Appunti di Elementi di Topologia Algebrica

Simone Riccio
(dalle lezioni del Prof. Mario Salvetti)

3 novembre 2025

Indice

1 Omologia Singolare

1.1 Omologia ridotta

Definizione 1.1 (Complesso di catene aumentato)**.**
Sia X spazio topologico. Il ***complesso di catene aumentato*** *$\tilde{C}(X)$ di X è il complesso di catene:*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \tilde{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} \tilde{C}_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

dove $\epsilon : \tilde{C}_0(X) \to \mathbb{Z}$ è l'omomorfismo di aumentazione definito da:

$$\epsilon\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) = \sum_i n_i$$

per ogni catena singolare $\sum_i n_i \sigma_i \in \tilde{C}_0(X)$.

Proposizione 1.1. *Sia X spazio topologico, $H(X), H\tilde{(X)}$ rispettivamente l'omologia singolare e l'omologia singolare ridotta con coefficienti in $\mathbb{Z}$.*
Vale:

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(X) & n > 0 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} & n = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Il fatto di dimostra, applicando il teorema del morfismo di connessione alla successione esatta:

$$0 \to \tilde{C}(X) \to C(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

Qui intendo con $\mathbb{Z}$ il complesso di catene che in grado 0 è $\mathbb{Z}$ e in tutti gli altri gradi è $\{0\}$.
Dunque si ha in omologia la successione esatta lunga:

$$\cdots \to H_1(\mathbb{Z}) \cong \{0\} \to \tilde{H}_0(X) \to H_0(X) \to H_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$$

e dato che la successione **scinde**, si ottiene l'isomorfismo voluto. □

Osservazione 1.1 (Cosa significa che la successione scinde?).
Vedi teorema 102 del libro di Algebra 2.
Una successione esatta corta:

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

*si dice che **scinde** se esiste un isomorfismo $\varphi : B \to A \oplus C$ tale che il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \oplus C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ed è equivalente a dire che esiste un morfismo $s : C \to B$ tale che $g \circ s = \mathrm{id}_C$ (sezione destra) oppure un morfismo $r : B \to A$ tale che $r \circ f = \mathrm{id}_A$ (sezione sinistra).

1.2 Omotopia di catene e di mappe continue

Definizione 1.2 (Omotopia di complessi di catene).
Siano (C_*, ∂_*^C) e (D_*, ∂_*^D) due complessi di catene e $f_\#, g_\# : C_* \to D_*$ due mappe di complessi di catene.
*Un'**omotopia** tra $f_\#$ e $g_\#$ è una famiglia di omomorfismi di gruppi abeliani:*

$$p_q : C_q \to D_{q+1}$$

tale che:

$$\partial_q^D \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial_q^C = g_q - f_q$$

Proposizione 1.2 (Mappe di catene omotope di inducono la stessa mappa in omologia).
Siano (C_*, ∂_*^C) e (D_*, ∂_*^D) due complessi di catene e $f_\#, g_\# : C_* \to D_*$ due mappe di complessi di catene omotope.
Allora le mappe indotte $f_*, g_* : H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ sono uguali per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione.
Sia $[c] \in H_n(C_*)$ una classe di omologia, con $c \in Z_n(C_*)$.
Allora:

$$g_n(c) - f_n(c) = \partial_n^D(p_n(c)) + p_{n-1}(\underbrace{\partial_n^C(c)}_{=0}) = \partial_n^D(p_n(c))$$

Dunque $g_n(c)$ e $f_n(c)$ differiscono per un bordo, e quindi rappresentano la stessa classe di omologia in $H_n(D_*)$.
Quindi $g_*([c]) = f_*([c])$ per ogni $[c] \in H_n(C_*)$, da cui si conclude che $g_* = f_*$. □

Definizione 1.3 (Omotopia di mappe continue).
Siano X, Y spazi topologici e $f, g : X \to Y$ due mappe continue.
*Una **omotopia** tra f e g è una mappa continua:*

$$F : X \times I \to Y$$

tale che:

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

Teorema 1.1 (Invarianza omotopica dell'omologia singolare).
Siano X, Y spazi topologici e $f, g : X \to Y$ due mappe continue omotope.
Allora le mappe indotte $f_*, g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ sono uguali per ogni $n \geq 0$.
Di conseguenza:

$$X \sim Y \implies H_n(X) \cong H_n(Y) \text{ per ogni } n \geq 0.$$

Dimostrazione.

1. Se F è un'omotopia tra f e g, definiamo le mappe:

   $$\eta_s : X \to X \times I : x \mapsto (x, s) \quad s \in I$$

   che formano un'omotopia tra η_0 e η_1.
   Si ha che $f = F \circ \eta_0$ e $g = F \circ \eta_1$.
   Dunque se mostriamo che $(\eta_0)_* = (\eta_1)_*$, si ottiene per funtorialità che $f_* = g_*$.

2. Assumendo che due mappe omotope nel senso dei complessi di catene inducono la stessa mappa in omologia, dobbiamo mostrare che $(\eta_0)_\#$ e $(\eta_1)_\#*$ sono omotope nel senso dei complessi di catene. Vogliamo costruire un'omotopia di complessi di catene:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \longrightarrow & C_q(X) & \longrightarrow & C_{q-1}(X) & \longrightarrow \\ & \eta_{0\#}\big\downarrow\big\downarrow\eta_{1\#} & & \eta_{0\#}\big\downarrow\big\downarrow\eta_{1\#} & & \eta_{0\#}\big\downarrow\big\downarrow\eta_{1\#} & \\ \longrightarrow & C_{q+1}(Y) & \longrightarrow & C_q(Y) & \longrightarrow & C_{q-1}(Y) & \longrightarrow \end{array}$$

Cioè una mappa $p : C_q(X) \to C_{q+1}(Y)$ che chiameremo **operatore prisma** tale che:

$$\partial^Y_{q-1} \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial^X_q = \eta_{1\#} - \eta_{0\#}$$

3. Definiamo l'operatore prisma $p_q : C_q(X) \to C_{q+1}(Y)$ in maniera funtoriale come segue. Se p_q è funtoriale allora per ogni $f : X \to Y$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} C_q(X) & \xrightarrow{p_q} & C_{q+1}(X \times I) \\ \big\downarrow f_* & & \big\downarrow (f\times \mathrm{id}_I)_* \\ C_q(Y) & \xrightarrow{p_q} & C_{q+1}(Y \times I) \end{array}$$

Sia ora $\sigma : \Delta^q \to X$ un q-simplesso singolare di X.
Vale che $\sigma = \sigma_*(\mathrm{id}_{\Delta^q})$
Di conseguenza per funtorialità vale:

$$p_q(\sigma) = (\sigma \times \mathrm{id}_I)_*(p_q(\mathrm{id}_{\Delta^q}))$$

Per cui basta definire $p_q(\mathrm{id}_{\Delta^q})$ per definire l'operatore prisma in generale.

4. Definiamo dunque $p_q(\mathrm{id}_{\Delta^q}) : \Delta^{q+1} \to \Delta^q \times I$. Suddividiamo $\Delta^q \times I$ in $q+1$ simplessi $[v_0 \cdots v_i w_i \cdots w_q]$ per $i = 0, \ldots, q$, dove:

$$\Delta^q \times \{0\} = [v_0 \cdots v_q], \quad \Delta^q \times \{1\} = [w_0 \cdots w_q]$$

e l'operatore prisma è definito come:

$$p_q(\mathrm{id}_{\Delta^q}) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [v_0 \cdots v_i w_i \cdots w_q]$$

Bisogna verificare che questa definizione soddisfi la proprietà richiesta:

$$\partial^{X\times I}_{q-1} \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial^X_q = \eta_{1\#} - \eta_{0\#}$$

Si verifica calcolando i due termini a sinistra e sommando.

□

1.3 Relazione tra $H_1(X)$ e $\pi_1(X)$

Per vedere i disegni di questa parte, che sono molto importanti, guardare le note di Simone Saccani.

Osservazione 1.2. *Un cammino chiuso $\sigma : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ può essere visto come 1-simplesso singolare $\sigma : \Delta^1 \to X$ tale che $\partial\sigma = 0$.*
Mostriamo che la classe di σ in omologia di $H_1(X)$ dipende solo dalla classe di omotopia di σ in $\pi_1(X, x_0)$ e che la giunzione di cammini corrisponde alla somma in omologia.

1. *Siano $\sigma \sim \sigma'$ lacci omotopi ad estremi fissi con omotopia $F : I \times I \to X$.*
   Dividiamo $I \times I$ in due simplessi: $[e_0 e_1 e'_1]$ e $[e_0 e'_1 e'_0]$ con:

$$e_0 = (0,0), \quad e_1 = (1,0), \quad e'_1 = (1,1), \quad e'_0 = (0,1)$$

   Consideriamo la catena singolare: $c = F \circ [e_0 e_1 e'_1] - F \circ [e_0 e'_1 e'_0]$.
   Si verifica che $\partial c = \sigma' - \sigma$, dunque $[\sigma] = [\sigma']$ in $H_1(X)$.

2. *Sia $F : I \times I \to X$ una mappa continua tale che $F(t,s) = \sigma(t)$ per ogni $s \in I$.*
   A questo punto considerando la catena singolare $c = F \circ [e_0 e_1 e'_1] + F \circ [e_0 e'_1 e'_0]$ si verifica che $\partial c = \sigma + \sigma^{-1}$. Dunque $[\sigma^{-1}] = -[\sigma] +$ in $H_1(X)$.

3. *Infine vedere dalle dispense di Simone Saccani come si mostra che $[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau]$ in $H_1(X)$.*

Teorema 1.2 (Relazione tra $H_1(X)$ e l'abelianizzato di $\pi_1(X, x_0)$)**.**
Sia X spazio topologico con base puntata $x_0 \in X$.
Sia può definire $h' : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ come:

$$h'([\sigma]) = [\sigma]$$

Poiché $H_1(X)$ è abeliano, h' fattorizza attraverso l'abelianizzato di $\pi_1(X, x_0)$ dando luogo a un omomorfismo di gruppi:

$$h : \pi_1(X, x_0)^{ab} \to H_1(X)$$

Se X è connesso per archi allora h è un isomorfismo. Dunque:

$$H_1(X) \cong \pi_1(X, x_0)^{ab}$$

Dimostrazione. Si vuole costruire una inversa $l : H_1(X) \to \pi_1(X, x_0)^{ab}$.
Per ogni punto $x \in X$ indichiamo con u_x un cammino da x_0 a x.
Definiamo

$$l' : \begin{cases} C_1(X) \to \pi_1(X, x_0)^{ab} \\ \sigma \mapsto [u_{\sigma(0)} * \sigma * u_{\sigma(1)}^{-1}] \end{cases}$$

Per mostrare che l' induce una mappa in omologia, dobbiamo verificare che $l'(\partial c) = 0$ per ogni $c \in C_2(X)$.
Un 2-simplesso $\tau : \Delta^2 \to X$ definisce un'omotopia tra i cammini $\tau \circ [v_0 v_1]$, $\tau \circ [v_0 v_2]$ e $\tau \circ [v_1 v_2]$.
Si verifica che:

$$l'(\partial\tau) = [u_{\tau(v_0)} * \tau \circ [v_1 v_2] * u_{\tau(v_2)}^{-1}] * [u_{\tau(v_0)} * \tau \circ [v_0 v_2] * u_{\tau(v_2)}^{-1}] * [u_{\tau(v_1)} * \tau \circ [v_0 v_1] * u_{\tau(v_0)}^{-1}] = 0$$

Dunque l' induce una mappa in omologia $l : H_1(X) \to \pi_1(X, x_0)^{ab}$.
Si verifica facilmente che l e h sono inverse l'una dell'altra. □

1.4 Successione di Mayer-Vietoris

Definizione 1.4 (Catene $\mathcal{U}$-piccole)**.** *Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X.*
*Una catena $c = \sum_\sigma \nu_\sigma \sigma \in C_q(X)$ si dice **$\mathcal{U}$-piccola** se*

$$\forall \sigma \text{ con } \nu_\sigma \neq 0, \exists U \in \mathcal{U} : \mathrm{Im}(\sigma) \subseteq U.$$

Si noti che se c è $\mathcal{U}$-piccola, allora anche il suo bordo ∂c è $\mathcal{U}$-piccolo.
Quindi le catene $\mathcal{U}$-piccole formano un sottocomplesso di catene di $C(X)$, che indichiamo con $C^{\mathcal{U}}(X)$.

Teorema 1.3 (Mayer-Vietoris)**.**
Sia X spazio topologico, $A, B \subset X$ tali che $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.
Allora la successione esatta corta definita da

$$0 \to C_*(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\psi} C_*(X) \to 0$$

dove $\varphi(c) = (c, c)$ e $\psi(a, b) = a - b$, induce in omologia la successione esatta lunga:

$$\cdots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

con $\Delta : H(X) \to H(A \cap B)$ di grado -1.

Dimostrazione.
Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{\text{Int}(A), \text{Int}(B)\}$ di X.

1. Dimostriamo prima assumendo che $H_q(X) \cong H_q^{\mathcal{U}}(X)$ Vale per ogni q che $C_q^{\mathcal{U}}(X) = C_q(A) + C_q(B)$, dunque la mappa $\psi : C_q(A) \oplus C_q(B) \to C_q^{\mathcal{U}}(X)$ definita da $\psi(c) = (a, b)$ con $c = a - b$, è suriettiva.
   E dunque è esatta la successione:
   $$0 \to C_q(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_q(A) \oplus C_q(B) \xrightarrow{\psi} C_q^{\mathcal{U}}(X) \to 0$$
   e per il teorema del morfismo di connessione si ottiene la successione esatta lunga in omologia:
   $$\cdots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

□

Proposizione 1.3 (Omologia della sfera)**.**
Sia S^n la sfera n-dimensionale.
Allora:
$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $S_n \cong A \cup B$ dove $A := S^n \setminus \{(0, \cdots, 1)\}, B := S^n \setminus \{(0, \cdots, -1)\}$.
A, B sono contraibili, dunque $\tilde{H}_q(A) \cong \tilde{H}_q(B) \cong 0$ per ogni q.
Mentre $A \cap B$ si retrae per deformazione sull'equatore della sfera e dunque $\tilde{H}_q(A \cap B) \cong \tilde{H}_q(S^{n-1})$.
Applicando la successione di Mayer-Vietoris si ottiene la successione esatta lunga:
$$\cdots \to \tilde{H}_q(S^{n-1}) \to 0 \to \tilde{H}_q(S^n) \to \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \to 0 \to \cdots$$

Da cui si ottiene l'isomorfismo:
$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$$

Quindi dato che $S^0 = \{0, 1\}$ e dunque ha due componenti connesse, vale il caso base
$$H_n(S^0) := \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

da cui segue la tesi per induzione. □

Teorema 1.4 (Punto fisso di Brower)**.**
Sia $f : D^n \to D^n$ continua allora $\exists x \in D^n$ tale che $f(x) = x$

Dimostrazione.

1. Dimostriamo che non esiste una retrazione $r : D^n \to \partial D^n \cong S^{n-1}$.
   Supponiamo per assurdo che esista tale retrazione.
   Allora vale che l'identità su S^{n-1} si fattorizza come:
   $$S^{n-1} \xhookrightarrow{i} D^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$$
   dove i è l'inclusione.
   Per funtorialità in omologia si avrebbe che $(\text{id}_{S^{n-1}})_*$ si fattorizza come:
   $$\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z}$$
   assurdo.

2. Supponiamo ora che esista una mappa continua $f : D^n \to D^n$ senza punti fissi.
   Allora possiamo definire una retrazione $r : D^n \to S^{n-1}$ come:
   $$r(x) = \text{intersezione tra } S^{n-1} \text{ e la retta che congiunge } f(x) \text{ e } x$$
   Ma questo contraddice il punto precedente.

□

Proposizione 1.4.
Sia $\deg : [S^n, S^n] \to \mathbb{Z}$ *il grado di una mappa continua* $f : S^n \to S^n$*.*
Se $f : S^n \to S^n$ *è senza punti fissi allora* f *è omotopa alla mappa antipodale e quindi* $\deg(f) = (-1)^{n+1}$*.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia senza punti fissi.
Allora possiamo definire un'omotopia tra f e la mappa antipodale $a : S^n \to S^n$ come:

$$F : S^n \times I \to S^n$$

(Non mi è chiaro come continuare questa dimostrazione) Dunque per invarianza omotopica dell'omologia singolare vale che $\deg(f) = \deg(a) = (-1)^{n+1}$. □

Teorema 1.5 (Palla pelosa)**.**
Sia $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *continua e tale che* $v(x)$ *sia ortogonale a* x *e tangente ad* S^n*.*

Definizione 1.5 (Escissione)**.**
Siano $U \subset A \subset X$ *e l'inclusione* $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$*.*
Si dice che U *può essere* ***escissa*** *da* (X, A) *se l'omomorfismo indotto in omologia:*

$$i_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \to H_q(X, A)$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$*.*

Teorema 1.6 (Teorema di escissione)**.**
Siano $A \subset X$ *e* $\bar{U} \subset \mathrm{Int}(A)$*.*
Allora U *può essere escissa da* (X, A)*.*

Dimostrazione. Si definiscono due mappe di complessi di catene:

$$\mathrm{sd} : C_q(X) \to C_q(X) \quad \text{e} \quad T : C_q(X) \to C_{q+1}(X)$$

osservando che per funtorialità basta definire $\mathrm{sd}(\mathrm{id}_{\Delta^q})$ e $T(\mathrm{id}_{\Delta^q})$.
Sia B_q il baricentro di Δ^q, e se $\sigma = [v_0 \cdots v_{q-1}]$ un $(q-1)$-simplesso allora $B_q\sigma = [B_q v_0 \cdots v_{q-1}]$ è il q-simplesso ottenuto aggiungendo il baricentro come vertice.
Si definiscono $\mathrm{sd}(\mathrm{id}_{\Delta^q})$ e $T(\mathrm{id}_{\Delta^q})$

$$\mathrm{sd}(\mathrm{id}_{\Delta^q}) = \begin{cases} \mathrm{id}_{\Delta^0} & q = 0 \\ B_q \mathrm{sd}(\partial\Delta^q) & q > 0 \end{cases}$$

$$T(\mathrm{id}_{\Delta^q}) = \begin{cases} 0 & q = 0 \\ B_q(\mathrm{id}_{\Delta^q} - \mathrm{sd}(\partial\Delta^q) - T(\partial\Delta^q)) & q > 0 \end{cases}$$

Si verifica che valgono le seguenti proprietà: La suddivisione è un morfismo di complessi di catene:

$$\partial_q \circ \mathrm{sd} = \mathrm{sd} \circ \partial_q$$

mentre T è un'omotopia di catene tra l'identità e la suddivisione:

$$\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q = \mathrm{id}_{C_q(X)} - \mathrm{sd}_q$$

Dunque $\mathrm{sd}_* \equiv \mathrm{id}_*$ in omologia.

Lemma 1.1.
Sia σ *un* q*-simplesso geometrico, se* τ *è un simplesso in* $sd(\sigma)$ *allora*

$$\mathrm{diam}(\tau) \leq \frac{q}{q+1}\mathrm{diam}(\sigma)$$

Proposizione 1.5.
Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X.
Sia $\sigma : \Delta^q \to X$ un q-simplesso singolare, allora esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m \geq m_0, \quad sd^m(\sigma) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$$

Di conseguenza vale per ogni catena $c = \sum_\sigma \nu_\sigma \sigma \in C_q(X)$.

Teorema 1.7. *Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X.*
La mappa di inclusione $i : C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X)$ induce un isomorfismo in omologia:

$$i_* : H_q^{\mathcal{U}}(X) \to H_q(X)$$

Dimostrazione. Mostriamo che la mappa di inclusione $i : C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X)$ è surgettiva in omologia.
Se infatti $z \in C_q(X)$ è un ciclo, esiste m_0 tale che $sd^{m_0}(z) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$, ma poiché sd_* è omotopa all'identità, si ha che $[z] = [sd^{m_0}(z)]$ in omologia.
Mostriamo ora che i_* è iniettiva, se infatti $i_*([z]) = 0$ per un ciclo $z \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$, esiste $c \in C_{q+1}(X)$ tale che $\partial c = z$.

$$[z] = [sd^{m_0}(z)] = [sd^{m_0}(\partial c)] = [\partial sd^{m_0}(c)] = [0]$$

in sostanza abbiamo dimostrato che se se una catena è un bordo in $C_*(X)$, allora è omotopa ad una catena $\mathcal{U}$-piccola ed è il bordo di una catena $\mathcal{U}$-piccola. □

Corollario 1.1.
Sia $A \subset X$. Sia $C_q^{\mathcal{U}}(X, A) := C_q^{\mathcal{U}}(X)/C_q^{\mathcal{U}}(A)$ il complesso di catene relativo formato da catene $\mathcal{U}$-piccole.
La mappa di inclusione $i : C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \to C_*(X, A)$ induce un isomorfismo in omologia:

$$i_* : H_q^{\mathcal{U}}(X, A) \to H_q(X, A)$$

Dimostrazione. Si considera il seguente diagramma commutativo con righe esatte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*^{\mathcal{U}}(A) \arrow[r] \arrow[d, "i_A"] & C_*^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "i_X"] & C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] & C_*(X) \arrow[r] & C_*(X, A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dalle ipotesi si ha che i_A e i_X inducono isomorfismi in omologia.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q^{\mathcal{U}}(A) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\cong"] & H_q^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\cong"] & H_q^{\mathcal{U}}(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"'] & H_{q-1}^{\mathcal{U}}(A) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\cong"] & H_{q-1}^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_q(X, A) \arrow[r] & H_{q-1}(A) \arrow[r] & H_{q-1}(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dunque per il lemma del cinque anche i_* è isomorfismo in omologia. □

Teorema 1.8 (Lemma dei 5)**.**
Sia il seguente diagramma commutativo con righe esatte:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & A_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono isomorfismi allora anche α_3 è un isomorfismo.

Per finire la dimostrazione del teorema di Escissione. consideriamo $\mathcal{U} = \{X \setminus U, (A)\}$ un ricoprimento di X.
$\mathcal{U}$ non è un ricoprimento aperto, ma contiene un ricoprimento aperto dato da $\mathcal{V} = \left\{X \setminus \bar{U}, \mathrm{Int}(A)\right\}$.
Consideriamo:

$$C_q(X \setminus A, A \setminus U) \xrightarrow{j} C_q^{\mathcal{U}}(X, A) \xhookrightarrow{i} C_q(X, A)$$

Se dimostriamo che j è un isomorfismo di complessi di catene, allora dato che per il teorema precedente i induce un isomorfismo in omologia, si conclude che l'inclusione $j \circ i : C_q(X \setminus U, A \setminus U) \to C_q(X, A)$ induce un isomorfismo in omologia.

1. Mostriamo che j è surgettiva.
   Sia $z \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$ allora $z = z' + z''$ con $z' \in C_q(X \setminus U)$ e $z'' \in C_q(A)$.
   Ma quindi $[z] = [z' + z''] = [z']$ in $C_q^{\mathcal{U}}(X, A)$, dunque $j([z']) = [z]$.
2. Mostriamo che j è iniettiva.
   Sia $z \in C_q(X \setminus U, A \setminus U)$ tale che $j([z]) = 0$ allora $z \in C_q^{\mathcal{U}}(A) =$, dunque, poiché $z \in C_q(X \setminus U)$ sarà nell'intersezione, cioè $z \in C_q(A \setminus U)$ e quindi $[z] = 0$ in $C_q(X \setminus U, A \setminus U)$.

□

Definizione 1.6. *(Coppia escissiva)*
*Una coppia (X_1, X_2) di spazi topologici si dice **escissiva** se le inclusioni:*

$$i_1 : (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1 \cup X_2), \quad i_2 : (X_2, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1)$$

inducono isomorfismi in omologia.

Lemma 1.2.
Sia (X_1, X_2) una coppia di spazi e $i : C_q(X_1) + C_q(X_2) \to C_q(X_1 \cup X_2)$ l'inclusione.

$$(X_1, X_2) \text{ escissiva} \iff i_* : H_q(X_1) + H_q(X_2) \to H_q(X_1 \cup X_2) \text{ è un isomorfismo}$$

Dimostrazione. Considero la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow C_q(X_1) \xrightarrow{i} C_q(X_1) + C_q(X_2) \xrightarrow{\pi} (C_q(X_1) + C_q(X_2))\,/C_q(X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0$$

Ma vale per il secondo teorema di isomorfismo

$$(C_q(X_1) + C_q(X_2))\,/C_q(X_1 \cap X_2) \cong C_q(X_2)/C_q(X_1 \cap X_2)$$

quindi

$$0 \longrightarrow C_q(X_1) \xrightarrow{i} C_q(X_1) + C_q(X_2) \xrightarrow{\pi} C_q(X_2)/C_q(X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0$$

Se verificassimo che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd}
H_{q+1}(X_2, X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & H_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"] & H_q(C_*(X_1) + C_*(X_2)) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & H_q(X_2, X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & H_{q-1}(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"] & H_q(C_*(X_1) + C_*(X_2)) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \\
H_q(X_1 \cup X_2, X_1) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_q(X_1 \cup X_2) \arrow[r] & H_q(X_1 \cup X_2, X_1) \arrow[r] & H_{q-1}(X_1) \arrow[r] & H_q(X_1 \cup X_2) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

A questo punto, se la coppia è escissiva allora ψ è isomorfismo e φ lo è per il lemma dei 5.
Se vale RHS allora φ è isomorfismo e quindi ψ è isomorfismo sempre per il lemma dei 5. □

Dimostrazione. (fine della dimostrazione di Mayer Vietoris)

□

1.5 Teoria omologica

Definizione 1.7. *(Categoria ammissibile)*
*Data una categoria $\mathcal{C}$, con oggetti $\mathcal{A}$ di coppie di spazi, si dice che $\mathcal{C}$ è **amissibile***

1. $(X, A) \in \mathcal{A} \implies (X, X), (A, A), (X, \emptyset), (A, \emptyset) \in \mathcal{A}$
2. $(X, A) \in \mathcal{A} \implies (X \times I, A \times I) \in \mathcal{A}$
3. $(P, \emptyset) \in \mathcal{A}$ *per ogni* P *punto*

Definizione 1.8. *(Teoria omologica)*
*Data una categoria $\mathcal{C}$ **ammissibile**, con oggetti $\mathcal{A}$ di coppie di spazi, una **teoria omologica** su $\mathcal{C}$ è il dato di:*

1. *Una famiglia di funtori covarianti* $H_q : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ *per ogni* $q \geq 0$
2. *Se* $(X, A) \in \mathcal{A}$, H_q *è naturale. (da aggiustare)*

tali che valgono i seguenti assiomi:

1. *(Successione della coppia) Per ogni* $(X, A) \in \mathcal{A}$ *esiste una successione esatta lunga in omologia:*
$$\cdots \to H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(A) \to \cdots$$
2. *(Invarianza omotopica) Siano* $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ *due mappe omotope in* $\mathcal{C}$.
Allora $H_q(f) = H_q(g) : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ *per ogni* $q \geq 0$
3. *(Escissione) Sia* $(X, A) \in \mathcal{A}$ *e* $U \subset A$ *tale che* $\bar{U} \subset \mathrm{Int}(A)$.
Allora l'inclusione $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ *induce un isomorfismo in omologia:*
$$i_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \to H_q(X, A)$$
per ogni $q \geq 0$.
4. *(Dimensionalità) Sia* P *un punto, allora* $H_q(P) = 0$ *per ogni* $q > 0$.
5. *(Coppia compatta)*

Teorema 1.9. *(Unicità della teoria omologica)*
Esiste un'unica teoria omologica su $\mathcal{C} = X|$supporti di complessi simplicali che soddisfa gli assiomi sopra elencati, ed è l'omologia singolare. Dunque i gruppi di omologia singolare, omologia simpliciale e omologia delta-simplicale sono isomorfi.

1.6 Jordan e Invarianza del dominio

Definizione 1.9. *Uno spazio topologico $X \cong D^n$ si dice **n-cella***

Definizione 1.10. *Uno spazio topologico X si dice **aciclico** se $\tilde{H}_q(X) = 0$ per ogni $q \geq 0$.*

Definizione 1.11. *Dato $A \subset X$ si dice che A **separa** X se $X \setminus A$ è sconnesso.*

Osservazione 1.3.
$A \subset X$ chiuso e X localmente connesso per archi.
$$A \text{ separa } X \iff \tilde{H}_0(X \setminus A) \neq 0$$
.

Teorema 1.10.
Se $B \subset S^n$ una k-cella, allora $S^n \setminus B$ è aciclico.

Dimostrazione.
Poiché $I^k \cong D^k$, consideriamo $B \cong I^k \subset S^n$ e dimostriamo per induzione su k.

1. Caso base $k = 0$.
Allora $B = \{x_0\}$ è un punto e dunque $S^n \setminus B \cong \mathbb{R}^n$ è aciclico.

2. Passo induttivo.
   Supponiamo che la tesi sia vera per $k-1$.
   Consideriamo $B = I^k = I^{k-1} \times I \subset S^n$ e sia $h : I^k \hookrightarrow S^n$.
   Siano $B_1 = h(I^{k-1} \times [0, 1/2))$ e $B_2 = h(I^{k-1} \times (1/2, 1])$.
   Se $C = B_1 \cap B_2 = h(I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$, vale:

$$(X \setminus B_1) \cup (X \setminus B_2) = X \setminus B$$

$$(X \setminus B_1) \cap (X \setminus B_2) = X \setminus C$$

   si ha dunque per Mayer-Vietoris la successione esatta lunga:

   da finire.

□

Teorema 1.11.
Dato $0 \leq k < n$, se $h : S^k \hookrightarrow S^n$ è un'immersione continua allora l'immagine $h(S^k)$ separa S^n, in particolare:

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus h(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n-k-1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione.
Sia $S^k = E_+^k \cup E_-^k$ dove E_+^k e E_-^k sono le due k-celle che compongono S^k.
Vale che $E_+^k \cap E_-^k \sim S^{k-1}$(si retraggono per deformazione sull'equatore).
Siano $A = S^n \setminus h(E_+^k)$ e $B = S^n \setminus h(E_-^k)$.
Vale che $A \cap B = S^n \setminus h(S^k)$ e $A \cup B = S^n \setminus h(S^{k-1})$.
Per Mayer-Vietoris si ha la successione esatta lunga:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_q\left(S^n \setminus h\left(S^k\right)\right) \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_q\left(S^n \setminus h\left(S^{k-1}\right)\right) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}\left(S^n \setminus h\left(S^k\right)\right) \longrightarrow 0 \xrightarrow{\cdots} \bullet$$

$\tilde{H}_q(A) \oplus \tilde{H}_q(B) = 0$ perché A e B sono aciclici (per il teorema precedente).
Quindi per esattezza vale:

$$H_q(S^n \setminus h(S^{k-1})) \cong H_{q-1}(S^n \setminus h(S^k))$$

Da questo punto:

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus h(S^k)) \cong \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus h(S^{k-1})) = \cdots = \tilde{H}_{q+k}(S^n \setminus h(S^0)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q+k = n-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Teorema 1.12 (Separazione di Jordan-Brouwer)**.**
Sia $h : S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ un'immersione continua.
Allora l'immagine $h(S^{n-1})$ separa S^n in due componenti connesse per archi K_1, K_2.
Inoltre $\partial K_1, \partial K_2 = h(S^{n-1})$

Dimostrazione. La prima parte segue dal teorema precedente immediatamente dato che

$$\tilde{H}_0(S^n \setminus h(S^{n-1})) = \mathbb{Z}$$

poiché $n - (n-1) - 1 = 0$.
La parte che resta da dimostrare è che i bordi delle due componenti sono uguali a $h(S^{n-1})$.
Innanzitutto vale $\partial K_1, \partial K_2 \subset h(S^{n-1})$ perché vale $\partial K_1 \cap K_2 = K_1 \cup \partial K_2$.
L'altro contenimento è più complicato.
Sia $x \in h(S^{n-1})$ e mostriamo che per ogni $U \subset S^n$ un intorno aperto di x, si ha $U \cap h(S^{n-1}) \neq \emptyset$.
Sia $A \subset U$ intorno aperto di x tale che $h(S^{n-1}) \setminus A \cong D^{n-1}$.
Intanto $S^n \setminus (h(S^{n-1}) \setminus A)$ è connesso per archi per il lemma precedente.
A questo punto se senza perdita di generalità supponiamo che $A \cap K_2 = \emptyset$, potrei scrivere:

$$S^n \setminus (h(S^{n-1}) \setminus A) = (K_1 \cup A) \cup K_2$$

Ma questo è assurdo perché il lato sinistro è connesso per archi mentre il lato destro no.
Dunque A interseca entrambe le componenti K_1 e K_2 e quindi $x \in \partial K_1$ e $x \in \partial K_2$.

□

Esempio 1.1. *(Sfera cornuta di Alexander) Esiste un'immersione continua $h : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che l'immagine $h(S^2)$ ha complementare non semplicemente connesso.*

Corollario 1.2.
Se $h : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'immersione continua allora continua a valere la tesi del teorema di separazione di Jordan-Brower.

Corollario 1.3. *(Teorema classico della curva di Jordan)*
Sia $h : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ un'immersione continua.
Allora l'immagine $h(S^1)$ separa $\mathbb{R}^2$ in due componenti connesse per archi K_1, K_2.
Inoltre $\partial K_1, \partial K_2 = h(S^1)$.
*K_1 è limitata ed è detto **interno** e K_2 non lo è ed è detto **esterno**.*

1.7 Classificazione delle 2-varietà

Definizione 1.12 (Omologia locale)**.** *Sia X uno spazio topologico e $x \in X$.*
*La **omologia locale** di X in x è definita come:*

$$H_q(X, X \setminus x) := H_q(X, X \setminus \{x\})$$

Lemma 1.3. *Sia X uno spazio topologico e A è un intorno di x.*
Allora vale:

$$H_q(X, X \setminus \{x\}) \cong H_q(A, A \setminus \{x\})$$

Dimostrazione.
Si può dimostrare usando l'escissione considerando $U = X \setminus A$.
A quel punto poiché $\bar{U} \subset X \setminus \{x\}$(vero perché A è intorno di x), si ha che l'inclusione:

$$i : (A, A \setminus \{x\}) \hookrightarrow (X, X \setminus \{x\})$$

induce un isomorfismo in omologia. □

Osservazione 1.4. *Data la coppia (A, B) e $i : C \hookrightarrow B$ retratto di deformazione di B, si ha un isomorfismo in omologia:*

$$H_q(A, B) \cong H_q(A, C)$$

Segue dal lemma dei 5 e dalla successione della coppia. Questo permette di ricavare il teorema successivo in maniera ovvia.

Teorema 1.13. *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ entrambi aperti.*

$$U \cong V \iff n = m$$

Definizione 1.13 (n-varietà topologica)**.**
*Uno spazio topologico X di Hausdorff si dice **n-varietà topologica** se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x e $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto tali che*

$$x \in U \cong V \subset \mathbb{R}^n$$

.

2 Omologia cellulare

2.1 CW-complessi

Definizione 2.1 (CW-complessi)**.** *Si dice che uno spazio topologico X ha struttura di **CW-complesso** se può essere cosrtruito nella seguente maniera:*

1. *Si parte da un insieme discreto di punti X_0 detto **0 scheletro**.*

2. Si costruisce il ***n-scheletro*** X_n *a partire da* X_{n-1} *nella seguente maniera:*

$$X_n = X_{n-1} \cup \bigcup_{\alpha \in S_n} \bar{e}^n_\alpha$$

dove e^n_α *sono n-celle attaccate tramite mappe continue*

$$\varphi^n_\alpha : \partial D^n \cong S^{n-1} \to X_{n-1}$$

dette ***funzioni di attaccamento****, che identificano il bordo della n-cella con una parte di* X_{n-1}*. La funzione di attaccamento si può estendere ad una funzione continua:*

$$\Phi^n_\alpha : D^n \to X_n$$

detta ***funzione caratteristica****, tale che*

$$\Phi^n_\alpha\big|_{\mathrm{Int}(D^n)} : \mathrm{Int}(D^n) \xrightarrow{\cong} e^n_\alpha,$$

ovvero Φ^n_α *ristretto a* $\mathrm{Int}(D^n)$ *è un omeomorfismo sulla sua immagine* e^n_α*.*

Osservazione 2.1.
$\varphi_\alpha(\partial D^n) \subset X_{n-1}$ *può non essere una* $(n-1)$*-cella.*
Se vale che $\varphi_\alpha(\partial D^n)$ *è una* $(n-1)$*-cella e* φ_α *sono tutti iniettivi, allora* X *si dice essere un* ***CW-complesso regolare****.*

Proposizione 2.1.
Sia X *un CW-complesso, se* $K \subset X$ *è compatto allora* K *è contenuto in un sottocomplesso di* X *finitio.*

Teorema 2.1 (Definizione alla Whitehead di CW-complesso)**.** *X spazio topologico di Hausdorff è un CW-complesso se e solo se data esiste una famiglia* $\Phi_\alpha : D^n_\alpha \to X$ *di mappe continue tali che:*

1.

$$\Phi^n_\alpha\big|_{\mathrm{Int}(D^n)} : \mathrm{Int}(D^n) \xrightarrow{\cong} e^n_\alpha,$$

è omeomorfismo sulla sua immagine indicata con e^n_α*. E vale*

$$X = \bigcup_\alpha \Phi^n_\alpha(D^n_\alpha)$$

2.

$$\Phi^n_\alpha(\partial D^n) \subset X_{n-1},$$

dove

$$X_n := \bigcup_{k \leq n \alpha \in S_k} e^k_\alpha.$$

3.

$$C \subset X \text{ chiuso} \iff \Phi^{-1}_\alpha(C) \subset D^n_\alpha \text{ chiuso } \forall n \forall \alpha,$$

che è equivalente a chiedere che la topologia su X *è la meno fine a rendere continue tutte le* Φ^n_α*.*

Proposizione 2.2. *Per ogni* X_n *scheletro di un CW-complesso* X *esiste un intorno* U *di* X_n *in* X *tale che* U *si retragga per deformazione su* X_n*.*

Definizione 2.2 (Complesso di catene cellulare)**.**
Sia X *un CW-complesso con scheletri* $\{X_n\}_{n \geq 0}$*.*
Si può considerare la seguente composizione di funzioni continue:

$$d_q : H_q(X_q, X_{q-1}) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(X_{q-1}) \xhookrightarrow{i_*} H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2}),$$

ovvero $d_q = i \circ \partial_q$*.*
Si può dimostrare che $d_q \circ d_{q+1} = 0$ *e dunque:*
posto $C_q := H_q(X_q, X_{q-1})$*, si ottiene un complesso di catene* (C_*, d_*) *detto* ***complesso delle catene cellulari*** *di* X*.*

Proposizione 2.3.
Indicato con e^q_α le q-celle di X e $\mathring{e}{}^{\alpha}_{q} := \bar{e}^q_\alpha \setminus \mathrm{Int}(e^q_\alpha) = \Phi^q_\alpha(\partial D^q_\alpha)$, vale: La mappa:

$$\Phi_\alpha : (D^q_\alpha, \partial D^q_\alpha) \to (\bar{e}^q_\alpha, e^q_\alpha)$$

induce un isomorfismo in omologia:

$$\Phi_{\alpha *} : H_q(D^q_\alpha, \partial D^q_\alpha) \xrightarrow{\cong} H_q(\bar{e}^q_\alpha, \mathring{e}^q_\alpha)$$

Dimostrazione. Per $q = 0$ non c'è nulla da dimostrare(un punto è sempre omemorfo ad un altro punto). Per $q > 0$ si ha il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
H_q(D^q, \partial D^q) \arrow[r, "(\Phi_\alpha)_*"] \arrow[d, "\cong"'] & H_q(\bar{e}^q_\alpha, \mathring{e}^q_\alpha) \arrow[d, "\cong"] \\
H_q(D^q, D^q \setminus \{0\}) \arrow[d, "\cong"'] & H_q(\bar{e}^q_\alpha, \bar{e}^q_\alpha \setminus p) \arrow[d, "\cong"] \\
H_q(\mathrm{Int}(D^q), \mathrm{Int}(D^q) \setminus \{0\}) \arrow[r, "\cong"'] & H_q(e^q_\alpha, e^q_\alpha \setminus p)
\end{tikzcd}$$

Le mappe sopra sono omeomorfismi perché vengono da retrazioni per deformazione, mentre quelle laterali sotto per il teorema di escissione. La mappa in basso è un isomorfismo perché viene dall'omeomorfismo dato dalla mappa caratteristica Φ_α ristretto a $\mathrm{Int}(D^q)$. Quindi per commutatività del diagramma anche la mappa in alto è un isomorfismo. □

Proposizione 2.4.

$$H_q(X, X_{n-1}) \cong \bigoplus_{\alpha \in S_n} H_q(D^n, \partial D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^n & q = n \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione 2.2. *La mappa $d_q : H_q(X_q, X_{q-1}) \to H_{q-1}(X_q, X_{q-1})$ è la mappa di una successione della tripla.*

Lemma 2.1.

$$H_q(X_p) = 0 \quad \textit{se } q > p,$$

ovvero l'omologia di uno scheletro è nulla nelle dimensioni maggiori della sua.

Dimostrazione. Si fa □

Lemma 2.2.
L'inclusione $i : X_p \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo in omologia per ogni $q \leq p$:

$$i_* : H_q(X_p) \xrightarrow{\cong} H_q(X)$$

Teorema 2.2 (Omologia cellulare)**.**
Sia X un CW-complesso, e $H_q(C_*, d_*)$ l'omologia nel senso algebrico del complesso delle catene cellulari di X.
Allora

$$H_q(C_*, d_*) \cong H_q(X) \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. Per ogni q si considera il seguente diagramma:

□