Appunti di Topologia Algebrica

Simone Riccio

31 maggio 2025

Indice

1 Gruppo Fondamentale

1.1 Motivazione

Una delle motivazioni che porta a definire il gruppo fondamentale è la necessità di distinguere due spazi topologici a meno di omeomorfismo.

Esempio 1.1.
Si consideri il disco

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

Al variare di n naturale i D^n non sono intuitivamente omeomorfi, tuttavia dimostrarlo usando solo la topologia generale è difficile.

È semplice mostrare che $D^1 \ncong D^n$ per $n \geq 2$, usando l'insieme delle componenti connesse. Infatti, per ogni $x \in D^n$ lo spazio topologico $D^n \setminus \{x\}$ è connesso per ogni $n \geq 2$, mentre $D^1 \setminus \{x\}$, essendo il segmento $[-1, 1]$ senza un punto, ha due componenti connesse.

Tale argomentazione non funziona già per provare a distinguere D^2 dai D^n con $n \geq 3$. Introduciamo quindi il gruppo fondamentale, che permetterà in futuro di distinguerli tutti.

Definizione 1.1 (Omotopia)**.**
Date due funzioni continue $f, g : X \to Y$ tra spazi topologici, si dice che f e g sono ***omotope*** *se esiste una funzione*

$$H : I \times X \to Y$$

continua *e tale che:*

- $H(0, x) = f(x)$ *per ogni* $x \in X$*;*
- $H(1, x) = g(x)$ *per ogni* $x \in X$.
- $H(s, y) = H(s, x)$ *per ogni* $s \in I$ *e per ogni* $x, y \in X$ *tali che* $f(x) = f(y)$.

*Si dice che H è un'****omotopia*** *tra f e g e si scrive*

$$f \sim g.$$

Inoltre si può vedere un'omotopia come una famiglia di funzioni contiune:

$$\{f_s : X \to Y\}_{s \in I} \quad \text{con } f_s(x) = H(s, x).$$

Che rappresentano una deformazione continua di f in g.

Definizione 1.2 (Omotopia di cammini a estremi fissi).
Due cammini $\gamma_0, \gamma_1 : I \to X$ si dicono ***omotopi (a estremi fissi)*** *se esiste una funzione*

$$H : I \times I \to X$$

continua *e tale che:*

- $H(0,t) = \gamma_0(t)$ *per ogni* $t \in I$*;*
- $H(1,t) = \gamma_1(t)$ *per ogni* $t \in I$*;*
- $H(s,0) = H(s,1)$ *per ogni* $s \in I$*.*

*Si dice che H è un'****omotopia di cammini a estremi fissi*** *e si scrive*

$$\gamma_0 \sim \gamma_1.$$

Infatti è facile verificare che l'essere omotopi a estremi fissi induce una relazione di equivalenza sull'insieme dei cammini in X.

Definizione 1.3 (Giunzione di cammini).
Siano $f, g : I \to X$ due cammini in X con $f(1) = g(0)$, allora la ***giunzione*** *di f e g è il cammino*

$$f * g : I \to X : t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Lemma 1.1 (Giunzione di cammini e omotopia).
Se $f \sim f'$ e $g \sim g'$, allora $f * g \sim f' * g'$.

Dimostrazione. Sia $H_f : I \times I \to X$ un'omotopia di f e f' e $H_g : I \times I \to X$ un'omotopia di g e g'.
Definiamo l'omotopia

$$H : I \times I \to X : (s,t) \mapsto \begin{cases} H_f(2s,t) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ H_g(2s-1,t) & \text{se } \frac{1}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

che risulta continua. Infatti la continuità di H_f e H_g implica la continuità di H, essendo le due funzioni definite su due intervalli disgiunti. Inoltre si verifica facilmente che H soddisfa le condizioni richieste. □

Osservazione 1.1.
Si noti che la giunzione di cammini non è definita su ogni coppia di cammini, ma solo su quelle che hanno il punto finale del primo uguale al punto iniziale del secondo. Tuttavia, se si considerano solo i cammini chiusi ***che partono da uno stesso punto iniziale****, la giunzione è chiaramente sempre definita.*

Da ora in poi gli spazi topologici considerati saranno sempre localmente connessi.

Teorema 1.1 (Poincaré).
Se X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un punto fisso.
Il prodotto dato dalla giunzione di cammini induce una struttura di gruppo sulle classi di omotopia dei cammini chiusi in X aventi punto iniziale x_0.
Tale gruppo è chiamato ***gruppo fondamentale*** *di X in x_0 e si denota con $\pi_1(X, x_0)$.*
In tale gruppo l'elemento neutro è rappresentato dal cammino costante in x_0 e l'inverso di un cammino γ è il cammino

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$$

che è l'inverso rispetto alla giunzione di cammini.

Per la dimostrazione del teorema di Poincaré ci basta dimostrare prima un lemma.

Lemma 1.2. *(Riparametrizzazione di un cammino e omotopia)*
Sia $\gamma : I \to X$ un cammino in X e sia $\varphi : I \to I$ una funzione continua tale che $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$.
Allora $\gamma \circ \varphi : I \to X$ è un cammino in X e $\gamma \sim \gamma \circ \varphi$.

Dimostrazione. Basta mostrare che la funzione φ è omotopa all'identitaà id_I.
L'omotopia è data dalla famiglia di funzioni

$$\varphi_s : I \to I : t \mapsto (1-s)t + s\varphi(t).$$

E poi boh.. buco. □

Teorema di Poincarè.

- (Associatività)
  Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \to X$ tre cammini chiusi in X con punto iniziale x_0. Si ha che

  $$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3).$$

  Poiché $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ si può vedere come una Riparametrizzazione del cammino $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ e quinid usare il lemma.

- (Unità)
  L'elemento neutro del gruppo fondamentale è il cammino costante in x_0, che si denota con $e : I \to x_0$.
  Infatti, per ogni cammino $\gamma : I \to X$ si ha che $\gamma * e$ è la Riparametrizzazione di γ secondo la mappa

  $$\varphi : I \to I : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$

- (Inverso)
  Sia

  $$\gamma_s : I \to X : t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } 0 \leq t \leq s, \\ \gamma(s) & \text{se } s < t \leq 1. \end{cases}$$

  La famiglia di cammini $\{\gamma_s\}_{s\in I}$, che non sono lacci, rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ, tuttavia **non rappresenta un'omotopia ad estremi fissi** poiché $\gamma_s(1) \neq \gamma(1)$. Vale peroĉhe $\gamma_s(0) = \gamma(0)$ cioè il punto iniziale è fisso.
  In modo analogo la famiglia di cammini data da

  $$\gamma_s^{-1}(t) := gamma_s(1-t)$$

  rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ^{-1}, ma non ad estremi fissi.
  A questo punto si verifica che la famiglia di **cammini chiusi** $\left\{\gamma_s * \gamma_s^{-1}\right\}_{s\in I}$ rappresenta un'omotopia **ad estremi fissi** tra il cammino costante in x_0 e il cammino $\gamma * \gamma^{-1}$.
  Si fa in maniera analoga per mostrare che $\gamma^{-1} * \gamma \sim e_{x_0}$

□

Esempio 1.2.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Siano $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ due cammini chiusi in $\mathbb{R}^n$ con punto iniziale x_0.
La famiglia di cammini chiusi definita da

$$f_s : I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$$

definisce un'omotopia ad estremi fissi tra α e β.
Piuìn generale, l'omotopia definita eq̀uella che per ogni punto dei cammini percorre al variare di s il segmento che unisce i due cammmini in quell'istante t, e dunque la stessa argomentazione vale per dimostrare che:

$$\forall X \subset \mathbb{R}^n \textit{ convesso},$$
$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Proposizione 1.1 (Gruppo fondamentale di un connesso per archi)**.**
Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in X.$$

In altre parole, il gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi non dipende dal punto iniziale scelto.

Dimostrazione. Sia $f : I \to X$ un cammino tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, che esiste poiché X è connesso per archi. Tale cammino induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali in x_0 e x_1:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [f * \gamma * f^{-1}] \end{aligned}$$

con inversa data da

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f^{-1} * \gamma * f]. \end{aligned}$$

Infatti, si verifica prima di tutto la buona definizione:
Se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ sono due cammini chiusi in X, per il lemma della Riparametrizzazione, si ha che

$$f * \gamma_1 * f^{-1} \sim f * \gamma_2 * f^{-1}.$$

Inoltre, si verifica che l'immagine di un cammino chiuso in x_0 è un cammino chiuso in x_1 e viceversa.
Si si veririfica che le funzioni appena definite sono effettivamente degli omomorfismi di gruppo poichèsi ha che:

$$f * \gamma_1 * \gamma_2 * f^{-1} \sim (f * \gamma_1 * f^{-1}) * (f * \gamma_2 * f^{-1})$$

usando l'associatività che anche se non dimostrata vale anche per cammini chiusi.
Infine, si verifica facilmente che le due mappe sono una l'inversa dell'altra. □

Osservazione 1.2.
L'isomorfismo tra i due gruppi fondamentali non è canonico, poiché dipende dalla scelta del cammino f tra i due punti x_0 e x_1.

Definizione 1.4 (Spazio semplicemente connesso)**.**
Uno spazio topologico X si dice ***semplicemente connesso*** *se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale, cioè*

$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in X.$$

Osservazione 1.3.
Se X è semplicemente connesso e $\alpha, \beta : I \to X$ sono due cammini allora

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha(1) = \beta(1) \implies \alpha \sim \beta$$

Dato che il cammino $\alpha * \beta^{-1}$ è chiuso e il gruppo fondamentale è banale, quindi

$$\alpha * \beta^{-1} \sim e_{x_0} \implies \alpha \sim \beta.$$

Osservazione 1.4 (La funtorialità del gruppo fondamentale)**.**
Siano X, Y due spazi topologici e $\varphi : X \to Y$ una mappa continua tale che $\varphi(x_0) = y_0$ per due punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.
Allora φ induce un omomorfismo di gruppi

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

definito da

$$\varphi_*([\gamma]) = [\varphi \circ \gamma]$$

Si verifica facilmente che la mappa è ben definita ed è un omomorifsmo di gruppi.
Inoltre, vale che, se $\varphi = \mathrm{id}_X$ allora $\varphi_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$ e se $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.
Nel linguaggio delle categorie quindi si dice che

$$\pi_1 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Grp} : X \mapsto \pi_1(X, x_0)$$

è un ***funtore*** *da* **Top***, la categoria degli spazi topologici, a* **Grp***, la categoria dei gruppi.*

Proposizione 1.2.
Se $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo tra spazi topologici, allora

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

è un isomorfismo di gruppi, dove $x_0 \in X$ e $y_0 = \varphi(x_0) \in Y$.

Dimostrazione.
Poiché φ è un omeomorfismo, essa è continua e ha un'inversa continua $\varphi^{-1} : Y \to X$.
Cioè $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ e $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_Y$, quindi segue dalla funtorialitá che

$$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = id_{\pi_1(X,x_0)} \quad \text{e} \quad \varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = id_{\pi_1(Y,y_0)}.$$

Quindi φ_* è un isomorfismo di gruppi, poiché ha un'inversa data da φ_*^{-1}. □

Definizione 1.5 (Spazi omotopicamente equivalenti)**.**
*Due spazi topologici X e Y si dicono **omotopicamente equivalenti** se esistono due funzioni continue*

$$f : X \to Y \quad e \quad g : Y \to X$$

tali che:

- *$g \circ f$ è omotopa all'identità su X;*
- *$f \circ g$ è omotopa all'identità su Y.*

Si denota con $X \simeq Y$ se X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Esempio 1.3.

1. *$\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè si dice che $\mathbb{R}^n$ è **contraibile**. Infatti sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ la funzione costante in 0, che è continua. e sia $\psi : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ anch'essa continua.*
   Si ha che $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\{0\}}$, mentre $\psi \circ \varphi$ è omotopa all'identità su $\mathbb{R}^n$ tramite l'omotopia definita da

   $$H : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (s, x) \mapsto sx.$$

2. *S^n è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$*
   Infatti se $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è l'inclusione di S^n in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e

   $$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

   Si ha che $i \circ \psi = \mathrm{id}_{S^n}$ e $\psi \circ i \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$ tramite l'omotopia

   $$H : I \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : (s, x) \mapsto (1-s)x + s\frac{x}{\|x\|}.$$

3. *Il Nastro di Möbius è omotopicamente equivalente al cerchio S^1.*
   Infatti, sia M il Nastro di Möbius e sia $\varphi : M \to S^1$ la proiezione che manda ogni punto del nastro sul suo bordo. Si ha che φ è continua e suriettiva.
   Infatti se consideriamo il quadrato $Q = [-1, 1]\times[-1, 1]$, tale spazio è omotopicamente equivalente al segmento $[-1, 1]$ tramite l'inlcusione del segmento nel quadrato e la proiezione naturale del quadrato sul segmento. Identificando i lati opposti del quadrato in modo da ottenere il Nastro di Möbius, si ha che la proiezione del quadrato sul segmento induce una mappa continua e suriettiva dal Nastro di Möbius al cerchio, con omotopie che passano al quoziente.

Teorema 1.2. *(Spazi omotopicaamente equivalenti hanno gruppo fondamentale isomorfo)*
*Siano X e Y spazi topologici **connessi per archi** omotopicamente equivalenti, allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi:*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

per ogni coppia di punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.

Lemma 1.3.
Siano $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ *due funzioni continue tra spazi topologici e siano* $x_0 \in X$*.*
Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \arrow[dd, "\tau_f"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\varphi_{0*}"] \arrow[dr, "\varphi_{1*}"'] & \\ & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \end{tikzcd}$$

dove $\tau_f : \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \to \pi_1(Y, \varphi_1(x_0))$ *è l'isomorfismo indotto dal cammino* $f : I \to Y : s \mapsto \varphi_s(x_0)$ *e* $\{\varphi_s | s \in I\}$ *è l'omotopia tra* φ_0 *e* φ_1*.*

Dimostrazione.

□

2 Rivestimenti