Appunti di Topologia Algebrica

Simone Riccio

1 giugno 2025

Indice

1 Gruppo Fondamentale

1.1 Motivazione

Una delle motivazioni che porta a definire il gruppo fondamentale è la necessità di distinguere due spazi topologici a meno di omeomorfismo.

Esempio 1.1.
Si consideri il disco

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

Al variare di n naturale i D^n non sono intuitivamente omeomorfi, tuttavia dimostrarlo usando solo la topologia generale è difficile.

È semplice mostrare che $D^1 \ncong D^n$ per $n \geq 2$, usando l'insieme delle componenti connesse. Infatti, per ogni $x \in D^n$ lo spazio topologico $D^n \setminus \{x\}$ è connesso per ogni $n \geq 2$, mentre $D^1 \setminus \{x\}$, essendo il segmento $[-1, 1]$ senza un punto, ha due componenti connesse.

Tale argomentazione non funziona già per provare a distinguere D^2 dai D^n con $n \geq 3$. Introduciamo quindi il gruppo fondamentale, che permetterà in futuro di distinguerli tutti.

Definizione 1.1 (Omotopia)**.**
Date due funzioni continue $f, g : X \to Y$ tra spazi topologici, si dice che f e g sono ***omotope*** *se esiste una funzione*

$$H : I \times X \to Y$$

continua *e tale che:*

- $H(0, x) = f(x)$ *per ogni* $x \in X$;
- $H(1, x) = g(x)$ *per ogni* $x \in X$;
- $H(s, y) = H(s, x)$ *per ogni* $s \in I$ *e per ogni* $x, y \in X$ *tali che* $f(x) = f(y)$.

*Si dice che H è un'**omotopia** tra f e g e si scrive*

$$f \sim g.$$

Inoltre si può vedere un'omotopia come una famiglia di funzioni contiune:

$$\{f_s : X \to Y\}_{s \in I} \quad \text{con } f_s(x) = H(s, x).$$

Che rappresentano una deformazione continua di f in g.

Definizione 1.2 (Omotopia di cammini a estremi fissi).
*Due cammini $\gamma_0, \gamma_1 : I \to X$ si dicono **omotopi (a estremi fissi)** se esiste una funzione*

$$H : I \times I \to X$$

***continua** e tale che:*

- *$H(0,t) = \gamma_0(t)$ per ogni $t \in I$;*
- *$H(1,t) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in I$;*
- *$H(s,0) = H(s,1)$ per ogni $s \in I$.*

*Si dice che H è un'**omotopia di cammini a estremi fissi** e si scrive*

$$\gamma_0 \sim \gamma_1.$$

Infatti è facile verificare che l'essere omotopi a estremi fissi induce una relazione di equivalenza sull'insieme dei cammini in X.

Definizione 1.3 (Giunzione di cammini).
*Siano $f, g : I \to X$ due cammini in X con $f(1) = g(0)$, allora la **giunzione** di f e g è il cammino*

$$f * g : I \to X : t \mapsto \begin{cases} f(2t) & se\ 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & se\ \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Lemma 1.1 (Giunzione di cammini e omotopia).
Se $f \sim f'$ e $g \sim g'$, allora $f * g \sim f' * g'$.

Dimostrazione. Sia $H_f : I \times I \to X$ un'omotopia di f e f' e $H_g : I \times I \to X$ un'omotopia di g e g'.
Definiamo l'omotopia

$$H : I \times I \to X : (s,t) \mapsto \begin{cases} H_f(2s,t) & \text{se } 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ H_g(2s-1,t) & \text{se } \frac{1}{2} < s \le 1. \end{cases}$$

che risulta continua. Infatti la continuità di H_f e H_g implica la continuità di H, essendo le due funzioni definite su due intervalli disgiunti. Inoltre si verifica facilmente che H soddisfa le condizioni richieste. □

Osservazione 1.1.
*Si noti che la giunzione di cammini non è definita su ogni coppia di cammini, ma solo su quelle che hanno il punto finale del primo uguale al punto iniziale del secondo. Tuttavia, se si considerano solo i cammini chiusi **che partono da uno stesso punto iniziale**, la giunzione è chiaramente sempre definita.*

Da ora in poi gli spazi topologici considerati saranno sempre localmente connessi.

Teorema 1.1 (Poincaré).
Se X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un punto fisso.
Il prodotto dato dalla giunzione di cammini induce una struttura di gruppo sulle classi di omotopia dei cammini chiusi in X aventi punto iniziale x_0.
*Tale gruppo è chiamato **gruppo fondamentale** di X in x_0 e si denota con $\pi_1(X, x_0)$.*
In tale gruppo l'elemento neutro è rappresentato dal cammino costante in x_0 e l'inverso di un cammino γ è il cammino

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$$

che è l'inverso rispetto alla giunzione di cammini.

Per la dimostrazione del teorema di Poincaré ci basta dimostrare prima un lemma.

Lemma 1.2. *(Riparametrizzazione di un cammino e omotopia)*
Sia $\gamma : I \to X$ un cammino in X e sia $\varphi : I \to I$ una funzione continua tale che $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$.
Allora $\gamma \circ \varphi : I \to X$ è un cammino in X e $\gamma \sim \gamma \circ \varphi$.

Dimostrazione. Basta mostrare che la funzione φ è omotopa all'identitaà id_I.
L'omotopia è data dalla famiglia di funzioni

$$\varphi_s : I \to I : t \mapsto (1-s)t + s\varphi(t).$$

E poi boh.. buco. □

Teorema di Poincarè.

- (Associatività)
  Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \to X$ tre cammini chiusi in X con punto iniziale x_0. Si ha che

  $$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3).$$

  Poiché $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ si può vedere come una Riparametrizzazione del cammino $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ e quinid usare il lemma.

- (Unità)
  L'elemento neutro del gruppo fondamentale è il cammino costante in x_0, che si denota con $e : I \to x_0$.
  Infatti, per ogni cammino $\gamma : I \to X$ si ha che $\gamma * e$ è la Riparametrizzazione di γ secondo la mappa

  $$\varphi : I \to I : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$

- (Inverso)
  Sia

  $$\gamma_s : I \to X : t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } 0 \leq t \leq s, \\ \gamma(s) & \text{se } s < t \leq 1. \end{cases}$$

  La famiglia di cammini $\{\gamma_s\}_{s \in I}$, che non sono lacci, rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ, tuttavia **non rappresenta un'omotopia ad estremi fissi** poiché $\gamma_s(1) \neq \gamma(1)$. Vale perociie $\gamma_s(0) = \gamma(0)$ cioè il punto iniziale è fisso.
  In modo analogo la famiglia di cammini data da

  $$\gamma_s^{-1}(t) := gamma_s(1-t)$$

  rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ^{-1}, ma non ad estremi fissi.
  A questo punto si verifica che la famiglia di **cammini chiusi** $\left\{\gamma_s * \gamma_s^{-1}\right\}_{s \in I}$ rappresenta un'omotopia **ad estremi fissi** tra il cammino costante in x_0 e il cammino $\gamma * \gamma^{-1}$.
  Si fa in maniera analoga per mostrare che $\gamma^{-1} * \gamma \sim e_{x_0}$

□

Esempio 1.2.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Siano $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ due cammini chiusi in $\mathbb{R}^n$ con punto iniziale x_0.
La famiglia di cammini chiusi definita da

$$f_s : I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$$

definisce un'omotopia ad estremi fissi tra α e β.
Piuìn generale, l'omotopia definita eìquella che per ogni punto dei cammini percorre al variare di s il segmento che unisce i due cammmini in quell'istante t, e dunque la stessa argomentazione vale per dimostrare che:

$$\forall X \subset \mathbb{R}^n \text{ convesso},$$
$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Proposizione 1.1 (Gruppo fondamentale di un connesso per archi)**.**
Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in X.$$

In altre parole, il gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi non dipende dal punto iniziale scelto.

Dimostrazione. Sia $f : I \to X$ un cammino tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, che esiste poiché X è connesso per archi. Tale cammino induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali in x_0 e x_1:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [f * \gamma * f^{-1}] \end{aligned}$$

con inversa data da

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f^{-1} * \gamma * f]. \end{aligned}$$

Infatti, si verifica prima di tutto la buona definizione:
Se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ sono due cammini chiusi in X, per il lemma della Riparametrizzazione, si ha che

$$f * \gamma_1 * f^{-1} \sim f * \gamma_2 * f^{-1}.$$

Inoltre, si verifica che l'immagine di un cammino chiuso in x_0 è un cammino chiuso in x_1 e viceversa.
Si si veririfica che le funzioni appena definite sono effettivamente degli omomorfismi di gruppo poichès̀i ha che:

$$f * \gamma_1 * \gamma_2 * f^{-1} \sim (f * \gamma_1 * f^{-1}) * (f * \gamma_2 * f^{-1})$$

usando l'associatività che anche se non dimostrata vale anche per cammini chiusi.
Infine, si verifica facilmente che le due mappe sono una l'inversa dell'altra. □

Osservazione 1.2.
L'isomorfismo tra i due gruppi fondamentali non è canonico, poiché dipende dalla scelta del cammino f tra i due punti x_0 e x_1.

Definizione 1.4 (Spazio semplicemente connesso)**.**
*Uno spazio topologico X si dice **semplicemente connesso** se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale, cioè*

$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in X.$$

Osservazione 1.3.
Se X è semplicemente connesso e $\alpha, \beta : I \to X$ sono due cammini allora

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha(1) = \beta(1) \implies \alpha \sim \beta$$

Dato che il cammino $\alpha * \beta^{-1}$ è chiuso e il gruppo fondamentale è banale, quindi

$$\alpha * \beta^{-1} \sim e_{x_0} \implies \alpha \sim \beta.$$

Osservazione 1.4 (La funtorialità del gruppo fondamentale)**.**
Siano X, Y due spazi topologici e $\varphi : X \to Y$ una mappa continua tale che $\varphi(x_0) = y_0$ per due punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.
Allora φ induce un omomorfismo di gruppi

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

definito da

$$\varphi_*([\gamma]) = [\varphi \circ \gamma]$$

Si verifica facilmente che la mappa è ben definita ed è un omomorifsmo di gruppi.
Inoltre, vale che, se $\varphi = \mathrm{id}_X$ allora $\varphi_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$ e se $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.
Nel linguaggio delle categorie quindi si dice che

$$\pi_1 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Grp} : X \mapsto \pi_1(X, x_0)$$

*è un **funtore** da **Top**, la categoria degli spazi topologici, a **Grp**, la categoria dei gruppi.*

Proposizione 1.2.
Se $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo tra spazi topologici, allora

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

è un isomorfismo di gruppi, dove $x_0 \in X$ e $y_0 = \varphi(x_0) \in Y$.

Dimostrazione.
Poiché φ è un omeomorfismo, essa è continua e ha un'inversa continua $\varphi^{-1} : Y \to X$.
Cioè $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ e $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_Y$, quindi segue dalla funtorialitá che

$$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = id_{\pi_1(X,x_0)} \quad \text{e} \quad \varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = id_{\pi_1(Y,y_0)}.$$

Quindi φ_* è un isomorfismo di gruppi, poiché ha un'inversa data da φ_*^{-1}. □

Definizione 1.5 (Spazi omotopicamente equivalenti)**.**
Due spazi topologici X e Y si dicono ***omotopicamente equivalenti*** *se esistono due funzioni continue*

$$f : X \to Y \quad e \quad g : Y \to X$$

tali che:

- *$g \circ f$ è omotopa all'identità su X;*
- *$f \circ g$ è omotopa all'identità su Y.*

Si denota con $X \simeq Y$ se X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Esempio 1.3.

1. *$\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè si dice che $\mathbb{R}^n$ è* ***contraibile****. Infatti sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ la funzione costante in 0, che è continua. e sia $\psi : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ anch'essa continua.*
   Si ha che $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\{0\}}$, mentre $\psi \circ \varphi$ è omotopa all'identità su $\mathbb{R}^n$ tramite l'omotopia definita da

   $$H : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (s, x) \mapsto sx.$$

2. *S^n è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$*
   Infatti se $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è l'inclusione di S^n in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e

   $$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

   Si ha che $i \circ \psi = \mathrm{id}_{S^n}$ e $\psi \circ i \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$ tramite l'omotopia

   $$H : I \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : (s, x) \mapsto (1 - s)x + s\frac{x}{\|x\|}.$$

3. *Il Nastro di Möbius è omotopicamente equivalente al cerchio S^1.*
   Infatti, sia M il Nastro di Möbius e sia $\varphi : M \to S^1$ la proiezione che manda ogni punto del nastro sul suo bordo. Si ha che φ è continua e suriettiva.
   Infatti se consideriamo il quadrato $Q = [-1, 1]\times[-1, 1]$, tale spazio è omotopicamente equivalente al segmento $[-1, 1]$ tramite l'inlcusione del segmento nel quadrato e la proiezione naturale del quadrato sul segmento. Identificando i lati opposti del quadrato in modo da ottenere il Nastro di Möbius, si ha che la proiezione del quadrato sul segmento induce una mappa continua e suriettiva dal Nastro di Möbius al cerchio, con omotopie che passano al quoziente.

Teorema 1.2. *(Spazi omotopicaamente equivalenti hanno gruppo fondamentale isomorfo)*
Siano X e Y spazi topologici ***connessi per archi*** *omotopicamente equivalenti, allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi:*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

per ogni coppia di punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.

Lemma 1.3.
Siano $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ due funzioni continue ***omotope*** *tra spazi topologici e siano $x_0 \in X$.*
Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1\left(Y, \varphi_0\left(x_0\right)\right) \arrow[dd, "\tau_f"] \\
\pi_1\left(X, x_0\right) \arrow[ur, "\varphi_{0*}"] \arrow[dr, "\varphi_{1*}"'] & \\
& \pi_1\left(Y, \varphi_1\left(x_0\right)\right)
\end{tikzcd}$$

dove $\tau_f : \pi_1\left(Y, \varphi_0\left(x_0\right)\right) \to \pi_1\left(Y, \varphi_1\left(x_0\right)\right)$ è l'isomorfismo indotto dal cammino $f : I \to Y : s \mapsto \varphi_s\left(x_0\right)$ e $\{\varphi_s \mid s \in I\}$ è l'omotopia tra φ_0 e φ_1.

Dimostrazione.
Si consideri la mappa

$$\tau_f^{-1} := \tau_{f^{-1}} : \pi_1\left(Y, \varphi_1\left(x_0\right)\right) \to \pi_1\left(Y, \varphi_0\left(x_0\right)\right) : g_Y \mapsto f * g_Y * f^{-1}.$$

Al variare di $s \in I$ si ha che

$$f_s : I \to Y : t \mapsto f\left(st\right)$$

rappresenta un'omotopia tra il cammino $f_0 : I \to \{\varphi_0\left(x_0\right)\}$ e il cammino f.
Quindi, se ora si considera g_X un cammino chiuso in $x_0 \in X$, allora la mappa

$$I \to \pi_1\left(Y, \varphi_0\left(x_0\right)\right) : s \mapsto f_s * \varphi_0\left(g_X\right) * f_s^{-1}$$

induce un'omotopia tra il cammino chiuso $\varphi_0\left(g_X\right)$ e il cammino chiuso $f\left(\varphi_1\left(g_X\right)\right)$, dunque vale che

$$\varphi_{0*}\left(g_X\right) = \tau_f\left(\varphi_{1*}\left(g_X\right)\right).$$

$\square$

del teorema.
Siano $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to X$ le funzioni continue che definiscono l'equivalenza omotopica tra X e Y.
Grazie al lemma precedenta, dato che vale $\psi \circ \varphi \sim \mathrm{id}$ si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\left(X, x_0\right) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[drr, "\mathrm{id}"'] & \pi_1\left(Y, \varphi\left(x_0\right)\right) \arrow[r, "\psi_*"] & \pi_1\left(X, \left(\psi \circ \varphi\right)\left(x_0\right)\right) \arrow[d, "\tau_f", "\cong"'] \\
& & \pi_1\left(X, x_0\right)
\end{tikzcd}$$

Cioè vale che $\tau_f \circ \psi_* \circ \varphi_* = \mathrm{id}$, quindi $\psi_* \circ \varphi_* = \tau_f^{-1}$, ma se la composizione di due mappe è bigettiva allora la prima φ_* è iniettiva e la seconda ψ_* è suriettiva, ragionando in maniera analoga per il verso opposto si ha che $\varphi_* \circ \psi_* = \tau_f$ e quindi ψ_* è iniettiva e φ_* è surgettiva.
Si conclude quindi che φ_* e ψ_* sono isomorfismi di gruppi.

$\square$

Da questo momento in poi, se X è uno spazio topologico connesso per archi, si denota con $\pi_1(X)$ il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X in un punto fissato.

Teorema 1.3 (Gruppo fondamentale del cerchio)**.**

$$\pi_1\left(S^1\right) \cong \mathbb{Z}.$$

Ed il cammino chiuso $t \mapsto e^{2\pi i t}$ rappresenta il generatore del gruppo fondamentale $\pi_1\left(S^1, 1\right)$.

Definizione 1.6 (Mappa esponenziale)**.**
Si definisce la mappa

$$\rho : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$$

Lemma 1.4 (Sollevamento di un cammino di S^1 in $\mathbb{R}$)**.**

1. *Per ogni cammino chiuso $f : I \to S^1$ con $f(0) = f(1)$,* ***esiste ed unico*** *un cammino(in generale non chiuso) $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ detto* ***sollevamento di f in*** *$\mathbb{R}$ tale che*

$$\tilde{f}(0) = 0 \quad e \quad \rho \circ \tilde{f} = f.$$

Il terminale mi dice di aver committato, ma su github la repository non sembra essere commi Ovvero il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\rho"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

2. *Inoltre se f_0, f_1 sono due cammini chiusi omotopi allora*

$$\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1) \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. (Lemma $\implies$ Teorema)
Dal lemma segue che la mappa:

$$\Phi : \pi_1\left(S^1, 1\right) \to \mathbb{Z} : [f] \mapsto \tilde{f}(1)$$

Il terminale mi dice di aver committato, ma su github la repository non sembra essere commi è ben definita, ed inoltre induce un omomorfismo di gruppi, poiché

$$\Phi\left([\gamma_1 * \gamma_2]\right) = \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(1) = \Phi\left([\gamma_1]\right) + \Phi\left([\gamma_2]\right).$$

. Si dimostra ora la surgettività di Φ, infatti dato il cammino chiuso $f_1 : I \to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$, si ha che

$$\Phi\left([f_1^n]\right) = n\tilde{f}_1(1) = n.$$

Infine, si verifica che il nucleo di Φ è l'insieme dei cammini chiusi omotopi al cammino costante in 1, dato che se $f : I \to S^1$ è un cammino chiuso tale che $\tilde{f}(1) = 0$, si ha che $\tilde{f}$ è un cammino chiuso in $\mathbb{R}$ che parte da 0 e torna a 0, quindi poiché $\mathbb{R}$ è semplicemente connesso, esiste un'omotopia $H : I \times I \to \mathbb{R}$ da $\tilde{f}$ al camminio costante in 0. Ma a questo punto si ha che $\rho \circ H$ è un'omotopia da f al cammino costante in 1, quindi f è omotopo al cammino costante in 1. □

Dimostrazione. (del teorema)
OK LA DIMOSTRAZIONE DI QUESTO FATTO FATTA DA TAMAS È RIDICOLA, MEGLIO FARE QUELLA PIUǴENERALE DI FRIGERIO QUANDO SARÀ POI

1. si consideri il ricoprimento di aperti di S^1 dato da due aperti U_0, U_1, archi che si intersecano in due componenti connesse per archi di S^1, una che contiene 1 e l'altra che contiene -1.
   DISEGNO DA FARE
   Considero le componenti connesse per archi di $\rho^{-1}(U_1)$, che formano un ricorpimento di aperti per $\rho^{-1}(U_1)$. La mappa ρ induce un omeomorfismo $\rho\big|_{\rho^{-1}(U_1)} : \rho^{-1}(U_1) \to U_1$(si vedrà che è un rivestimento di U_1)).
   Inoltre, le componenti connesse per archi di $f^{-1}(U_0), f^{-1}(U_1)$ formano un ricoprimento di aperti per I.
   L'intervallo I è uno spazio metrico compatto, e dunque ammette un numero di Lebesgue.
   Siano quindi $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ i punti di I tali che ciascun intervallo della $[t_i, t_{i+1}]$ è interamente contenuto in uno ed uno solo tra $f^{-1}(U_0)$ e $f^{-1}(U_1)$ e inoltre $t_i \in f^{-1}(U_0) \cap f^{-1}(U_1) \quad \forall i$.

□

Corollario 1.1.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(D^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$$

In particolare $D^2 \setminus \{0\}$ non è omotopicamente equivalente D^2(e quindi nemmeno omeomorfo).

Definizione 1.7 (Retrazione).
Sia $Y \subset X$ un sottospazio topologico. Si dice che una mappa continua $r : X \to Y$ è una retraazione se vale

$$r \circ i = \mathrm{id}_Y$$

dove $i : Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione di Y in X.
In altre parole, r è una retrazione se è continua e manda ogni punto di Y su se stesso.
Si dice che Y è ***retratto*** *in X se esiste una retrazione da X a Y.*

Esempio 1.4.

1. *In ogni spazio topologico X ogni punto $x_0 \subset X$ è un retratto di X.*
2. *Il segmento $I = [-1, 1]$ è un retratto di $\bar{D^2} = \bar{B}\,(0, 1)$, infatti la mappa*

$$r : \bar{D^2} \to I : (x, y) \mapsto x$$

è una retrazione, poiché r manda ogni punto del segmento su se stesso.

Lemma 1.5 (Retrazione e gruppo fondamentale).
Sia $Y \subset X$ un retratto di X e sia $x_0 \in Y$. Allora la mappa indotta dall'inclusione naturale

$$i_* : \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

è un omomorfismo di gruppi ***iniettivo***

Dimostrazione.

$$\begin{tikzcd} \pi_1\left(Y, x_0\right) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \pi_1\left(X, x_0\right) \arrow[r, "r_*"] & \pi_1\left(Y, x_0\right) \end{tikzcd}$$

Dunque $r_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y, x_0)}$, quindi i_* è iniettiva perché ha inversa sinistra.

□

Corollario 1.2.
S^1 non è un retratto di $\bar{D^2}$.

Dimostrazione.

$$\mathbb{Z} \quad \cong \quad \pi_1\left(S^1, 1\right) \xrightarrow{i_*} \pi_1\left(\bar{D^1}, 1\right) \quad \cong \quad \{1\}$$

e quindi i_* non è iniettiva, perché è forzata ad essere banale. □

Teorema 1.4 (Brouwer).
Ogni applicazione continua $f : D^2 \to D^2$ ammette un punto fisso.

Dimostrazione. La dimostrazione è per assurdo.
Si supponga che per ogni punto $x \in D^2$ si ha che $f(x) \neq x$.
Consideriamo la mappa continua

$$r : D^2 \to S^1 : x \mapsto \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}.$$

Questa mappa associa ad ogni punto $x \in D^2$ un punto sulla circonferenza unitaria S^1, che rappresenta la direzione del vettore che punta da x a $f(x)$.
Una tale mappa sarebbe una retrazione del disco unitario D^2 su S^1, poiché ogni punto di S^1 sarebbe raggiunto da un punto di D^2 che non si mappa su se stesso. **Vorrei metterci il fulmine** □

Teorema 1.5 (Fondamentale dell'algebra).
Ogni $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomio di grado $n \geq 1$ ammette almeno una radice complessa.

Dimostrazione.
Si supponga $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, allora $\forall r > 0$ la mappa

$$f_r(t) := \frac{f\left(r\cos(2\pi t) + ir\sin(2\pi t)\right)}{\left|f\left(r\cos(2\pi t) + ir\sin(2\pi t)\right)\right|}$$

definisce un cammino chiuso in $I \to S^1$ che parte da 1.
La famiglia di cammini chiusi $\{f_r | r \in I\}$ rappresenta un'omotopia tra il cammino costante $f_0 : I \to \{1\}$ e il cammino chiuso f_1.
Componendo inoltre con la mappa $I \to [0,r] : s \to sr$ otteniamo un'omotopia ad estremi fissi tra il cammino costante e il cammino chiuso f_r.
Quindi $\left[f_r^0\right] = 0 \in \mathbb{Z}$. Vogliamo ora dimostrare che $\left[f_r^1\right] \neq 0 \in \mathbb{Z}$ per ogni $r > 0$ e raggiungere una contraddizione.
Sia ora il polinomio

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

e per $s \in I$ si consideri

$$f_r^s(z) = z^n + s\left(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0\right).$$

Se $r > \max\{1, \sum |a_i|\}$ e $|z| = r$, allora

$$|z^n| = r^n > s\left(\sum |a_i|\right)\left|z^{n-1}\right| \geq \left|s\left(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\right)\right|$$

e quindi poiché vi è il maggiore stretto se $|z| = r$, $f_r^s(z) \neq 0$ per ogni $s \in I$.
In particolare vale

$$f_r^s(r\cos 2\pi t + ir\sin(2\pi t) \neq 0$$

E quindi è ben definita la famiglia di cammini chiusi

$$f_r^s : I \to S^1 : t \mapsto \frac{f_r^s\left(r\cos 2\pi t + ir\sin(2\pi t)\right)}{\left|f_r^s\left(r\cos 2\pi t + ir\sin(2\pi t)\right)\right|}.$$

che da un'omotopia tra f_r^0 e f_r^1.
$f^0 = z^n$ e quindi $f_r^0(t) = \cos(2n\pi t) + i\sin(2n\pi t)$ ma si avrebbe quindi che la classe di omotopia di f_r^0 è $n \in \mathbb{Z}$, ma ciò contraddice il fatto che $\left[f_r^0\right] = 0 \in \mathbb{Z}$. □

Teorema 1.6 (debole di Seifert-van Kampen)**.**
Siano $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1, X_2 \subset X$ sono aperti. Siano $i_1 : X_1 \hookrightarrow X$ e $i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ le inclusioni naturali.
Si suppongano $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ connessi per archi allora:

$$\pi_1(X, x_0) \text{è generato da } i_{1*}\left(\pi_1\left(X_1, x_0\right)\right) \text{ e } i_{2*}\left(\pi_1\left(X_2, x_0\right)\right) \text{ dove } x_0 \in X_1 \cap X_2.$$

Dimostrazione. □

Corollario 1.3.
S^n è semplicemente connesso per ogni $n \geq 1$.'

Corollario 1.4.
$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1} per ogni $n \geq 2$.
Quindi $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \{1\}$ per ogni $n \geq 2$

Corollario 1.5.
$\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \geq 3$.

Teorema 1.7. *(di Seifert-van Kampen)*
Siano $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1, X_2 \subset X$ sono aperti.
Siano $j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1, j_2, X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2, i_1 : X_1 \hookrightarrow X, i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ le inclusioni naturali.
Si suppongano $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ connessi per archi allora
$\forall G$ gruppo, e mappe $\varphi_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \to G$ e $\varphi_2 : \pi_1(X_2, x_0) \to G$ esiste un unica mappa

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$$

tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1\left(X_1, x_0\right) \arrow[dr, "i_{1*}"] \arrow[drr, "\varphi_1"] & & \\
\pi_1\left(X_1 \cap X_2, x_0\right) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & & \pi_1\left(X, x_0\right) \arrow[r, "\exists! \varphi"] & G \\
& \pi_1\left(X_2, x_0\right) \arrow[ur, "i_{2*}"] \arrow[urr, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

2 Rivestimenti