Appunti di Topologia Algebrica del corso di Geometria 2

Simone Riccio
(dalle lezioni del Prof. Tamas Szamuely)

7 giugno 2025

Indice

1 Gruppo Fondamentale

1.1 Omotopia

Una delle motivazioni che porta a definire il gruppo fondamentale è la necessità di distinguere due spazi topologici a meno di omeomorfismo.

Esempio 1.1.
Si consideri il disco

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

Al variare di n naturale i D^n non sono intuitivamente omeomorfi, tuttavia dimostrarlo usando solo la topologia generale è difficile.

È semplice mostrare che $D^1 \not\cong D^n$ per $n \geq 2$, usando l'insieme delle componenti connesse. Infatti, per ogni $x \in D^n$ lo spazio topologico $D^n \setminus \{x\}$ è connesso per ogni $n \geq 2$, mentre $D^1 \setminus \{x\}$, essendo il segmento $[-1, 1]$ senza un punto, ha due componenti connesse.

Tale argomentazione non funziona già per provare a distinguere D^2 dai D^n con $n \geq 3$. Introduciamo quindi il gruppo fondamentale, che permetterà in futuro di distinguerli tutti.

Definizione 1.1 (Omotopia)**.**
*Date due funzioni continue $f, g : X \to Y$ tra spazi topologici, si dice che f e g sono **omotope** se esiste una funzione*

$$H : I \times X \to Y$$

***continua** e tale che:*

- $H(0, x) = f(x)$ *per ogni* $x \in X$*;*
- $H(1, x) = g(x)$ *per ogni* $x \in X$*;*
- $H(s, y) = H(s, x)$ *per ogni* $s \in I$ *e per ogni* $x, y \in X$ *tali che* $f(x) = f(y)$*.*

*Si dice che H è un'**omotopia** tra f e g e si scrive*

$$f \sim g.$$

Inoltre si può vedere un'omotopia come una famiglia di funzioni contiune:

$$\{f_s : X \to Y\}_{s\in I} \quad \text{con } f_s(x) = H(s, x).$$

Che rappresentano una deformazione continua di f in g.

Definizione 1.2 (Omotopia di cammini a estremi fissi)**.**
*Due cammini $\gamma_0, \gamma_1 : I \to X$ si dicono **omotopi (a estremi fissi)** se esiste una funzione*

$$H : I \times I \to X$$

***continua** e tale che:*

- $H(0, t) = \gamma_0(t)$ *per ogni* $t \in I$*;*
- $H(1, t) = \gamma_1(t)$ *per ogni* $t \in I$*;*
- $H(s, 0) = H(s, 1)$ *per ogni* $s \in I$*.*

*Si dice che H è un'**omotopia di cammini a estremi fissi** e si scrive*

$$\gamma_0 \sim \gamma_1.$$

Infatti è facile verificare che l'essere omotopi a estremi fissi induce una relazione di equivalenza sull'insieme dei cammini in X.

Definizione 1.3 (Giunzione di cammini)**.**
*Siano $f, g : I \to X$ due cammini in X con $f(1) = g(0)$, allora la **giunzione** di f e g è il cammino*

$$f * g : I \to X : t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Lemma 1.1 (Giunzione di cammini e omotopia)**.**
Se $f \sim f'$ e $g \sim g'$, allora $f * g \sim f' * g'$.

Dimostrazione. Sia $H_f : I \times I \to X$ un'omotopia di f e f' e $H_g : I \times I \to X$ un'omotopia di g e g'.
Definiamo l'omotopia

$$H : I \times I \to X : (s, t) \mapsto \begin{cases} H_f(2s, t) & \text{se } 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ H_g(2s-1, t) & \text{se } \frac{1}{2} < s \le 1. \end{cases}$$

che risulta continua. Infatti la continuità di H_f e H_g implica la continuità di H, essendo le due funzioni definite su due intervalli disgiunti. Inoltre si verifica facilmente che H soddisfa le condizioni richieste. □

Osservazione 1.1.
*Si noti che la giunzione di cammini non è definita su ogni coppia di cammini, ma solo su quelle che hanno il punto finale del primo uguale al punto iniziale del secondo. Tuttavia, se si considerano solo i cammini chiusi **che partono da uno stesso punto iniziale**, la giunzione è chiaramente sempre definita.*

1.2 Definizione del gruppo fondamentale

Da ora in poi gli spazi topologici considerati saranno sempre localmente connessi.

Teorema 1.1 (Poincaré).
Se X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un punto fisso.
Il prodotto dato dalla giunzione di cammini induce una struttura di gruppo sulle classi di omotopia dei cammini chiusi in X aventi punto iniziale x_0.
*Tale gruppo è chiamato **gruppo fondamentale** di X in x_0 e si denota con $\pi_1(X, x_0)$.*
In tale gruppo l'elemento neutro è rappresentato dal cammino costante in x_0 e l'inverso di un cammino γ è il cammino

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$$

che è l'inverso rispetto alla giunzione di cammini.

Per la dimostrazione del teorema di Poincaré ci basta dimostrare prima un lemma.

Lemma 1.2. *(Riparametrizzazione di un cammino e omotopia)*
Sia $\gamma : I \to X$ un cammino in X e sia $\varphi : I \to I$ una funzione continua tale che $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$.
Allora $\gamma \circ \varphi : I \to X$ è un cammino in X e $\gamma \sim \gamma \circ \varphi$.

Dimostrazione. Basta mostrare che la funzione φ è omotopa all'identitaà id_I.
L'omotopia è data dalla famiglia di funzioni

$$\varphi_s : I \to I : t \mapsto (1-s)t + s\varphi(t).$$

E poi boh.. buco. □

Teorema di Poincarè.

- (Associatività)
  Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \to X$ tre cammini chiusi in X con punto iniziale x_0. Si ha che

  $$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3).$$

  Poiché $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ si può vedere come una riparametrizzazione del cammino $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ e quindi usare il lemma.

- (Unità)
  L'elemento neutro del gruppo fondamentale è il cammino costante in x_0, che si denota con $e : I \to x_0$.
  Infatti, per ogni cammino $\gamma : I \to X$ si ha che $\gamma * e$ è la riparametrizzazione di γ secondo la mappa

  $$\varphi : I \to I : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$

- (Inverso)
  Sia

  $$\gamma_s : I \to X : t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } 0 \leq t \leq s, \\ \gamma(s) & \text{se } s < t \leq 1. \end{cases}$$

  La famiglia di cammini $\{\gamma_s\}_{s \in I}$, che non sono lacci, rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ, tuttavia **non rappresenta un'omotopia ad estremi fissi** poiché $\gamma_s(1) \neq \gamma(1)$. Vale perochè $\gamma_s(0) = \gamma(0)$ cioè il punto iniziale è fisso.
  In modo analogo la famiglia di cammini data da

  $$\gamma_s^{-1}(t) := gamma_s(1-t)$$

  rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ^{-1}, ma non ad estremi fissi.
  A questo punto si verifica che la famiglia di **cammini chiusi** $\left\{\gamma_s * \gamma_s^{-1}\right\}_{s \in I}$ rappresenta un'omotopia **ad estremi fissi** tra il cammino costante in x_0 e il cammino $\gamma * \gamma^{-1}$.
  Si fa in maniera analoga per mostrare che $\gamma^{-1} * \gamma \sim e_{x_0}$

□

Esempio 1.2.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Siano $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ due cammini chiusi in $\mathbb{R}^n$ con punto iniziale x_0.
La famiglia di cammini chiusi definita da

$$f_s : I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$$

definisce un'omotopia ad estremi fissi tra α e β.
Piuìn generale, l'omotopia definita eùquella che per ogni punto dei cammini percorre al variare di s il segmento che unisce i due cammmini in quell'istante t, e dunque la stessa argomentazione vale per dimostrare che:

$$\forall X \subset \mathbb{R}^n \text{ convesso},$$
$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Proposizione 1.1 (Gruppo fondamentale di un connesso per archi)**.**
Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in X.$$

In altre parole, il gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi non dipende dal punto iniziale scelto.

Dimostrazione. Sia $f : I \to X$ un cammino tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, che esiste poiché X è connesso per archi. Tale cammino induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali in x_0 e x_1:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [f * \gamma * f^{-1}] \end{aligned}$$

con inversa data da

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f^{-1} * \gamma * f]. \end{aligned}$$

Infatti, si verifica prima di tutto la buona definizione:
Se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ sono due cammini chiusi in X, per il lemma della Riparametrizzazione, si ha che

$$f * \gamma_1 * f^{-1} \sim f * \gamma_2 * f^{-1}.$$

Inoltre, si verifica che l'immagine di un cammino chiuso in x_0 è un cammino chiuso in x_1 e viceversa.
Si si veririfica che le funzioni appena definite sono effettivamente degli omomorfismi di gruppo poichèsi ha che:

$$f * \gamma_1 * \gamma_2 * f^{-1} \sim (f * \gamma_1 * f^{-1}) * (f * \gamma_2 * f^{-1})$$

usando l'associatività che anche se non dimostrata vale anche per cammini chiusi.
Infine, si verifica facilmente che le due mappe sono una l'inversa dell'altra. □

Osservazione 1.2.
L'isomorfismo tra i due gruppi fondamentali non è canonico, poiché dipende dalla scelta del cammino f tra i due punti x_0 e x_1.

Definizione 1.4 (Spazio semplicemente connesso)**.**
Uno spazio topologico X si dice ***semplicemente connesso*** *se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale, cioè*

$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in X.$$

Osservazione 1.3.
Se X è semplicemente connesso e $\alpha, \beta : I \to X$ sono due cammini allora

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha(1) = \beta(1) \implies \alpha \sim \beta$$

Dato che il cammino $\alpha * \beta^{-1}$ è chiuso e il gruppo fondamentale è banale, quindi

$$\alpha * \beta^{-1} \sim e_{x_0} \implies \alpha \sim \beta.$$

Osservazione 1.4 (La funtorialità del gruppo fondamentale).
Siano X, Y due spazi topologici e $\varphi : X \to Y$ una mappa continua tale che $\varphi(x_0) = y_0$ per due punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.
Allora φ induce un omomorfismo di gruppi

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

definito da

$$\varphi_*([\gamma]) = [\varphi \circ \gamma]$$

Si verifica facilmente che la mappa è ben definita ed è un omomorifsmo di gruppi.
Inoltre, vale che, se $\varphi = \mathrm{id}_X$ allora $\varphi_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$ e se $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.
Nel linguaggio delle categorie quindi si dice che

$$\pi_1 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Grp} : X \mapsto \pi_1(X, x_0)$$

*è un **funtore** da **Top**, la categoria degli spazi topologici, a **Grp**, la categoria dei gruppi.*

Proposizione 1.2.
Se $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo tra spazi topologici, allora

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

è un isomorfismo di gruppi, dove $x_0 \in X$ e $y_0 = \varphi(x_0) \in Y$.

Dimostrazione.
Poiché φ è un omeomorfismo, essa è continua e ha un'inversa continua $\varphi^{-1} : Y \to X$.
Cioè $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ e $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_Y$, quindi segue dalla funtorialitá che

$$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = id_{\pi_1(X,x_0)} \quad \text{e} \quad \varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = id_{\pi_1(Y,y_0)}.$$

Quindi φ_* è un isomorfismo di gruppi, poiché ha un'inversa data da φ_*^{-1}. □

Definizione 1.5 (Spazi omotopicamente equivalenti).
*Due spazi topologici X e Y si dicono **omotopicamente equivalenti** se esistono due funzioni continue*

$$f : X \to Y \quad e \quad g : Y \to X$$

tali che:

- *$g \circ f$ è omotopa all'identità su X;*
- *$f \circ g$ è omotopa all'identità su Y.*

Si denota con $X \simeq Y$ se X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Esempio 1.3.

1. *$\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè si dice che $\mathbb{R}^n$ è **contraibile**. Infatti sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ la funzione costante in 0, che è continua. e sia $\psi : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ anch'essa continua.*
   Si ha che $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\{0\}}$, mentre $\psi \circ \varphi$ è omotopa all'identità su $\mathbb{R}^n$ tramite l'omotopia definita da

$$H : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (s, x) \mapsto sx.$$

2. *S^n è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$*
   Infatti se $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è l'inclusione di S^n in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e

$$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

   Si ha che $i \circ \psi = \mathrm{id}_{S^n}$ e $\psi \circ i \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ tramite l'omotopia

$$H : I \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : (s, x) \mapsto (1 - s)x + s\frac{x}{\|x\|}.$$

3. *Il Nastro di Möbius è omotopicamente equivalente al cerchio S^1.*
   Infatti, sia M il Nastro di Möbius e sia $\varphi : M \to S^1$ la proiezione che manda ogni punto del nastro sul suo bordo. Si ha che φ è continua e suriettiva.
   Infatti se consideriamo il quadrato $Q = [-1,1]\times[-1,1]$, tale spazio è omotopicamente equivalente al segmento $[-1,1]$ tramite l'inlcusione del segmento nel quadrato e la proiezione naturale del quadrato sul segmento. Identificando i lati opposti del quadrato in modo da ottenere il Nastro di Möbius, si ha che la proiezione del quadrato sul segmento induce una mappa continua e suriettiva dal Nastro di Möbius al cerchio, con omotopie che passano al quoziente.

Teorema 1.2. *(Spazi omotopicaamente equivalenti hanno gruppo fondamentale isomorfo)*
Siano X e Y spazi topologici ***connessi per archi*** *omotopicamente equivalenti, allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi:*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

per ogni coppia di punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.

Lemma 1.3.
Siano $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ due funzioni continue ***omotope*** *tra spazi topologici e siano $x_0 \in X$.*
Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1\left(Y, \varphi_0\left(x_0\right)\right) \arrow[dd, "\tau_f"] \\
\pi_1\left(X, x_0\right) \arrow[ur, "\varphi_{0*}"] \arrow[dr, "\varphi_{1*}"'] & \\
 & \pi_1\left(Y, \varphi_1\left(x_0\right)\right)
\end{tikzcd}$$

dove $\tau_f : \pi_1\left(Y, \varphi_0\left(x_0\right)\right) \to \pi_1\left(Y, \varphi_1\left(x_0\right)\right)$ è l'isomorfismo indotto dal cammino $f : I \to Y : s \mapsto \varphi_s\left(x_0\right)$ e $\{\varphi_s \mid s \in I\}$ è l'omotopia tra φ_0 e φ_1.

Dimostrazione.
Si consideri la mappa

$$\tau_f^{-1} := \tau_{f^{-1}} : \pi_1\left(Y, \varphi_1\left(x_0\right)\right) \to \pi_1\left(Y, \varphi_0\left(x_0\right)\right) : g_Y \mapsto f * g_Y * f^{-1}.$$

Al variare di $s \in I$ si ha che

$$f_s : I \to Y : t \mapsto f\left(st\right)$$

rappresenta un'omotopia tra il cammino $f_0 : I \to \{\varphi_0\left(x_0\right)\}$ e il cammino f.
Quindi, se ora si considera g_X un cammino chiuso in $x_0 \in X$, allora la mappa

$$I \to \pi_1\left(Y, \varphi_0\left(x_0\right)\right) : s \mapsto f_s * \varphi_0\left(g_X\right) * f_s^{-1}$$

induce un'omotopia tra il cammino chiuso $\varphi_0\left(g_X\right)$ e il cammino chiuso $f\left(\varphi_1\left(g_X\right)\right)$, dunque vale che

$$\varphi_{0*}\left(g_X\right) = \tau_f\left(\varphi_{1*}\left(g_X\right)\right).$$

□

del teorema.
Siano $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to X$ le funzioni continue che definiscono l'equivalenza omotopica tra X e Y.
Grazie al lemma precedenta, dato che vale $\psi \circ \varphi \sim \mathrm{id}$ si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\left(X, x_0\right) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[drr, "\mathrm{id}"'] & \pi_1\left(Y, \varphi\left(x_0\right)\right) \arrow[r, "\psi_*"] & \pi_1\left(X, \left(\psi \circ \varphi\right)\left(x_0\right)\right) \arrow[d, "\tau_f", "\cong"'] \\
 & & \pi_1\left(X, x_0\right)
\end{tikzcd}$$

Cioè vale che $\tau_f \circ \psi_* \circ \varphi_* = \mathrm{id}$, quindi $\psi_* \circ \varphi_* = \tau_f^{-1}$, ma se la composizione di due mappe è bigettiva allora la prima φ_* è iniettiva e la seconda ψ_* è suriettiva, ragionando in maniera analoga per il verso opposto si ha che $\varphi_* \circ \psi_* = \tau_f$ e quindi ψ_* è iniettiva e φ_* è surgettiva.
Si conclude quindi che φ_* e ψ_* sono isomorfismi di gruppi.

□

1.3 Primi gruppi fondamentali

Da questo momento in poi, se X è uno spazio topologico connesso per archi, si denota con $\pi_1(X)$ il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X in un punto fissato.

Teorema 1.3 (Gruppo fondamentale del cerchio).

$$\pi_1\left(S^1\right) \cong \mathbb{Z}.$$

Ed il cammino chiuso $t \mapsto e^{2\pi i t}$ rappresenta il generatore del gruppo fondamentale $\pi_1\left(S^1, 1\right)$.

Definizione 1.6 (Mappa esponenziale).
Si definisce la mappa

$$\rho : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$$

Lemma 1.4 (Sollevamento di un cammino di S^1 in $\mathbb{R}$).

1. *Per ogni cammino chiuso $f : I \to S^1$ con $f(0) = f(1)$, **esiste ed unico** un cammino(in generale non chiuso) $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ detto **sollevamento di f in** $\mathbb{R}$ tale che*

$$\tilde{f}(0) = 0 \quad e \quad \rho \circ \tilde{f} = f.$$

Ovvero il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\rho"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

2. *Inoltre se f_0, f_1 sono due cammini chiusi omotopi allora*

$$\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1) \in \mathbb{Z}$$

La dimostrazione di questo lemma sarà discussa in un contesto più generale nella sezione sui rivestimenti.

Dimostrazione. (Lemma $\implies$ Teorema)
Dal lemma segue che la mappa:

$$\Phi : \pi_1\left(S^1, 1\right) \to \mathbb{Z} : [f] \mapsto \tilde{f}(1)$$

Il terminale mi dice di aver committato, ma su github la repository non sembra essere commi è ben definita, ed inoltre induce un omomorfismo di gruppi, poiché

$$\Phi\left([\gamma_1 * \gamma_2]\right) = \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(1) = \Phi\left([\gamma_1]\right) + \Phi\left([\gamma_2]\right).$$

. Si dimostra ora la surgettività di Φ, infatti dato il cammino chiuso $f_1 : I \to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$, si ha che

$$\Phi\left([f_1^n]\right) = n\tilde{f}_1(1) = n.$$

Infine, si verifica che il nucleo di Φ è l'insieme dei cammini chiusi omotopi al cammino costante in 1, dato che se $f : I \to S^1$ è un cammino chiuso tale che $\tilde{f}(1) = 0$, si ha che $\tilde{f}$ è un cammino chiuso in $\mathbb{R}$ che parte da 0 e torna a 0, quindi poiché $\mathbb{R}$ è semplicemente connesso, esiste un'omotopia $H : I \times I \to \mathbb{R}$ da $\tilde{f}$ al camminio costante in 0. Ma a questo punto si ha che $\rho \circ H$ è un'omotopia da f al cammino costante in 1, quindi f è omotopo al cammino costante in 1. □

Corollario 1.1.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(D^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$$

In particolare $D^2 \setminus \{0\}$ non è omotopicamente equivalente D^2(e quindi nemmeno omeomorfo).

Definizione 1.7 (Retrazione)**.**
Sia $Y \subset X$ un sottospazio topologico. Si dice che una mappa continua $r : X \to Y$ è una retraazione se vale

$$r \circ i = \mathrm{id}_Y$$

dove $i : Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione di Y in X.
In altre parole, r è una retrazione se è continua e manda ogni punto di Y su se stesso.
*Si dice che Y è **retratto** in X se esiste una retrazione da X a Y.*

Definizione 1.8 (Retrazione per deformazione)**.**
Questa definizione non è stata data a lezione, tuttavia l'ho ritenuta un utile strumento per gli esercizi.
*Sia $Y \subset X$ un sottospazio topologico. Una mappa continua $r : X \to Y$ si dice **retrazione per deformazione** se*

$$r \circ i \ \mathrm{id}_Y$$

dove l'omotopia tra le due mappe è tale che $H(x, 1) \in X \quad \forall x \in X$ e $H(y, t) \in Y \quad \forall y \in Y$.
*In tal caso Y si dice **retratto per deformazione** di X.*

Osservazione 1.5. *Se Y è un retratto per deformazione di X allora X e Y sono omotopicamente equivalenti.*

Esempio 1.4.
1. *In ogni spazio topologico X ogni punto $x_0 \subset X$ è un retratto di X.*
2. *Il segmento $I = [-1, 1]$ è un retratto di $\bar{D}^2 = \bar{B}(0, 1)$, infatti la mappa*

$$r : \bar{D}^2 \to I : (x, y) \mapsto x$$

è una retrazione, poiché r manda ogni punto del segmento su se stesso.

Lemma 1.5 (Retrazione e gruppo fondamentale)**.**
Sia $Y \subset X$ un retratto di X e sia $x_0 \in Y$. Allora la mappa indotta dall'inclusione naturale

$$i_* : \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

*è un omomorfismo di gruppi **iniettivo***

Dimostrazione.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y, x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "r_*"] & \pi_1(Y, x_0) \end{tikzcd}$$

Dunque $r_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y, x_0)}$, quindi i_* è iniettiva perché ha inversa sinistra.

□

Corollario 1.2.
S^1 non è un retratto di $\bar{D}^2$.

Dimostrazione.

$$\mathbb{Z} \quad \cong \quad \pi_1\left(S^1, 1\right) \xrightarrow{i_*} \pi_1\left(\bar{D}^1, 1\right) \quad \cong \quad \{1\}$$

e quindi i_* non è iniettiva, perché è forzata ad essere banale. □

Teorema 1.4 (Brouwer)**.**
Ogni applicazione continua $f : D^2 \to D^2$ ammette un punto fisso.

Dimostrazione. La dimostrazione è per assurdo.
Si supponga che per ogni punto $x \in D^2$ si ha che $f(x) \neq x$.
Consideriamo la mappa continua

$$r : D^2 \to S^1 : x \mapsto \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}.$$

Questa mappa associa ad ogni punto $x \in D^2$ un punto sulla circonferenza unitaria S^1, che rappresenta la direzione del vettore che punta da x a $f(x)$.
Una tale mappa sarebbe una retrazione del disco unitario D^2 su S^1, poiché ogni punto di S^1 sarebbe raggiunto da un punto di D^2 che non si mappa su se stesso. **Vorrei metterci il fulmine** □

Teorema 1.5 (Fondamentale dell'algebra).
Ogni $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomio di grado $n \geq 1$ ammette almeno una radice complessa.

Dimostrazione.
Si supponga $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, allora $\forall r > 0$ la mappa

$$f_r(t) := \frac{f\left(r\cos(2\pi t) + ir\sin(2\pi t)\right)}{\left|f\left(r\cos(2\pi t) + ir\sin(2\pi t)\right)\right|}$$

definisce un cammino chiuso in $I \to S^1$ che parte da 1.
La famiglia di cammini chiusi $\{f_r | r \in I\}$ rappresenta un'omotopia tra il cammino costante $f_0 : I \to \{1\}$ e il cammino chiuso f_1.
Componendo inoltre con la mappa $I \to [0, r] : s \to sr$ otteniamo un'omotopia ad estremi fissi tra il cammino costante e il cammino chiuso f_r.
Quindi $\left[f_r^0\right] = 0 \in \mathbb{Z}$. Vogliamo ora dimostrare che $\left[f_r^1\right] \neq 0 \in \mathbb{Z}$ per ogni $r > 0$ e raggiungere una contraddizione.
Sia ora il polinomio

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

e per $s \in I$ si consideri

$$f_r^s(z) = z^n + s\left(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0\right).$$

Se $r > \max\{1, \sum |a_i|\}$ e $|z| = r$, allora

$$|z^n| = r^n > s\left(\sum |a_i|\right)\left|z^{n-1}\right| \geq \left|s\left(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\right)\right|$$

e quindi poiché vi è il maggiore stretto se $|z| = r$, $f_r^s(z) \neq 0$ per ogni $s \in I$.
In particolare vale

$$f_r^s(r\cos 2\pi t + ir\sin(2\pi t) \neq 0$$

E quindi è ben definita la famiglia di cammini chiusi

$$f_r^s : I \to S^1 : t \mapsto \frac{f_r^s\left(r\cos 2\pi t + ir\sin(2\pi t)\right)}{\left|f_r^s\left(r\cos 2\pi t + ir\sin(2\pi t)\right)\right|}.$$

che da un'omotopia tra f_r^0 e f_r^1.
$f^0 = z^n$ e quindi $f_r^0(t) = \cos(2n\pi t) + i\sin(2n\pi t)$ ma si avrebbe quindi che la classe di omotopia di f_r^0 è $n \in \mathbb{Z}$, ma ciò contraddice il fatto che $\left[f_r^0\right] = 0 \in \mathbb{Z}$. □

1.4 Teorema di Seifert-Van Kampen e richiami di teoria dei gruppi

Teorema 1.6 (debole di Seifert-van Kampen).
Siano $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1, X_2 \subset X$ sono aperti. Siano $i_1 : X_1 \hookrightarrow X$ e $i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ le inclusioni naturali.
Si suppongano $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ connessi per archi allora:

$$\pi_1(X, x_0) \textit{è generato da } i_{1*}\left(\pi_1\left(X_1, x_0\right)\right) \textit{ e } i_{2*}\left(\pi_1\left(X_2, x_0\right)\right) \textit{ dove } x_0 \in X_1 \cap X_2.$$

Dimostrazione. □

Corollario 1.3.
S^n è semplicemente connesso per ogni $n \geq 1$.'

Corollario 1.4.
$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1} per ogni $n \geq 2$.
Quindi $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \{1\}$ per ogni $n \geq 2$

Corollario 1.5.
$\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \geq 3$.

Teorema 1.7. *(di Seifert-van Kampen)*
Siano $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1, X_2 \subset X$ sono aperti.
Siano $j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1, j_2, X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2, i_1 : X_1 \hookrightarrow X, i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ le inclusioni naturali.
Si suppongano $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ connessi per archi allora
$\forall G$ gruppo, e mappe $\varphi_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \to G$ e $\varphi_2 : \pi_1(X_2, x_0) \to G$ esiste un unica mappa

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$$

tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X_1, x_0) \arrow[dr, "i_{1*}"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\exists!\varphi"] & G \\
& \pi_1(X_2, x_0) \arrow[ur, "i_{2*}"] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Il teorema di Van-Kampen necessità di un richiamo di teoria dei gruppi, che non è stato ancora fatto.

Definizione 1.9 (Gruppo libero generato da un insieme)**.**
Dato un insieme X si indica $F(X)$ il ***gruppo libero generato da*** *X il dato di un gruppo $F(X)$ ed una mappa iniettiva $s : X \hookrightarrow F(X)$ tale che la seguente propriet 'a universale sia soddisfatta:*
Per ogni gruppo G e per ogni mappa iniettiva $f : X \hookrightarrow G$ esiste un unico omomorfismo di gruppi

$$\bar{f} : F(X) \to G$$

tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\exists!\bar{f}"] & G \\
X \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposizione 1.3 (Unicità del gruppo libero)**.**
Dalla definizione di gruppo libero via proprietà universale ne segue l'unicità a meno di isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Facile provaci un attimo □

Proposizione 1.4 (Costruzione del gruppo libero generato da un insieme)**.**
Si costruisce ora $F(X)$ nel seguente modo:
Sull'insieme

$$F(X) = \{w \in X^* \mid w \text{ parola su } X\} / \sim$$

dove una parola $w \in X$ è una sequenza un prodotto formale tra simboli della fomra

$$w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$$

con $x_i \in X$ e $\epsilon_i \in \{1, -1\}$, e la relazione di equivalenza $\sim$ identifica due parole se e solo se sono uguali a meno di semplificare i fattori di forma $x_i^{\epsilon_i} x_i^{-\epsilon_i}$.
L'operazione di gruppo su $F(X)$ è data dalla concatenazione formale di parole.

Tale costruzione verifica la proprietà universale del gruppo libero generato da X.

Dimostrazione.
Per ogni mappa $f : X \hookrightarrow G$ in un gruppo G si definisce la mappa

$$\bar{f} : F(X) \to G : x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} \mapsto f(x_1)^{\epsilon_1} f(x_2)^{\epsilon_2} \dots f(x_n)^{\epsilon_n}$$

□

Lemma 1.6.
Ogni gruppo G è il quoziente di un gruppo libero.

Dimostrazione.
Se $\{g_i \mid i \in I\}$ si considera $X = \{x_i \mid i \in I\}$ e la mappa

$$\Phi : F(X) \to G : x_i \to g_i \qquad \text{assegnamento per generatori}$$

se i g_i sono un insieme di generatori per G allora Φ è surgettiva e si conclude per il primo teorema di omomorfismo tra gruppi. □

Definizione 1.10 (Presentazione di un gruppo).
*Data Φ come sopra, sia $N := \ker \Phi$ si può considerare un **sisterma di generatori per N come sottogruppo normale** $\{p_j \mid j \in J\}$, la **presentazione tramite generatori e relazioni di G** è la seguente:*

$$G := \langle g_i,\ i \in I \mid p_j,\ j \in J \rangle$$

Definizione 1.11 (Prodotto libero di gruppi).
*Siano G_1, G_2 due gruppi, si definisce il **prodotto libero di gruppi** $G_1 * G_2$ il dato di un gruppo $G_1 * G_2$ e mappe $\gamma_1 : G_1 \to_1 *G_2$, $\gamma_2 : G_2 \to_1 *G_2$ che soddisfano la seguente proprietà universale:*
Per ogni altro gruppo G e mappe $\phi_1 : G_1 \to G$ e $\phi_2 : G_2 \to G$ esiste un'unica mappa $\phi : G_1 * G_2 \to G$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "\gamma_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
& G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists ! \varphi"] & G \\
G_2 \arrow[ur, "\gamma_2"] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"] & &
\end{tikzcd}$$

*In teoria delle categorie tale costruzione è detta **coprodotto**.*

Proposizione 1.5 (Unicità del prodotto libero di gruppi).
Dalla definizione via proprietà universale segue che il prodotto libero è unico a meno di isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Da fare, facile □

Proposizione 1.6 (Costruzione del prodotto libero tra gruppi). *Siano*

$$G_1 = \left\langle g_i^1,\ i \in I_1 \mid p_j^1,\ j \in J_1 \right\rangle \quad G_2 = \left\langle g_i^2,\ i \in I_2 \mid p_j^2,\ j \in J_2 \right\rangle$$

le due presentazioni dei gruppi, allora la presentazione del prodotto libero è data da:

$$G_1 * G_2 = \left\langle \left\{g_i^1\right\} \cup \left\{g_i^2\right\} \mid \left\{p_j^1\right\} \cup \left\{p_j^2\right\} \right\rangle$$

Osservazione 1.6.

1. *Il gruppo libero è generato dalle immagini dei generatori dei gruppi fattori.*
2. *Gli elementi di $G_1 * G_2$ sono parole in $G_1 \cup G_2$*
3. *Se X_1, X_2 sono due insiemi allora*

$$F(X_1 \cup X_2) = F(X_1) * F(X_2)$$

Definizione 1.12 (Prodotto amalgamato di gruppi).
*Siano G_1, G_2 due gruppi e H un terzo gruppo, si definisce il **prodotto amalgmato di gruppi su H** $G_1 *_H G_2$ il dato di un gruppo $G_1 *_H G_2$ e mappe $\beta_1 : H \to G_1$, $\beta_2 : H \to G_2, \gamma_1 : G_1 \to_1 *G_2$, $\gamma_2 : G_2 \to_1 *G_2$ che soddisfano la seguente proprietà universale:*

Per ogni altro gruppo G e mappe $\phi_1 : G_1 \to G$ e $\phi_2 : G_2 \to G$ esiste un'unica mappa $\phi : G_1 * G_2 \to G$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "\gamma_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
H \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & & G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi"] & G \\
 & G_2 \arrow[ur, "\gamma_2"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposizione 1.7 (Costruzione del prodotto amalgamato se H è un gruppo libero)**.**
Siano

$$G_1 = \left\langle g_i^1,\ i \in I_1 \mid p_j^1,\ j \in J_1 \right\rangle \quad G_2 = \left\langle g_i^2,\ i \in I_2 \mid p_j^2,\ j \in J_2 \right\rangle$$

$$H = \left\langle g_i^1,\ i \in I_1 \right\rangle \text{ che non ha relazioni perché libero}$$

allora

$$G_1 *_H G_2 = \left\langle \left\{ g_i^1 \right\} \cup \left\{ g_i^2 \right\} \;\middle|\; \left\{ p_j^1 \right\} \cup \left\{ p_j^2 \right\} \cup \left\{ \beta_1(h_i)\beta_2(h_i)^{-1} \right\} \right\rangle$$

Proposizione 1.8 (Prodotto amalgamato di gruppi nel caso in cui uno dei fattori è banale)**.**

Proposizione 1.9 (Van-Kampen visto come prodotto amalgamato di gruppi)**.**

1.5 Applicazioni ed esempi

1. Calcolo del gruppo fondamentale del disco senza due punti:

$$D^2 \setminus \{x_0, x_1\}$$

   Si scrive $D^2 \setminus \{x_1, x_2\} = X_1 \cap X_2$, dove X_1, X_2 sono due aperti di D^2 e l'intersezione $X_1 \cap X_2$ è semplicemente connessa.
   Inoltre $X_i \cong D^2 \setminus \{x_i\}$ per $i = 1, 2$ e quindi

$$\pi_1 (X_i, x_i) \cong \mathbb{Z}$$

   Quindi se $x_0 \in X_1 \cap X_2$, usando la versione debole del teorema di Seifert-van Kampen si ha che

$$\pi_1 \left(D^2 \setminus \{x_1, x_2\}, x_0 \right) = \pi_1 (X_1, x_0) * \pi_1 (X_2, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$$

2. Calcolo del gruppo fondamentale del bouquet di due cerchio:

   Definizione 1.13 (Bouquet di due spazi topologici)**.**
   Siano X, Y due spazi topologici, $x_0 \in X, y_0 \in Y$ due punti.
   *Si definisce il **bouquet di** $(X, x_0))$ **e** $(Y, y_0))$ lo spazio topologico:*

$$(X, x_0)) \vee (Y, y_0)) := (X \sqcup Y) \,/\, \{x_0, y_0\}$$

   Sia quindi $X = S^1 \vee S^1$ il bouquet di due cerchi.
   Dato un punto x_1 nel primo cerchio ed un punto x_2 nel secondo cerchio, si scrive $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1 = X \setminus x_2$ e $X_2 = X \setminus x_1$ sono due aperti di X. Si ha che $X_1 \cap X_2$ è semplicemente connesso, quindi si può applicare la versione debole del teorema di Seifert-van Kampen.

$$\pi_1 (X, x_0) = \pi_1 (X_1, x_0) * \pi_1 (X_2, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$$

3. Iterando gli argomenti sopracitati si può dimostrare che il gruppo fondamentale del disco senza n punti è F_n e il gruppo fondamentale del bouquet di n cerchi è F_n.

Definizione 1.14 (Grafo finito).
*Uno spazio di **Hausdorff** X si dice grafo finito se:*
$\exists X_0 \subset X$ sottospazio finito e discreto tale che $X \setminus X_0$ è unione disgiunta di un numero finito di aperti $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tali che:
Ogni e_i è omeomorfo a un intervallo aperto $(0,1)$ e $|\bar{e_i} \setminus e_i| \leq 2$
Inoltre deve valere che:
se $|\bar{e_i} \setminus e_i| = 2$ allora

$$(\bar{e_i}, e_i) \cong ([0,1], (0,1))$$

*in tale caso si dice che e_i è un **arco** del grafo.*
se $|\bar{e_i} \setminus e_i| = 1$ allora

$$(\bar{e_i}, e_i) \cong \left(S^1, S^1 \setminus \{pt.\}\right)$$

*In tal caso si dice che e_i è un **ciclo** del grafo.*
*L'insieme X_0 è detto **insieme dei vertici** del grafo.*
*Un grafo si dice **albero** se è conesso e non contiene cicli.*

Teorema 1.8 (Gruppo fondamentale di un grafo finito).
Sia X un grafo finito, allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo libero e finitamente generato

$$\pi_1(X, x_0) \cong F_n$$

dove n è il numero di cicli del grafo.

Lemma 1.7.
Gli alberi sono contraibili ad un punto, quindi sono semplicemente connessi.

Dimostrazione.
Se X è un albero, esiste un vertice $x_0 \in X_0$ tale che è connesso ad un solo altro vertice, altrimenti X conterrebbe un ciclo, sia e_0 un tale arco.
X si retrae per deformazione su $X \setminus (e_0 \cup \{x_0\})$, che è un grafo finito con un vertice in meno.
Per induzione su $n = |X_0|$, X è contraibile ad un punto. □

Lemma 1.8 (Esistenza dello "spanning tree" di un grafo). *Ogni grafo finito X contiene un sottografo $Y \subset X$ che è un albero e ha gli stessi vertici di X, cioè $Y_0 = X_0$.*

Dimostrazione.
Per induzione su $n = |X_0|$, se $n = 1$ allora $Y = X$ è un albero.
Per il passo passo si scegla un vertice a caso $x_0 \in X_0$ e si considera il grafo Z ottenuto da X rimuovendo x_0 ed ogni arco che lo contenga.
Le componenti connesse di Z hanno numero di vertici strettamente inferiore ad n e quindi per ipotesi induttiva ammettono uno spanning tree.
Lo spanning tree di X si ottiene riunendo gli spanning tree delle componenti connesse di Z aggiungendo x_0 e gli archi rimossi in precedenza. □

del teorema.
Dato X un grafo, consideriamo il suo spanning tree Y che esiste per il secondo lemma. Per il secondo lemma, lo spazio ottenuto contraendo Y ad un punto $y_0 \in Y_0$ è un bouquet di n cerchi, dove n è il numero di cicli di X.
Si ha quindi che il gruppo fondamentale di X è isomorfo al gruppo fondamentale del bouquet di n cerchi, che è il gruppo libero su n generatori. □

1.6 Gruppi fondamentali di superfici topologiche compatte

Proposizione 1.10 (Gruppo fondamentale del prodotto di spazi).

Proposizione 1.11 (Gruppo fondamentale del toro).
Il gruppo fondamentale del toro è isomorfo al prodotto diretto di due gruppi ciclici:

$$\pi_1\left(T^2, x_0\right) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Dimostrazione.
La dimostrazione seguirebbe in maniera ovvia dalla proposizione precedente, però se ne da una dimostrazione alternativa più difficile ma più interessante.
Si considera il quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ e si vede un toro come il quoziente di Q per la relazione di equivalenza che identifica di tutti i lati opposti.
Siano $y \in Q$ il centro del quadrato, $U = Q \setminus \{y\}$ e infine data la proiezione al quoziente $\pi : Q \to T^2$, si consideri $V = \pi\left(\mathring{Q}\right)$.
Dall'identificazione dei lati opposti segue che V è omeomorfo a $T^2 \setminus (S^1 \vee S^1)$.
Dato $x_0 \in U$ e $x_1 \in U \cap V$, si possono ora calcolare $\pi_1(U, x_0), \pi_1(V, x_1)$ e $\pi_1(U \cap V, x_1)$:

- Il quadrato senza il centro $U = Q \setminus \{y\}$ si retrae per deformazione sul bordo ∂Q.
  res Le retrazioni per deformazione passano al quoziente e quindi U è omotopicamente equivalente a $\pi(\partial Q) \cong S^1 \vee S^1$.

- V è l'immagine tramite la proiezione al quoziente di $\mathring{Q}$, che è semplicemente connessa, dunque è semplicemente connesso.

- $U \cap V$ é omeomorfo a $D^2 \setminus \{0\}$ e dunque $\pi_1(U \cap V, x_1) \cong \mathbb{Z}$.

A questo punto si può applicare il teorema di Seifert-van Kampen nel caso in cui uno dei due fattori è banale, dato che $\pi_1(V) \cong 1$, e quindi si ha che

$$\pi_1\left(T^2, x_1\right) = \pi_1\left(U, x_1\right)/N,$$

dove N è il sottogruppo normale generato dall'immagine $i_*(\pi_1(U \cap V))$ dove $i : U \cap V \hookrightarrow U$ è l'inclusione naturale.
Il gruppo fondamentale $\pi_1(U, x_0)$ è generato da due generatori a, b che corrispondono alle classi di omotopia dei lacci che girano intorno ai cerchi.
Quindi se $f : I \to U$ è il cammino che collega x_0 ad x_1 vale che il gruppo fondamentale $\pi_1(U, x_1)$ è generato da $\tau_f(a)$ e $\tau_f(b)$.
D'altra parte $\pi_1(U \cap V, x_1)$ è generato da un laccio c che gira intorno ad y il centro del quadrato.
Deformando c sul bordo e passando poi al quoziente, si ha che

$$c \sim \tau_f(a * b * a^{-1} * b^{-1}).$$

Si ha quindi che l'immagine $i_*(\pi_1(U \cap V))$ è generata da $a * b * a^{-1} * b^{-1}$, si conclude quindi Che

$$\pi_1(T^2, x_1) = \langle a, b \mid [a, b]\rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

dove $[a, b] = a * b * a^{-1} * b^{-1}$ è il commutatore. □

Proposizione 1.12 (Gruppo fondamentale del toro con due buchi)**.**
Si indicherà con T_2^2 la superficie simile al toro, però con 2 buchi, cioè una doppia ciambella.

$$\pi_1(T_2^2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2]\rangle$$

Dimostrazione.
Il toro con due buchi $T = T_2^2$, si può identificare con la somma connessa

$$T = T_1 \# T_2,$$

dove T_1, T_2 sono due tori T^2, ottenuta incollando i due tori su dei dischi D^2 presi su ciascuno dei due tori.
Come si può ottenere questa costruzione come quoziente?
Si prendono due copie di Q. Si identificano tra di loro i lati opposti ai vertici di ciascun quadrato e per identificare i dischi detti prima, si considerano due lacci c_1, c_2 che partono da uno dei vertici di ciascun quadrato e si identificano tra loro.
In sostanza i due quadrati diventano due pentagoni, con due coppie di lati opposti identificate tra loro, ed con il lato c_1 di uno identificato con il lato c_2 dell'altro.

Perciò incollando c_1 e c_2 si ottiene un ottagono O i cui lati alterni sono identificati con direzione opposta.
Conoscendo la costruzione di T come quoziente, si può calcolare il suo gruppo fondamentale come nel caso di T^2.
Si consideri $U = T \setminus \{y\}$ e $V = i_*(\mathring{O})$
U è omotopicamente equivalente al bouqet di 4 cerchi dunque $\pi_1(U) \cong F_4$, mentre V è semplicemente connesso. $U \cap V \equiv D^2 \setminus 0$ e dunque $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ ed il generatore è

$$[a_1, b_1][a_2, b_2]$$

Quindi si conclude la tesi usando Van Kampen nel caso in cui uno dei fattori è semplicemente connesso.

□

Proposizione 1.13 (Gruppo fondamentale di un g-Toro).
Un toro con g si può vedere come somma connessa $T_1 \# T_2 \# \dots T_g$ di g tori, quindi in maniera analoga al caso precedente si può vedere come quozietne di un (2g-gon) O con la giusta identificazione.
Quindi il gruppo fondamentale di un toro con g buchi è dato da:

$$\pi_1(T_g^2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

Proposizione 1.14 (Gruppo fondamentale del piano proiettivo reale).
Il gruppo fondamentale del piano proiettivo reale è isomorfo al gruppo ciclico di ordine 2:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0) = \langle a \mid a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

e inoltre la somma connessa di g piani proiettivi ha come gruppo fondamentale:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \langle a_1, a_2, \dots a_g \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 \rangle$$

Dimostrazione. Da fare per esercizio □

Definizione 1.15 (Superficie topologica).
Una superficie topologica è uno spazio di Hausdorff connesso X che è compatto che ammette un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di aperti U_i tali che $U_i \cong D^2 \quad \forall i$.

Teorema 1.9. *(Classificazione delle superfici topologiche)*
Le classi di omeomorfismo delle superfici topologiche sono date da:

1. *La sfera S^2.*
2. *I g-tori T_g^2, cioè le superfici ottenute come somma connessa di tori.*
3. *Le somme connesse di g piani proiettivi reali $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

2 Rivestimenti

2.1 Definizioni ed esempi

Osservazione 2.1 (Le componenti connesse di uno spazio localmente connesso). *Se X è uno spazio topologico localmente connesso, allora le sue componenti connesse sono aperte e chiuse.*

Dimostrazione. Da scrivere, dovrebbe essere facile.

□

Tutti gli spazi topologici saranno supposti localmente connessi per archi, e dunque localmente connessi.
Dunque per l'osservazione precedente le componenti connesse saranno sempre aperte.

Definizione 2.1 (Rivestimento).
Dato uno spazio topologico X, un rivestimento per X è una coppia (Y, p), dove Y è uno spazio topologico e $p : Y \to X$ è una mappa continua tale che:
$\forall x \in X \quad \exists U_x$ *intorno di x aperto detto* ***intorno ben rivestito di*** *x tale che*

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

e $p_{|_{U_i}} : U_i \to U_x$ è un omeomorfismo $\forall i \in I$.

Proposizione 2.1 (I rivestimenti sono omeomorfismi locali).
Sia $p : Y \to X$ un rivestimento, allora p è un omeomorfismo locale, cioè

$$Y = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ aperti}, \quad \text{con } p|_{U_i} : U_i \to p(U_i) \text{ omeomorfismo e } p(U_i) \text{ è aperto in } X \forall i \in I.$$

Dimostrazione.
$\forall y \in Y$ sia $x = p(y)$, allora per la definizione di rivestimento esiste un intorno ben rivestito U_x di x tale che

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

e $p\big|_{U_i} : U_i \to U_x$ è un omeomorfismo su un aperto per ogni $i \in I$.
$y \in p^{-1}(U_x)$ e dall'unione disgiunta si ha che esiste un unico $i_y \in I$ tale che $y \in U_{i_y}$, e quindi

$$Y = \bigcup_{y \in Y} U_{i_y},$$

con $p(U_{i_y}) = U_x$ che è aperto e $p|_{U_{i_y}} : U_{i_y} \to U_x$ omeomorfismo.

□

Esempio 2.1 (Rivestimento banale).
Sia X uno spazio topologico e F uno spazio topologico discreto, allora $Y = X \times F \cong \bigsqcup_{f \in F} X$ e la mappa $p : Y \to X$ di proiezione sulla prima coordinata è un rivestimento di X detto rivestimento banale.

Esempio 2.2 (Nastro di Moebius).
Sia M il nastro di Moebius, e ∂M il suo bordo, la proiezione $p : \partial M \to S^1$ data dalla proiezione del bordo sull S^1 centrale del nastro è un rivestimento di S^1.
Un tale rivestimento non è banale perché $M \ncong S^1 \sqcup S^1$.

Esempio 2.3 (Mappa esponenziale).
La mappa $p : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi i t}$ è un rivestimento.

Esempio 2.4 (Rivestimento di S^n in se stesso).
Se $n \neq 1$ la mappa $p : S^n \to S^n : e^{2\pi\theta} \mapsto e^{2\pi n\theta}$ è un rivesitmento di S^n dove $\forall x \in S^n$ si ha che $\left|p^{-1}(x)\right| = n$.

Esempio 2.5 (Rivestimento di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).
La mappa $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \mapsto z^n$ è un rivestimento di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mentre la mappa $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ non lo è.

Proposizione 2.2 (Operazioni sui rivestimenti).

1. *Sia $p : Y \to X$ un rivestimento e $U \subset X$ un aperto.*
   La mappa $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ è un rivestimento di U.

2. *Se X è connesso e $Z \subset Y$ è una qualunque componente connessa di Y, allora la mappa $p\big|_Z : Z \to X$ è un rivestimento di X.*
   Infatti, se $U \subset X$ è un intorno ben ben rivestito per p, allora vale che

   $$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

   per connessione di Z vale però che $U_i \subset Z$ oppure $U_i \cap Z = .$
   Inoltre $p(Z) = X$, sia infatti $x' \notin p(Z)$, dato U' l'intorno ben rivestito di x' e gli U'_i tali che $p^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{i \in I} U'_i$, dato che che $U_i \not\subset Z$ vale che $U_i \cap Z =$ per ogni i. (da controllare)

3. *Siano $p_1 : Y_1 \to X_1, p_2 : Y_2 \to X_2$ due rivestimenti rispettivamente di X_1 e X_2. Allora la mappa*

   $$(p_1, p_2) : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2 : (y_1, y_2) \to (p_1(y_1), p_2(y_2))$$

   è un rivestimento di $X_1 \times X_2$.
   Ad esempio $\mathbb{R}^2 \to T = S^1 \times S^1$ è un rivestimento del toro.

2.2 Morfismi di rivestimenti

Definizione 2.2 (Morfismo di rivestimenti).
*Un **morfismo di rivestimenti** è il dato di due rivestimenti $pi_1 : Y_1 \to X, p_2 : Y_2 \to X$ ed una mappa continua $\varphi : Y_1 \to Y_2$ tale che*

$$p_2 \circ \varphi = p_1$$

ovvero il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Definizione 2.3 (Isomorfismo di rivestimenti).
Se $\varphi : Y_1 \to Y_2$ è un morifmso di rivestimenti come sopra tale che esiste un altro morfismo di rivestimenti $\psi : Y_2 \to Y_1$ tale che $\psi \circ \varphi = id_{Y_1}$ e $\varphi \circ \psi = id_{Y_2}$ si dice che φ è un isomorifsmo tra i rivestimenti $pi_1 : Y_1 \to X, p_2 : Y_2 \to X$.

Definizione 2.4 (Morfismi tra mappe continue).
La stesse definizioni date sopra si possono dare nel caso generale in cui p_1, p_2 sono generiche mappe continue.

Proposizione 2.3 (Caratterizzazione dei rivestimenti).
Sia $p : Y \to X$ una mappa continua surgettiva.

p è un rivestimento $\iff \forall x \in X \quad \exists U$ tale che $p_{|p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ è isomorfo ad un rivestimento banale

Dimostrazione.
$(\Leftarrow)$
$(\Rightarrow)$ Se $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, si può munire I della topologia discreta e in questo modo $p^{-1}(U) \cong I \times U$ e la mappa $\varphi : Y \to I \times U : y \mapsto (i, p(y))$ se $y \in U_i$ è un omeomorfismo e dunque un isomorifsmo tra i due rivestimenti. □

Teorema 2.1 (Fibre di un rivestimento).
Se X è uno spazio topologico connesso e $p : Y \to X$ è un rivestimento, allora tutte le fibre hanno la stessa cardinalità.
Cioè

$$\forall x, y \in X \quad \left|p^{-1}(x)\right| = \left|p^{-1}(y)\right|.$$

Definizione 2.5 (Grado di un rivestimento).
*Il corollario precedente permette di definire il **grado** di un rivestimento $p : Y \to X$ come la cardinalità di una qualunque delle fibre di p.*

Corollario 2.1 (I rivestimenti sono surgettivi). *Se $p : Y \to X$ è un rivestimento e $Y \neq \emptyset$, allora p è surgettiva.*

Dimostrazione.
Segue dal teorema precedente, poiché

$$p : Y \to X \text{ è surgettiva se e solo se } \forall x \in X \quad \left|p^{-1}(x)\right| \geq 1$$

cioè il grado del rivestimento è maggiore o uguale a 1.
' Ma dato che $Y \neq \emptyset$, esiste un punto $y \in Y$ ed un punto $x = p(y) \in X$ tale che $p^{-1}(x) \neq \emptyset$, e quindi il grado di p è maggiore o uguale ad 1. □

Dimostrazione.
Dato $x_0 \in X$ si considera l'insieme

$$\Omega := \left\{x \in X \mid \left|p^{-1}(x_0)\right| = \left|p^{-1}(x_0)\right|\right\}$$

Dato che X è connesso, mostrando che Ω è sia aperto che chiuso si conclude che $\Omega = X$.
Si mostra che Ω è aperto, mostrando che è intorno di ogni suo punto.
Infatti se $x \in \Omega$ allora esiste un intorno ben rivestito U_x di x tale che

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

con $p|_{U_i} : U_i \to U_x$ omeomorfismo, e quindi in particolare bigezione.
Dunque per ogni $x \in X$ si ha che $\left| p|_{U_i}^{-1}(x) \right| = 1$ per ogni $i \in I$ e quindi si ha una bigezione tra $p^{-1}(x)$ e I e quindi in particolare in bigezione con $p^{-1}(x_0)$, per ogni $x \in U$, per cui $U \in \Omega$ che è quindi intorno di x.
Ora, dato che esistono degli $x \in X$ tali che gli insiemi $\Omega(x)$ partizionano X, si ha che $\Omega(x_0)$ è il complementare di un unione arbitraria di aperti, che è aperta e dunque Ω è chiuso. Da cui segue la tesi.

□

2.3 Azioni propriamente discontinue

Definizione 2.6 (Azione di gruppo propriamente discontinua).
Si dice che un gruppo G agisce in maniera propriamente discontinua su uno spazio topologico Y se ogni punto $y \in Y$ ammette un intorno U_y tale che $\forall g, h \in G \quad g.U \cap h.U = \emptyset$ se $g \neq h$.

Proposizione 2.4 (Rivestimenti dati da azioni propriamente discontinue).
Sia Y uno spazio topologico e G un gruppo che agisce in maniera propriamente discontinua su Y. Allora la mappa $p : Y \to Y/G$ data dalla proiezione di Y su Y/G è un rivestimento di Y/G. Inoltre gli intorni ben rivestiti di ogni punto $x \in Y/G$ sono dati dall'immagine degli intorni che rendono l'azione propriamente discontinua.

Dimostrazione.
Chiaramente la proiezione al quoziente è sempre surgettiva ed è continua per definizione della topologia quoziente.
Per ogni punto $x \in Y$ sia U l'intorno che rende propriamente discontinua l'azione, allora vale

$$p^{-1}(p_g(U)) = \bigsqcup_{g \in G} g.U,$$

□

Esempio 2.6.
Si consider l'azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ data da $n.x = x + n$, allora la mappa

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1 : x \mapsto x + \mathbb{Z}$$

è un rivestimento che possiamo identificare come il rivestimento $t \to e^{2n\pi it}$ di S^1 visto in precedenza.

Esempio 2.7.
Il rivestimento $\mathbb{R}^2 \to T = S^1 \times S^1$ può essere visto come il rivestimento indotto dall'azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$ data da $(m, n).(x, y) = (x + m, y + n)$.

Esempio 2.8.
Anche il rivestimento $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ visto in precedenza può essere visto come il rivestimento indotto dall'azione propriamente discontinua del gruppo ciclico di n elementi $\{\zeta_n \in \mathbb{C} \mid \zeta_n^n = 1\}$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ data da

$$\zeta_n.z = \zeta_n z$$

Esempio 2.9 (Spazi proiettivo reale).
Si considera l'azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|(\| x) = 1\}$ data da

$$\tau.x = -x \text{ se } \tau \text{ è l'elemento non banale di } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Questa azione è propriamente discontinua e la proiezione al quoziente è un rivestimento $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Esempio 2.10 (Rivestimento banale).
Sia G un gruppo topologico munito della topologia discreta, allora l'azione naturale di G su $G \times X$ data da

$$g.(g', x) = (gg', x)$$

e propriamente discontinua ed induce il rivestimento banale $G \times X \to X$.
Inoltre per ogni sottogruppo normale $H \trianglelefteq G$, la mappa $G \times X \to G/H \times X$ è ancora un rivestimento banale.

Definizione 2.7 (Automorfismo di rivestimenti).
Un automorfismo del rivestimento $p : Y \to X$ è un isomorfismo di p con se stesso, cioè

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

È facile verificare che l'insieme $\operatorname{Aut}(Y/X) := \{\phi : Y \to Y \mid \phi$ *automorfismi di p in se stesso*$\}$ *forma un gruppo con l'operazione di composizione ed è detto* ***gruppo di automorfismi del rivestimento*** Y/X.

Osservazione 2.2.
Nel caso del rivestimento $Y \to Y/G$ dato dalla proiezione, la mappa

$$G \to \operatorname{Aut}(X/G) : g \mapsto \varphi_g(x \mapsto g.x)$$

è un omomorfismo iniettivo $G \hookrightarrow \operatorname{Aut}(()\, X/G)$.

Proposizione 2.5. *Se Y è connesso allora la mappa, come sopra*

$$G \to \operatorname{Aut}(X/G) : g \mapsto \varphi_g(x \mapsto g.x)$$

è un isomorfismo tra G e $Aut(X/G)$.

Lemma 2.1.
Sia $Y \to X$ un rivestimento connesso e $\varphi \in \operatorname{Aut}(Y/X)$, vale che

$$\exists y \in Y \text{ tale che } \varphi(y) = y \implies \varphi = \mathrm{id}$$

Cioè l'unico automorfismo di rivestimento che lascia fisso un punto è l'identità.
Quindi gli automorfismi di rivestimenti indotti da azioni propriamente discontinue non hanno punti fissi.

Lemma $\implies$ Proposizione.
Grazie all'osservazione, resta da verificare che tale mappa è surgettiva.
Cioè $\forall \varphi \in \operatorname{Aut}(Y/X) \quad \exists g \in G$ tale che $\varphi = \varphi_g$.
siccome φ è un automorfismo di rivestimenti vale che $p \circ \varphi = p$, quindi

$$\forall y \in Y \quad p(\varphi(y)) = p(y).$$

ma quindi $\varphi(y)$ è un elemento di $p^{-1}(p(y)) = \{g.y \mid g \in G\}$ essendo la fibra di un punto tramite la proiezione al quoziente.
Dunque $\exists g \in G$ tale che $\varphi(y) = g.y$, e quindi $\varphi_g \circ \varphi$ fissa il punto y, ma grazie al lemma si conclude che $\varphi_g \circ \varphi = id_Y$.
Quindi $\varphi = \varphi_g$ e dunque la mappa è surgettiva. □

Proposizione 2.6 (Unicità di sollevamenti di mappe continue qualunque).
Siano $p : Y \to X$ un rivestimento cnnesso e Z uno spazio topologico connesso. Siano inoltre $f, g : Z \to X$ due mappe continue tali che $p \circ f = p \circ g$.

$$\exists z \in Z \text{ tale che } f(z) = g(Z) \quad \implies \quad f = g$$

Osservazione 2.3.
Il lemma precedente è il caso particolare del teorema appena enunciato, nel caso in cui $Z = Y$, $f = \varphi$ e $g = id_Y$.

Dimostrazione. Sia $z \in Z$ tale che $f(z) = g(z)$, e sia $x = p(f(z)) = p(g(z))$, che sono uguali per l'ipotesi. Sia U un intorno ben rivestito di x e siano U_i gli intorni che compongono la fibra di $p^{-1}(U)$, cioè

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i.$$

Poiché p è una funzione e $p \circ f = p \circ g$, deve esistere un intorno U_i tra quelli sopra tale che $f(z) = g(z) \in U_i$.
Si è mostrato che l'insieme

$$S := \{z \in Z \mid f(z) = g(Z)\}$$

è non vuoto, mostrando che S eѐsia aperto che chiuso, si conclude per connessione che $S = Z$.
S è aperto perché intorno di ogni suo punto, infatti per ogni punto z tale che $f(z) = g(z)$ dalla continuità di f e g segue che esiste un intorno aperto V di z tale che $f(V), g(V) \subset U_i$, ma poiché $p \circ f = p \circ g$ e la restrizione di p ad U_i è un omeomorfismo, vale che $\forall z' \in V \quad f(z') = g(z')$ e quindi S è intorno di z.
Si dimostra ora in maniera analoga che $S' := Z \setminus S = \{z \in Z \mid f(z) \neq g(z)\}$ è aperto e quindi S è anche chiuso.
Infatti, $\exists i \neq j$ tali che $f(z) \subset U_i$ e $g(z) \subset U_j$, allora per continuità, come prima $\exists V$ intorno aperto di z tale che $f(z) \subset U_i$ e $g(z) \subset U_i$ e come prima segue che $\forall z' \in V \quad f(z') \neq g(z')$. □

Proposizione 2.7 (I rivestimenti sono dati da azioni propriamente discontinue)**.**
Se $Y \to X$ è un rivesitmento connesso. l'azione di $\mathrm{Aut}\left(()\, Y/X\right)$ *su Y data da*

$$\varphi.y = \varphi(y)$$

è propriamente discontinua.

Dimostrazione. Si mostra che $\forall y \in Y$, $\exists U_i$ intorno di y tale che $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}\left(()\, Y/X\right)$

$$\varphi_1(U_i) \cap \varphi_2(U_i) = \emptyset \text{ se } \varphi_1 \neq \varphi_2.$$

Si mostra prima che $\exists U_i$ tale che $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}\,(Y/X)$

$$\varphi(U_i) \cap U_i = \emptyset \text{ se } \varphi \neq id_Y.$$

La tesi seguirà ponendo $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, per cui

$$\left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right)(U_i) \cap U_i = \emptyset \implies \varphi_1(U_i) \cap \varphi_2(U_i) = \emptyset.$$

Tale fatto segue dal lemma precedente, infatti se U è un intorno ben rivestito di $x = p(y)$, allora

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

e se $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(Y/X)$ allora esiste $j \in I$ tale che $\varphi(U_j) = U_j$, e se quando $i \neq j$ esistesse un punto $y' \in U_i \cap U_j$, allora per il lemma precedente si avrebbe che $\varphi = \mathrm{id}$.

□

2.4 Teoria di Galois per rivestimenti

Definizione 2.8 (Rivestimento di Galois)**.**
Dalla proposizione precedente se $p : Y \to X$ è un rivestimento connesso si ha la fattorizzazione di p data da:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & Y/\mathrm{Aut}\,(Y/X) \arrow[r, "\bar{p}"] & X \end{tikzcd}$$

Se $\bar{p}$ è un omeomorfismo si dice che il rivestimento è di Galois. In sostanza un rivestimento è di Galois, se

$$X \cong \frac{Y}{\mathrm{Aut}\,(Y/X)}$$

Osservazione 2.4. *Se Y è connesso e G agisce su Y in maniera propriamente discontinua, il rivestimento $Y \to Y/G$ è di Galois.*

Teorema 2.2 (Teorema di Galois per rivestimenti)**.**
Sia $Y \to X$ un rivestimento di Galois e $G := AutY/X$. Vale che
$\forall H \leq G$ sottogruppo, la mappa $Y/H \to Y$ è un rivestimento connesso e

$$H \trianglelefteq G \quad \Longleftrightarrow \quad Y/H \to Y \text{ è un rivestimento di Galois.}$$

Inoltre, se $Z \to X$ è un rivestimento connesso tale che esiste un morfismo φ di rivestimenti che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

si ha che $Y \to Z$ è un rivestimento di Galois e $\operatorname{Aut}(Y/Z) \leq G$
Dunque il teorema da una corrispodenza:

$$\{H \leq G \text{ sottogruppi}\} \longleftrightarrow \{p_z : Z \to Y \text{ rivestimenti connessi} \mid p_Z \circ \varphi = p_Y\}$$

Esempio 2.11.
Il rivestimento $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ è di Galois.

Esempio 2.12 (Esempio di rivestimento non di Galois)**.**

2.5 Rivestimento universale

Teorema 2.3 (Sollevamento di cammini e omotopie)**.**
Sia $p : Y \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $y \in p^{-1}(x)$. Vale

1. *(Esistenza ed unicità del sollevamento)*
   Se $\gamma : I \to X$ è un cammino tale che $\gamma(0) = x_0$, allora $\exists! \tilde{\gamma} : I \to Y$ cammino tale che $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}(0) = y$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

2. *(Sollevamento dell'omotopia)*
   Se $\gamma_0 \sim \gamma_1$ sono due cammini omotopi allora $\tilde{\gamma_0}(1) = \tilde{\gamma_1}(1)$ e $\tilde{\gamma_0} \sim \tilde{\gamma_1}$

Esistenza ed unicità del sollevamento.
La dimostrazione di seguito riportata è quella fatta nel corso l'anno precedente. L'idea è la stessa, si è ritenuto che questa dimostrazione fosse più dettagliata.
Poiché p è un rivestimento, la famiglia

$$\mathcal{U} := \{U_x \subset X \mid x \in X \text{ e } U_x \text{ è un intorno ben rivestito di } x\}.$$

è un ricoprimento di aperti di X.
Poiché γ è un cammino, è in particolare una mappa continua e quindi

$$\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \left\{\gamma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\right\}$$

è un ricoprimento di aperti dell'intervallo $I = [0, 1]$.
L'intervallo è uno spazio metrico compatto e quindi ogni suo ricoprimento di aperti amette numero di Lebesgue ε tale Che

$$\forall t \in I \quad \exists V \in (U) \text{ tale che } B(t, \varepsilon) \subset V.$$

Dunque se $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$ si può definire la sequenza finita di intervalli:

$$\left\{ I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \mid k = 0, \ldots, n-1 \right\}.$$

tali che $\forall k = 0, \dots, n-1$ si ha che $\gamma(I_k) \subset U_k$ per qualche $U_k \in \mathcal{U}$.
Si definisce ora la mappa $\tilde{\gamma} : I \to Y$ definendola su ciascun I_k.
Per $k = 0$, $\gamma(I_0) \subset U_0$ che è ben rivestito, siano W_i gli intorni della fibra, cioè

$$p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_{i \in I} W_i,$$

e si sceglie l'unico $\bar{W_0} := W_{i_0}$ tale che $y \in W_{i_0}$.
A tal punto si definisce $\tilde{\gamma}$ su I_0 come

$$\tilde{\gamma}|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} := p|_{\bar{W_0}}^{-1} \circ \gamma|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}.$$

Si costruisce ora $\tilde{\gamma}$ ricorsivamente, ponendo $y_k := \tilde{\gamma}|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(1)$. E

$$\tilde{\gamma}|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]} = p|_{\bar{W_k}}^{-1} \circ \gamma|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}.$$

dove $\bar{W_k}$ è l'unico intorno di y_k della fibra dell'intorno ben rivestito di $x = p(y_k)$.
L'unicità segue da un lemma della sottosezione precedente che dimostrava l'unicità dei sollevamenti di mappe continue qualunque. □

Sollevamento dell'omotopia.
La seguente dimostrazione è quella invece data da Tamas, si è ritenuto fosse meno dispersiva(l'anno precedente si era sollevata l'omotopia in generale, mentre quest'anno solo quella di cammini).
Si dimostrerà che se $H : I \times I \to X$ l'omotopia ad estremi fissi tra due cammini $\gamma_0, \gamma_1 : I \to X$, allora

$$\exists \tilde{H} : I \times I \to Y \text{ tale che } p \circ \tilde{H} = H \text{ e } \tilde{H}(t, 0) = \tilde{\gamma_0}(t), \quad \tilde{H}(t, 1) = \tilde{\gamma_1}(t).$$

detto sollevamento dell'omotopia H.
Come nel sollevamento dei cammini, si considera il ricoprimento di aperti del quadrato dato da:

$$\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \left\{\gamma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\right\}$$

e poiché il quadrato è compatto, si ha che esiste un numero di Lebesgue ε tale che

$$\forall (t, s) \in I \times I \quad \exists V \in \mathcal{U} \text{ tale che } B\left((t, s), \varepsilon\right) \subset V.$$

Si può dare un'ordinamento lessicografico agli intervalli di $I \times I$ e si costruisce il sollevamento in maniera ricorsiva ed analoga al caso precedente ma lungo un "serpente" che attraversa il quadrato $I \times I$.
Per unicità del sollevametno di cammini, dato che il cammino $t \mapsto \tilde{H}(t, 0)$ è tale che

$$p(\tilde{H}(t, 0)) = H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad \forall t \in I,$$

allora vale che $(t \mapsto \tilde{H}(t, 0)) = \tilde{\gamma_0}$. Analogamente si ha che $(t \mapsto \tilde{H}(t, 1)) = \tilde{\gamma_1}$.
Inoltre, il cammino $s \mapsto \tilde{H}(0, s)$ è tale che

$$p(\tilde{H}(0, s)) = H(t, s) \quad \forall s \in I,$$

e quindi il cammino definito da $\tilde{H}(0, s)$ è un sollevamento del cammino definito da $H(0, s)$.
Ma dato che l'omotopia è ad estremi fissi tale cammino è il cammino costante $s \mapsto \gamma_0(0)$ e l'unico sollevamento del cammino costante è il cammino costante $s \mapsto \tilde{(}\gamma_0)(0)$, quindi

$$\tilde{H}(0, s) = \tilde{\gamma_0}(0) \quad \forall s \in I.$$

e analogamente si ha che $\tilde{H}(1, s) = \tilde{\gamma_1}(1)$.
Si conclude che il sollevamento dell'omotopia $\tilde{H}$ è un omotopia ad estremi fissi tra i cammini $\tilde{\gamma_0}$ e $\tilde{\gamma_1}$. □

Definizione 2.9 (Rivestimento universale).
*Un rivestimento $\pi : \tilde{X} \to X$ si dice **universale** se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso.*

Proposizione 2.8 (Proprietà universale del rivestimento universale). *Sia $\pi : \tilde{X} \to X$ un rivestimento universale, per ogni altro rivestimento $p : Y \to X$ esiste un morfismo di rivestimenti $\varphi : \tilde{X} \to X$ e fissati $x_0 \in X$, $\tilde{x_0} \in \pi^{-1}(x_0)$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ ne esiste uno solo tale che $\varphi(\bar{x_0}) = y_0$*

Dimostrazione.
$\tilde{X}$ è connesso per archi, quindi $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$ esiste un cammino $g : I \to \tilde{X}$ tale che $g(0) = \tilde{x_0}$ e $g(1) = \tilde{x}$.
Sia $f := \pi \circ g$ che è un cammino in X tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = \pi(\tilde{x})$.
E sia $\tilde{f} : I \to Y$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = y_0$. (che esiste per il teorema di sollevamento di cammini e omotopie). Si definisce ora $\varphi : \tilde{X} \to Y$ come

$$\varphi(\tilde{x}) = \tilde{f}(1).$$

Tale mappa è ben definita e non dipende dalla scelta del cammino, perché dato che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, ogni cammino g' che collega $\tilde{x_0}$ a $\tilde{x}$ è omotopo a g, di conseguenza il cammino f è omotopo a $f' = \pi \circ g'$ e quindi per il sollevamento dell'omotopia si ha che $\tilde{f}(1) = \tilde{f}'(1)$.
L'unicità di φ fissati i punti segue dall'unicità del sollevamnto di mappe qualunque.
Resta da mostrare che φ è una mappa continua. □

Corollario 2.2.
Dato $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ morfismo tra rivestimenti universali

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

φ è un isomorfismo.

Corollario 2.3 (Unicità del rivestimento universale)**.**
Un qualunque morfismo di rivestimenti universali $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ è un isomorfismo.
In particolare, grazie alla proprietà universale il rivestimento universale di un qualunque spazio topologico X è unico a meno di isomorfismo.

Dimostrazione.
Siano $x_0 \in X$, $\tilde{x} \in \pi_1^{-1}(x_0)$ e $\tilde{y} \in \varphi(\tilde{x}))$.
Per la proprietà universale esiste un unico morfismo di rivestimenti $\psi : \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ tale che $\psi(\tilde{y}) = \tilde{x}$.
Si ha quindi il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, shift right, "\varphi"'] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[ll, shift right, "\psi"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Cioè

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, shift left, "\mathrm{id}_{\tilde{X}_1}"] \arrow[rr, shift right, "\psi\circ\varphi"'] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \tilde{X}_1 \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

E quindi per dato che $(\psi \circ \varphi)(\tilde{x}) = \psi(\tilde{y}) = \tilde{x}$ vale che $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\tilde{X}_1}$
Allo stesso modo $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\tilde{X}_2}$ e quindi φ è un isomorfismo. □

Corollario 2.4.
Ogni rivestimento di uno spazio X semplicemente connesso è banale.

Dimostrazione.
Non l'ho ancora capita... □

Teorema 2.4 (Gruppo di Galois e gruppo fondamentale)**.**
Un rivestimento universale $\tilde{X} \to X$ è sempre di Galois e

$$\mathrm{Aut}\left(\tilde{X}/X\right) \cong \pi_1(X, x_0) \quad \forall x_0 \in X$$

Osservazione 2.5.
Questo teorema permette di ricalcolare il gruppo fondamentale di alcuni spazi topologici precedenti:

1. $\mathbb{R} \to S^1$

2. $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$

3. $S^n \to \mathbb{P}^n(R)$

Lemma 2.2 (Caratterizzazione dei rivestimenti di Galois).
Dato $p : Y \to X$ rivestimento connesso.

$$p \text{ è di Galois } \iff \exists x \in X \text{ tale che } \operatorname{Aut}(Y/X) \text{ agisce transitivamente su } p^{-1}(x)$$

del lemma.
$\Rightarrow$ Se p è di Galois, allora $X \cong \frac{Y}{AutY/X}$ e quindi le fibre dei punti sono esattamente le orbite dell'azione di $Aut(Y/X)$ su Y. Dunque è transitiva per definizione.
$\Leftarrow$ p si fattorizza in

$$Y \longrightarrow Y/\operatorname{Aut}(Y/X) \xrightarrow{\bar{p}} X$$

e $\bar{p}$ è sempre un rivestimento connesso, ma se l'azione è transitiva su $p^{-1}(x)$, allora vale che $\left|\bar{p}^{-1}(x)\right| = 1$ e dunque $\bar{p}$ è bigettiva, dato che è anche aperta(i rivestimenti sono aperti), è anche un omeomorfismo. Dunque p è di Galois per definizione. □

del teorema.
Si vuole definire una mappa:

$$\Phi : pi_1(X, x_0) \to \operatorname{Aut}\left(\tilde{X}/X\right)$$

come segue: fissato un $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x_0)$, sia $g = [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ e $\tilde{x_g} := \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(x_0)$, dove $\tilde{\gamma}$ è l'unico sollevamento di γ tale che $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$.
Per il sollevamento dell'omotopia si ha in effetti che $\tilde{x_g}$ dipende solo da g e non da γ.
Sia ora $\varphi_g : \tilde{X} \to \tilde{X}$ l'unico morfismo di rivestimenti tale che

$$\varphi_g(\tilde{x}) = \tilde{x_g}.$$

Si definisce ora $\Phi(g) := \varphi_g$ e si mostra che è un omomorfismo di gruppi, inietivvo e surgettivo.

- **Omomorfismo**
  Si fa incollando per esistenza ed unicità dei sollevamenti, un giorno sarà scritta.
- **Iniettivo**
  Se $\Phi(g) = \text{id}$ allora $\varphi_g(\tilde{x}) = \tilde{x}$, cioè e dunque il sollevamento è $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{x}$ per ogni $t \in I$, che sollevamenti il cammino costante $I \to \{x_0\}$ e dunque la sua classe $g = e$ l'elemento neutro del gruppo fondamentale.
- **Suriettivo**
  $\varphi \in \operatorname{Aut}\left(\tilde{X}/X\right)$ è determinato dall'immagine $\varphi(\tilde{x})$ sia $\tilde{\gamma}$ un cammino da $\tilde{x}$ a $\varphi(\tilde{x})$, allora $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ è un laccio, e quindi se $g = [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, allora $\Phi(g) = \varphi$. Dunque Φ è suriettivo.

□

Definizione 2.10 (Spazio localmente semplicemente connesso).
Uno spazio topologico X si dice localmente semplicemente connesso se ogni ogni punto ammette un sistemfa fondamentale di intorni fatto di intorni semplicemente connessi.

Teorema 2.5 (Esistenza del rivestimento universale).
Sia X spazio connesso e localmente semplicemente connesso, allora esiste $\tilde{X} \to X$ rivestimento universale di X.

Dimostrazione.
Fissato un punto $x_0 \in X$, il rivestimento universale $\tilde{X}$ è definito come

$$\tilde{X} := \{\text{cammini } f : I \to X \mid f(0) = x_0\} / \sim$$

con $\pi : \tilde{X} \to X$ definita come

$$\pi([f]) := f(1).$$

- La topologia di $\tilde{X}$ ha come base la seguente: se $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e U intorno semplicemente connesso di $f(1) = \pi(\tilde{x}) \in X$(che esiste per le ipotesi),

$$\tilde{Ux} := \{[f * g] \mid g : I \to U \text{ cammino tale che } g(0) = f(1)\} / \ .$$

dove   è l'omotopia di cammini ad estremi fissi.
Dato che U è semplicemente connesso, le classi di omotopia dei cammini g dipendono solo dal punto finale $g(1)$.
Resta da mostrare che gli $\tilde{Ux}$ sono una base di una topologia su $\tilde{X}$ e che π è continua.

- π è un rivestimento e gli intorni ben rivestiti sono proprio quelli semplicemente connessi dati dalle ipotesi, infatti $\forall x \in X$ se U è un intorno semplicemente connesso di x, allora

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\tilde{x} \in U} \tilde{Ux}$$

- $\tilde{X}$ è connesso per archi, infatti se $\tilde{x_0} = [I \to \{x_0\}] \in \tilde{X}$ è la classe del cammino costante e $\tilde{x} = [f] \in \tilde{X}$ un qualsiasi altro elemento, allora il cammino

$$\tilde{f} : I \to \tilde{X} : s \mapsto [t \mapsto f(st)]$$

parte da $\tilde{f}(0) = [t \mapsto f(0)] = \tilde{x_0}$ e arriva a $\tilde{f}(1) = [t \mapsto f(t)] = \tilde{x}$, quindi $\tilde{X}$ è connesso per archi.
Notare che tale cammino, essendo un sollevamento è unico.

- $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, infatti se $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ è un cammino chiuso tale che $\tilde{x} = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$, allora $\gamma := \pi \circ \tilde{\gamma} : I \to X$ è tale che $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, ma γ è omotopo al cammino costante $I \to \{x_0\}$, e per unicità del sollevamento di cammini si ha che

$$\tilde{\gamma} \sim I \to \{\tilde{x}\}$$

che è l'unico sollevametno del cammino costatne $I \to \{x_0\}$.

$\square$

2.6 Dimostrazione del teorema di Seifert-Van Kampen

Si consdierino le seguenti due costruzinoi:

1. Ad un omomorfismo surgettivo corrisponde un rivestimento di Galois:
Sia $\varrho : \pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow G$ un omomorfismo surgettivo e sia $N := \ker(\varrho)$ il suo nucleo.
N agisce su $\tilde{X}$, tramite l'azione $g.\tilde{x} := tildex * g$, tale azione si verifica essere propriamente discontinua e quindi definisce un riestimento connesso

$$p_\varrho : Y_\varrho := \tilde{X}/N \to X$$

Tale rivestimento risulta inoltre essere di Galois, $\pi^{-1}(U) \cong U \times \pi_1(X, x_0)/N$ per ogni intorno ben rivestito U di x_0, dove $\pi_1(X, x_0)/N$ è munito dela topologia discreta.
Segue che

$$p^{-1}(U) \cong U \times \left(\frac{\pi_1(X, x_0)}{N}\right) \cong U \times G.$$

2. Dato un rivestimento $p : Y \to X$ di Galois, si definisce l'omomorfismo

$$\varrho : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}\,(Y/X) =: G$$

come segue: fissato un $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, sia $g = [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ e $\tilde{x_g} := \tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(x_0)$, dove Fissato un $y \in p^{-1}(x_0)$, per un teorema precedente esiste un unico morfismo di rivestimenti $\varphi : \tilde{X} \to Y$ tale che $\varphi(x_0) = y$.
Sia ora $\psi \in \mathrm{Aut}\,(Y/X)$ e $y_\psi := (\varphi \circ \psi)(\tilde{x_0}) \in p^{-1}(x_0)$.
Poiché p è di Galois, esiste un unico $g \in G = \mathrm{Aut}\,(Y/X)$ tale che $g(y) = y_\psi$. Vale dunque che

$$(\varphi \circ \psi)(\tilde{x_0}) = (g \circ \varphi)(\tilde{(x_0)})$$

e

$$p \circ \varphi \circ \psi = p \circ g \circ \psi$$

cioè il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & \tilde{X} \arrow[d, "\varphi"] \\
Y \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X
\end{tikzcd}$$

A questo punto si definisce l'ommorfismo

$$\varrho : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}\,(Y/X) = G : \psi \mapsto g_\psi$$

che risulta essere omomorfismo perché $g_2 g_1$ è l'unico morfismo che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\varphi"] & \tilde{X} \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\varphi"] & \tilde{X} \arrow[d, "\varphi"] \\
Y \arrow[r, dashed, "g_1"] \arrow[rr, dashed, bend right=10, "g_2 g_1"'] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[r, dashed, "g_2"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X
\end{tikzcd}$$

Inoltre ϱ è surgettivo,

Teorema 2.6.
Le due costruzioni precedente sono l'una l'inversa dell'altra ed inducono una corrispondenza : $\{\varrho : \pi_1(X, x_0) \to G\} \longleftrightarrow$

del Teorema di Seifert-Van-Kampen (preliminare).
Sia $X = X_1 \cup X_2$ la unione di due aperti X_1 e X_2 connessi per archi, tali che $X_1 \cap X_2$ sia connesso per archi. Per la corrispondenza enunciata prima la situazione del teorema è la seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X_1, x_0) \arrow[dr, "i_{1*}"] \arrow[drr, "\varrho_1"] & & \\
\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & & \pi_1(X, x_0) & G \\
 & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[ur, "i_{2*}"] \arrow[urr, "\varrho_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si suppone per la dimostrazione che:

1. X è localmente semplicemente connesso, dunque esiste il suo rivestimento universale.

2. (per ora) le mappe ϱ_1 e ϱ_2 sono surgettive.

Per il teorema precedente si ha che esistono due rivestimenti $p_1 : Y_1 \to X_1, p_2 : Y_2 \to X_2$ che corrispondono rispettivamente a ϱ_1 e ϱ_2 e che hanno come gruppo di Galois proprio G. Inoltre le restrizioni

$$p_i|_{p_i^{-1}(X_1 \cap X_2)} : p_i^{-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\sim} X_1 \cap X_2$$

sono isomorfismi gli unici isomorfismi fissato $x_0 \in X_1 \cap X_2$ e y_0 nella preimmagine.
Per continuare la dimostrazione ci sarà bisogno del lemma che segue. □

Lemma 2.3.
Siano $p_1 : Y_1 \to X_1$, $p_2 : Y_2 \to X_2$ due rivestimenti e $\varphi : Y_1 \to Y_2$ un morfismo di rivestimenti, allora

$$\exists p : Y \to X (= X_1 \cup X_2) \textit{ rivestimento tale che } p|_{p^{-1}(X_i)} \cong p_i^{-1}(X_i) \to X$$

Inoltre se p_1, p_2 sono di Galois allora anche p è di Galois.

$$\begin{tikzcd} p_1^{-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[rr, "\varphi"', "\cong"] \arrow[dr] & & p_2^{-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[dl] \\ & X_1 \cap X_2 & \end{tikzcd}$$

del lemma. Sia $Y := \frac{Y_1 \sqcup Y_2}{/sim}$ dove $y_1 \sim y_2$ se e solo se $y_i \in p^{-1}(X_1 \cap X_2)$ e $\varphi(y_1) = y_2$.
Sia $p : Y \to X$ la mappa indotta naturalmente da p_1 e p_2, cioè

$$p(y) := \begin{cases} p_1(y) & \text{se } y \in Y_1 \\ p_2(y) & \text{se } y \in Y_2 \end{cases}$$

e poiché $p|_{p_i^{-1}(X_i)} \cong p_i$, si ha che p è un rivestimento.
Inoltre se Y_1, Y_2 sono connessi lo è anche Y.
Inoltre per qualche motivo a me non ancora ovvio, se p_1, p_2 sono di Galois con gruppo G, allora anche p è di Galois con gruppo G.

□

del Teorema di Seifert-Van-Kamper (conclusione).
La p che esiste per il lemma precedente e che fa commutare il diagramma, e corrisponde proprio ad una $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$ tale che il diagramma del prodotto amalgamato sia soddisfatto.
Per dimostrare che il teorema vale anche quando i ϱ_i non sono surgettivi va modificata la costruzione 1 in modo da fare una corrispondenza tra tutti gli omomorifsmi e una nuova classe di rivestimenti, detti G-rivestimenti. Gli ultimi fatti del corso, puntano a costruire tale corrispondenza. □

Definizione 2.11 (G-rivestimento)**.**
Un G-rivestimento è un rivestimento della forma $Y \to Y/G$ dove G è un gruppo che agisce in maniera propriamente discontinua su Y.

Teorema 2.7.
La mappa $\varrho \mapsto Y_\varrho$ induce una bigezione:

$$\{\varrho : \pi_1(X, x_0) \to G\} \longleftrightarrow \left\{G\text{-rivestimenti } p : Y \to X \mid y = p^{-1}(x_0) \text{ fissato}\right\}$$

con i rivestimenti a meno di isomorfismo.

3 Domande orali del 3 Giugno

3.1 Orale 1

1. Come si dimostra che il prodotto di 2 compatti è compatto?
2. Perché i compatti di $\mathbb{R}$ sono chiusi?

   Risposta. È T2 □

3. Esempio di compatto di $\mathbb{R}$ che non è unione finita di intervalli chiusi e limitati.

   Risposta. L'insieme di Cantor □

4. Se X e Y sono compatti e discreti, cosa si può dire? (TAMAS)

   Risposta. X, Y sono finiti, quindi il prodotto di finiti è finito hahaha. □

5. Esempio di un compatto non discreto

   Risposta. Un intervallo chiuso. □

3.2 Orale 2

1. Che relazione ci sono tra chiuso e compatto

   Risposta. Chiuso in un compatto è compatto. □

2. Quand'è che i sottoinsiemi compatti di X sono chiusi? E se vuole mi dia un controesempio di un compatto non chiuso.

   Risposta. Se X è T2 i compatti sono chiusi, il controesempio è un qualunque spazio con la topologia indiscreta. □

3. Sia $p : Y \to X$ un rivestimento e $U \subset X$ aperto, come si definisce la restrizione del rivestimento p ad U? Dimostrare che tale restizione è ancora un rivestimento. (TAMAS)

   Risposta. $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ □

4. X, Y e U connessi come sopra. Quando $p^{-1}(U)$ è sconnesso? Dopo un po' hanno chiesto, qual è il rivestimento connesso più semplice che uno possa pensare? (TAMAS)

   Risposta. Alla prima domanda non si è saputo rispondere.
   Alla seconda domanda $Y = X$ con $p = id_X$ che è un caso di omeomorfismo. □

3.3 Orale 3

1. Com'è definito $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$? Munito della topologia quoziente a quale spazio è omeomorfo?

   Risposta. Alla sfera S^1, la dimostrazione si può fare con l'unicità della compattificazione di Alexandroff perché i due spazi sono $T2$ e compatti. □

2. Chi è il piano all'infinito di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

   Risposta. Il punto proiettivo $[0, 1]$ □

3. Esercizio: Verifica che le carte affini sono omeomorfismi.
4. Cos'è una conica in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$? Quante coniche non degeneri esistono in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$? E quante in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$?
5. Come si trova la tangente ad una conica passante per un punto?

3.4 Orale 4

1. Data una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $|f(z)| \leq c_1 |z| + c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti. Cerchi una caratterizzazione di f.

   Risposta. I polinomi di grado minore o uguale a d. Dimostrazione molto simile al Teorema di Louville. □

2. È vero che f come sopra(quindi un polinomio) definisce un rivestimento $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$? Per esempio $z \mapsto z^n$ è un rivestimento da $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$? (Tamas)

   Risposta. La mappa $\varrho : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ non può dare un rivestimento perché per esempio, $\varrho^{-1}(0) = \{0\}$, mentre $\varrho^{-1}(1) = \left\{\zeta_n^i \mid i = 0, \ldots, n-1\right\}$ e quindi non sarebbe ben definito il suo grado. (In generale tale osservazione si può fare per un poliniomio generico al posto di z^n ed usando il teorema fondamentale dell'algebra)
   Tuttavia la mappa $\varrho : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \mapsto z^n$ da un rivestimento indotto dall'azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su $\mathbb{C}^*$ data da $[m].z \to (z)\zeta_n^m$, infatti in tal caso le orbite dell'azione sono proprio le radici n-esime di z^n e quindi le fibre del rivestimento $\varrho : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. □

3.5 Orale 5

1. Esempio di un rivestimento di Galois e di un rivestimento non di Galois. Un esempio generale di rivestimento di Galois. (Tamas)

   Risposta. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è di Galois ed in generale G che agisce p.d. su $\tilde{X}$ semplicemente connesso da un rivestimento $\tilde{X} \to \tilde{X}/G$ di Galois.
   L'esempio non di Galois è quello visto a lezione. □

2. Qual è il gruppo fondamentale del bouquet $S^1 \vee S^1$, perché si poteva prevedere teoricamente? (Tamas)

   Risposta. Per il toerema di Corrispondenza di Galois esiste perché ci sono sottogruppi non normali in $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. □

3. Qual è la forma normale di una funzione f memorofa con zero z_0 di ordine k? Calcoli il residuo di $h(z) = \frac{f'}{f}$ in z_0

   Risposta. $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, con $g(z) \neq 0$ olomorfa.
   Se z_0 è uno zero di ordine k di $f(z)$ allora è di ordine $k-1$ per $f'(z)$, quindi la funzione $h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ ha un polo di ordine 1 in z_0, quindi

   $$Res(h, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = \cdots = k.$$

   □

4. Secondo lei a cosa serve?

   Risposta. Se si integra $\frac{f'(z)}{f(z)} dz$ lungo un cammino chiuso di indice di avvolgimento 1 intorno a z_0 si ottiene $2k\pi i$. □

3.6 Orale 6

1. Sia I un segmento che collega il polo sud ed il polo nord di S^2.
   Si calcoli il gruppo fondamentale di $X = S^2 \cup I$.

   Risposta. Si prende $X_1 = X \setminus$ segmento chiuso proprio di I e $X_2 = I \cup$ i punti a distanza $<$ ε da un meridiano l'intersezione è semplicemente connessa, X_2 anche e quindi il gruppo fondamentale è lo stesso di X_1 cioè $\mathbb{Z}$ □

2. Riesce a disegnare il rivestimento universale di $S^1 \vee S^2$? Di che grado è? E quello di X?.

   Risposta. Il primo è una retta su cui si inseriscono dele sfere su ogni numero intero.
   Mentre il secondo è dato da una "catena" di sfere collegate da dei segmenti. □

3.7 Orale 7

1. Il prodotto munito della topologia prodotto di spazi discreti è discreto?

   Risposta. Sì, se il prodotto è finito se è infinito non necessariamente altrimenti. □

2. Esempio di prodotto infinito di discreti non discreto

   Risposta. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ che non è discreto perché $\{(0,0,\ldots,0)\}$ non è aperto. □

3. Prodotto numearbile di metrizzabili è metrizzabile? $0,1^{\mathbb{N}}$ è I-numerabile?

   Dimostrazione. Si ed inoltre metrizzabile implica I-numerabile. □

4. Costruzione del cono toologico $\frac{X\times[0,1]}{X\times\{0\}}$. Calcolo del grupo fondamentale per $X = S1$ e poi in generale.

5. Se X, Y sono metrizzabili e compatti, dimostri che $X \times Y$ è compatto.

   Dimostrazione. Usando la caratterizzazione metrizzabili: compatto se e solo se compatto per successioni. (Oppure secondo TAMAS con il numero di Lebesgue)

   □

6. Cos'è il numero di Lebesgue?

3.8 Orale 8

1. Teorema di Van-Kampen con enunciato e dimostrazione.

   Risposta. Dimostrazione diversa da quella di Tamas, più generale e probabilmente presa dall'Hatcher. □

2. Dimostra che se $\alpha \sim \beta$ allora $\varphi(\alpha) \sim \varphi(\beta)$.

3. Se $\pi_1(X, x_0)$ è abeliano, allora $\forall \alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$ si ha che $\alpha_\sharp = \beta_\sharp$

3.9 Orale 9

1. Quali sono i legami tra la connession e la connessione per archi?

   Risposta. Connesso per archi implica connesso, ma non vale il viceversa. Per la dimostrazione si è dato per buono che I sia connnesso. □

2. Un esempio di spazio connesso ma non connesso per archi.

   Risposta. Il seno del topologo. La dimostrazione utilizza il fatto che se Y è connesso e $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ allora Z è connesso, ma questo fatto è dato per buono. □

3. Dimostra che il seno del topologo è connesso, senza utilizzare il lemma.

   Risposta. Se esistessero A, B aperti non vuoti tali che $A \cup B = X$ e $A \cap B =$. Supponendo senza perdità di generalità che $(0,0) \in A$, l'insieme $A \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset$(dato che $\{0,0\} \in \overline{\Gamma(sin(\frac{1}{x}))}$) è aperto nel grafico di $sin\,(1/x)$ e quindi gli aperti $A \setminus \{(0,0)\}$ e B sconnettono $sin\left(\frac{1}{x}\right)$ che però è connesso. □

4. Cosa sono le componenti connesse di uno spazio topologico? Se lo spazio ha una proprietà topologica "simpatica" cosa si sa dire?(TAMAS)

   Risposta. Se lo spazio è localmente connesso le componenti connesse sono aperte e chiuse. □

5. Esempio di spazi localmente connessi e di spazio non localmente connessi. Per esempio in $\mathbb{R}^n$.

   Risposta. Gli aperti di $\mathbb{R}^n$ sono sempre localmente connessi, mentre i chiusi in generale no per esempio $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ non è localmente connesso. □