \arrow[r] & C_{q+1}(Y) \arrow[r] & C_q(Y) \arrow[r] & C_{q-1}(Y) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Cioè una mappa $p : C_q(X) \to C_{q+1}(Y)$ che chiameremo **operatore prisma** tale che:

$$\partial^Y_{q-1} \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial^X_q = \eta_{1\#} - \eta_{0\#}$$

3. Definiamo l'operatore prisma $p_q : C_q(X) \to C_{q+1}(Y)$ in maniera funtoriale come segue. Se p_q è funtoriale allora per ogni $f : X \to Y$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} C_q(X) \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "f_*"] & C_{q+1}(X \times I) \arrow[d, "(f \times \mathrm{id}_I)_*"] \\ C_q(Y) \arrow[r, "p_q"] & C_{q+1}(Y \times I) \end{tikzcd}$$

Sia ora $\sigma : \Delta^q \to X$ un q-simplesso singolare di X.
Vale che $\sigma = \sigma_*(\mathrm{id}_{\Delta^q})$
Di conseguenza per funtorialità vale:

$$p_q(\sigma) = (\sigma \times \mathrm{id}_I)_*(p_q(\mathrm{id}_{\Delta^q}))$$

Per cui basta definire $p_q(\mathrm{id}_{\Delta^q})$ per definire l'operatore prisma in generale.

4. Definiamo dunque $p_q(\mathrm{id}_{\Delta^q}) : \Delta^{q+1} \to \Delta^q \times I$. Suddividiamo $\Delta^q \times I$ in $q+1$ simplessi $[v_0 \cdots v_i w_i \cdots w_q]$ per $i = 0, \ldots, q$, dove:

$$\Delta^q \times \{0\} = [v_0 \cdots v_q], \quad \Delta^q \times \{1\} = [w_0 \cdots w_q]$$

e l'operatore prisma è definito come:

$$p_q(\mathrm{id}_{\Delta^q}) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [v_0 \cdots v_i w_i \cdots w_q]$$

Bisogna verificare che questa definizione soddisfi la proprietà richiesta:

$$\partial^{X \times I}_{q-1} \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial^X_q = \eta_{1\#} - \eta_{0\#}$$

Si verifica calcolando i due termini a sinistra e sommando.

□

1.3 Successione di Mayer-Vietoris

Definizione 1.4 (Catene $\mathcal{U}$-piccole)**.** *Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X. Una catena $c = \sum_\sigma \nu_\sigma \sigma \in C_q(X)$ si dice $\mathcal{U}$**-piccola** se*

$$\forall \sigma \text{ con } \nu_\sigma \neq 0, \exists U \in \mathcal{U} : \mathrm{Im}(\sigma) \subseteq U.$$

Si noti che se c è $\mathcal{U}$-piccola, allora anche il suo bordo ∂c è $\mathcal{U}$-piccolo.
Quindi le catene $\mathcal{U}$-piccole formano un sottocomplesso di catene di $C(X)$, che indichiamo con $C^{\mathcal{U}}(X)$.

Teorema 1.2 (Mayer-Vietoris)**.**
Sia X spazio topologico, $A, B \subset X$ tali che $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.
Allora la successione esatta corta definita da

$$0 \to C_*(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\psi} C_*(X) \to 0$$

dove $\varphi(c) = (c, c)$ e $\psi(a, b) = a - b$, induce in omologia la successione esatta lunga:

$$\cdots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

con $\Delta : H(X) \to H(A \cap B)$ di grado -1.

Dimostrazione.
Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{\mathrm{Int}(A), \mathrm{Int}(B)\}$ di X.

1. Dimostriamo prima assumendo che $H_q(X) \cong H_q^{\mathcal{U}}(X)$ Vale per ogni q che $C_q^{\mathcal{U}}(X) = C_q(A) + C_q(B)$, dunque la mappa $\psi : C_q(A) \oplus C_q(B) \to C_q^{\mathcal{U}}(X)$ definita da $\psi(c) = (a, b)$ con $c = a - b$, è suriettiva.
   E dunque è esatta la successione:

$$0 \to C_q(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_q(A) \oplus C_q(B) \xrightarrow{\psi} C_q^{\mathcal{U}}(X) \to 0$$

   e per il teorema del morfismo di connessione si ottiene la successione esatta lunga in omologia:

$$\cdots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

□

Proposizione 1.3 (Omologia della sfera)**.**
Sia S^n la sfera n-dimensionale.
Allora:

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $S_n \cong A \cup B$ dove $A := S^n \setminus \{(0, \cdots, 1)\}, B := S^n \setminus \{(0, \cdots, -1)\}$.
A, B sono contraibili, dunque $\tilde{H}_q(A) \cong \tilde{H}_q(B) \cong 0$ per ogni q.
Mentre $A \cap B$ si retrae per deformazione sull'equatore della sfera e dunque $\tilde{H}_q(A \cap B) \cong \tilde{H}_q(S^{n-1})$.
Applicando la successione di Mayer-Vietoris si ottiene la successione esatta lunga:

$$\cdots \to \tilde{H}_q(S^{n-1}) \to 0 \to \tilde{H}_q(S^n) \to \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \to 0 \to \cdots$$

Da cui si ottiene l'isomorfismo:

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$$

Quindi dato che $S^0 = \{0, 1\}$ e dunque ha due componenti connesse, vale il caso base

$$H_n(S^0) := \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

da cui segue la tesi per induzione. □

Teorema 1.3 (Punto fisso di Brower)**.**
Sia $f : D^n \to D^n$ continua allora $\exists x \in D^n$ tale che $f(x) = x$

Dimostrazione.

1. Dimostriamo che non esiste una retrazione $r : D^n \to \partial D^n \cong S^{n-1}$.
   Supponiamo per assurdo che esista tale retrazione.
   Allora vale che l'identità su S^{n-1} si fattorizza come:

$$S^{n-1} \overset{i}{\hookrightarrow} D^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$$

dove i è l'inclusione.
Per funtorialità in omologia si avrebbe che $(\mathrm{id}_{S^{n-1}})_*$ si fattorizza come:

$$\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z}$$

assurdo.

2. Supponiamo ora che esista una mappa continua $f : D^n \to D^n$ senza punti fissi.
Allora possiamo definire una retrazione $r : D^n \to S^{n-1}$ come:

$$r(x) = \text{intersezione tra } S^{n-1} \text{ e la retta che congiunge } f(x) \text{ e } x$$

Ma questo contraddice il punto precedente.

□

Proposizione 1.4.
Sia $\deg : [S^n, S^n] \to \mathbb{Z}$ *il grado di una mappa continua* $f : S^n \to S^n$*.*
Se $f : S^n \to S^n$ *è senza punti fissi allora* f *è omotopa alla mappa antipodale e quindi* $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia senza punti fissi.
Allora possiamo definire un'omotopia tra f e la mappa antipodale $a : S^n \to S^n$ come:

$$F : S^n \times I \to S^n$$

(Non mi è chiaro come continuare questa dimostrazione) Dunque per invarianza omotopica dell'omologia singolare vale che $\deg(f) = \deg(a) = (-1)^{n+1}$. □

Teorema 1.4 (Palla pelosa)**.**
Sia $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *continua e tale che* $v(x)$ *sia ortogonale a* x *e tangente ad* S^n*.*

1.4 Relazione tra $H_1(X)$ e $\pi_1(X)$

Per vedere i disegni di questa parte, che sono molto importanti, guardare le note di Simone Saccani.

Osservazione 1.2. *Un cammino chiuso* $\sigma : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ *può essere visto come* 1*-simplesso singolare* $\sigma : \Delta^1 \to X$ *tale che* $\partial\sigma = 0$*.*
Mostriamo che la classe di σ *in omologia di* $H_1(X)$ *dipende solo dalla classe di omotopia di* σ *in* $\pi_1(X, x_0)$ *e che la giunzione di cammini corrisponde alla somma in omologia.*

1. *Siano* $\sigma \sim \sigma'$ *lacci omotopi ad estremi fissi con omotopia* $F : I \times I \to X$*.*
Dividiamo $I \times I$ *in due simplessi:* $[e_0 e_1 e_1']$ *e* $[e_0 e_1' e_0']$ *con:*

$$e_0 = (0,0), \quad e_1 = (1,0), \quad e_1' = (1,1), \quad e_0' = (0,1)$$

Consideriamo la catena singolare: $c = F \circ [e_0 e_1 e_1'] - F \circ [e_0 e_1' e_0']$*.*
Si verifica che $\partial c = \sigma' - \sigma$*, dunque* $[\sigma] = [\sigma']$ *in* $H_1(X)$*.*

2. *Sia* $F : I \times I \to X$ *una mappa continua tale che* $F(t, s) = \sigma(t)$ *per ogni* $s \in I$*.*
A questo punto considerando la catena singolare $c = F \circ [e_0 e_1 e_1'] + F \circ [e_0 e_1' e_0']$ *si verifica che* $\partial c = \sigma + \sigma^{-1}$*. Dunque* $[\sigma^{-1}] = -[\sigma]+$ *in* $H_1(X)$*.*

3. *Infine vedere dalle dispense di Simone Saccani come si mostra che* $[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau]$ *in* $H_1(X)$*.*

Teorema 1.5 (Relazione tra $H_1(X)$ e l'abelianizzato di $\pi_1(X, x_0)$)**.**
Sia X *spazio topologico con base puntata* $x_0 \in X$*.*
Sia può definire $h' : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ *come:*

$$h'([\sigma]) = [\sigma]$$

Poiché $H_1(X)$ è abeliano, h' fattorizza attraverso l'abelianizzato di $\pi_1(X, x_0)$ dando luogo a un omomorfismo di gruppi:

$$h : \pi_1(X, x_0)^{ab} \to H_1(X)$$

Se X è connesso per archi allora h è un isomorfismo. Dunque:

$$H_1(X) \cong \pi_1(X, x_0)^{ab}$$

Dimostrazione. Si vuole costruire una inversa $l : H_1(X) \to \pi_1(X, x_0)^{ab}$.
Per ogni punto $x \in X$ indichiamo con u_x un cammino da x_0 a x.
Definiamo

$$l' : \begin{cases} C_1(X) \to \pi_1(X, x_0)^{ab} \\ \sigma \mapsto [u_{\sigma(0)} * \sigma * u_{\sigma(1)}^{-1}] \end{cases}$$

Per mostrare che l' induce una mappa in omologia, dobbiamo verificare che $l'(\partial c) = 0$ per ogni $c \in C_2(X)$.
Un 2-simplesso $\tau : \Delta^2 \to X$ definisce un'omotopia tra i cammini $\tau \circ [v_0 v_1]$, $\tau \circ [v_0 v_2]$ e $\tau \circ [v_1 v_2]$.
Si verifica che:

$$l'(\partial\tau) = [u_{\tau(v_0)} * \tau \circ [v_1 v_2] * u_{\tau(v_2)}^{-1}] + [u_{\tau(v_0)} * \tau \circ [v_0 v_2] * u_{\tau(v_2)}^{-1}] + [u_{\tau(v_1)} * \tau \circ [v_0 v_1] * u_{\tau(v_0)}^{-1}] = 0$$

Dunque l' induce una mappa in omologia $l : H_1(X) \to \pi_1(X, x_0)^{ab}$.
Si verifica facilmente che l e h sono inverse l'una dell'altra. □

Definizione 1.5 (Escissione).
Siano $U \subset A \subset X$ e l'inclusione $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$.
Si dice che U può essere ***escissa*** *da (X, A) se l'omomorfismo indotto in omologia:*

$$i_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \to H_q(X, A)$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$.

Teorema 1.6 (Teorema di escissione).
Siano $A \subset X$ e $U \subset \mathrm{Int}(A)$.
Allora U può essere escissa da (X, A).

Dimostrazione. Si definiscono due mappe di complessi di catene:

$$\mathrm{sd} : C_q(X) \to C_q(X) \quad \text{e} \quad T : C_q(X) \to C_{q+1}(X)$$

osservando che per funtorialità basta definire $\mathrm{sd}(\mathrm{id}_{\Delta^q})$ e $T(\mathrm{id}_{\Delta^q})$.
Sia B_q il baricentro di Δ^q, e se $\sigma = [v_0 \cdots v_{q-1}]$ un $(q-1)$-simplesso allora $B_q\sigma = [B_q v_0 \cdots v_{q-1}]$ è il q-simplesso ottenuto aggiungendo il baricentro come vertice.
Si definiscono $\mathrm{sd}(\mathrm{id}_{\Delta^q})$ e $T(\mathrm{id}_{\Delta^q})$

$$\mathrm{sd}(\mathrm{id}_{\Delta^q}) = \begin{cases} \mathrm{id}_{\Delta^0} & q = 0 \\ B_q \mathrm{sd}(\partial\Delta^q) & q > 0 \end{cases}$$

$$T(\mathrm{id}_{\Delta^q}) = \begin{cases} 0 & q = 0 \\ B_q(\mathrm{id}_{\Delta^q} - \mathrm{sd}(\partial\Delta^q) - T(\partial\Delta^q)) & q > 0 \end{cases}$$

Si verifica che valgono le seguenti proprietà: La suddivisione è un morfismo di complessi di catene:

$$\partial_q \circ \mathrm{sd} = \mathrm{sd} \circ \partial_q$$

mentre T è un'omotopia di catene tra l'identità e la suddivisione:

$$\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q = \mathrm{id}_{C_q(X)} - \mathrm{sd}_q$$

Dunque $\mathrm{sd}_* = \mathrm{id}_*$ in omologia.

□