

Appunti di Elementi di Topologia Algebrica

Simone Riccio

(dalle lezioni del Prof. Mario Salvetti)

12 novembre 2025

Indice

1 Omologia Singolare	1
1.1 Omologia ridotta	1
1.2 Omotopia di catene e di mappe continue	2
1.3 Relazione tra $H_1(X)$ e $\pi_1(X)$	3
1.4 Successione di Mayer-Vietoris	4
1.5 Teoria omologica	9
1.6 Jordan e Invarianza del dominio	10
1.7 Classificazione delle 2-varietà	11
2 Omologia cellulare	12
2.1 CW-complessi	12
3 Omologia e Coomologia a coefficienti in un modulo	16
3.1	16

1 Omologia Singolare

1.1 Omologia ridotta

Definizione 1.1 (Complesso di catene aumentato).

Sia X spazio topologico. Il **complesso di catene aumentato** $\tilde{C}(X)$ di X è il complesso di catene:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \tilde{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} \tilde{C}_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

dove $\epsilon : \tilde{C}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ è l'omomorfismo di aumentazione definito da:

$$\epsilon \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i$$

per ogni catena singolare $\sum_i n_i \sigma_i \in \tilde{C}_0(X)$.

Proposizione 1.1. Sia X spazio topologico, $H(X), H(\tilde{X})$ rispettivamente l'omologia singolare e l'omologia singolare ridotta con coefficienti in \mathbb{Z} .

Vale:

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(X) & n > 0 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} & n = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Il fatto di dimostra, applicando il teorema del morfismo di connessione alla successione esatta:

$$0 \rightarrow \tilde{C}(X) \rightarrow C(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Qui intendo con \mathbb{Z} il complesso di catene che in grado 0 è \mathbb{Z} e in tutti gli altri gradi è $\{0\}$. Dunque si ha in omologia la successione esatta lunga:

$$\cdots \rightarrow H_1(\mathbb{Z}) \cong \{0\} \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

e dato che la successione **scinde**, si ottiene l'isomorfismo voluto. □

Osservazione 1.1 (Cosa significa che la successione scinde?).

Vedi teorema 102 del libro di Algebra 2.

Una successione esatta corta:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

si dice che **scinde** se esiste un isomorfismo $\varphi : B \rightarrow A \oplus C$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \varphi & & \downarrow \text{id}_C \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus C & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ed è equivalente a dire che esiste un morfismo $s : C \rightarrow B$ tale che $g \circ s = \text{id}_C$ (sezione destra) oppure un morfismo $r : B \rightarrow A$ tale che $r \circ f = \text{id}_A$ (sezione sinistra).

1.2 Omotopia di catene e di mappe continue

Definizione 1.2 (Omotopia di complessi di catene).

Siano (C_*, ∂_*^C) e (D_*, ∂_*^D) due complessi di catene e $f_\#, g_\# : C_* \rightarrow D_*$ due mappe di complessi di catene.

Un'omotopia tra $f_\#$ e $g_\#$ è una famiglia di omomorfismi di gruppi abeliani:

$$p_q : C_q \rightarrow D_{q+1}$$

tale che:

$$\partial_q^D \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial_q^C = g_q - f_q$$

Proposizione 1.2 (Mappe di catene omotope di inducono la stessa mappa in omologia).

Siano (C_*, ∂_*^C) e (D_*, ∂_*^D) due complessi di catene e $f_\#, g_\# : C_* \rightarrow D_*$ due mappe di complessi di catene omotope.

Allora le mappe indotte $f_*, g_* : H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*)$ sono uguali per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione.

Sia $[c] \in H_n(C_*)$ una classe di omologia, con $c \in Z_n(C_*)$.

Allora:

$$g_n(c) - f_n(c) = \partial_n^D(p_n(c)) + p_{n-1}(\underbrace{\partial_n^C(c)}_{=0}) = \partial_n^D(p_n(c))$$

Dunque $g_n(c)$ e $f_n(c)$ differiscono per un bordo, e quindi rappresentano la stessa classe di omologia in $H_n(D_*)$.

Quindi $g_*([c]) = f_*([c])$ per ogni $[c] \in H_n(C_*)$, da cui si conclude che $g_* = f_*$. \square

Definizione 1.3 (Omotopia di mappe continue).

Siano X, Y spazi topologici e $f, g : X \rightarrow Y$ due mappe continue omotope.

Una omotopia tra f e g è una mappa continua:

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

tale che:

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

Teorema 1.1 (Invarianza omotopica dell'omologia singolare).

Siano X, Y spazi topologici e $f, g : X \rightarrow Y$ due mappe continue omotope.

Allora le mappe indotte $f_*, g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ sono uguali per ogni $n \geq 0$.

Di conseguenza:

$$X \sim Y \implies H_n(X) \cong H_n(Y) \text{ per ogni } n \geq 0.$$

Dimostrazione.

- Se F è un'omotopia tra f e g , definiamo le mappe:

$$\eta_s : X \rightarrow X \times I : x \mapsto (x, s) \quad s \in I$$

che formano un'omotopia tra η_0 e η_1 .

Si ha che $f = F \circ \eta_0$ e $g = F \circ \eta_1$.

Dunque se mostriamo che $(\eta_0)_* = (\eta_1)_*$, si ottiene per funzionalità che $f_* = g_*$.

2. Assumendo che due mappe omotope nel senso dei complessi di catene inducono la stessa mappa in omologia, dobbiamo mostrare che $(\eta_0)_\#$ e $(\eta_1)_\#$ sono omotope nel senso dei complessi di catene.
Vogliamo costruire un'omotopia di complessi di catene:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \longrightarrow & C_q(X) & \longrightarrow & C_{q-1}(X) & \longrightarrow \\ & \downarrow \eta_0\# & & \downarrow \eta_1\# & & \downarrow \eta_0\# & \downarrow \eta_1\# \\ \longrightarrow & C_{q+1}(Y) & \longrightarrow & C_q(Y) & \longrightarrow & C_{q-1}(Y) & \longrightarrow \end{array}$$

Cioè una mappa $p : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(Y)$ che chiameremo **operatore prisma** tale che:

$$\partial_{q-1}^Y \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial_q^X = \eta_1\# - \eta_0\#$$

3. Definiamo l'operatore prisma $p_q : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(Y)$ in maniera funtoriale come segue.
Se p_q è funtoriale allora per ogni $f : X \rightarrow Y$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} C_q(X) & \xrightarrow{p_q} & C_{q+1}(X \times I) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (f \times \text{id}_I)_* \\ C_q(Y) & \xrightarrow{p_q} & C_{q+1}(Y \times I) \end{array}$$

Sia ora $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ un q-simplesso singolare di X .

Vale che $\sigma = \sigma_*(\text{id}_{\Delta^q})$

Di conseguenza per funtorialità vale:

$$p_q(\sigma) = (\sigma \times \text{id}_I)_*(p_q(\text{id}_{\Delta^q}))$$

Per cui basta definire $p_q(\text{id}_{\Delta^q})$ per definire l'operatore prisma in generale.

4. Definiamo dunque $p_q(\text{id}_{\Delta^q}) : \Delta^{q+1} \rightarrow \Delta^q \times I$. Suddividiamo $\Delta^q \times I$ in $q+1$ simplessi $[v_0 \cdots v_i w_i \cdots w_q]$ per $i = 0, \dots, q$, dove:

$$\Delta^q \times \{0\} = [v_0 \cdots v_q], \quad \Delta^q \times \{1\} = [w_0 \cdots w_q]$$

e l'operatore prisma è definito come:

$$p_q(\text{id}_{\Delta^q}) := \sum_{i=0}^q (-1)^i [v_0 \cdots v_i w_i \cdots w_q]$$

Bisogna verificare che questa definizione soddisfi la proprietà richiesta:

$$\partial_{q-1}^{X \times I} \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial_q^X = \eta_1\# - \eta_0\#$$

Si verifica calcolando i due termini a sinistra e sommando.

□

1.3 Relazione tra $H_1(X)$ e $\pi_1(X)$

Per vedere i disegni di questa parte, che sono molto importanti, guardare le note di Simone Saccani.

Osservazione 1.2. *Un cammino chiuso $\sigma : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ può essere visto come 1-simplesso signolare $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ tale che $\partial\sigma = 0$.*

Mostriamo che la classe di σ in omologia di $H_1(X)$ dipende solo dalla classe di omotopia di σ in $\pi_1(X, x_0)$ e che la giunzione di cammini corrisponde alla somma in omologia.

1. Siano $\sigma \sim \sigma'$ lacce omotopi ad estremi fissi con omotopia $F : I \times I \rightarrow X$.

Dividiamo $I \times I$ in due simplessi: $[e_0 e_1 e'_1]$ e $[e_0 e'_1 e'_0]$ con:

$$e_0 = (0, 0), \quad e_1 = (1, 0), \quad e'_1 = (1, 1), \quad e'_0 = (0, 1)$$

Consideriamo la catena singolare: $c = F \circ [e_0 e_1 e'_1] - F \circ [e_0 e'_1 e'_0]$.

Si verifica che $\partial c = \sigma' - \sigma$, dunque $[\sigma] = [\sigma']$ in $H_1(X)$.

2. Sia $F : I \times I \rightarrow X$ una mappa continua tale che $F(t, s) = \sigma(t)$ per ogni $s \in I$.

A questo punto considerando la catena singolare $c = F \circ [e_0 e_1 e'_1] + F \circ [e_0 e'_1 e'_0]$ si verifica che $\partial c = \sigma + \sigma^{-1}$. Dunque $[\sigma^{-1}] = -[\sigma]$ in $H_1(X)$.

3. Infine vedere dalle dispense di Simone Saccani come si mostra che $[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau]$ in $H_1(X)$.

Teorema 1.2 (Relazione tra $H_1(X)$ e l'abelianizzato di $\pi_1(X, x_0)$).

Sia X spazio topologico con base puntata $x_0 \in X$.

Sia può definire $h' : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ come:

$$h'([\sigma]) = [\sigma]$$

Poiché $H_1(X)$ è abeliano, h' fattorizza attraverso l'abelianizzato di $\pi_1(X, x_0)$ dando luogo a un omomorfismo di gruppi:

$$h : \pi_1(X, x_0)^{ab} \rightarrow H_1(X)$$

Se X è connesso per archi allora h è un isomorfismo. Dunque:

$$H_1(X) \cong \pi_1(X, x_0)^{ab}$$

Dimostrazione. Si vuole costruire una inversa $l : H_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{ab}$.

Per ogni punto $x \in X$ indichiamo con u_x un cammino da x_0 a x .

Definiamo

$$l' : \begin{cases} C_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{ab} \\ \sigma \mapsto [u_{\sigma(0)} * \sigma * u_{\sigma(1)}^{-1}] \end{cases}$$

Per mostrare che l' induce una mappa in omologia, dobbiamo verificare che $l'(\partial c) = 0$ per ogni $c \in C_2(X)$.

Un 2-simplesso $\tau : \Delta^2 \rightarrow X$ definisce un'omotopia tra i cammini $\tau \circ [v_0 v_1]$, $\tau \circ [v_0 v_2]$ e $\tau \circ [v_1 v_2]$.

Si verifica che:

$$l'(\partial \tau) = [u_{\tau(v_0)} * \tau \circ [v_1 v_2] * u_{\tau(v_2)}^{-1}] * [u_{\tau(v_0)} * \tau \circ [v_0 v_2] * u_{\tau(v_2)}^{-1}] * [u_{\tau(v_1)} * \tau \circ [v_0 v_1] * u_{\tau(v_0)}^{-1}] = 0$$

Dunque l' induce una mappa in omologia $l : H_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{ab}$.

Si verifica facilmente che l e h sono inverse l'una dell'altra. \square

1.4 Successione di Mayer-Vietoris

Definizione 1.4 (Catene \mathcal{U} -piccole). Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X .

Una catena $c = \sum_{\sigma} \nu_{\sigma} \sigma \in C_q(X)$ si dice \mathcal{U} -piccola se

$$\forall \sigma \text{ con } \nu_{\sigma} \neq 0, \exists U \in \mathcal{U} : \text{Im}(\sigma) \subseteq U.$$

Si noti che se c è \mathcal{U} -piccola, allora anche il suo bordo ∂c è \mathcal{U} -piccolo.

Quindi le catene \mathcal{U} -piccole formano un sottocomplesso di catene di $C(X)$, che indichiamo con $C^{\mathcal{U}}(X)$.

Teorema 1.3 (Mayer-Vietoris).

Sia X spazio topologico, $A, B \subset X$ tali che $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.

Allora la successione esatta corta definita da

$$0 \rightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\psi} C_*(X) \rightarrow 0$$

dove $\varphi(c) = (c, c)$ e $\psi(a, b) = a - b$, induce in omologia la successione esatta lunga:

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

con $\Delta : H(X) \rightarrow H(A \cap B)$ di grado -1 .

Dimostrazione.

Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{\text{Int}(A), \text{Int}(B)\}$ di X .

1. Dimostriamo prima assumendo che $H_q(X) \cong H_q^{\mathcal{U}}(X)$ Vale per ogni q che $C_q^{\mathcal{U}}(X) = C_q(A) + C_q(B)$, dunque la mappa $\psi : C_q(A) \oplus C_q(B) \rightarrow C_q^{\mathcal{U}}(X)$ definita da $\psi(c) = (a, b)$ con $c = a - b$, è suriettiva. E dunque è esatta la successione:

$$0 \rightarrow C_q(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_q(A) \oplus C_q(B) \xrightarrow{\psi} C_q^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0$$

e per il teorema del morfismo di connessione si ottiene la successione esatta lunga in omologia:

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

□

Proposizione 1.3 (Omologia della sfera).

Sia S^n la sfera n -dimensionale.

Allora:

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $S_n \cong A \cup B$ dove $A := S^n \setminus \{(0, \dots, 1)\}, B := S^n \setminus \{(0, \dots, -1)\}$.

A, B sono contrabbili, dunque $\tilde{H}_q(A) \cong \tilde{H}_q(B) \cong 0$ per ogni q .

Mentre $A \cap B$ si retrae per deformazione sull'equatore della sfera e dunque $\tilde{H}_q(A \cap B) \cong \tilde{H}_q(S^{n-1})$.

Applicando la successione di Mayer-Vietoris si ottiene la successione esatta lunga:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(S^{n-1}) \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_q(S^n) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Da cui si ottiene l'isomorfismo:

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$$

Quindi dato che $S^0 = \{0, 1\}$ e dunque ha due componenti connesse, vale il caso base

$$H_n(S^0) := \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

da cui segue la tesi per induzione. □

Teorema 1.4 (Punto fisso di Brower).

Sia $f : D^n \rightarrow D^n$ continua allora $\exists x \in D^n$ tale che $f(x) = x$

Dimostrazione.

1. Dimostriamo che non esiste una retrazione $r : D^n \rightarrow \partial D^n \cong S^{n-1}$.

Supponiamo per assurdo che esista tale retrazione.

Allora vale che l'identità su S^{n-1} si fattorizza come:

$$S^{n-1} \xrightarrow{i} D^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$$

dove i è l'inclusione.

Per funzionalità in omologia si avrebbe che $(\text{id}_{S^{n-1}})_*$ si fattorizza come:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z}$$

assurdo.

2. Supponiamo ora che esista una mappa continua $f : D^n \rightarrow D^n$ senza punti fissi.

Allora possiamo definire una retrazione $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ come:

$$r(x) = \text{intersezione tra } S^{n-1} \text{ e la retta che congiunge } f(x) \text{ e } x$$

Ma questo contraddice il punto precedente.

□

Proposizione 1.4.

Sia $\deg : [S^n, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$ il grado di una mappa continua $f : S^n \rightarrow S^n$.

Se $f : S^n \rightarrow S^n$ è senza punti fissi allora f è omotopa alla mappa antipodale e quindi $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia senza punti fissi.

Allora possiamo definire un'omotopia tra f e la mappa antipodale $a : S^n \rightarrow S^n$ come:

$$F : S^n \times I \rightarrow S^n$$

(Non mi è chiaro come continuare questa dimostrazione) Dunque per invarianza omotopica dell'omologia singolare vale che $\deg(f) = \deg(a) = (-1)^{n+1}$. □

Teorema 1.5 (Palla pelosa).

Sia $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ continua e tale che $v(x)$ sia ortogonale a x e tangente ad S^n .

Definizione 1.5 (Escissione).

Siano $U \subset A \subset X$ e l'inclusione $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$.

Si dice che U può essere **escissa** da (X, A) se l'omomorfismo indotto in omologia:

$$i_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_q(X, A)$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$.

Teorema 1.6 (Teorema di escissione).

Siano $A \subset X$ e $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$.

Allora U può essere escissa da (X, A) .

Dimostrazione. Si definiscono due mappe di complessi di catene:

$$\text{sd} : C_q(X) \rightarrow C_q(X) \quad \text{e} \quad T : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$$

osservando che per funzionalità basta definire $\text{sd}(\text{id}_{\Delta^q})$ e $T(\text{id}_{\Delta^q})$.

Sia B_q il baricentro di Δ^q , e se $\sigma = [v_0 \cdots v_{q-1}]$ un $(q-1)$ -simplesso allora $B_q\sigma = [B_q v_0 \cdots v_{q-1}]$ è il q -simplesso ottenuto aggiungendo il baricentro come vertice.

Si definiscono $\text{sd}(\text{id}_{\Delta^q})$ e $T(\text{id}_{\Delta^q})$

$$\text{sd}(\text{id}_{\Delta^q}) = \begin{cases} \text{id}_{\Delta^0} & q = 0 \\ B_q \text{sd}(\partial \Delta^q) & q > 0 \end{cases}$$

$$T(\text{id}_{\Delta^q}) = \begin{cases} 0 & q = 0 \\ B_q(\text{id}_{\Delta^q} - \text{sd}(\partial \Delta^q) - T(\partial \Delta^q)) & q > 0 \end{cases}$$

Si verifica che valgono le seguenti proprietà: La suddivisione è un morfismo di complessi di catene:

$$\partial_q \circ \text{sd} = \text{sd} \circ \partial_q$$

mentre T è un'omotopia di catene tra l'identità e la suddivisione:

$$\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q = \text{id}_{C_q(X)} - \text{sd}_q$$

Dunque $\text{sd}_* \equiv \text{id}_*$ in omologia.

Lemma 1.1.

Sia σ un q -simplesso geometrico, se τ è un simplex in $\text{sd}(\sigma)$ allora

$$\text{diam}(\tau) \leq \frac{q}{q+1} \text{diam}(\sigma)$$

Proposizione 1.5.

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X .

Sia $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ un q -simplesso singolare, allora esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m \geq m_0, \quad sd^m(\sigma) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$$

Di conseguenza vale per ogni catena $c = \sum_{\sigma} \nu_{\sigma} \sigma \in C_q(X)$.

Teorema 1.7. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X .

La mappa di inclusione $i : C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_*(X)$ induce un isomorfismo in omologia:

$$i_* : H_q^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_q(X)$$

Dimostrazione. Mostriamo che la mappa di inclusione $i : C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_*(X)$ è surgettiva in omologia. Se infatti $z \in C_q(X)$ è un ciclo, esiste m_0 tale che $sd^{m_0}(z) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$, ma poiché sd_* è omotopa all'identità, si ha che $[z] = [sd^{m_0}(z)]$ in omologia.

Mostriamo ora che i_* è iniettiva, se infatti $i_*([z]) = 0$ per un ciclo $z \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$, esiste $c \in C_{q+1}(X)$ tale che $\partial c = z$.

$$[z] = [sd^{m_0}(z)] = [sd^{m_0}(\partial c)] = [\partial sd^{m_0}(c)] = [0]$$

in sostanza abbiamo dimostrato che se una catena è un bordo in $C_*(X)$, allora è omotopa ad una catena \mathcal{U} -piccola ed è il bordo di una catena \mathcal{U} -piccola. \square

Corollario 1.1.

Sia $A \subset X$. Sia $C_q^{\mathcal{U}}(X, A) := C_q^{\mathcal{U}}(X)/C_q^{\mathcal{U}}(A)$ il complesso di catene relativi formato da catene \mathcal{U} -piccole.

La mappa di inclusione $i : C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$ induce un isomorfismo in omologia:

$$i_* : H_q^{\mathcal{U}}(X, A) \rightarrow H_q(X, A)$$

Dimostrazione. Si considera il seguente diagramma commutativo con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{U}}(A) & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i_A & & \downarrow i_X & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dalle ipotesi si ha che i_A e i_X inducono isomorfismi in omologia.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q^{\mathcal{U}}(A) & \longrightarrow & H_q^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & H_q^{\mathcal{U}}(X, A) \longrightarrow H_{q-1}^{\mathcal{U}}(A) \longrightarrow H_{q-1}^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow \cdots \\ & & i_* \downarrow \cong & & i_* \downarrow \cong & & i_* \downarrow \cong \\ \cdots & \longrightarrow & H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) \longrightarrow H_{q-1}(A) \longrightarrow H_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Dunque per il lemma del cinque anche i_* è isomorfismo in omologia. \square

Definizione 1.6 (Buona coppia). Una coppia (X, A) di spazi topologici si dice **buona** se A è chiuso ed è retratto di deformazione di un suo intorno in X .

Corollario 1.2 (Buona coppia).

Se (X, A) è una buona coppia allora

$$H_q(X, A) \cong \tilde{H}_q\left(\frac{X}{A}\right)$$

Dimostrazione.

$$\begin{array}{ccccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{\cong} & H_q(X, U) & \xrightarrow{\cong} & H_q(X \setminus A, U \setminus A) \\ \cong \downarrow & & & & \cong \downarrow \\ H_q(X/A, [A]) & \xrightarrow{\cong} & H_q(X \setminus A, \pi(U)) & \xrightarrow{\cong} & H_q\left(\frac{X}{A} \setminus [A], \pi(U) \setminus [A]\right) \end{array}$$

Le frecce orizzontali a sinistra sono isomorfismi perché U e A sono omotopicamente equivalenti, mentre quelle a destra per il teorema di escissione.

Ci sarebbe da verificare che $\pi(U)$ è un intorno di $[A]$ in X/A e che $[A]$ è retratto di deformazione di $\pi(U)$.

L'isomorfismo verticale a destra si ha perché la proiezione al quoziante su $X \setminus A$ è un omeomorfismo dato che stiamo togliendo A . Ne segue che esiste un isomorfismo verticale a sinistra.

Infine si nota che per ogni spazio topologico X vale

$$H_q(X, x_0) \cong \tilde{H}_q(X)$$

□

Teorema 1.8 (Lemma dei 5).

Sia il seguente diagramma commutativo con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 \longrightarrow A_5 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 \longrightarrow B_5 \end{array}$$

Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono isomorfismi allora anche α_3 è un isomorfismo.

Per finire la dimostrazione del teorema di Escissione. consideriamo $\mathcal{U} = \{X \setminus U, (A)\}$ un ricoprimento di X .

\mathcal{U} non è un ricoprimento aperto, ma contiene un ricoprimento aperto dato da $\mathcal{V} = \{X \setminus \bar{U}, \text{Int}(A)\}$.

Consideriamo:

$$C_q(X \setminus A, A \setminus U) \xrightarrow{j} C_q^{\mathcal{U}}(X, A) \xleftarrow{i} C_q(X, A)$$

Se dimostriamo che j è un isomorfismo di complessi di catene, allora dato che per il teorema precedente i induce un isomorfismo in omologia, si conclude che l'inclusione $j \circ i : C_q(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow C_q(X, A)$ induce un isomorfismo in omologia.

1. Mostriamo che j è surgettiva.

Sia $z \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$ allora $z = z' + z''$ con $z' \in C_q(X \setminus U)$ e $z'' \in C_q(A)$.

Ma quindi $[z] = [z' + z''] = [z']$ in $C_q^{\mathcal{U}}(X, A)$, dunque $j([z']) = [z]$.

2. Mostriamo che j è iniettiva.

Sia $z \in C_q(X \setminus U, A \setminus U)$ tale che $j([z]) = 0$ allora $z \in C_q^{\mathcal{U}}(A) = 0$, dunque, poiché $z \in C_q(X \setminus U)$ sarà nell'intersezione, cioè $z \in C_q(A \setminus U)$ e quindi $[z] = 0$ in $C_q(X \setminus U, A \setminus U)$.

□

Definizione 1.7. (Coppia escissiva)

Una coppia (X_1, X_2) di spazi topologici si dice **escissiva** se le inclusioni:

$$i_1 : (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1 \cup X_2), \quad i_2 : (X_2, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1)$$

inducono isomorfismi in omologia.

Lemma 1.2.

Sia (X_1, X_2) una coppia di spazi e $i : C_q(X_1) + C_q(X_2) \rightarrow C_q(X_1 \cup X_2)$ l'inclusione.

(X_1, X_2) escissiva $\iff i_* : H_q(X_1) + H_q(X_2) \rightarrow H_q(X_1 \cup X_2)$ è un isomorfismo

Dimostrazione. Considero la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow C_q(X_1) \xrightarrow{i} C_q(X_1) + C_q(X_2) \xrightarrow{\pi} (C_q(X_1) + C_q(X_2)) / C_q(X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0$$

Ma vale per il secondo teorema di isomorfismo

$$(C_q(X_1) + C_q(X_2)) / C_q(X_1 \cap X_2) \cong C_q(X_2) / C_q(X_1 \cap X_2)$$

quindi

$$0 \longrightarrow C_q(X_1) \xrightarrow{i} C_q(X_1) + C_q(X_2) \xrightarrow{\pi} C_q(X_2)/C_q(X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0$$

Se verificassimo che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} H_{q+1}(X_2, X_1 \cap X_2) & \rightarrow & H_q(X) & \rightarrow & H_q(C_*(X_1) + C_*(X_2)) & \rightarrow & H_q(X_2, X_1 \cap X_2) \\ \psi \downarrow & & \text{id}_* \downarrow & & \varphi \downarrow & & \psi \downarrow \\ H_q(X_1 \cup X_2, X_1) & \rightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X_1 \cup X_2) & \longrightarrow & H_q(X_1 \cup X_2, X_1) \\ & & & & \varphi \downarrow & & \text{id}_* \downarrow \\ & & & & H_q(X_1 \cup X_2) & \rightarrow & H_{q-1}(X_1) \end{array}$$

A questo punto, se la coppia è escissiva allora ψ è isomorfismo e φ lo è per il lemma dei 5.

Se vale RHS allora φ è isomorfismo e quindi ψ è isomorfismo sempre per il lemma dei 5. \square

Dimostrazione. (fine della dimostrazione di Mayer Vietoris)

\square

1.5 Teoria omologica

Definizione 1.8. (*Categoria ammissibile*)

Data una categoria \mathcal{C} , con oggetti \mathcal{A} di coppie di spazi, si dice che \mathcal{C} è **ammissibile**

1. $(X, A) \in \mathcal{A} \implies (X, X), (A, A), (X, \emptyset), (A, \emptyset) \in \mathcal{A}$
2. $(X, A) \in \mathcal{A} \implies (X \times I, A \times I) \in \mathcal{A}$
3. $(P, \emptyset) \in \mathcal{A}$ per ogni P punto

Definizione 1.9. (*Teoria omologica*)

Data una categoria \mathcal{C} **ammissibile**, con oggetti \mathcal{A} di coppie di spazi, una **teoria omologica** su \mathcal{C} è il dato di:

1. Una famiglia di funtori covarianti $H_q : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ per ogni $q \geq 0$
2. Se $(X, A) \in \mathcal{A}$, H_q è naturale. (da aggiustare)

tali che valgono i seguenti assiomi:

1. (Successione della coppia) Per ogni $(X, A) \in \mathcal{A}$ esiste una successione esatta lunga in omologia:

$$\cdots \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(A) \rightarrow \cdots$$

2. (Invarianza omotopica) Siano $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ due mappe omotope in \mathcal{C} . Allora $H_q(f) = H_q(g) : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$ per ogni $q \geq 0$

3. (Escissione) Sia $(X, A) \in \mathcal{A}$ e $U \subset A$ tale che $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$. Allora l'inclusione $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo in omologia:

$$i_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_q(X, A)$$

per ogni $q \geq 0$.

4. (Dimensionalità) Sia P un punto, allora $H_q(P) = 0$ per ogni $q > 0$.

5. (Coppia compatta)

Teorema 1.9. (*Unicità della teoria omologica*)

Esiste un'unica teoria omologica su $\mathcal{C} = X|supporti$ di complessi simpliciali che soddisfa gli assiomi sopra elencati, ed è l'*omologia singolare*. Dunque i gruppi di omologia singolare, omologia simpliciale e omologia delta-simpliciale sono isomorfi.

1.6 Jordan e Invarianza del dominio

Definizione 1.10. Uno spazio topologico $X \cong D^n$ si dice **n-cellula**

Definizione 1.11. Uno spazio topologico X si dice **aciclico** se $\tilde{H}_q(X) = 0$ per ogni $q \geq 0$.

Definizione 1.12. Dato $A \subset X$ si dice che A **separa** X se $X \setminus A$ è sconnesso.

Osservazione 1.3.

$A \subset X$ chiuso e X localmente connesso per archi.

$$A \text{ separa } X \iff \tilde{H}_0(X \setminus A) \neq 0$$

Teorema 1.10.

Se $B \subset S^n$ una k-cellula, allora $S^n \setminus B$ è aciclico.

Dimostrazione.

Poiché $I^k \cong D^k$, consideriamo $B \cong I^k \subset S^n$ e dimostriamo per induzione su k .

1. Caso base $k = 0$.

Allora $B = \{x_0\}$ è un punto e dunque $S^n \setminus B \cong \mathbb{R}^n$ è aciclico.

2. Passo induttivo.

Supponiamo che la tesi sia vera per $k - 1$.

Consideriamo $B = I^k = I^{k-1} \times I \subset S^n$ e sia $h : I^k \hookrightarrow S^n$.

Siano $B_1 = h(I^{k-1} \times [0, 1/2])$ e $B_2 = h(I^{k-1} \times (1/2, 1])$.

Se $C = B_1 \cap B_2 = h(I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$, vale:

$$(X \setminus B_1) \cup (X \setminus B_2) = X \setminus B$$

$$(X \setminus B_1) \cap (X \setminus B_2) = X \setminus C$$

si ha dunque per Mayer-Vietoris la successione esatta lunga:

da finire.

□

Teorema 1.11.

Dato $0 \leq k < n$, se $h : S^k \hookrightarrow S^n$ è un'immersione continua allora l'immagine $h(S^k)$ separa S^n , in particolare:

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus h(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - k - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione.

Sia $S^k = E_+^k \cup E_-^k$ dove E_+^k e E_-^k sono le due k-celle che compongono S^k .

Vale che $E_+^k \cap E_-^k \sim S^{k-1}$ (si retraggono per deformazione sull'equatore).

Siano $A = S^n \setminus h(E_+^k)$ e $B = S^n \setminus h(E_-^k)$.

Vale che $A \cap B = S^n \setminus h(S^k)$ e $A \cup B = S^n \setminus h(S^{k-1})$.

Per Mayer-Vietoris si ha la successione esatta lunga:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus h(S^k)) \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus h(S^{k-1})) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(S^n \setminus h(S^k)) \longrightarrow 0 \longrightarrow \bullet$$

$$\tilde{H}_q(A) \oplus \tilde{H}_q(B) = 0 \text{ perché } A \text{ e } B \text{ sono aciclici (per il teorema precedente).}$$

Quindi per esattezza vale:

$$H_q(S^n \setminus h(S^{k-1})) \cong H_{q-1}(S^n \setminus h(S^k))$$

Da questo punto:

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus h(S^k)) \cong \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus h(S^{k-1})) = \cdots = \tilde{H}_{q+k}(S^n \setminus h(S^0)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q + k = n - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Teorema 1.12 (Separazione di Jordan-Brouwer).

Sia $h : S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ un'immersione continua.

Allora l'immagine $h(S^{n-1})$ separa S^n in due componenti connesse per archi K_1, K_2 .

Inoltre $\partial K_1, \partial K_2 = h(S^{n-1})$

Dimostrazione. La prima parte segue dal teorema precedente immediatamente dato che

$$\tilde{H}_0(S^n \setminus h(S^{n-1})) = \mathbb{Z}$$

poiché $n - (n - 1) - 1 = 0$.

La parte che resta da dimostrare è che i bordi delle due componenti sono uguali a $h(S^{n-1})$.

Innanzitutto vale $\partial K_1, \partial K_2 \subset h(S^{n-1})$ perché vale $\partial K_1 \cap K_2 = K_1 \cup \partial K_2$.

L'altro contenimento è più complicato.

Sia $x \in h(S^{n-1})$ e mostriamo che per ogni $U \subset S^n$ un intorno aperto di x , si ha $U \cap h(S^{n-1}) \neq \emptyset$.

Sia $A \subset U$ intorno aperto di x tale che $h(S^{n-1}) \setminus A \cong D^{n-1}$.

Intanto $S^n \setminus (h(S^{n-1}) \setminus A)$ è connesso per archi per il lemma precedente.

A questo punto se senza perdita di generalità supponiamo che $A \cap K_2 = \emptyset$, potrei scrivere:

$$S^n \setminus (h(S^{n-1}) \setminus A) = (K_1 \cup A) \cup K_2$$

Ma questo è assurdo perché il lato sinistro è connesso per archi mentre il lato destro no.

Dunque A interseca entrambe le componenti K_1 e K_2 e quindi $x \in \partial K_1$ e $x \in \partial K_2$.

□

Esempio 1.1. (*Sfera cornuta di Alexander*) Esiste un'immersione continua $h : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che l'immagine $h(S^2)$ ha complementare non semplicemente connesso.

Corollario 1.3.

Se $h : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'immersione continua allora continua a valere la tesi del teorema di separazione di Jordan-Brouwer.

Corollario 1.4. (*Teorema classico della curva di Jordan*)

Sia $h : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ un'immersione continua.

Allora l'immagine $h(S^1)$ separa \mathbb{R}^2 in due componenti connesse per archi K_1, K_2 .

Inoltre $\partial K_1, \partial K_2 = h(S^1)$.

K_1 è limitata ed è detto **interno** e K_2 non lo è ed è detto **esterno**.

1.7 Classificazione delle 2-varietà

Definizione 1.13 (Omologia locale). Sia X uno spazio topologico e $x \in X$.

La **omologia locale** di X in x è definita come:

$$H_q(X, X \setminus x) := H_q(X, X \setminus \{x\})$$

Lemma 1.3. Sia X uno spazio topologico e A è un intorno di x .

Allora vale:

$$H_q(X, X \setminus \{x\}) \cong H_q(A, A \setminus \{x\})$$

Dimostrazione.

Si può dimostrare usando l'escissione considerando $U = X \setminus A$.

A quel punto poiché $\bar{U} \subset X \setminus \{x\}$ (vero perché A è intorno di x), si ha che l'inclusione:

$$i : (A, A \setminus \{x\}) \hookrightarrow (X, X \setminus \{x\})$$

induce un isomorfismo in omologia.

□

Osservazione 1.4. Data la coppia (A, B) e $i : C \hookrightarrow B$ retratto di deformazione di B , si ha un isomorfismo in omologia:

$$H_q(A, B) \cong H_q(A, C)$$

Segue dal lemma dei 5 e dalla successione della coppia. Questo permette di ricavare il teorema successivo in maniera ovvia.

Teorema 1.13. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ entrambi aperti.

$$U \cong V \iff n = m$$

Definizione 1.14 (n -varietà topologica).

Uno spazio topologico X di Hausdorff si dice **n -varietà topologica** se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x e $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto tali che

$$x \in U \cong V \subset \mathbb{R}^n$$

2 Omologia cellulare

2.1 CW-complessi

Definizione 2.1 (CW-complessi). Si dice che uno spazio topologico X ha struttura di **CW-complesso** se può essere costruito nella seguente maniera:

1. Si parte da un insieme discreto di punti X_0 detto **0 scheletro**.
2. Si costruisce il **n -scheletro** X_n a partire da X_{n-1} nella seguente maniera:

$$X_n = X_{n-1} \cup \bigcup_{\alpha \in S_n} e_\alpha^n$$

dove e_α^n sono n -celle attaccate tramite mappe continue

$$\varphi_\alpha^n : \partial D^n \cong S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$$

dette **funzioni di attaccamento**, che identificano il bordo della n -cella con una parte di X_{n-1} . La funzione di attaccamento si può estendere ad una funzione continua:

$$\Phi_\alpha^n : D^n \rightarrow X_n$$

detta **funzione caratteristica**, tale che

$$\Phi_\alpha^n|_{\text{Int}(D^n)} : \text{Int}(D^n) \xrightarrow{\cong} e_\alpha^n,$$

ovvero Φ_α^n ristretto a $\text{Int}(D^n)$ è un omeomorfismo sulla sua immagine e_α^n .

Osservazione 2.1.

$\varphi_\alpha(\partial D^n) \subset X_{n-1}$ può non essere una $(n-1)$ -cella.

Se vale che $\varphi_\alpha(\partial D^n)$ è una $(n-1)$ -cella e φ_α sono tutti iniettivi, allora X si dice essere un **CW-complesso regolare**.

Proposizione 2.1.

Sia X un CW-complesso, se $K \subset X$ è compatto allora K è contenuto in un sottocomplesso di X finito.

Dimostrazione.

Si supponga per assurdo che esista una successione infinita $S = x_{i \in \mathbb{N}} \subset K$ tale che ogni x_i appartiene a una cella diversa.

Assumendo che $S \cap X_{n-1}$ sia chiuso si può dimostrare che $S \cap X_n$ è chiuso.

Infatti $\varphi^{-1}(S) \subset \partial D^n$ è chiuso perché ∂D^n è compatto, ma allora lo è anche $\Phi^{-1}(S) \subset D^n$ poiché al più stiamo aggiungendo un punto ad un chiuso.

Quindi S è chiuso in X . Allo stesso modo si dimostra che questo vale per ogni sottoinsieme di S , dunque S ha la topologia discreta.

Ma questo è assurdo perché S compatto con la topologia discreta implica che S è finito.

Si è mostrato che K è contenuto in un numero finito di celle, va mostrato che un numero finito di celle è contenuto in un sottocomplesso finito.

Poiché unione finita di sottocomplessi finiti è un sottocomplesso finito, basta mostrare che ogni cella è contenuta in un sottocomplesso finito.

Sia dunque e_α^n una n-cellula, per costruire un sottocomplesso finito che la contenga, si consideri l'immagine della funzione di attaccamento $\varphi_\alpha^n(\partial D^n) \subset X_{n-1}$.

Poiché ∂D^n è compatto, per l'ipotesi iniziale esiste un sottocomplesso finito $Y_{n-1} \subset X_{n-1}$ che contiene $\varphi_\alpha^n(\partial D^n)$.

Si può dunque costruire un sottocomplesso finito $Y_n = Y_{n-1} \cup e_\alpha^n$ che contiene e_α^n . \square

Proposizione 2.2.

I CW-complessi sono spazi normali, in particolare Hausdorff.

Dimostrazione.

Innanzitutto è facile mostrare che i punti sono chiusi, dato che vengono rimandati tramite Φ_α^n a punti di D^n che sono chiusi.

Supponiamo ora di avere due insiemi chiusi disgiunti $A, B \subset X$. \square

Teorema 2.1 (Definizione alla Whitehead di CW-complesso). *X spazio topologico di Hausdorff è un CW-complesso se e solo se data esiste una famiglia $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X$ di mappe continue tali che:*

1.

$$\Phi_\alpha^n|_{\text{Int}(D^n)} : \text{Int}(D^n) \xrightarrow{\cong} e_\alpha^n,$$

è omeomorfismo sulla sua immagine indicata con e_α^n . E vale

$$X = \bigcup_\alpha \Phi_\alpha^n(D_\alpha^n)$$

2.

$$\Phi_\alpha^n(\partial D^n) \subset X_{n-1},$$

dove

$$X_n := \bigcup_{k \leq n, \alpha \in S_k} e_\alpha^k.$$

3.

$$C \subset X \text{ chiuso} \iff \Phi_\alpha^{-1}(C) \subset D_\alpha^n \text{ chiuso } \forall n \forall \alpha,$$

che è equivalente a chiedere che la topologia su X è la meno fine a rendere continue tutte le Φ_α^n .

Proposizione 2.3. *Per ogni X_n scheletro di un CW-complesso X esiste un intorno U di X_n in X tale che U si retragga per deformazione su X_n .*

Definizione 2.2 (Complesso di catene cellulare).

Sia X un CW-complesso con scheletri $\{X_n\}_{n \geq 0}$.

Si può considerare la seguente composizione di funzioni continue:

$$d_q : H_q(X_q, X_{q-1}) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(X_{q-1}) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2}),$$

ovvero $d_q = i \circ \partial_q$.

Si può dimostrare che $d_q \circ d_{q+1} = 0$ e dunque:

posto $C_q := H_q(X_q, X_{q-1})$, si ottiene un complesso di catene (C_, d_*) detto **complesso delle catene cellulari** di X .*

Proposizione 2.4.

Indicato con e_α^q le q-celle di X e $e_\alpha^\circ := e_\alpha^q \setminus \text{Int}(e_\alpha^q) = \Phi_\alpha^q(\partial D_\alpha^q)$, vale: La mappa:

$$\Phi_\alpha : (D_\alpha^q, \partial D_\alpha^q) \rightarrow (e_\alpha^q, e_\alpha^\circ)$$

induce un isomorfismo in omologia:

$$\Phi_{\alpha*} : H_q(D_\alpha^q, \partial D_\alpha^q) \xrightarrow{\cong} H_q(e_\alpha^q, e_\alpha^\circ)$$

Dimostrazione. Per $q = 0$ non c'è nulla da dimostrare (un punto è sempre omemorfo ad un altro punto). Per $q > 0$ si ha il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(D^q, \partial D^q) & \xrightarrow{(\Phi_\alpha)_*} & H_q(e_\alpha^{\bar{q}}, e_\alpha^{\circ q}) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 H_q(D^q, D^q \setminus \{0\}) & & H_q(e_\alpha^{\bar{q}}, e_\alpha^{\bar{q}} \setminus p) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 H_q(\text{Int}(D^q), \text{Int}(D^q) \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\cong} & H_q(e_\alpha^q, e_\alpha^q \setminus p)
 \end{array}$$

Le mappe sopra sono omeomorfismi perché vengono da retrazioni per deformazione, mentre quelle laterali sotto per il teorema di escissione. La mappa in basso è un isomorfismo perché viene dall'omeomorfismo dato dalla mappa caratteristica Φ_α ristretto a $\text{Int}(D^q)$. Quindi per commutatività del diagramma anche la mappa in alto è un isomorfismo. \square

Proposizione 2.5.

$$H_q(X, X_{n-1}) \cong \bigoplus_{\alpha \in S_n} H_q(D^n, \partial D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^n & q = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione 2.2. La mappa $d_q : H_q(X_q, X_{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X_q, X_{q-1})$ è la mappa di una successione della tripla.

Lemma 2.1.

$$H_q(X_p) = 0 \quad \text{se } q > p,$$

ovvero l'omologia di uno scheletro è nulla nelle dimensioni maggiori della sua.

Dimostrazione. Si fa \square

Lemma 2.2.

L'inclusione $i : X_p \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo in omologia per ogni $q \leq p$:

$$i_* : H_q(X_p) \xrightarrow{\cong} H_q(X)$$

Teorema 2.2 (Omologia cellulare).

Sia X un CW-complesso, e $H_q(C_*, d_*)$ l'omologia nel senso algebrico del complesso delle catene cellulari di X .

Allora

$$H_q(C_*, d_*) \cong H_q(X) \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. Per ogni n si considera il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 \cong H_n(X_{n+1}, X_n) & & & & \\
 & & & & \nearrow & & & & \\
 & & & & H_n(X_{n+1}) \cong H_n(X) & & & & \\
 & & & & \nearrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & H_n(X_n) & \xrightarrow{j_n} & H_n(X_n, X_{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & \longrightarrow & \dots \\
 & \searrow \partial_{n+1} & \searrow & & \searrow \partial_n & \searrow j_{n-1} & & & \\
 & & H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_{n-1}(X_{n-1}) & & & & \\
 & & \dots \longrightarrow & & 0 \cong H_{n-1}(X_n) & & & &
 \end{array}$$

1. Poiché $H_n(X_{n+1}, X_n) = 0$, vale che $H_n(X_{n+1}) \cong \frac{H_n(X_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$.

2. Per il lemma precedente vale che $H_n(X_{n+1}) \cong H_n(X)$, dunque $H_n(X) \cong \frac{H_n(X_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$.

3. j_n è iniettiva dunque $H_n(X_n) \cong \text{Im}(j_n)$.

4. Poiché j_n è iniettiva e $d_{n+1} = j_n \circ \partial_{n+1}$, si ha che $\text{Im}(d_{n+1}) \cong \text{Im}(\partial_{n+1})$ e $\text{Ker}(d_{n+1}) \cong \text{Ker}(\partial_{n+1})$.
5. Dunque $H_n(X_n) \cong \text{Im}(j_n) \cong \text{Ker}(\partial_n) \cong \text{Ker}(d_n)$.
6. Infine $H_n(X) \cong \frac{H_n(X_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})} \cong \frac{\text{Ker}(d_n)}{\text{Im}(d_{n+1})} = H_n(C_*, d_*)$.

□

Esempio 2.1.

1. *Calcolo dell'omologia di $X = \mathbb{CP}^n$.*

Grazie alle carte affini è possibile dare una struttura di CW-complesso a \mathbb{CP}^n con una cella in ogni dimensione pari fino a $2n$:

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{CP}^{n-1} = \cdots = \mathbb{C}^n \cup \cdots \cup \mathbb{C} = \bigcup_{k=0}^n e^{2k}$$

Dunque il complesso delle catene cellulare è:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

e dunque l'omologia è:

$$H_q(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q \text{ pari}, 0 \leq q \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. *Calcolo dell'omologia di $X = \mathbb{RP}^n$.*

Anche in questo caso le carte affini inducono una struttura di CW-complesso con una cella in ogni dimensione fino a n :

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{RP}^{n-1} = \cdots = \mathbb{R}^n \cup \cdots \cup \mathbb{R} = \bigcup_{k=0}^n e^k.$$

Tuttavia c'è bisogno di teoria per il calcolo delle mappe di bordo del complesso cellulare. Assumendo risultati che vedremo in seguito, si ha che il complesso delle catene cellulare è:

$$0 \rightarrow H_q(X) = \mathbb{Z} \xrightarrow{1+(-1)^q} H_q(X) = \mathbb{Z} \xrightarrow{1+(-1)^{q-1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} H_0(X) = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \tilde{H}_0(X) = \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Dunque l'omologia è:

$$H_q(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & q \text{ dispari}, 1 \leq q < n \\ \mathbb{Z} & q = n \text{ e } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proposizione 2.6.

Dato X un CW-complesso, la coppia (X, X_{n-1}) è una buona coppia.

1

Proposizione 2.7 (Formula per la mappa di bordo cellulare).

Sia X un CW-complesso e $d_n : H_n(X_n, X_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$ la mappa di bordo cellulare.

Allora per ogni $\alpha \in S_n$ si ha:

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in S_{n-1}} \deg(\Delta_{\alpha\beta}^n) e_\beta^{n-1}$$

dove $\Delta_{\alpha\beta}^n : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ è la composizione:

$$S_\alpha^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha^n} X_{n-1} \xrightarrow{q_\beta} X_{n-1}/(X_{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}) \cong S_\beta^{n-1}$$

con q_β la proiezione canonica.

Dimostrazione. Si consideri il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(X_{n-1}/X_{n-2}, [X_{n-2}]) & \\
 d_q \nearrow & \uparrow j_* & & \downarrow \cong & \\
 H_n(X_n, X_{n-1}) & \xrightarrow{\partial_q} & H_{n-1}(X_{n-1}) & \xrightarrow{\pi} & \tilde{H}_{n-1}(X_{n-1}/X_{n-2}) \\
 (\Phi_\alpha)_* \uparrow & & (\varphi_\alpha)_* \uparrow & & \downarrow \pi_\beta \\
 H_n(D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(S_\alpha^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta}} & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1})
 \end{array}$$

□

Definizione 2.3 (Caratteristica di Eulero). *Per il teorema di struttura dei gruppi abeliani finitamente generati, ogni gruppo abeliano finitamente generato ha una parte libera ed una parte di torsione.*

Se si definisce il rango di un gruppo abeliano finitamente generato come il rango della sua parte libera, si possono definire i numeri di Betti di uno spazio X come

$$b_q(X) := \text{rank}(H_q(X)).$$

La caratteristica di Eulero di X è definita come:

$$\chi(X) := \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q b_q(X).$$

Definizione 2.4. *La caratteristica di Eulero si può definire analogamente per un complesso di catene (C_*, d_*) come:*

$$\chi(C_*, d_*) := \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \text{rank}(H_q(C_*, d_*)).$$

Proposizione 2.8. *Un complesso di catene (C_*, d_*) aciclico ha caratteristica di Eulero nulla.*

3 Omologia e Coomologia a coefficienti in un modulo

3.1

Definizione 3.1 (Prodotto tensoriale di gruppi abeliani).

Siano A, B due gruppi abeliani, si indica con $F(A, B)$ il gruppo abeliano libero generato da tutte le coppie (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

*Si definisce il **prodotto tensoriale** di A e B come il quoziente:*

$$A \otimes B := F(A, B)/R$$

dove R è il sottogruppo generato dagli elementi:

1. $(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$ per ogni $a_1, a_2 \in A$ e $b \in B$,
2. $(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$ per ogni $a \in A$ e $b_1, b_2 \in B$,

Teorema 3.1 (Proprietà universale del prodotto tensoriale).

Dati A, B gruppi abeliani, $A \times B$ prodotto diretto e $A \otimes B$ prodotto tensoriale, vale che:

Per ogni gruppo abeliano G e ogni applicazione bilineare $\varphi : A \times B \rightarrow G$ esiste un'unica applicazione di gruppi abeliani $\tilde{\varphi} : A \otimes B \rightarrow G$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A \times B & \xrightarrow{\varphi} & G \\
 \downarrow \otimes & \nearrow \tilde{\varphi} & \\
 A \otimes B & &
 \end{array}$$

Dimostrazione. Sia

$$\Phi : F(A, B) \rightarrow G : (a, b) \mapsto \varphi(a, b).$$

che esiste per proprietà universale dei gruppi liberi.

Poiché φ è bilineare, si ha che $R \subset \ker(\Phi)$, dunque esiste un'unica applicazione $\tilde{\varphi} : A \otimes B \rightarrow G$ tale che $\tilde{\varphi} \circ \otimes = \Phi$ per il primo teorema di isomorfismo. □

Osservazione 3.1. Per ogni gruppo abeliano G si ha che

$$\mathbb{Z} \otimes G \cong G,$$

dove l'isomorfismo è dato da $n \otimes g \mapsto ng$.

Proposizione 3.1. Data una successione esatta corta di gruppi abeliani:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} A' \xrightarrow{\pi} A'' \rightarrow 0,$$

si ha una successione di gruppi abeliani corta esatta a destra:

$$A \otimes G \xrightarrow{i \otimes \text{id}} A' \otimes G \xrightarrow{\pi \otimes \text{id}} A'' \otimes G \rightarrow 0.$$

che in generale non è esatta a sinistra.

Esempio 3.1. In generale la successione non è esatta a sinistra, infatti data la successione esatta corta:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2 \rightarrow 0,$$

si ha la successione:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{2 \otimes \text{id}} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi \otimes \text{id}} (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0,$$

ma vale che $2 \otimes 1 = 1 \otimes 2 = 1 \otimes 0 = 0$ e dunque la mappa a sinistra è nulla e di conseguenza non iniettiva.

Dimostrazione. La mappa $\pi \otimes \text{id}$ è suriettiva perché per ogni $(a'', g) = (\pi \otimes \text{id})(a', g) \in A'' \otimes G$ dove $a' \in A'$ è dato dalla surgettività di π . □

Esempio 3.2. 1. $A \otimes B \cong B \otimes A$

$$2. (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$$

$$3. Se A, B liberi con base rispettivamente \{a_i\}_{i \in I} e \{b_j\}_{j \in J}, allora A \otimes B è libero con base \{a_i \otimes b_j\}_{i \in I, j \in J}.$$

Definizione 3.2. Dato un complesso (C_*, ∂_*) di moduli liberi e un gruppo abeliano libero G , si definisce il **compleSSO tensore** come il complesso $(C_* \otimes G, \partial_* \otimes \text{id})$ dove:

$$(C_* \otimes G)_q := C_q \otimes G,$$

e la sua omologia

$$H_q(C_* \times G) := \frac{\ker(\partial_q \otimes 1)}{\text{Im}(\partial_{q-1} \otimes 1)}$$

Osservazione 3.2. Un morfismo di complessi $\varphi : C_* \rightarrow D_*$ induce un morfismo di complessi $\varphi \otimes \text{id} : C_* \otimes G \rightarrow D_* \otimes G$.

Osservazione 3.3. Data una successione esatta corta di complessi di moduli liberi:

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0,$$

si ha una successione esatta corta di complessi:

$$0 \rightarrow A_* \otimes G \xrightarrow{f_* \otimes \text{id}} B_* \otimes G \xrightarrow{g_* \otimes \text{id}} C_* \otimes G \rightarrow 0.$$

Attenzione: Se i moduli non sono liberi la successione potrebbe non essere esatta a sinistra.

Definizione 3.3 (Omologia a coefficienti in un gruppo abeliano).

Sia X uno spazio topologico e G un gruppo abeliano, si definisce l'**omologia di X con coefficienti in G** come:

$$H_q(X; G) := H_q(C_*(X) \otimes G),$$

dove $C_*(X)$ è il complesso delle catene singolari di X .

Definizione 3.4 (Funtore).