Appunti di Topologia Algebrica

Simone Riccio

3 giugno 2025

Indice

1 Gruppo Fondamentale

1.1 Omotopia

Una delle motivazioni che porta a definire il gruppo fondamentale è la necessità di distinguere due spazi topologici a meno di omeomorfismo.

Esempio 1.1.
Si consideri il disco

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

Al variare di n naturale i D^n non sono intuitivamente omeomorfi, tuttavia dimostrarlo usando solo la topologia generale è difficile.

È semplice mostrare che $D^1 \ncong D^n$ per $n \geq 2$, usando l'insieme delle componenti connesse. Infatti, per ogni $x \in D^n$ lo spazio topologico $D^n \setminus \{x\}$ è connesso per ogni $n \geq 2$, mentre $D^1 \setminus \{x\}$, essendo il segmento $[-1, 1]$ senza un punto, ha due componenti connesse.

Tale argomentazione non funziona già per provare a distinguere D^2 dai D^n con $n \geq 3$. Introduciamo quindi il gruppo fondamentale, che permetterà in futuro di distinguerli tutti.

Definizione 1.1 (Omotopia)**.**
*Date due funzioni continue $f, g : X \to Y$ tra spazi topologici, si dice che f e g sono **omotope** se esiste una funzione*

$$H : I \times X \to Y$$

***continua** e tale che:*

- *$H(0, x) = f(x)$ per ogni $x \in X$;*
- *$H(1, x) = g(x)$ per ogni $x \in X$;*
- *$H(s, y) = H(s, x)$ per ogni $s \in I$ e per ogni $x, y \in X$ tali che $f(x) = f(y)$.*

*Si dice che H è un'**omotopia** tra f e g e si scrive*

$$f \sim g.$$

Inoltre si può vedere un'omotopia come una famiglia di funzioni contiune:

$$\{f_s : X \to Y\}_{s \in I} \quad \text{con } f_s(x) = H(s, x).$$

Che rappresentano una deformazione continua di f in g.

Definizione 1.2 (Omotopia di cammini a estremi fissi)**.**
*Due cammini $\gamma_0, \gamma_1 : I \to X$ si dicono **omotopi (a estremi fissi)** se esiste una funzione*

$$H : I \times I \to X$$

***continua** e tale che:*

- *$H(0, t) = \gamma_0(t)$ per ogni $t \in I$;*

- *$H(1,t) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in I$;*
- *$H(s,0) = H(s,1)$ per ogni $s \in I$.*

*Si dice che H è un'**omotopia di cammini a estremi fissi** e si scrive*

$$\gamma_0 \sim \gamma_1.$$

Infatti è facile verificare che l'essere omotopi a estremi fissi induce una relazione di equivalenza sull'insieme dei cammini in X.

Definizione 1.3 (Giunzione di cammini).
*Siano $f, g : I \to X$ due cammini in X con $f(1) = g(0)$, allora la **giunzione** di f e g è il cammino*

$$f * g : I \to X : t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Lemma 1.1 (Giunzione di cammini e omotopia).
Se $f \sim f'$ e $g \sim g'$, allora $f * g \sim f' * g'$.

Dimostrazione. Sia $H_f : I \times I \to X$ un'omotopia di f e f' e $H_g : I \times I \to X$ un'omotopia di g e g'.
Definiamo l'omotopia

$$H : I \times I \to X : (s,t) \mapsto \begin{cases} H_f(2s,t) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ H_g(2s-1,t) & \text{se } \frac{1}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

che risulta continua. Infatti la continuità di H_f e H_g implica la continuità di H, essendo le due funzioni definite su due intervalli disgiunti. Inoltre si verifica facilmente che H soddisfa le condizioni richieste. □

Osservazione 1.1.
*Si noti che la giunzione di cammini non è definita su ogni coppia di cammini, ma solo su quelle che hanno il punto finale del primo uguale al punto iniziale del secondo. Tuttavia, se si considerano solo i cammini chiusi **che partono da uno stesso punto iniziale**, la giunzione è chiaramente sempre definita.*

1.2 Definizione del gruppo fondamentale

Da ora in poi gli spazi topologici considerati saranno sempre localmente connessi.

Teorema 1.1 (Poincaré).
Se X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un punto fisso.
Il prodotto dato dalla giunzione di cammini induce una struttura di gruppo sulle classi di omotopia dei cammini chiusi in X aventi punto iniziale x_0.
*Tale gruppo è chiamato **gruppo fondamentale** di X in x_0 e si denota con $\pi_1(X, x_0)$.*
In tale gruppo l'elemento neutro è rappresentato dal cammino costante in x_0 e l'inverso di un cammino γ è il cammino

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$$

che è l'inverso rispetto alla giunzione di cammini.

Per la dimostrazione del teorema di Poincaré ci basta dimostrare prima un lemma.

Lemma 1.2. *(Riparametrizzazione di un cammino e omotopia)*
Sia $\gamma : I \to X$ un cammino in X e sia $\varphi : I \to I$ una funzione continua tale che $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$. Allora $\gamma \circ \varphi : I \to X$ è un cammino in X e $\gamma \sim \gamma \circ \varphi$.

Dimostrazione. Basta mostrare che la funzione φ è omotopa all'identitaà id_I.
L'omotopia è data dalla famiglia di funzioni

$$\varphi_s : I \to I : t \mapsto (1-s)t + s\varphi(t).$$

E poi boh.. buco. □

Teorema di Poincarè.

- (Associatività)
  Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \to X$ tre cammini chiusi in X con punto iniziale x_0. Si ha che
  $$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3).$$
  Poiché $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ si può vedere come una Riparametrizzazione del cammino $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ e quinid usare il lemma.
- (Unità)
  L'elemento neutro del gruppo fondamentale è il cammino costante in x_0, che si denota con $e : I \to x_0$.
  Infatti, per ogni cammino $\gamma : I \to X$ si ha che $\gamma * e$ è la Riparametrizzazione di γ secondo la mappa
  $$\varphi : I \to I : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$
- (Inverso)
  Sia
  $$\gamma_s : I \to X : t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } 0 \leq t \leq s, \\ \gamma(s) & \text{se } s < t \leq 1. \end{cases}$$
  La famiglia di cammini $\{\gamma_s\}_{s \in I}$, che non sono lacci, rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ, tuttavia **non rappresenta un'omotopia ad estremi fissi** poiché $\gamma_s(1) \neq \gamma(1)$. Vale peroĉhe $\gamma_s(0) = \gamma(0)$ cioè il punto iniziale è fisso.
  In modo analogo la famiglia di cammini data da
  $$\gamma_s^{-1}(t) := gamma_s(1-t)$$
  rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ^{-1}, ma non ad estremi fissi.
  A questo punto si verifica che la famiglia di **cammini chiusi** $\left\{\gamma_s * \gamma_s^{-1}\right\}_{s \in I}$ rappresenta un'omotopia **ad estremi fissi** tra il cammino costante in x_0 e il cammino $\gamma * \gamma^{-1}$.
  Si fa in maniera analoga per mostrare che $\gamma^{-1} * \gamma \sim e_{x_0}$

□

Esempio 1.2.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Siano $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ due cammini chiusi in $\mathbb{R}^n$ con punto iniziale x_0.
La famiglia di cammini chiusi definita da

$$f_s : I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$$

definisce un'omotopia ad estremi fissi tra α e β.
Piuìn generale, l'omotopia definita eq̀uella che per ogni punto dei cammini percorre al variare di s il segmento che unisce i due cammmini in quell'istante t, e dunque la stessa argomentazione vale per dimostrare che:

$$\forall X \subset \mathbb{R}^n \text{ convesso},$$
$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Proposizione 1.1 (Gruppo fondamentale di un connesso per archi)**.**
Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in X.$$

In altre parole, il gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi non dipende dal punto iniziale scelto.

Dimostrazione. Sia $f : I \to X$ un cammino tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, che esiste poiché X è connesso per archi. Tale cammino induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali in x_0 e x_1:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [f * \gamma * f^{-1}] \end{aligned}$$

con inversa data da

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f^{-1} * \gamma * f]. \end{aligned}$$

Infatti, si verifica prima di tutto la buona definizione:
Se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ sono due cammini chiusi in X, per il lemma della Riparametrizzazione, si ha che

$$f * \gamma_1 * f^{-1} \sim f * \gamma_2 * f^{-1}.$$

Inoltre, si verifica che l'immagine di un cammino chiuso in x_0 è un cammino chiuso in x_1 e viceversa.
Si si veririfica che le funzioni appena definite sono effettivamente degli omomorfismi di gruppo poichèsi ha che:

$$f * \gamma_1 * \gamma_2 * f^{-1} \sim (f * \gamma_1 * f^{-1}) * (f * \gamma_2 * f^{-1})$$

usando l'associatività che anche se non dimostrata vale anche per cammini chiusi.
Infine, si verifica facilmente che le due mappe sono una l'inversa dell'altra. □

Osservazione 1.2.
L'isomorfismo tra i due gruppi fondamentali non è canonico, poiché dipende dalla scelta del cammino f tra i due punti x_0 e x_1.

Definizione 1.4 (Spazio semplicemente connesso)**.**
Uno spazio topologico X si dice ***semplicemente connesso*** *se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale, cioè*

$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in X.$$

Osservazione 1.3.
Se X è semplicemente connesso e $\alpha, \beta : I \to X$ sono due cammini allora

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha(1) = \beta(1) \implies \alpha \sim \beta$$

Dato che il cammino $\alpha * \beta^{-1}$ è chiuso e il gruppo fondamentale è banale, quindi

$$\alpha * \beta^{-1} \sim e_{x_0} \implies \alpha \sim \beta.$$

Osservazione 1.4 (La funtorialità del gruppo fondamentale)**.**
Siano X, Y due spazi topologici e $\varphi : X \to Y$ una mappa continua tale che $\varphi(x_0) = y_0$ per due punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.
Allora φ induce un omomorfismo di gruppi

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

definito da

$$\varphi_*([\gamma]) = [\varphi \circ \gamma]$$

Si verifica facilmente che la mappa è ben definita ed è un omomorifsmo di gruppi.
Inoltre, vale che, se $\varphi = \mathrm{id}_X$ allora $\varphi_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$ e se $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.
Nel linguaggio delle categorie quindi si dice che

$$\pi_1 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Grp} : X \mapsto \pi_1(X, x_0)$$

è un ***funtore*** *da* **Top**, *la categoria degli spazi topologici, a* **Grp**, *la categoria dei gruppi.*

Proposizione 1.2.
Se $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo tra spazi topologici, allora

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

è un isomorfismo di gruppi, dove $x_0 \in X$ e $y_0 = \varphi(x_0) \in Y$.

Dimostrazione.
Poiché φ è un omeomorfismo, essa è continua e ha un'inversa continua $\varphi^{-1} : Y \to X$.
Cioè $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ e $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_Y$, quindi segue dalla funtorialitá che

$$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = id_{\pi_1(X,x_0)} \quad \text{e} \quad \varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = id_{\pi_1(Y,y_0)}.$$

Quindi φ_* è un isomorfismo di gruppi, poiché ha un'inversa data da φ_*^{-1}. □

Definizione 1.5 (Spazi omotopicamente equivalenti)**.**
*Due spazi topologici X e Y si dicono **omotopicamente equivalenti** se esistono due funzioni continue*

$$f : X \to Y \quad e \quad g : Y \to X$$

tali che:

- *$g \circ f$ è omotopa all'identità su X;*
- *$f \circ g$ è omotopa all'identità su Y.*

Si denota con $X \simeq Y$ se X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Esempio 1.3.

1. *$\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè si dice che $\mathbb{R}^n$ è **contraibile**. Infatti sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ la funzione costante in 0, che è continua. e sia $\psi : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ anch'essa continua.*
   Si ha che $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\{0\}}$, mentre $\psi \circ \varphi$ è omotopa all'identità su $\mathbb{R}^n$ tramite l'omotopia definita da
   $$H : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (s, x) \mapsto sx.$$
2. *S^n è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$*
   Infatti se $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è l'inclusione di S^n in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e
   $$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$
   Si ha che $i \circ \psi = \mathrm{id}_{S^n}$ e $\psi \circ i \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ tramite l'omotopia
   $$H : I \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : (s, x) \mapsto (1 - s)x + s\frac{x}{\|x\|}.$$
3. *Il Nastro di Möbius è omotopicamente equivalente al cerchio S^1.*
   Infatti, sia M il Nastro di Möbius e sia $\varphi : M \to S^1$ la proiezione che manda ogni punto del nastro sul suo bordo. Si ha che φ è continua e suriettiva.
   Infatti se consideriamo il quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, tale spazio è omotopicamente equivalente al segmento $[-1, 1]$ tramite l'inlcusione del segmento nel quadrato e la proiezione naturale del quadrato sul segmento. Identificando i lati opposti del quadrato in modo da ottenere il Nastro di Möbius, si ha che la proiezione del quadrato sul segmento induce una mappa continua e suriettiva dal Nastro di Möbius al cerchio, con omotopie che passano al quoziente.

Teorema 1.2. *(Spazi omotopicaamente equivalenti hanno gruppo fondamentale isomorfo)*
*Siano X e Y spazi topologici **connessi per archi** omotopicamente equivalenti, allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi:*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

per ogni coppia di punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.

Lemma 1.3.
*Siano $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ due funzioni continue **omotope** tra spazi topologici e siano $x_0 \in X$.*
Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1\left(Y, \varphi_0\left(x_0\right)\right) \arrow[dd, "\tau_f"] \\
\pi_1\left(X, x_0\right) \arrow[ur, "\varphi_{0*}"] \arrow[dr, "\varphi_{1*}"'] & \\
 & \pi_1\left(Y, \varphi_1\left(x_0\right)\right)
\end{tikzcd}$$

dove $\tau_f : \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \to \pi_1(Y, \varphi_1(x_0))$ *è l'isomorfismo indotto dal cammino* $f : I \to Y : s \mapsto \varphi_s(x_0)$ *e* $\{\varphi_s \mid s \in I\}$ *è l'omotopia tra* φ_0 *e* φ_1*.*

Dimostrazione.
Si consideri la mappa

$$\tau_f^{-1} := \tau_{f^{-1}} : \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \to \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) : g_Y \mapsto f * g_Y * f^{-1}.$$

Al variare di $s \in I$ si ha che

$$f_s : I \to Y : t \mapsto f(st)$$

rappresenta un'omotopia tra il cammino $f_0 : I \to \{\varphi_0(x_0)\}$ e il cammino f.
Quindi, se ora si considera g_X un cammino chiuso in $x_0 \in X$, allora la mappa

$$I \to \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) : s \mapsto f_s * \varphi_0(g_X) * f_s^{-1}$$

induce un'omotopia tra il cammino chiuso $\varphi_0(g_X)$ e il cammino chiuso $f(\varphi_1(g_X))$, dunque vale che

$$\varphi_{0*}(g_X) = \tau_f(\varphi_{1*}(g_X)).$$

□

del teorema.
Siano $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to X$ le funzioni continue che definiscono l'equivalenza omotopica tra X e Y.
Grazie al lemma precedenta, dato che vale $\psi \circ \varphi \sim \mathrm{id}$ si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[rrd, "\mathrm{id}"'] & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[r, "\psi_*"] & \pi_1(X, (\psi \circ \varphi)(x_0)) \arrow[d, "\tau_f", "\cong"'] \\
 & & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Cioè vale che $\tau_f \circ \psi_* \circ \varphi_* = \mathrm{id}$, quindi $\psi_* \circ \varphi_* = \tau_f^{-1}$, ma se la composizione di due mappe è bigettiva allora la prima φ_* è iniettiva e la seconda ψ_* è suriettiva, ragionando in maniera analoga per il verso opposto si ha che $\varphi_* \circ \psi_* = \tau_f$ e quindi ψ_* è iniettiva e φ_* è surgettiva.
Si conclude quindi che φ_* e ψ_* sono isomorfismi di gruppi.

□

1.3 Primi gruppi fondamentali

Da questo momento in poi, se X è uno spazio topologico connesso per archi, si denota con $\pi_1(X)$ il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X in un punto fissato.

Teorema 1.3 (Gruppo fondamentale del cerchio)**.**

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Ed il cammino chiuso $t \mapsto e^{2\pi i t}$ *rappresenta il generatore del gruppo fondamentale* $\pi_1(S^1, 1)$*.*

Definizione 1.6 (Mappa esponenziale)**.**
Si definisce la mappa

$$\rho : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$$

Lemma 1.4 (Sollevamento di un cammino di S^1 in $\mathbb{R}$)**.**

1. *Per ogni cammino chiuso* $f : I \to S^1$ *con* $f(0) = f(1)$*,* ***esiste ed unico*** *un cammino(in generale non chiuso)* $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ *detto* ***sollevamento di** f **in** $\mathbb{R}$* *tale che*

   $$\tilde{f}(0) = 0 \quad e \quad \rho \circ \tilde{f} = f.$$

   Il terminale mi dice di aver committato, ma su github la repository non sembra essere commi
   Ovvero il seguente diagramma commuta:

   $$\begin{tikzcd}
   I \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[rd, "f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\rho"] \\
    & S^1
   \end{tikzcd}$$

2. *Inoltre se f_0, f_1 sono due cammini chiusi omotopi allora*

$$\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1) \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. (Lemma $\implies$ Teorema)
Dal lemma segue che la mappa:

$$\Phi : \pi_1\left(S^1, 1\right) \to \mathbb{Z} : [f] \mapsto \tilde{f}(1)$$

Il terminale mi dice di aver committato, ma su github la repository non sembra essere commi è ben definita, ed inoltre induce un omomorfismo di gruppi, poiché

$$\Phi\left([\gamma_1 * \gamma_2]\right) = \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(1) = \Phi\left([\gamma_1]\right) + \Phi\left([\gamma_2]\right).$$

. Si dimostra ora la surgettività di Φ, infatti dato il cammino chiuso $f_1 : I \to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$, si ha che

$$\Phi\left([f_1^n]\right) = n\tilde{f}_1(1) = n.$$

Infine, si verifica che il nucleo di Φ è l'insieme dei cammini chiusi omotopi al cammino costante in 1, dato che se $f : I \to S^1$ è un cammino chiuso tale che $\tilde{f}(1) = 0$, si ha che $\tilde{f}$ è un cammino chiuso in $\mathbb{R}$ che parte da 0 e torna a 0, quindi poiché $\mathbb{R}$ è semplicemente connesso, esiste un'omotopia $H : I \times I \to \mathbb{R}$ da $\tilde{f}$ al camminio costante in 0. Ma a questo punto si ha che $\rho \circ H$ è un'omotopia da f al cammino costante in 1, quindi f è omotopo al cammino costante in 1. □

Dimostrazione. (del teorema)
OK LA DIMOSTRAZIONE DI QUESTO FATTO FATTA DA TAMAS È RIDICOLA, MEGLIO FARE QUELLA PIUǴENERALE DI FRIGERIO QUANDO SARÀ POI

1. si consideri il ricoprimento di aperti di S^1 dato da due aperti U_0, U_1, archi che si intersecano in due componenti connesse per archi di S^1, una che contiene 1 e l'altra che contiene -1.
   DISEGNO DA FARE
   Considero le componenti connesse per archi di $\rho^{-1}(U_1)$, che formano un ricorpimento di aperti per $\rho^{-1}(U_1)$. La mappa ρ induce un omeomorfismo $\rho\big|_{\rho^{-1}(U_1)} : \rho^{-1}(U_1) \to U_1$(si vedrà che è un rivestimento di U_1)).
   Inoltre, le componenti connesse per archi di $f^{-1}(U_0), f^{-1}(U_1)$ formano un ricoprimento di aperti per I.
   L'intervallo I è uno spazio metrico compatto, e dunque ammette un numero di Lebesgue.
   Siano quindi $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ i punti di I tali che ciascun intervallo della $[t_i, t_{i+1}]$ è interamente contenuto in uno ed uno solo tra $f^{-1}(U_0)$ e $f^{-1}(U_1)$ e inoltre $t_i \in f^{-1}(U_0) \cap f^{-1}(U_1) \quad \forall i$.

□

Corollario 1.1.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(D^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$$

In particolare $D^2 \setminus \{0\}$ non è omotopicamente equivalente D^2(e quindi nemmeno omeomorfo).

Definizione 1.7 (Retrazione)**.**
Sia $Y \subset X$ un sottospazio topologico. Si dice che una mappa continua $r : X \to Y$ è una retraazione se vale

$$r \circ i = \mathrm{id}_Y$$

dove $i : Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione di Y in X.
In altre parole, r è una retrazione se è continua e manda ogni punto di Y su se stesso.
Si dice che Y è ***retratto*** *in X se esiste una retrazione da X a Y.*

Esempio 1.4. 1. *In ogni spazio topologico X ogni punto $x_0 \subset X$ è un retratto di X.*

2. *Il segmento $I = [-1, 1]$ è un retratto di $\bar{D^2} = \bar{B}\,(0, 1)$, infatti la mappa*

$$r : \bar{D^2} \to I : (x, y) \mapsto x$$

è una retrazione, poiché r manda ogni punto del segmento su se stesso.

Lemma 1.5 (Retrazione e gruppo fondamentale).
Sia $Y \subset X$ un retratto di X e sia $x_0 \in Y$. Allora la mappa indotta dall'inclusione naturale

$$i_* : \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

è un omomorfismo di gruppi ***iniettivo***

Dimostrazione.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y,x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "r_*"] & \pi_1(Y,x_0) \end{tikzcd}$$

Dunque $r_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,x_0)}$, quindi i_* è iniettiva perché ha inversa sinistra.

□

Corollario 1.2.
S^1 non è un retratto di $\bar{D}^2$.

Dimostrazione.

$$\mathbb{Z} \quad \cong \quad \pi_1\left(S^1, 1\right) \xrightarrow{i_*} \pi_1\left(\bar{D}^1, 1\right) \quad \cong \quad \{1\}$$

e quindi i_* non è iniettiva, perché è forzata ad essere banale. □

Teorema 1.4 (Brouwer).
Ogni applicazione continua $f : D^2 \to D^2$ ammette un punto fisso.

Dimostrazione. La dimostrazione è per assurdo.
Si supponga che per ogni punto $x \in D^2$ si ha che $f(x) \neq x$.
Consideriamo la mappa continua

$$r : D^2 \to S^1 : x \mapsto \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}.$$

Questa mappa associa ad ogni punto $x \in D^2$ un punto sulla circonferenza unitaria S^1, che rappresenta la direzione del vettore che punta da x a $f(x)$.
Una tale mappa sarebbe una retrazione del disco unitario D^2 su S^1, poiché ogni punto di S^1 sarebbe raggiunto da un punto di D^2 che non si mappa su se stesso. **Vorrei metterci il fulmine** □

Teorema 1.5 (Fondamentale dell'algebra).
Ogni $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomio di grado $n \geq 1$ ammette almeno una radice complessa.

Dimostrazione.
Si supponga $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, allora $\forall r > 0$ la mappa

$$f_r(t) := \frac{f\left(r\cos(2\pi t) + ir\sin(2\pi t)\right)}{\left|f\left(r\cos(2\pi t) + ir\sin(2\pi t)\right)\right|}$$

definisce un cammino chiuso in $I \to S^1$ che parte da 1.
La famiglia di cammini chiusi $\{f_r | r \in I\}$ rappresenta un'omotopia tra il cammino costante $f_0 : I \to \{1\}$ e il cammino chiuso f_1.
Componendo inoltre con la mappa $I \to [0, r] : s \to sr$ otteniamo un'omotopia ad estremi fissi tra il cammino costante e il cammino chiuso f_r.
Quindi $\left[f_r^0\right] = 0 \in \mathbb{Z}$. Vogliamo ora dimostrare che $\left[f_r^1\right] \neq 0 \in \mathbb{Z}$ per ogni $r > 0$ e raggiungere una contraddizione.
Sia ora il polinomio

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

e per $s \in I$ si consideri

$$f_r^s(z) = z^n + s\left(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0\right).$$

Se $r > \max\{1, \sum |a_i|\}$ e $|z| = r$, allora

$$|z^n| = r^n > s\left(\sum |a_i|\right)\left|z^{n-1}\right| \geq \left|s\left(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\right)\right|$$

e quindi poiché vi è il maggiore stretto se $|z| = r$, $f_r^s(z) \neq 0$ per ogni $s \in I$.
In particolare vale

$$f_r^s(r\cos 2\pi t + ir\sin(2\pi t) \neq 0$$

E quindi è ben definita la famiglia di cammini chiusi

$$f_r^s : I \to S^1 : t \mapsto \frac{f_r^s\left(r\cos 2\pi t + ir\sin(2\pi t)\right)}{\left|f_r^s\left(r\cos 2\pi t + ir\sin(2\pi t)\right)\right|}.$$

che da un'omotopia tra f_r^0 e f_r^1.
$f^0 = z^n$ e quindi $f_r^0(t) = \cos(2n\pi t) + i\sin(2n\pi t)$ ma si avrebbe quindi che la classe di omotopia di f_r^0 è $n \in \mathbb{Z}$, ma ciò contraddice il fatto che $\left[f_r^0\right] = 0 \in \mathbb{Z}$. □

1.4 Teorema di Seifert-Van Kampen e richiami di teoria dei gruppi

Teorema 1.6 (debole di Seifert-van Kampen)**.**
Siano $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1, X_2 \subset X$ sono aperti. Siano $i_1 : X_1 \hookrightarrow X$ e $i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ le inclusioni naturali.
Si suppongano $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ connessi per archi allora:

$$\pi_1(X, x_0) \text{è generato da } i_{1*}\left(\pi_1\left(X_1, x_0\right)\right) \text{ e } i_{2*}\left(\pi_1\left(X_2, x_0\right)\right) \text{ dove } x_0 \in X_1 \cap X_2.$$

Dimostrazione. □

Corollario 1.3.
S^n è semplicemente connesso per ogni $n \geq 1$.'

Corollario 1.4.
$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1} per ogni $n \geq 2$.
Quindi $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \{1\}$ per ogni $n \geq 2$

Corollario 1.5.
$\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \geq 3$.

Teorema 1.7. *(di Seifert-van Kampen)*
Siano $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1, X_2 \subset X$ sono aperti.
Siano $j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1, j_2, X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2, i_1 : X_1 \hookrightarrow X, i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ le inclusioni naturali.
Si suppongano $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ connessi per archi allora
$\forall G$ gruppo, e mappe $\varphi_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \to G$ e $\varphi_2 : \pi_1(X_2, x_0) \to G$ esiste un unica mappa

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$$

tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X_1, x_0) \arrow[dr, "i_{1*}"] \arrow[drr, "\varphi_1"] & & \\
\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\exists ! \varphi"] & G \\
 & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[ur, "i_{2*}"] \arrow[urr, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Il teorema di Van-Kampen necessità di un richiamo di teoria dei gruppi, che non è stato ancora fatto.

Definizione 1.8 (Gruppo libero generato da un insieme)**.**
*Dato un insieme X si indica $F(X)$ il **gruppo libero generato da** X il dato di un gruppo $F(X)$ ed una mappa iniettiva $s : X \hookrightarrow F(X)$ tale che la seguente propriet 'a universale sia soddisfatta:*
Per ogni gruppo G e per ogni mappa iniettiva $f : X \hookrightarrow G$ esiste un unico omomorfismo di gruppi

$$\bar{f} : F(X) \to G$$

tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\exists! \bar{f}"] & G \\ X \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Proposizione 1.3 (Unicità del gruppo libero).
Dalla definizione di gruppo libero via proprietà universale ne segue l'unicità a meno di isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Facile provaci un attimo □

Proposizione 1.4 (Costruzione del gruppo libero generato da un insieme).
Si costruisce ora $F(X)$ nel seguente modo:
Sull'insieme

$$F(X) = \{w \in X^* \mid w \text{ parola su } X\} / \sim$$

dove una parola $w \in X$ è una sequenza un prodotto formale tra simboli della fomra

$$w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$$

con $x_i \in X$ e $\epsilon_i \in \{1, -1\}$, e la relazione di equivalenza $\sim$ identifica due parole se e solo se sono uguali a meno di semplificare i fattori di forma $x_i^{\epsilon_i} x_i^{-\epsilon_i}$.
L'operazione di gruppo su $F(X)$ è data dalla concatenazione formale di parole.

Tale costruzione verifica la proprietà universale del gruppo libero generato da X.

Dimostrazione.
Per ogni mappa $f : X \hookrightarrow G$ in un gruppo G si definisce la mappa

$$\bar{f} : F(X) \to G : x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} \mapsto f(x_1)^{\epsilon_1} f(x_2)^{\epsilon_2} \dots f(x_n)^{\epsilon_n}$$

□

Lemma 1.6.
Ogni gruppo G è il quoziente di un gruppo libero.

Dimostrazione.
Se $\{g_i \mid i \in I\}$ si considera $X = \{x_i \mid i \in I\}$ e la mappa

$$\Phi : F(X) \to G : x_i \to g_i \qquad \text{assegnamento per generatori}$$

se i g_i sono un insieme di generatori per G allora Φ è surgettiva e si conclude per il primo teorema di omomorfismo tra gruppi. □

Definizione 1.9 (Presentazione di un gruppo).
*Data Φ come sopra, sia $N := \ker \Phi$ si può considerare un **sisterma di generatori per N come sottogruppo normale** $\{p_j \mid j \in J\}$, la **presentazione tramite generatori e relazioni di G** è la seguente:*

$$G := \langle g_i,\ i \in I \mid p_j,\ j \in J \rangle$$

Definizione 1.10 (Prodotto libero di gruppi).
*Siano G_1, G_2 due gruppi, si definisce il **prodotto libero di gruppi** $G_1 * G_2$ il dato di un gruppo $G_1 * G_2$ e mappe $\gamma_1 : G_1 \to_1 *G_2$, $\gamma_2 : G_2 \to_1 *G_2$ che soddisfano la seguente proprietà universale:*
Per ogni altro gruppo G e mappe $\phi_1 : G_1 \to G$ e $\phi_2 : G_2 \to G$ esiste un'unica mappa $\phi : G_1 * G_2 \to G$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[dr, "\gamma_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\ & G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists! \varphi"] & G \\ G_2 \arrow[ur, "\gamma_2"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & & \end{tikzcd}$$

*In teoria delle categorie tale costruzione è detta **coprodotto**.*

Proposizione 1.5 (Unicità del prodotto libero di gruppi).
Dalla definizione via proprietà universale segue che il prodotto libero è unico a meno di isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Da fare, facile □

Proposizione 1.6 (Costruzione del prodotto libero tra gruppi). *Siano*

$$G_1 = \langle g_i^1,\ i \in I_1 \mid p_j^1,\ j \in J_1 \rangle \quad G_2 = \langle g_i^2,\ i \in I_2 \mid p_j^2,\ j \in J_2 \rangle$$

le due presentazioni dei gruppi, allora la presentazione del prodotto libero è data da:

$$G_1 * G_2 = \left\langle \left\{ g_i^1 \right\} \cup \left\{ g_i^2 \right\} \;\middle|\; \left\{ p_j^1 \right\} \cup \left\{ p_j^2 \right\} \right\rangle$$

Osservazione 1.5.

1. *Il gruppo libero è generato dalle immagini dei generatori dei gruppi fattori.*
2. *Gli elementi di $G_1 * G_2$ sono parole in $G_1 \cup G_2$*
3. *Se X_1, X_2 sono due insiemi allora*

$$F(X_1 \cup X_2) = F(X_1) * F(X_2)$$

Definizione 1.11 (Prodotto amalgamato di gruppi).
Siano G_1, G_2 due gruppi e H un terzo gruppo, si definisce il ***prodotto amalgmato di gruppi su H*** *$G_1 *_H G_2$ il dato di un gruppo $G_1 *_H G_2$ e mappe $\beta_1 : H \to G_1$, $\beta_2 : H \to G_2, \gamma_1 : G_1 \to_1 *G_2$, $\gamma_2 : G_2 \to_1 *G_2$ che soddisfano la seguente proprietà universale:*
Per ogni altro gruppo G e mappe $\phi_1 : G_1 \to G$ e $\phi_2 : G_2 \to G$ esiste un'unica mappa $\phi : G_1 * G_2 \to G$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "\gamma_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
H \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & & G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists! \varphi"] & G \\
 & G_2 \arrow[ur, "\gamma_2"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposizione 1.7 (Costruzione del prodotto amalgamato se H è un gruppo libero).
Siano

$$G_1 = \langle g_i^1,\ i \in I_1 \mid p_j^1,\ j \in J_1 \rangle \quad G_2 = \langle g_i^2,\ i \in I_2 \mid p_j^2,\ j \in J_2 \rangle$$
$$H = \langle g_i^1,\ i \in I_1 \rangle \ \text{che non ha relazioni perché libero}$$

allora

$$G_1 *_H G_2 = \left\langle \left\{ g_i^1 \right\} \cup \left\{ g_i^2 \right\} \;\middle|\; \left\{ p_j^1 \right\} \cup \left\{ p_j^2 \right\} \cup \left\{ \beta_1(h_i) \beta_2(h_i)^{-1} \right\} \right\rangle$$

Proposizione 1.8 (Prodotto amalgamato di gruppi nel caso in cui uno dei fattori è banale).

Proposizione 1.9 (Van-Kampen visto come prodotto amalgamato di gruppi).

1.5 Applicazioni ed esempi

1. Calcolo del gruppo fondamentale del disco senza due punti:

$$D^2 \setminus \{x_0, x_1\}$$

Si scrive $D^2 \setminus \{x_1, x_2\} = X_1 \cap X_2$, dove X_1, X_2 sono due aperti di D^2 e l'intersezione $X_1 \cap X_2$ è semplicemente connessa.
Inoltre $X_i \cong D^2 \setminus \{x_i\}$ per $i = 1, 2$ e quindi

$$\pi_1(X_i, x_i) \cong \mathbb{Z}$$

Quindi se $x_0 \in X_1 \cap X_2$, usando la versione debole del teorema di Seifert-van Kampen si ha che

$$\pi_1\left(D^2 \setminus \{x_1, x_2\}, x_0\right) = \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$$

2. Calcolo del gruppo fondamentale del bouquet di due cerchio:

   Definizione 1.12 (Bouquet di due spazi topologici)**.**
   Siano X, Y due spazi topologici, $x_0 \in X, y_0 \in Y$ due punti.
   *Si definisce il **bouquet di** $(X, x_0))$ **e** $(Y, y_0))$ lo spazio topologico:*

   $$(X, x_0)) \vee (Y, y_0)) := (X \sqcup Y) \,/\, \{x_0, y_0\}$$

   Sia quindi $X = S^1 \vee S^1$ il bouquet di due cerchi.
   Dato un punto x_1 nel primo cerchio ed un punto x_2 nel secondo cerchio, si scrive $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1 = X \setminus x_2$ e $X_2 = X \setminus x_1$ sono due aperti di X. Si ha che $X_1 \cap X_2$ è semplicemente connesso, quindi si può applicare la versione debole del teorema di Seifert-van Kampen.

   $$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$$

3. Iterando gli argomenti sopracitati si può dimostrare che il gruppo fondamentale del disco senza n punti è F_n e il gruppo fondamentale del bouquet di n cerchi è F_n.

Definizione 1.13 (Grafo finito)**.**
*Uno spazio di **Hausdorff** X si dice grafo finito se:*
$\exists X_0 \subset X$ sottospazio finito e discreto tale che $X \setminus X_0$ è unione disgiunta di un numero finito di aperti $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tali che:
Ogni e_i è omeomorfo a un intervallo aperto $(0,1)$ e $|\bar{e_i} \setminus e_i| \leq 2$
Inoltre deve valere che:
se $|\bar{e_i} \setminus e_i| = 2$ allora

$$(\bar{e_i}, e_i) \cong ([0,1], (0,1))$$

*in tale caso si dice che e_i è un **arco** del grafo.*
se $|\bar{e_i} \setminus e_i| = 1$ allora

$$(\bar{e_i}, e_i) \cong \left(S^1, S^1 \setminus \{pt.\}\right)$$

*In tal caso si dice che e_i è un **ciclo** del grafo.*
*L'insieme X_0 è detto **insieme dei vertici** del grafo.*
*Un grafo si dice **albero** se è conesso e non contiene cicli.*

Teorema 1.8 (Gruppo fondamentale di un grafo finito)**.**
Sia X un grafo finito, allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo libero e finitamente generato

$$\pi_1(X, x_0) \cong F_n$$

dove n è il numero di cicli del grafo.

Lemma 1.7.
Gli alberi sono contraibili ad un punto, quindi sono semplicemente connessi.

Dimostrazione.
Se X è un albero, esiste un vertice $x_0 \in X_0$ tale che è connesso ad un solo altro vertice, altrimenti X conterrebbe un ciclo, sia e_0 un tale arco.
X si retrae per deformazione su $X \setminus (e_0 \cup \{x_0\})$, che è un grafo finito con un vertice in meno.
Per induzione su $n = |X_0|$, X è contraibile ad un punto. □

Lemma 1.8 (Esistenza dello "spanning tree" di un grafo)**.** *Ogni grafo finito X contiene un sottografo $Y \subset X$ che è un albero e ha gli stessi vertici di X, cioè $Y_0 = X_0$.*

Dimostrazione.
Per induzione su $n = |X_0|$, se $n = 1$ allora $Y = X$ è un albero.
Per il passo passo si scegla un vertice a caso $x_0 \in X_0$ e si considera il grafo Z ottenuto da X rimuovendo x_0 ed ogni arco che lo contenga.
Le componenti connesse di Z hanno numero di vertici strettamente inferiore ad n e quindi per ipotesi induttiva ammettono uno spanning tree.
Lo spanning tree di X si ottiene riunendo gli spanning tree delle componenti connesse di Z aggiungendo x_0 e gli archi rimossi in precedenza. □

del teorema.
Dato X un grafo, consideriamo il suo spanning tree Y che esiste per il secondo lemma. Per il secondo lemma, lo spazio ottenuto contraendo Y ad un punto $y_0 \in Y_0$ è un bouquet di n cerchi, dove n è il numero di cicli di X.
Si ha quindi che il gruppo fondamentale di X è isomorfo al gruppo fondamentale del bouquet di n cerchi, che è il gruppo libero su n generatori. □

1.6 Gruppi fondamentali di superfici topologiche compatte

Proposizione 1.10 (Gruppo fondamentale del prodotto di spazi)**.**

Proposizione 1.11 (Gruppo fondamentale del toro)**.**
Il gruppo fondamentale del toro è isomorfo al prodotto diretto di due gruppi ciclici:

$$\pi_1\left(T^2, x_0\right) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Dimostrazione.
La dimostrazione seguirebbe in maniera ovvia dalla proposizione precedente, però se ne da una dimostrazione alternativa più difficile ma più interessante.
Si considera il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ e si vede un toro come il quoziente di Q per la relazione di equivalenza che identifica di tutti i lati opposti.
Siano $y \in Q$ il centro del quadrato, $U = Q \setminus \{y\}$ e infine data la proiezione al quoziente $\pi : Q \to T^2$, si consideri $V = \pi\left(\mathring{Q}\right)$.
Dall'identificazione dei lati opposti segue che V è omeomorfo a $T^2 \setminus (S^1 \vee S^1)$.
Dato $x_0 \in U$ e $x_1 \in U \cap V$, si possono ora calcolare $\pi_1(U, x_0), \pi_1(V, x_1)$ e $\pi_1(U \cap V, x_1)$:

- Il quadrato senza il centro $U = Q \setminus \{y\}$ si retrae per deformazione sul bordo ∂Q.
  Le retrazioni per deformazione passano al quoziente e quindi U è omotopicamente equivalente a $\pi(\partial Q) \cong S^1 \vee S^1$.

- V è l'immagine tramite la proiezione al quoziente di $\mathring{Q}$, che è semplicemente connessa, dunque è semplicemente connesso.

- $U \cap V$ é omeomorfo a $D^2 \setminus \{0\}$ e dunque $\pi_1(U \cap V, x_1) \cong \mathbb{Z}$.

A questo punto si può applicare il teorema di Seifert-van Kampen nel caso in cui uno dei due fattori è banale, dato che $\pi_1(V) \cong 1$, e quindi si ha che

$$\pi_1\left(T^2, x_1\right) = \pi_1\left(U, x_1\right)/N,$$

dove N è il sottogruppo normale generato dall'immagine $i_*(\pi_1(U \cap V))$ dove $i : U \cap V \hookrightarrow U$ è l'inclusione naturale.
Il gruppo fondamentale $\pi_1(U, x_0)$ è generato da due generatori a, b che corrispondono alle classi di omotopia dei lacci che girano intorno ai cerchi.
Quindi se $f : I \to U$ è il cammino che collega x_0 ad x_1 vale che il gruppo fondamentale $\pi_1(U, x_1)$ è generato da $\tau_f(a)$ e $\tau_f(b)$.
D'altra parte $\pi_1(U \cap V, x_1)$ è generato da un laccio c che gira intorno ad y il centro del quadrato.
Deformando c sul bordo e passando poi al quoziente, si ha che

$$c \sim \tau_f(a * b * a^{-1} * b^{-1}).$$

Si ha quindi che l'immagine $i_*(\pi_1(U \cap V))$ è generata da $a * b * a^{-1} * b^{-1}$, si conclude quindi Che

$$\pi_1(T^2, x_1) = \langle a, b \mid [a, b] \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

dove $[a, b] = a * b * a^{-1} * b^{-1}$ è il commutatore. □

Proposizione 1.12 (Gruppo fondamentale del toro con due buchi).
Si indicherà con T_2^2 la superficie simile al toro, però con 2 buchi, cioè una doppia ciambella.

$$\pi_1(T_2^2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \rangle$$

Dimostrazione.
Il toro con due buchi $T = T_2^2$, si può identificare con la somma connessa

$$T = T_1 \# T_2,$$

dove T_1, T_2 sono due tori T^2, ottenuta incollando i due tori su dei dischi D^2 presi su ciascuno dei due tori.
Come si può ottenere questa costruzione come quoziente?
Si prendono due copie di Q. Si identificano tra di loro i lati opposti ai vertici di ciascun quadrato e per identificare i dischi detti prima, si considerano due lacci c_1, c_2 che partono da uno dei vertici di ciascun quadrato e si identificano tra loro.
In sostanza i due quadrati diventano due pentagoni, con due coppie di lati opposti identificate tra loro, ed con il lato c_1 di uno identificato con il lato c_2 dell'altro.
Perciò incollando c_1 e c_2 si ottiene un ottagono O i cui lati alterni sono identificati con direzione opposta.
Conoscendo la costruzione di T come quoziente, si può calcolare il suo gruppo fondamentale come nel caso di T^2.
Si consideri $U = T \setminus \{y\}$ e $V = i_*(\mathring{O})$
U è omotopicamente equivalente al bouqet di 4 cerchi dunque $\pi_1(U) \cong F_4$, mentre V è semplicemente connesso. $U \cap V \equiv D^2 \setminus 0$ e dunque $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ ed il generatore è

$$[a_1, b_1][a_2, b_2]$$

Quindi si conclude la tesi usando Van Kampen nel caso in cui uno dei fattori è semplicemente connesso.
□

Proposizione 1.13 (Gruppo fondamentale di un g-Toro).
Un toro con g si può vedere come somma connessa $T_1 \# T_2 \# \dots T_g$ di g tori, quindi in maniera analoga al caso precedente si può vedere come quozietne di un (2g-gon) O con la giusta identificazione.
Quindi il gruppo fondamentale di un toro con g buchi è dato da:

$$\pi_1(T_g^2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

Proposizione 1.14 (Gruppo fondamentale del piano proiettivo reale).
Il gruppo fondamentale del piano proiettivo reale è isomorfo al gruppo ciclico di ordine 2:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0) = \left\langle a \mid a^2 \right\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

e inoltre la somma connessa di g piani proiettivi ha come gruppo fondamentale:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \left\langle a_1, a_2, \dots a_g \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 \right\rangle$$

Dimostrazione. Da fare per esercizio □

Definizione 1.14 (Superficie topologica).
Una superficie topologica è uno spazio di Hausdorff connesso X che è compatto che ammette un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di aperti U_i tali che $U_i \cong D^2 \quad \forall i$.

Teorema 1.9. *(Classificazione delle superfici topologiche)*
Le classi di omeomorfismo delle superfici topologiche sono date da:

1. *La sfera S^2.*
2. *I g-tori T_g^2, cioè le superfici ottenute come somma connessa di tori.*
3. *Le somme connesse di g piani proiettivi reali $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

2 Rivestimenti

2.1 Definizioni ed esempi

Osservazione 2.1 (Le componenti connesse di uno spazio localmente connesso). *Se X è uno spazio topologico localmente connesso, allora le sue componenti connesse sono aperte e chiuse.*

Dimostrazione. Da scrivere, dovrebbe essere facile.

□

Tutti gli spazi topologici saranno supposti localmente connessi per archi, e dunque localmente connessi.
Dunque per l'osservazione precedente le componenti connesse saranno sempre aperte.

Definizione 2.1 (Rivestimento).
Dato uno spazio topologico X, un rivestimento per X è una coppia (Y, p), dove Y è uno spazio topologico e $p : Y \to X$ è una mappa continua tale che:
$\forall x \in X \quad \exists U_x$ *intorno di x aperto detto* ***intorno ben rivestito di*** *x tale che*

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

e $p\big|_{U_i} : U_i \to U_x$ è un omeomorfismo $\forall i \in I$.

Osservazione 2.2. *Un rivestimento è sempre un'applicazione aperta e omeomorfismo locale.*

Esempio 2.1 (Rivestimento banale).
Sia X uno spazio topologico e F uno spazio topologico discreto, allora $Y = X \times F \cong \bigsqcup_{f \in F} X$ e la mappa $p : Y \to X$ di proiezione sulla prima coordinata è un rivestimento di X detto rivestimento banale.

Esempio 2.2 (Nastro di Moebius).
Sia M il nastro di Moebius, e ∂M il suo bordo, la proiezione $p : \partial M \to S^1$ data dalla proiezione del bordo sull S^1 centrale del nastro è un rivestimento di S^1.
Un tale rivestimento non è banale perché $M \ncong S^1 \sqcup S^1$.

Esempio 2.3 (Mappa esponenziale).
La mappa $p : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi i t}$ è un rivestimento.

Esempio 2.4 (Rivestimento di S^n in se stesso).
Se $n \neq 1$ la mappa $p : S^n \to S^n : e^{2\pi\theta} \mapsto e^{2\pi n\theta}$ è un rivesitmento di S^n dove $\forall x \in S^n$ si ha che $\left|p^{-1}(x)\right| = n$.

Esempio 2.5 (Rivestimento di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).
La mappa $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \mapsto z^n$ è un rivestimento di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mentre la mappa $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ non lo è.

Proposizione 2.1 (Operazioni sui rivestimenti).

1. *Sia $p : Y \to X$ un rivestimento e $U \subset X$ un aperto.*
   La mappa $p\big|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ è un rivestimento di U.

2. *Se X è connesso e $Z \subset Y$ è una qualunque componente connessa di Y, allora la mappa $p\big|_Z : Z \to X$ è un rivestimento di X.*
   Infatti, se $U \subset X$ è un intorno ben ben rivestito per p, allora vale che
   $$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$
   per connessione di Z vale però che $U_i \subset Z$ oppure $U_i \cap Z =$.
   Inoltre $p(Z) = X$, sia infatti $x' \notin p(Z)$, dato U' l'intorno ben rivestito di x' e gli U_i' tali che $p^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{i \in I} U_i'$, dato che che $U_i \not\subset Z$ vale che $U_i \cap Z =$ per ogni i. (da controllare)

3. *Siano $p_1 : Y_1 \to X_1, p_2 : Y_2 \to X_2$ due rivestimenti rispettivamente di X_1 e X_2. Allora la mappa*
   $$(p_1, p_2) : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2 : (y_1, y_2) \to (p_1(y_1), p_2(y_2))$$
   è un rivestimento di $X_1 \times X_2$.
   Ad esempio $\mathbb{R}^2 \to T = S^1 \times S^1$ è un rivestimento del toro.

2.2 Morfismi di rivestimenti

Definizione 2.2 (Morfismo di rivestimenti).
*Un **morfismo di rivestimenti** è il dato di due rivestimenti* $pi_1 : Y_1 \to X, p_2 : Y_2 \to X$ *ed una mappa continua* $\varphi : Y_1 \to Y_2$ *tale che*

$$p_2 \circ \varphi = p_1$$

ovvero il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Definizione 2.3 (Isomorfismo di rivestimenti).
Se $\varphi : Y_1 \to Y_2$ *è un morifmso di rivestimenti come sopra tale che esiste un altro morfismo di rivestimenti* $\psi : Y_2 \to Y_1$ *tale che* $\psi \circ \varphi = id_{Y_1}$ *e* $\varphi \circ \psi = id_{Y_2}$ *si dice che* φ *è un isomorifsmo tra i rivestimenti* $pi_1 : Y_1 \to X, p_2 : Y_2 \to X$.

Definizione 2.4 (Morfismi tra mappe continue).
La stesse definizioni date sopra si possono dare nel caso generale in cui p_1, p_2 *sono generiche mappe continue.*

Proposizione 2.2 (Caratterizzazione dei rivestimenti).
Sia $p : Y \to X$ *una mappa continua surgettiva.*

$$p \text{ è un rivestimento} \iff \forall x \in X \quad \exists U \text{ tale che } p_{|p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U \text{ è isomorfo ad un rivestimento banale}$$

Dimostrazione.
($\Leftarrow$) Dovrebbe essere facile, ma è da scrivere.
($\Rightarrow$) Se $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} U_i$, si può munire I della topologia discreta e in questo modo $p^{-1}(U) \cong I \times U$ e la mappa $\varphi : Y \to I \times U : y \mapsto (i, p(y))$ se $y \in U_i$ è un omeomorfismo e dunque un isomorifsmo tra i due rivestimenti. □

Corollario 2.1 (Fibre di un rivestimento).
Se X *è uno spazio topologico connesso e* $p : Y \to X$ *è un rivestimento, allora tutte le fibre hanno la stessa cardinalità.*
Cioè

$$\forall x, y \in X \quad \left|p^{-1}(x)\right| = \left|p^{-1}(y)\right|.$$

Definizione 2.5 (Grado di un rivestimento).
*Il corollario precedente permette di definire il **grado** di un rivestimento* $p : Y \to X$ *come la cardinalità di una qualunque delle fibre di* p.

Dimostrazione. Mostriamo che per ogni α "cardinale" l'insieme $X_\alpha = \{x \in X \mid \left|p^{-1}(x)\right| = \alpha\}$ è sia aperto che chiuso.

Da finire. □

2.3 Azioni propriamente discontinue

Definizione 2.6 (Azione di gruppo propriamente discontinua).
Si dice che un gruppo G *agisce in maniera propriamente discontinua su uno spazio topologico* Y *se ogni punto* $y \in Y$ *ammette un intorno* U_y *tale che* $\forall g, h \in G \quad g.U \cap h.U = \emptyset$ *se* $g \neq h$.

Proposizione 2.3 (Rivestimenti dati da azioni propriamente discontinue).
Sia Y *uno spazio topologico e* G *un gruppo che agisce in maniera propriamente discontinua su* Y. *Allora la mappa* $p : Y \to Y/G$ *data dalla proiezione di* Y *su* Y/G *è un rivestimento di* Y/G. *Inoltre gli intorni ben rivestiti di ogni punto* $x \in Y/G$ *sono dati dall'immagine degli intorni che rendono l'azione propriamente discontinua.*

Dimostrazione.
Chiaramente la proiezione al quoziente è sempre surgettiva ed è continua per definizione della topologia quoziente.
Per ogni punto $x \in Y$ sia U l'intorno che rende propriamente discontinua l'azione, allora vale

$$p^{-1}(p_g(U)) = \bigsqcup_{g \in G} g.U,$$

$\square$

Esempio 2.6.
Si consider l'azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ data da $n.x = x + n$, allora la mappa

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1 : x \mapsto x + \mathbb{Z}$$

è un rivestimento che possiamo identificare come il rivestimento $t \to e^{2n\pi it}$ di S^1 visto in precedenza.

Esempio 2.7.
Il rivestimento $\mathbb{R}^2 \to T = S^1 \times S^1$ può essere visto come il rivestimento indotto dall'azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$ data da $(m, n).(x, y) = (x + m, y + n)$.

Esempio 2.8.
Anche il rivestimento $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ visto in precedenza può essere visto come il rivestimento indotto dall'azione propriamente discontinua del gruppo ciclico di n elementi $\{\zeta_n \in \mathbb{C} \mid \zeta_n^n = 1\}$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ data da

$$\zeta_n.z = \zeta_n z$$

Esempio 2.9 (Spazi proiettivo reale)**.**
Si considera l'azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|(\| x) = 1\}$ data da

$$\tau.x = -x \text{ se } \tau \text{ è l'elemento non banale di } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Questa azione è propriamente discontinua e la proiezione al quoziente è un rivestimento $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Esempio 2.10 (Rivestimento banale)**.**
Sia G un gruppo topologico munito della topologia discreta, allora l'azione naturale di G su $G \times X$ data da

$$g.(g', x) = (gg', x)$$

e propriamente discontinua ed induce il rivestimento banale $G \times X \to X$.
Inoltre per ogni sottogruppo normale $H \trianglelefteq G$, la mappa $G \times X \to G/H \times X$ è ancora un rivestimento banale.

Definizione 2.7 (Automorfismo di rivestimenti)**.**
Un automorfismo del rivestimento $p : Y \to X$ è un isomorfismo di p con se stesso, cioè

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

È facile verificare che l'insieme $\operatorname{Aut}(Y/X) := \{\phi : Y \to Y \mid \phi$ *automorfismi di p in se stesso$\}$ forma un gruppo con l'operazione di composizione ed è detto* ***gruppo di automorfismi del rivestimento*** *Y/X.*

Osservazione 2.3.
Nel caso del rivestimento $Y \to Y/G$ dato dalla proiezione, la mappa

$$G \to \operatorname{Aut}(X/G) : g \mapsto \varphi_g(x \mapsto g.x)$$

è un omomorfismo iniettivo $G \hookrightarrow \operatorname{Aut}(() X/G)$.

Proposizione 2.4. *Se Y è connesso allora la mappa, come sopra*

$$G \to \operatorname{Aut}(X/G) : g \mapsto \varphi_g(x \mapsto g.x)$$

è un isomorfismo tra G e $Aut(X/G)$.

Lemma 2.1.
Sia $Y \to X$ un rivestimento connesso e $\varphi \in \operatorname{Aut}(Y/X)$, vale che

$$\exists y \in Y \text{ tale che } \varphi(y) = y \implies \phi = \mathrm{id}$$

Cioè l'unico automorfismo di rivestimento che lascia fisso un punto è l'identità.
Quindi gli automorfismi di rivestimenti indotti da azioni propriamente discontinue non hanno punti fissi.

Lemma $\implies$ Proposizione.
Grazie all'osservazione, resta da verificare che tale mappa è surgettiva.
Cioè $\forall \varphi \in \operatorname{Aut}(Y/X) \quad \exists g \in G$ tale che $\varphi = \varphi_g$.
siccome φ è un automorfismo di rivestimenti vale che $p \circ \varphi = p$, quindi

$$\forall y \in Y \quad p(\varphi(y)) = p(y).$$

ma quindi $\varphi(y)$ è un elemento di $p^{-1}(p(y)) = \{g.y \mid g \in G\}$ essendo la fibra di un punto tramite la proiezione al quoziente.
Dunque $\exists g \in G$ tale che $\varphi(y) = g.y$, e quindi $\varphi_g \circ \varphi$ fissa il punto y, ma grazie al lemma si conclude che $\varphi_g \circ \varphi = id_Y$.
Quindi $\varphi = \varphi_g$ e dunque la mappa è surgettiva. □

Proposizione 2.5.
Siano $p : Y \to X$ un rivestimento cnnesso e Z uno spazio topologico connesso. Siano inoltre $f, g : Z \to X$ due mappe continue tali che $p \circ f = p \circ g$. Vale che

Osservazione 2.4.
Il lemma precedente è il caso particolare del teorema appena enunciato, nel caso in cui $Z = Y$, $f = \varphi$ e $g = id_Y$.

Dimostrazione. Sia $z \in Z$ tale che $f(z) = g(z)$, e sia $x = p(f(z)) = p(g(z))$, che sono uguali per l'ipotesi.
Sia U un intorno ben rivestito di x e siano U_i gli intorni che compongono la fibra di $p^{-1}(U)$, cioè

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i.$$

Poiché p è una funzione e $p \circ f = p \circ g$, deve esistere un intorno U_i tra quelli sopra tale che $f(z) = g(z) \in U_i$.
Si è mostrato che l'insieme

$$S := \{z \in Z \mid f(z) = g(Z)\}$$

è non vuoto, mostrando che S èsia aperto che chiuso, si conclude per connessione che $S = Z$.
S è aperto perché intorno di ogni suo punto, infatti per ogni punto z tale che $f(z) = g(z)$ dalla continuità di f e g segue che esiste un intorno aperto V di z tale che $f(V), g(V) \subset U_i$, ma poiché $p \circ f = p \circ g$ e la restrizione di p ad U_i è un omeomorfismo, vale che $\forall z' \in V \quad f(z') = g(z')$ e quindi S è intorno di z.
Si dimostra ora in maniera analoga che $S' := Z \setminus S = \{z \in Z \mid f(z) \neq g(z)\}$ è aperto e quindi S è anche chiuso.
Infatti, $\exists i \neq j$ tali che $f(z) \subset U_i$ e $g(z) \subset U_j$, allora per continuità, come prima $\exists V$ intorno aperto di z tale che $f(z) \subset U_i$ e $g(z) \subset U_i$ e come prima segue che $\forall z' \in V \quad f(z') \neq g(z')$. □

Proposizione 2.6 (I rivestimenti sono dati da azioni propriamente discontinue)**.**
Se $Y \to X$ è un rivesitmento connesso. l'azione di $\operatorname{Aut}(()\, Y/X)$ su Y data da

$$\varphi.y = \varphi(y)$$

è propriamente discontinua.

Dimostrazione. □

2.4 Teoria di Galois per rivestimenti

Definizione 2.8 (Rivestimento di Galois).
Dalla proposizione precedente se $p : Y \to X$ è un rivestimento connesso si ha la fattorizzazione di p data da:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & Y/\mathrm{Aut}\,(()\,Y/X) \arrow[r, "\bar{p}"] & X \end{tikzcd}$$

Se $\bar{p}$ è un omeomorfismo si dice che il rivestimento è di Galois.

Osservazione 2.5. *Se Y è connesso e G agisce su Y in maniera propriamente discontinua, il rivestimento $Y \to Y/G$ è di Galois.*

Teorema 2.1 (Teorema di Galois per rivestimenti).
Sia $Y \to X$ un rivestimento di Galois e $G := AutY/X$. Vale che
$\forall H \leq G$ sottogruppo, la mappa $Y/H \to Y$ è un rivestimento connesso e

$$H \trianglelefteq G \iff Y/H \to Y \text{ è un rivestimento di Galois.}$$

Inoltre, se $Z \to X$ è un rivestimento connesso tale che esiste un morfismo φ di rivestimenti che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

si ha che $Y \to Z$ è un rivestimento di Galois e $\mathrm{Aut}\,(Y/Z) \leq G$
Dunque il teorema da una corrispodenza:

$$\{H \leq G \text{ sottogruppi}\} \longleftrightarrow \{p_z : Z \to Y \text{ rivestimenti connessi} \mid p_Z \circ \varphi = p_Y\}$$

Esempio 2.11.
Il rivestimento $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ è di Galois.

Esempio 2.12 (Esempio di rivestimento non di Galois).

2.5 RIvestimento universale

Definizione 2.9 (Rivestimento universale).
Un rivestimento $\pi : \tilde{X} \to X$ si dice ***universale*** *se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso.*

Proposizione 2.7 (Proprietà universale del rivestimento universale). *Sia $\pi : \tilde{X} \to X$ un rivestimento universale, per ogni altro rivestimento $p : Y \to X$ esiste un morfismo di rivestimenti $\varphi : \tilde{X} \to X$ e fissati $x_0 \in X$, $\bar{x_0} \in \pi^{-1}(x_0)$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ ne esiste uno solo tale che $\varphi(\bar{x_0}) = y_0$*

Teorema 2.2 (Sollevamento di cammini e omotopie).
Sia $p : Y \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $y \in p^{-1}(x)$. Vale

1. *Se $f : I \to X$ è un cammino tale che $f(0) = x_0$, allora $\exists! \tilde{f} : I \to Y$ cammino tale che $p \circ \tilde{f} = f$ e $\tilde{f}(0) = y$*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

2. *Se $f \sim g$ sono due cammini omotopi allora $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ e $\tilde{f} \sim \tilde{g}$*

Dimostrazione. Vedere da Frigerio, troppo più chiara. □

della proprietà universale.

□

Corollario 2.2.
Dato $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *morfismo tra rivestimenti universali*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

φ *è un isomorfismo.*

Corollario 2.3 (Unicità del rivestimento universale)**.**
Il rivestimento universale di un qualunque spazio topologico X *è unico a meno di isomorfismo.*

Corollario 2.4.
Ogni rivestimento di uno spazio X *semplicemente connesso è banale.*

Teorema 2.3 (Gruppo di Galois e gruppo fondamentale)**.**
Un rivestimento universale $\tilde{X} \to X$ *è sempre di Galois e*

$$\mathrm{Aut}\left(\tilde{X}/X\right) \cong \pi_1(X, x_0) \quad \forall x_0 \in X$$

Osservazione 2.6. *Questo teorema permette di ricalcolare il gruppo fondamentale di alcuni spazi topologici precedenti:*

1. $\mathbb{R} \to S^1$

2. $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$

3. $S^n \to \mathbb{P}^n(R)$

Lemma 2.2 (Caratterizzazione dei rivestimenti di Galois)**.**
Dato $p : Y \to X$ *rivestimento connesso.*

$$p \text{ è di Galois} \iff \exists x \in X \text{ tale che } \mathrm{Aut}\,(Y/X) \text{ agisce transitivamente su } p^{-1}(x)$$

Teorema 2.4 (Esistenza del rivestimento universale)**.**
Sia X *spazio connesso e localmente semplicemente connesso, allora esiste* $\tilde{X} \to X$ *rivestimento universale di* X*.*

Dimostrazione. Costruzione spastica. □