

Appunti di Topologia Algebrica del corso di Geometria 2

Simone Riccio

(dalle lezioni del Prof. Tamas Szamuely)

9 giugno 2025

Indice

1 Gruppo Fondamentale	1
1.1 Omotopia	1
1.2 Definizione del gruppo fondamentale	3
1.3 Primi gruppi fondamentali	7
1.4 Teorema di Seifert-Van Kampen e richiami di teoria dei gruppi	9
1.5 Applicazioni ed esempi	12
1.6 Gruppi fondamentali di superfici topologiche compatte	13
2 Rivestimenti	15
2.1 Definizioni ed esempi	15
2.2 Morfismi di rivestimenti	17
2.3 Azioni propriamente discontinue	18
2.4 Teoria di Galois per rivestimenti	20
2.5 Rivestimento universale	21
2.6 Dimostrazione del teorema di Seifert-Van Kampen	25
3 Domande orali del 3 Giugno	28
3.1 Orale 1	28
3.2 Orale 2	28
3.3 Orale 3	28
3.4 Orale 4	29
3.5 Orale 5	29
3.6 Orale 6	29
3.7 Orale 7	30
3.8 Orale 8	30
3.9 Orale 9	30
4 Domande orali del 9 Giugno	31
4.1 Orale	31
4.2 Orale	31
4.3 Orale	31
4.4 Orale	31
4.5 Orale	32

1 Gruppo Fondamentale

1.1 Omotopia

Una delle motivazioni che porta a definire il gruppo fondamentale è la necessità di distinguere due spazi topologici a meno di omeomorfismo.

Esempio 1.1.

Si consideri il disco

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

Al variare di n naturale i D^n non sono intuitivamente omeomorfi, tuttavia dimostrarlo usando solo la topologia generale è difficile.

È semplice mostrare che $D^1 \not\cong D^n$ per $n \geq 2$, usando l'insieme delle componenti connesse. Infatti, per ogni $x \in D^n$ lo spazio topologico $D^n \setminus \{x\}$ è connesso per ogni $n \geq 2$, mentre $D^1 \setminus \{x\}$, essendo il segmento $[-1, 1]$ senza un punto, ha due componenti connesse.

Tale argomentazione non funziona già per provare a distinguere D^2 dai D^n con $n \geq 3$. Introduciamo quindi il gruppo fondamentale, che permetterà in futuro di distinguerli tutti.

Definizione 1.1 (Omotopia).

Date due funzioni continue $f, g : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici, si dice che f e g sono **omotope** se esiste una funzione

$$H : I \times X \rightarrow Y$$

continua e tale che:

- $H(0, x) = f(x)$ per ogni $x \in X$;
- $H(1, x) = g(x)$ per ogni $x \in X$;
- $H(s, y) = H(s, x)$ per ogni $s \in I$ e per ogni $x, y \in X$ tali che $f(x) = f(y)$.

Si dice che H è un'**omotopia** tra f e g e si scrive

$$f \sim g.$$

Inoltre si può vedere un'omotopia come una famiglia di funzioni continue:

$$\{f_s : X \rightarrow Y\}_{s \in I} \quad \text{con } f_s(x) = H(s, x).$$

Che rappresentano una deformazione continua di f in g .

Definizione 1.2 (Omotopia di cammini a estremi fissi).

Due cammini $\gamma_0, \gamma_1 : I \rightarrow X$ si dicono **omotopi (a estremi fissi)** se esiste una funzione

$$H : I \times I \rightarrow X$$

continua e tale che:

- $H(0, t) = \gamma_0(t)$ per ogni $t \in I$;
- $H(1, t) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in I$;
- $H(s, 0) = H(s, 1)$ per ogni $s \in I$.

Si dice che H è un'**omotopia di cammini a estremi fissi** e si scrive

$$\gamma_0 \sim \gamma_1.$$

Infatti è facile verificare che l'essere omotopi a estremi fissi induce una relazione di equivalenza sull'insieme dei cammini in X .

Definizione 1.3 (Giunzione di cammini).

Siano $f, g : I \rightarrow X$ due cammini in X con $f(1) = g(0)$, allora la **giunzione** di f e g è il cammino

$$f * g : I \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Lemma 1.1 (Giunzione di cammini e omotopia).

Se $f \sim f'$ e $g \sim g'$, allora $f * g \sim f' * g'$.

Dimostrazione. Sia $H_f : I \times I \rightarrow X$ un'omotopia di f e f' e $H_g : I \times I \rightarrow X$ un'omotopia di g e g' .

Definiamo l'omotopia

$$H : I \times I \rightarrow X : (s, t) \mapsto \begin{cases} H_f(2s, t) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ H_g(2s - 1, t) & \text{se } \frac{1}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

che risulta continua. Infatti la continuità di H_f e H_g implica la continuità di H , essendo le due funzioni definite su due intervalli disgiunti. Inoltre si verifica facilmente che H soddisfa le condizioni richieste. \square

Osservazione 1.1.

Si noti che la giunzione di cammini non è definita su ogni coppia di cammini, ma solo su quelle che hanno il punto finale del primo uguale al punto iniziale del secondo. Tuttavia, se si considerano solo i cammini chiusi **che partono da uno stesso punto iniziale**, la giunzione è chiaramente sempre definita.

1.2 Definizione del gruppo fondamentale

Da ora in poi gli spazi topologici considerati saranno sempre localmente connessi.

Teorema 1.1 (Poincaré).

Se X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un punto fisso.

Il prodotto dato dalla giunzione di cammini induce una struttura di gruppo sulle classi di omotopia dei cammini chiusi in X aventi punto iniziale x_0 .

Tale gruppo è chiamato **gruppo fondamentale** di X in x_0 e si denota con $\pi_1(X, x_0)$.

In tale gruppo l'elemento neutro è rappresentato dal cammino costante in x_0 e l'inverso di un cammino γ è il cammino

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$$

che è l'inverso rispetto alla giunzione di cammini.

Per la dimostrazione del teorema di Poincaré ci basta dimostrare prima un lemma.

Lemma 1.2. (Riparametrizzazione di un cammino e omotopia)

Sia $\gamma : I \rightarrow X$ un cammino in X e sia $\varphi : I \rightarrow I$ una funzione continua tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$. Allora $\gamma \circ \varphi : I \rightarrow X$ è un cammino in X e $\gamma \sim \gamma \circ \varphi$.

Dimostrazione. Basta mostrare che la funzione φ è omotopa all'identità id_I .

L'omotopia è data dalla famiglia di funzioni

$$\varphi_s : I \rightarrow I : t \mapsto (1 - s)t + s\varphi(t).$$

E poi boh.. buco. □

Teorema di Poincaré.

• (Associatività)

Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \rightarrow X$ tre cammini chiusi in X con punto iniziale x_0 . Si ha che

$$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3).$$

Poiché $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ si può vedere come una riparametrizzazione del cammino $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ e quindi usare il lemma.

• (Unità)

L'elemento neutro del gruppo fondamentale è il cammino costante in x_0 , che si denota con $e : I \rightarrow x_0$.

Infatti, per ogni cammino $\gamma : I \rightarrow X$ si ha che $\gamma * e$ è la riparametrizzazione di γ secondo la mappa

$$\varphi : I \rightarrow I : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$

• (Inverso)

Sia

$$\gamma_s : I \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } 0 \leq t \leq s, \\ \gamma(s) & \text{se } s < t \leq 1. \end{cases}$$

La famiglia di cammini $\{\gamma_s\}_{s \in I}$, che non sono lacci, rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ , tuttavia **non rappresenta un'omotopia ad estremi fissi** poiché $\gamma_s(1) \neq \gamma(1)$. Vale però che $\gamma_s(0) = \gamma(0)$ cioè il punto iniziale è fisso.

In modo analogo la famiglia di cammini data da

$$\gamma_s^{-1}(t) := \gamma_s(1 - t)$$

rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in x_0 e il cammino γ^{-1} , ma non ad estremi fissi. A questo punto si verifica che la famiglia di **cammini chiusi** $\{\gamma_s * \gamma_s^{-1}\}_{s \in I}$ rappresenta un'omotopia **ad estremi fissi** tra il cammino costante in x_0 e il cammino $\gamma * \gamma^{-1}$. Si fa in maniera analoga per mostrare che $\gamma^{-1} * \gamma \sim e_{x_0}$

□

Esempio 1.2.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Siano $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ due cammini chiusi in \mathbb{R}^n con punto iniziale x_0 . La famiglia di cammini chiusi definita da

$$f_s : I \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$$

definisce un'omotopia ad estremi fissi tra α e β .

Più in generale, l'omotopia definita è quella che per ogni punto dei cammini percorre al variare di s il segmento che unisce i due cammini in quell'istante t , e dunque la stessa argomentazione vale per dimostrare che:

$$\begin{aligned} \forall X \subset \mathbb{R}^n \text{ connesso,} \\ \pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Proposizione 1.1 (Gruppo fondamentale di un connesso per archi).

Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in X.$$

In altre parole, il gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi non dipende dal punto iniziale scelto.

Dimostrazione. Sia $f : I \rightarrow X$ un cammino tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, che esiste poiché X è connesso per archi. Tale cammino induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali in x_0 e x_1 :

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [f * \gamma * f^{-1}] \end{aligned}$$

con inversa data da

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f^{-1} * \gamma * f]. \end{aligned}$$

Infatti, si verifica prima di tutto la buona definizione:

Se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ sono due cammini chiusi in X , per il lemma della Riparametrizzazione, si ha che

$$f * \gamma_1 * f^{-1} \sim f * \gamma_2 * f^{-1}.$$

Inoltre, si verifica che l'immagine di un cammino chiuso in x_0 è un cammino chiuso in x_1 e viceversa.

Si verifica che le funzioni appena definite sono effettivamente degli omomorfismi di gruppo poiché si ha che:

$$f * \gamma_1 * \gamma_2 * f^{-1} \sim (f * \gamma_1 * f^{-1}) * (f * \gamma_2 * f^{-1})$$

usando l'associatività che anche se non dimostrata vale anche per cammini chiusi.

Infine, si verifica facilmente che le due mappe sono una l'inversa dell'altra.

□

Osservazione 1.2.

L'isomorfismo tra i due gruppi fondamentali non è canonico, poiché dipende dalla scelta del cammino f tra i due punti x_0 e x_1 .

Definizione 1.4 (Spazio semplicemente connesso).

Uno spazio topologico X si dice **semplicemente connesso** se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale, cioè

$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in X.$$

Osservazione 1.3.

Se X è semplicemente connesso e $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ sono due cammini allora

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha(1) = \beta(1) \implies \alpha \sim \beta$$

Dato che il cammino $\alpha * \beta^{-1}$ è chiuso e il gruppo fondamentale è banale, quindi

$$\alpha * \beta^{-1} \sim e_{x_0} \implies \alpha \sim \beta.$$

Osservazione 1.4 (La funtorialità del gruppo fondamentale).

Siano X, Y due spazi topologici e $\varphi : X \rightarrow Y$ una mappa continua tale che $\varphi(x_0) = y_0$ per due punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.

Allora φ induce un omomorfismo di gruppi

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

definito da

$$\varphi_*([\gamma]) = [\varphi \circ \gamma]$$

Si verifica facilmente che la mappa è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi.

Inoltre, vale che, se $\varphi = \text{id}_X$ allora $\varphi_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ e se $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

Nel linguaggio delle categorie quindi si dice che

$$\pi_1 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grp} : X \mapsto \pi_1(X, x_0)$$

è un **functore** da **Top**, la categoria degli spazi topologici, a **Grp**, la categoria dei gruppi.

Proposizione 1.2.

Se $\varphi : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo tra spazi topologici, allora

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

è un isomorfismo di gruppi, dove $x_0 \in X$ e $y_0 = \varphi(x_0) \in Y$.

Dimostrazione.

Poiché φ è un omeomorfismo, essa è continua e ha un'inversa continua $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$.

Cioè $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_X$ e $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_Y$, quindi segue dalla funtorialità che

$$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)} \quad \text{e} \quad \varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}.$$

Quindi φ_* è un isomorfismo di gruppi, poiché ha un'inversa data da φ_*^{-1} . □

Definizione 1.5 (Spazi omotopicamente equivalenti).

Due spazi topologici X e Y si dicono **omotopicamente equivalenti** se esistono due funzioni continue

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{e} \quad g : Y \rightarrow X$$

tali che:

- $g \circ f$ è omotopa all'identità su X ;
- $f \circ g$ è omotopa all'identità su Y .

Si denota con $X \simeq Y$ se X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Esempio 1.3.

1. \mathbb{R}^n è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè si dice che \mathbb{R}^n è **contraibile**. Infatti sia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ la funzione costante in 0, che è continua. e sia $\psi : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ anch'essa continua.

Si ha che $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\{0\}}$, mentre $\psi \circ \varphi$ è omotopa all'identità su \mathbb{R}^n tramite l'omotopia definita da

$$H : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (s, x) \mapsto sx.$$

2. S^n è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$
 Infatti se $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è l'inclusione di S^n in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e

$$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

Si ha che $i \circ \psi = \text{id}_{S^n}$ e $\psi \circ i \sim \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ tramite l'omotopia

$$H : I \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : (s, x) \mapsto (1-s)x + s \frac{x}{\|x\|}.$$

3. Il Nastro di Möbius è omotopicamente equivalente al cerchio S^1 .
 Infatti, sia M il Nastro di Möbius e sia $\varphi : M \rightarrow S^1$ la proiezione che manda ogni punto del nastro sul suo bordo. Si ha che φ è continua e suriettiva.
 Infatti se consideriamo il quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, tale spazio è omotopicamente equivalente al segmento $[-1, 1]$ tramite l'inclusione del segmento nel quadrato e la proiezione naturale del quadrato sul segmento. Identificando i lati opposti del quadrato in modo da ottenere il Nastro di Möbius, si ha che la proiezione del quadrato sul segmento induce una mappa continua e suriettiva dal Nastro di Möbius al cerchio, con omotopie che passano al quoziente.

Teorema 1.2. (Spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppo fondamentale isomorfo)

Siano X e Y spazi topologici **connessi per archi** omotopicamente equivalenti, allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

per ogni coppia di punti fissi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.

Lemma 1.3.

Siano $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$ due funzioni continue **omotope** tra spazi topologici e siano $x_0 \in X$.

Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) & \\ \varphi_{0*} \nearrow & \downarrow \tau_f & \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \\ \varphi_{1*} \searrow & & \end{array}$$

dove $\tau_f : \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_1(x_0))$ è l'isomorfismo indotto dal cammino $f : I \rightarrow Y : s \mapsto \varphi_s(x_0)$ e $\{\varphi_s \mid s \in I\}$ è l'omotopia tra φ_0 e φ_1 .

Dimostrazione.

Si consideri la mappa

$$\tau_f^{-1} := \tau_{f^{-1}} : \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) : g_Y \mapsto f * g_Y * f^{-1}.$$

Al variare di $s \in I$ si ha che

$$f_s : I \rightarrow Y : t \mapsto f(st)$$

rappresenta un'omotopia tra il cammino $f_0 : I \rightarrow \{\varphi_0(x_0)\}$ e il cammino f .

Quindi, se ora si considera g_X un cammino chiuso in $x_0 \in X$, allora la mappa

$$I \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) : s \mapsto f_s * \varphi_0(g_X) * f_s^{-1}$$

induce un'omotopia tra il cammino chiuso $\varphi_0(g_X)$ e il cammino chiuso $f(\varphi_1(g_X))$, dunque vale che

$$\varphi_{0*}(g_X) = \tau_f(\varphi_{1*}(g_X)).$$

□

del teorema.

Siano $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow X$ le funzioni continue che definiscono l'equivalenza omotopica tra X e Y . Grazie al lemma precedente, dato che vale $\psi \circ \varphi \sim \text{id}$ si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi_1(X, (\psi \circ \varphi)(x_0)) \\ & \searrow \text{id} & & \downarrow \cong \tau_f & \\ & & & & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Cioè vale che $\tau_f \circ \psi_* \circ \varphi_* = \text{id}$, quindi $\psi_* \circ \varphi_* = \tau_f^{-1}$, ma se la composizione di due mappe è bigettiva allora la prima φ_* è iniettiva e la seconda ψ_* è suriettiva, ragionando in maniera analoga per il verso opposto si ha che $\varphi_* \circ \psi_* = \tau_f$ e quindi ψ_* è iniettiva e φ_* è surgettiva. Si conclude quindi che φ_* e ψ_* sono isomorfismi di gruppi.

□

1.3 Primi gruppi fondamentali

Da questo momento in poi, se X è uno spazio topologico connesso per archi, si denota con $\pi_1(X)$ il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X in un punto fissato.

Teorema 1.3 (Gruppo fondamentale del cerchio).

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Ed il cammino chiuso $t \mapsto e^{2\pi it}$ rappresenta il generatore del gruppo fondamentale $\pi_1(S^1, 1)$.

Definizione 1.6 (Mappa esponenziale).

Si definisce la mappa

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi it}$$

Lemma 1.4 (Sollevamento di un cammino di S^1 in \mathbb{R}).

1. Per ogni cammino chiuso $f : I \rightarrow S^1$ con $f(0) = f(1)$, **esiste ed unico** un cammino (in generale non chiuso) $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ detto **sollevamento di f in \mathbb{R}** tale che

$$\tilde{f}(0) = 0 \quad e \quad \rho \circ \tilde{f} = f.$$

Ovvero il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ & \searrow f & \downarrow \rho \\ & & S^1 \end{array}$$

2. Inoltre se f_0, f_1 sono due cammini chiusi omotopi allora

$$\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1) \in \mathbb{Z}$$

La dimostrazione di questo lemma sarà discussa in un contesto più generale nella sezione sui rivestimenti.

Dimostrazione. (Lemma \implies Teorema)

Dal lemma segue che la mappa:

$$\Phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z} : [f] \mapsto \tilde{f}(1)$$

Il terminale mi dice di aver committato, ma su github la repository non sembra essere commi è ben definita, ed inoltre induce un omomorfismo di gruppi, poiché

$$\Phi([\gamma_1 * \gamma_2]) = \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(1) = \Phi([\gamma_1]) + \Phi([\gamma_2]).$$

. Si dimostra ora la surgettività di Φ , infatti dato il cammino chiuso $f_1 : I \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi it}$, si ha che

$$\Phi([f_1^n]) = n\tilde{f}_1(1) = n.$$

Infine, si verifica che il nucleo di Φ è l'insieme dei cammini chiusi omotopi al cammino costante in 1, dato che se $f : I \rightarrow S^1$ è un cammino chiuso tale che $\tilde{f}(1) = 0$, si ha che \tilde{f} è un cammino chiuso in \mathbb{R} che parte da 0 e torna a 0, quindi poiché \mathbb{R} è semplicemente connesso, esiste un'omotopia $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ da \tilde{f} al cammino costante in 0. Ma a questo punto si ha che $\rho \circ H$ è un'omotopia da f al cammino costante in 1, quindi f è omotopo al cammino costante in 1. \square

Corollario 1.1.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(D^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$$

In particolare $D^2 \setminus \{0\}$ non è omotopicamente equivalente a D^2 (e quindi nemmeno omeomorfo).

Definizione 1.7 (Retrazione).

Sia $Y \subset X$ un sottospazio topologico. Si dice che una mappa continua $r : X \rightarrow Y$ è una **retraazione** se vale

$$r \circ i = \text{id}_Y$$

dove $i : Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione di Y in X .

In altre parole, r è una **retraazione** se è continua e manda ogni punto di Y su se stesso.

Si dice che Y è **retratto** in X se esiste una retraazione da X a Y .

Definizione 1.8 (Retrazione per deformazione).

Questa definizione non è stata data a lezione, tuttavia l'ho ritenuta un utile strumento per gli esercizi.

Sia $Y \subset X$ un sottospazio topologico. Una mappa continua $r : X \rightarrow Y$ si dice **retraazione per deformazione** se

$$r \circ i = \text{id}_Y$$

dove l'omotopia tra le due mappe è tale che $H(x, 1) \in X \quad \forall x \in X$ e $H(y, t) \in Y \quad \forall y \in Y$.

In tal caso Y si dice **retratto per deformazione** di X .

Osservazione 1.5. Se Y è un retratto per deformazione di X allora X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Esempio 1.4. 1. In ogni spazio topologico X ogni punto $x_0 \in X$ è un retratto di X .

2. Il segmento $I = [-1, 1]$ è un retratto di $\bar{D}^2 = \bar{B}(0, 1)$, infatti la mappa

$$r : \bar{D}^2 \rightarrow I : (x, y) \mapsto x$$

è una retraazione, poiché r manda ogni punto del segmento su se stesso.

Lemma 1.5 (Retrazione e gruppo fondamentale).

Sia $Y \subset X$ un retratto di X e sia $x_0 \in Y$. Allora la mappa indotta dall'inclusione naturale

$$i_* : \pi_1(Y, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

è un omomorfismo di gruppi **iniettivo**

Dimostrazione.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(Y, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(Y, x_0) \\ & & \searrow \text{id} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

Dunque $r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(Y, x_0)}$, quindi i_* è iniettiva perché ha inversa sinistra. \square

Corollario 1.2.

S^1 non è un retratto di \bar{D}^2 .

Dimostrazione.

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\bar{D}^2, 1) \cong \{1\}$$

e quindi i_* non è iniettiva, perché è forzata ad essere banale. \square

Teorema 1.4 (Brouwer).

Ogni applicazione continua $f : D^2 \rightarrow D^2$ ammette un punto fisso.

Dimostrazione. La dimostrazione è per assurdo.

Si supponga che per ogni punto $x \in D^2$ si ha che $f(x) \neq x$.

Consideriamo la mappa continua

$$r : D^2 \rightarrow S^1 : x \mapsto \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}.$$

Questa mappa associa ad ogni punto $x \in D^2$ un punto sulla circonferenza unitaria S^1 , che rappresenta la direzione del vettore che punta da x a $f(x)$.

Una tale mappa sarebbe una retrazione del disco unitario D^2 su S^1 , poiché ogni punto di S^1 sarebbe raggiunto da un punto di D^2 che non si mappa su se stesso. **Vorrei metterci il fulmine** \square

Teorema 1.5 (Fondamentale dell'algebra).

Ogni $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomio di grado $n \geq 1$ ammette almeno una radice complessa.

Dimostrazione.

Si supponga $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, allora $\forall r > 0$ la mappa

$$f_r(t) := \frac{f(r \cos(2\pi t) + ir \sin(2\pi t))}{|f(r \cos(2\pi t) + ir \sin(2\pi t))|}$$

definisce un cammino chiuso in $I \rightarrow S^1$ che parte da 1.

La famiglia di cammini chiusi $\{f_r | r \in I\}$ rappresenta un'omotopia tra il cammino costante $f_0 : I \rightarrow \{1\}$ e il cammino chiuso f_1 .

Componendo inoltre con la mappa $I \rightarrow [0, r] : s \rightarrow sr$ otteniamo un'omotopia ad estremi fissi tra il cammino costante e il cammino chiuso f_r .

Quindi $[f_r^0] = 0 \in \mathbb{Z}$. Vogliamo ora dimostrare che $[f_r^1] \neq 0 \in \mathbb{Z}$ per ogni $r > 0$ e raggiungere una contraddizione.

Sia ora il polinomio

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

e per $s \in I$ si consideri

$$f_r^s(z) = z^n + s(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0).$$

Se $r > \max\{1, \sum |a_i|\}$ e $|z| = r$, allora

$$|z^n| = r^n > s \left(\sum |a_i| \right) |z^{n-1}| \geq |s(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)|$$

e quindi poiché vi è il maggiore stretto se $|z| = r$, $f_r^s(z) \neq 0$ per ogni $s \in I$.

In particolare vale

$$f_r^s(r \cos 2\pi t + ir \sin(2\pi t)) \neq 0$$

E quindi è ben definita la famiglia di cammini chiusi

$$f_r^s : I \rightarrow S^1 : t \mapsto \frac{f_r^s(r \cos 2\pi t + ir \sin(2\pi t))}{|f_r^s(r \cos 2\pi t + ir \sin(2\pi t))|}.$$

che da un'omotopia tra f_r^0 e f_r^1 .

$f_r^0 = z^n$ e quindi $f_r^0(t) = \cos(2n\pi t) + i \sin(2n\pi t)$ ma si avrebbe quindi che la classe di omotopia di f_r^0 è $n \in \mathbb{Z}$, ma ciò contraddice il fatto che $[f_r^0] = 0 \in \mathbb{Z}$. \square

1.4 Teorema di Seifert-Van Kampen e richiami di teoria dei gruppi

Teorema 1.6 (debole di Seifert-van Kampen).

Siano $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1, X_2 \subset X$ sono aperti. Siano $i_1 : X_1 \hookrightarrow X$ e $i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ le inclusioni naturali.

Si suppongano $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ connessi per archi allora:

$$\pi_1(X, x_0) \text{ è generato da } i_{1*}(\pi_1(X_1, x_0)) \text{ e } i_{2*}(\pi_1(X_2, x_0)) \text{ dove } x_0 \in X_1 \cap X_2.$$

Dimostrazione.

□

Corollario 1.3.

S^n è semplicemente connesso per ogni $n \geq 1$.

Corollario 1.4.

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1} per ogni $n \geq 2$.

Quindi $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \{1\}$ per ogni $n \geq 2$

Corollario 1.5.

\mathbb{R}^2 non è omeomorfo a \mathbb{R}^n per ogni $n \geq 3$.

Teorema 1.7. (di Seifert-van Kampen)

Siano $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1, X_2 \subset X$ sono aperti.

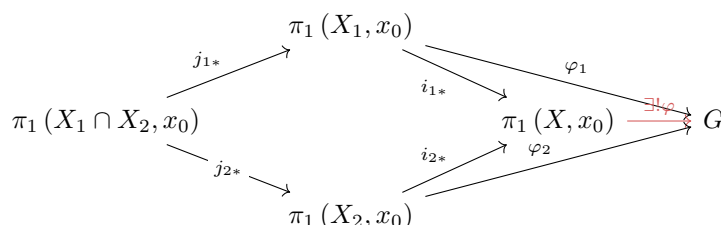
Siano $j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1, j_2 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2, i_1 : X_1 \hookrightarrow X, i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ le inclusioni naturali.

Si suppongano $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ connessi per archi allora

$\forall G$ gruppo, e mappe $\varphi_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \rightarrow G$ e $\varphi_2 : \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow G$ esiste un'unica mappa

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$$

tale che il seguente diagramma commuta:



Il teorema di Van-Kampen necessita di un richiamo di teoria dei gruppi, che non è stato ancora fatto.

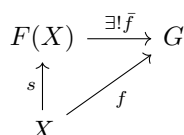
Definizione 1.9 (Gruppo libero generato da un insieme).

Dato un insieme X si indica $F(X)$ il **gruppo libero generato da X** il dato di un gruppo $F(X)$ ed una mappa iniettiva $s : X \hookrightarrow F(X)$ tale che la seguente proprietà universale sia soddisfatta:

Per ogni gruppo G e per ogni mappa iniettiva $f : X \hookrightarrow G$ esiste un unico omomorfismo di gruppi

$$\bar{f} : F(X) \rightarrow G$$

tale che il seguente diagramma commuta:



Proposizione 1.3 (Unicità del gruppo libero).

Dalla definizione di gruppo libero via proprietà universale ne segue l'unicità a meno di isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Facile provarci un attimo

□

Proposizione 1.4 (Costruzione del gruppo libero generato da un insieme).

Si costruisce ora $F(X)$ nel seguente modo:

Sull'insieme

$$F(X) = \{w \in X^* \mid w \text{ parola su } X\} / \sim$$

dove una parola $w \in X$ è una sequenza un prodotto formale tra simboli della forma

$$w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$$

con $x_i \in X$ e $\epsilon_i \in \{1, -1\}$, e la relazione di equivalenza \sim identifica due parole se e solo se sono uguali a meno di semplificare i fattori di forma $x_i^{\epsilon_i} x_i^{-\epsilon_i}$.

L'operazione di gruppo su $F(X)$ è data dalla concatenazione formale di parole.

Tale costruzione verifica la proprietà universale del gruppo libero generato da X .

Dimostrazione.

Per ogni mappa $f : X \hookrightarrow G$ in un gruppo G si definisce la mappa

$$\bar{f} : F(X) \rightarrow G : x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} \mapsto f(x_1)^{\epsilon_1} f(x_2)^{\epsilon_2} \dots f(x_n)^{\epsilon_n}$$

□

Lemma 1.6.

Ogni gruppo G è il quoziente di un gruppo libero.

Dimostrazione.

Se $\{g_i \mid i \in I\}$ si considera $X = \{x_i \mid i \in I\}$ e la mappa

$$\Phi : F(X) \rightarrow G : x_i \rightarrow g_i \quad \text{assegnamento per generatori}$$

se i g_i sono un insieme di generatori per G allora Φ è surgettiva e si conclude per il primo teorema di omomorfismo tra gruppi. □

Definizione 1.10 (Presentazione di un gruppo).

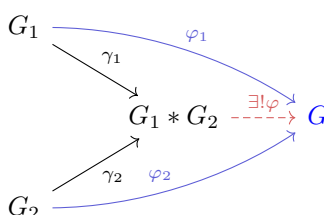
Data Φ come sopra, sia $N := \ker \Phi$ si può considerare un **sistema di generatori per N come sottogruppo normale** $\{p_j \mid j \in J\}$, la **presentazione tramite generatori e relazioni di G** è la seguente:

$$G := \langle g_i, i \in I \mid p_j, j \in J \rangle$$

Definizione 1.11 (Prodotto libero di gruppi).

Siano G_1, G_2 due gruppi, si definisce il **prodotto libero di gruppi** $G_1 * G_2$ il dato di un gruppo $G_1 * G_2$ e mappe $\gamma_1 : G_1 \rightarrow_1 * G_2$, $\gamma_2 : G_2 \rightarrow_1 * G_2$ che soddisfano la seguente proprietà universale:

Per ogni altro gruppo G e mappe $\phi_1 : G_1 \rightarrow G$ e $\phi_2 : G_2 \rightarrow G$ esiste un'unica mappa $\phi : G_1 * G_2 \rightarrow G$ tale che il seguente diagramma commuti:



In teoria delle categorie tale costruzione è detta **coprodotto**.

Proposizione 1.5 (Unicità del prodotto libero di gruppi).

Dalla definizione via proprietà universale segue che il prodotto libero è unico a meno di isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Da fare, facile □

Proposizione 1.6 (Costruzione del prodotto libero tra gruppi). Siano

$$G_1 = \langle g_i^1, i \in I_1 \mid p_j^1, j \in J_1 \rangle \quad G_2 = \langle g_i^2, i \in I_2 \mid p_j^2, j \in J_2 \rangle$$

le due presentazioni dei gruppi, allora la presentazione del prodotto libero è data da:

$$G_1 * G_2 = \langle \{g_i^1\} \cup \{g_i^2\} \mid \{p_j^1\} \cup \{p_j^2\} \rangle$$

Osservazione 1.6.

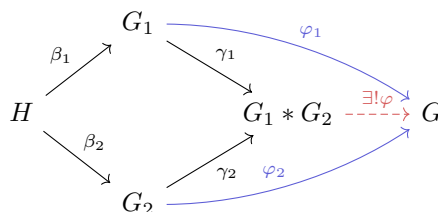
1. Il gruppo libero è generato dalle immagini dei generatori dei gruppi fattori.
2. Gli elementi di $G_1 * G_2$ sono parole in $G_1 \cup G_2$
3. Se X_1, X_2 sono due insiemi allora

$$F(X_1 \cup X_2) = F(X_1) * F(X_2)$$

Definizione 1.12 (Prodotto amalgamato di gruppi).

Siano G_1, G_2 due gruppi e H un terzo gruppo, si definisce il **prodotto amalgamato di gruppi su H** $G_1 *_H G_2$ il dato di un gruppo $G_1 *_H G_2$ e mappe $\beta_1 : H \rightarrow G_1$, $\beta_2 : H \rightarrow G_2$, $\gamma_1 : G_1 \rightarrow G_1 *_H G_2$, $\gamma_2 : G_2 \rightarrow G_1 *_H G_2$ che soddisfano la seguente proprietà universale:

Per ogni altro gruppo G e mappe $\phi_1 : G_1 \rightarrow G$ e $\phi_2 : G_2 \rightarrow G$ esiste un'unica mappa $\phi : G_1 *_H G_2 \rightarrow G$ tale che il seguente diagramma commuti:



Proposizione 1.7 (Costruzione del prodotto amalgamato se H è un gruppo libero).

Siano

$$G_1 = \langle g_i^1, i \in I_1 \mid p_j^1, j \in J_1 \rangle \quad G_2 = \langle g_i^2, i \in I_2 \mid p_j^2, j \in J_2 \rangle$$

$$H = \langle g_i^1, i \in I_1 \rangle \text{ che non ha relazioni perché libero}$$

allora

$$G_1 *_H G_2 = \langle \{g_i^1\} \cup \{g_i^2\} \mid \{p_j^1\} \cup \{p_j^2\} \cup \{\beta_1(h_i)\beta_2(h_i)^{-1}\} \rangle$$

Proposizione 1.8 (Prodotto amalgamato di gruppi nel caso in cui uno dei fattori è banale).

Proposizione 1.9 (Van-Kampen visto come prodotto amalgamato di gruppi).

1.5 Applicazioni ed esempi

1. Calcolo del gruppo fondamentale del disco senza due punti:

$$D^2 \setminus \{x_0, x_1\}$$

Si scrive $D^2 \setminus \{x_1, x_2\} = X_1 \cap X_2$, dove X_1, X_2 sono due aperti di D^2 e l'intersezione $X_1 \cap X_2$ è semplicemente connessa.

Inoltre $X_i \cong D^2 \setminus \{x_i\}$ per $i = 1, 2$ e quindi

$$\pi_1(X_i, x_i) \cong \mathbb{Z}$$

Quindi se $x_0 \in X_1 \cap X_2$, usando la versione debole del teorema di Seifert-van Kampen si ha che

$$\pi_1(D^2 \setminus \{x_1, x_2\}, x_0) = \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$$

2. Calcolo del gruppo fondamentale del bouquet di due cerchi:

Definizione 1.13 (Bouquet di due spazi topologici).

Siano X, Y due spazi topologici, $x_0 \in X, y_0 \in Y$ due punti.

Si definisce il **bouquet di (X, x_0) e (Y, y_0)** lo spazio topologico:

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := (X \sqcup Y) / \{x_0, y_0\}$$

Sia quindi $X = S^1 \vee S^1$ il bouquet di due cerchi.

Dato un punto x_1 nel primo cerchio ed un punto x_2 nel secondo cerchio, si scrive $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1 = X \setminus x_2$ e $X_2 = X \setminus x_1$ sono due aperti di X . Si ha che $X_1 \cap X_2$ è semplicemente connesso, quindi si può applicare la versione debole del teorema di Seifert-van Kampen.

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$$

3. Iterando gli argomenti sopracitati si può dimostrare che il gruppo fondamentale del disco senza n punti è F_n e il gruppo fondamentale del bouquet di n cerchi è F_n .

Definizione 1.14 (Grafo finito).

Uno spazio di **Hausdorff** X si dice **grafo finito** se:

$\exists X_0 \subset X$ sottospazio finito e discreto tale che $X \setminus X_0$ è unione disgiunta di un numero finito di aperti e_1, e_2, \dots, e_n tali che:

Ogni e_i è omeomorfo a un intervallo aperto $(0, 1)$ e $|\bar{e}_i \setminus e_i| \leq 2$

Inoltre deve valere che:

se $|\bar{e}_i \setminus e_i| = 2$ allora

$$(\bar{e}_i, e_i) \cong ([0, 1], (0, 1))$$

in tale caso si dice che e_i è un **arco** del grafo.

se $|\bar{e}_i \setminus e_i| = 1$ allora

$$(\bar{e}_i, e_i) \cong (S^1, S^1 \setminus \{pt.\})$$

In tal caso si dice che e_i è un **ciclo** del grafo.

L'insieme X_0 è detto **insieme dei vertici** del grafo.

Un grafo si dice **albero** se è connesso e non contiene cicli.

Teorema 1.8 (Gruppo fondamentale di un grafo finito).

Sia X un grafo finito, allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo libero e finitamente generato

$$\pi_1(X, x_0) \cong F_n$$

dove n è il numero di cicli del grafo.

Lemma 1.7.

Gli alberi sono contraibili ad un punto, quindi sono semplicemente connessi.

Dimostrazione.

Se X è un albero, esiste un vertice $x_0 \in X_0$ tale che è connesso ad un solo altro vertice, altrimenti X conterrebbe un ciclo, sia e_0 un tale arco.

X si retrae per deformazione su $X \setminus (e_0 \cup \{x_0\})$, che è un grafo finito con un vertice in meno.

Per induzione su $n = |X_0|$, X è contraibile ad un punto. \square

Lemma 1.8 (Esistenza dello "spanning tree" di un grafo). Ogni grafo finito X contiene un sottografo $Y \subset X$ che è un albero e ha gli stessi vertici di X , cioè $Y_0 = X_0$.

Dimostrazione.

Per induzione su $n = |X_0|$, se $n = 1$ allora $Y = X$ è un albero.

Per il passo passo si sceglia un vertice a caso $x_0 \in X_0$ e si considera il grafo Z ottenuto da X rimuovendo x_0 ed ogni arco che lo contenga.

Le componenti connesse di Z hanno numero di vertici strettamente inferiore ad n e quindi per ipotesi induttiva ammettono uno spanning tree.

Lo spanning tree di X si ottiene riunendo gli spanning tree delle componenti connesse di Z aggiungendo x_0 e gli archi rimossi in precedenza. \square

del teorema.

Dato X un grafo, consideriamo il suo spanning tree Y che esiste per il secondo lemma. Per il secondo lemma, lo spazio ottenuto contraendo Y ad un punto $y_0 \in Y_0$ è un bouquet di n cerchi, dove n è il numero di cicli di X .

Si ha quindi che il gruppo fondamentale di X è isomorfo al gruppo fondamentale del bouquet di n cerchi, che è il gruppo libero su n generatori. \square

1.6 Gruppi fondamentali di superfici topologiche compatte

Proposizione 1.10 (Gruppo fondamentale del prodotto di spazi).

Proposizione 1.11 (Gruppo fondamentale del toro).

Il gruppo fondamentale del toro è isomorfo al prodotto diretto di due gruppi ciclici:

$$\pi_1(T^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Dimostrazione.

La dimostrazione seguirebbe in maniera ovvia dalla proposizione precedente, però se ne dà una dimostrazione alternativa più difficile ma più interessante.

Si considera il quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ e si vede un toro come il quoziente di Q per la relazione di equivalenza che identifica di tutti i lati opposti.

Siano $y \in Q$ il centro del quadrato, $U = Q \setminus \{y\}$ e infine data la proiezione al quoziente $\pi : Q \rightarrow T^2$, si consideri $V = \pi(\overset{\circ}{Q})$.

Dall'identificazione dei lati opposti segue che V è omeomorfo a $T^2 \setminus (S^1 \vee S^1)$.

Dato $x_0 \in U$ e $x_1 \in U \cap V$, si possono ora calcolare $\pi_1(U, x_0)$, $\pi_1(V, x_1)$ e $\pi_1(U \cap V, x_1)$:

- Il quadrato senza il centro $U = Q \setminus \{y\}$ si retrae per deformazione sul bordo ∂Q .
res Le retrazioni per deformazione passano al quoziente e quindi U è omotopicamente equivalente a $\pi(\partial Q) \cong S^1 \vee S^1$.
- V è l'immagine tramite la proiezione al quoziente di $\overset{\circ}{Q}$, che è semplicemente connessa, dunque è semplicemente connesso.
- $U \cap V$ è omeomorfo a $D^2 \setminus \{0\}$ e dunque $\pi_1(U \cap V, x_1) \cong \mathbb{Z}$.

A questo punto si può applicare il teorema di Seifert-van Kampen nel caso in cui uno dei due fattori è banale, dato che $\pi_1(V) \cong 1$, e quindi si ha che

$$\pi_1(T^2, x_1) = \pi_1(U, x_1) / N,$$

dove N è il sottogruppo normale generato dall'immagine $i_*(\pi_1(U \cap V))$ dove $i : U \cap V \hookrightarrow U$ è l'inclusione naturale.

Il gruppo fondamentale $\pi_1(U, x_0)$ è generato da due generatori a, b che corrispondono alle classi di omotopia dei lacci che girano intorno ai cerchi.

Quindi se $f : I \rightarrow U$ è il cammino che collega x_0 ad x_1 vale che il gruppo fondamentale $\pi_1(U, x_1)$ è generato da $\tau_f(a)$ e $\tau_f(b)$.

D'altra parte $\pi_1(U \cap V, x_1)$ è generato da un laccio c che gira intorno ad y il centro del quadrato.

Deformando c sul bordo e passando poi al quoziente, si ha che

$$c \sim \tau_f(a * b * a^{-1} * b^{-1}).$$

Si ha quindi che l'immagine $i_*(\pi_1(U \cap V))$ è generata da $a * b * a^{-1} * b^{-1}$, si conclude quindi Che

$$\pi_1(T^2, x_1) = \langle a, b \mid [a, b] \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

dove $[a, b] = a * b * a^{-1} * b^{-1}$ è il commutatore. □

Proposizione 1.12 (Gruppo fondamentale del toro con due buchi).

Si indicherà con T_2^2 la superficie simile al toro, però con 2 buchi, cioè una doppia ciambella.

$$\pi_1(T_2^2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \rangle$$

Dimostrazione.

Il toro con due buchi $T = T_2^2$, si può identificare con la somma connessa

$$T = T_1 \# T_2,$$

dove T_1, T_2 sono due tori T^2 , ottenuta incollando i due tori su dei dischi D^2 presi su ciascuno dei due tori.

Come si può ottenere questa costruzione come quoziente?

Si prendono due copie di Q . Si identificano tra di loro i lati opposti ai vertici di ciascun quadrato e per identificare i dischi detti prima, si considerano due lacci c_1, c_2 che partono da uno dei vertici di ciascun quadrato e si identificano tra loro.

In sostanza i due quadrati diventano due pentagoni, con due coppie di lati opposti identificate tra loro, ed con il lato c_1 di uno identificato con il lato c_2 dell'altro.

Perciò incollando c_1 e c_2 si ottiene un ottagono O i cui lati alterni sono identificati con direzione opposta. Conoscendo la costruzione di T come quoziente, si può calcolare il suo gruppo fondamentale come nel caso di T^2 .

Si consideri $U = T \setminus \{y\}$ e $V = i_*(\tilde{O})$

U è omotopicamente equivalente al bouquet di 4 cerchi dunque $\pi_1(U) \cong F_4$, mentre V è semplicemente connesso. $U \cap V \equiv D^2 \setminus 0$ e dunque $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ ed il generatore è

$$[a_1, b_1][a_2, b_2]$$

Quindi si conclude la tesi usando Van Kampen nel caso in cui uno dei fattori è semplicemente connesso. \square

Proposizione 1.13 (Gruppo fondamentale di un g -Toro).

Un toro con g si può vedere come somma connessa $T_1 \# T_2 \# \dots \# T_g$ di g tori, quindi in maniera analoga al caso precedente si può vedere come quoziente di un $(2g\text{-gon})$ O con la giusta identificazione.

Quindi il gruppo fondamentale di un toro con g buchi è dato da:

$$\pi_1(T_g^2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

Proposizione 1.14 (Gruppo fondamentale del piano proiettivo reale).

Il gruppo fondamentale del piano proiettivo reale è isomorfo al gruppo ciclico di ordine 2:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0) = \langle a \mid a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

e inoltre la somma connessa di g piani proiettivi ha come gruppo fondamentale:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 \rangle$$

Dimostrazione. Da fare per esercizio \square

Definizione 1.15 (Superficie topologica).

Una superficie topologica è uno spazio di Hausdorff connesso X che è compatto che ammette un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di aperti U_i tali che $U_i \cong D^2 \quad \forall i$.

Teorema 1.9. (Classificazione delle superfici topologiche)

Le classi di omeomorfismo delle superfici topologiche sono date da:

1. La sfera S^2 .
2. I g -tori T_g^2 , cioè le superfici ottenute come somma connessa di tori.
3. Le somme connesse di g piani proiettivi reali $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

2 Rivestimenti

2.1 Definizioni ed esempi

Osservazione 2.1 (Le componenti connesse di uno spazio localmente connesso). Se X è uno spazio topologico localmente connesso, allora le sue componenti connesse sono aperte e chiuse.

Dimostrazione. Da scrivere, dovrebbe essere facile. \square

Tutti gli spazi topologici saranno supposti localmente connessi per archi, e dunque localmente connessi.

Dunque per l'osservazione precedente le componenti connesse saranno sempre aperte.

Definizione 2.1 (Rivestimento).

Dato uno spazio topologico X , un rivestimento per X è una coppia (Y, p) , dove Y è uno spazio topologico e $p : Y \rightarrow X$ è una mappa continua tale che:

$\forall x \in X \quad \exists U_x$ intorno di x aperto detto **intorno ben rivestito di x** tale che

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

e $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U_x$ è un omeomorfismo $\forall i \in I$.

Proposizione 2.1 (I rivestimenti sono omeomorfismi locali).

Sia $p : Y \rightarrow X$ un rivestimento, allora p è un omeomorfismo locale, cioè

$$Y = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ aperti, con } p|_{U_i} : U_i \rightarrow p(U_i) \text{ omeomorfismo e } p(U_i) \text{ è aperto in } X \forall i \in I.$$

Dimostrazione.

$\forall y \in Y$ sia $x = p(y)$, allora per la definizione di rivestimento esiste un intorno ben rivestito U_x di x tale che

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

e $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U_x$ è un omeomorfismo su un aperto per ogni $i \in I$.

$y \in p^{-1}(U_x)$ e dall'unione disgiunta si ha che esiste un unico $i_y \in I$ tale che $y \in U_{i_y}$, e quindi

$$Y = \bigcup_{y \in Y} U_{i_y},$$

con $p(U_{i_y}) = U_x$ che è aperto e $p|_{U_{i_y}} : U_{i_y} \rightarrow U_x$ omeomorfismo.

□

Esempio 2.1 (Rivestimento banale).

Sia X uno spazio topologico e F uno spazio topologico discreto, allora $Y = X \times F \cong \bigsqcup_{f \in F} X$ e la mappa $p : Y \rightarrow X$ di proiezione sulla prima coordinata è un rivestimento di X detto rivestimento banale.

Esempio 2.2 (Nastro di Moebius).

Sia M il nastro di Moebius, e ∂M il suo bordo, la proiezione $p : \partial M \rightarrow S^1$ data dalla proiezione del bordo sull' S^1 centrale del nastro è un rivestimento di S^1 .

Un tale rivestimento non è banale perché $M \not\cong S^1 \sqcup S^1$.

Esempio 2.3 (Mappa esponenziale).

La mappa $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi i t}$ è un rivestimento.

Esempio 2.4 (Rivestimento di S^n in se stesso).

Se $n \neq 1$ la mappa $p : S^n \rightarrow S^n : e^{2\pi i \theta} \mapsto e^{2\pi n \theta}$ è un rivestimento di S^n dove $\forall x \in S^n$ si ha che $|p^{-1}(x)| = n$.

Esempio 2.5 (Rivestimento di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

La mappa $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \mapsto z^n$ è un rivestimento di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mentre la mappa $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ non lo è.

Proposizione 2.2 (Operazioni sui rivestimenti).

1. Sia $p : Y \rightarrow X$ un rivestimento e $U \subset X$ un aperto.

La mappa $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$ è un rivestimento di U .

2. Se X è connesso e $Z \subset Y$ è una qualunque componente connessa di Y , allora la mappa $p|_Z : Z \rightarrow X$ è un rivestimento di X .

Infatti, se $U \subset X$ è un intorno ben rivestito per p , allora vale che

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

per connessione di Z vale però che $U_i \subset Z$ oppure $U_i \cap Z = \emptyset$.

Inoltre $p(Z) = X$, sia infatti $x' \notin p(Z)$, dato U' l'intorno ben rivestito di x' e gli U'_i tali che $p^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{i \in I} U'_i$, dato che $U_i \not\subset Z$ vale che $U_i \cap Z = \emptyset$ per ogni i . (da controllare)

3. Siano $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1, p_2 : Y_2 \rightarrow X_2$ due rivestimenti rispettivamente di X_1 e X_2 . Allora la mappa

$$(p_1, p_2) : Y_1 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times X_2 : (y_1, y_2) \mapsto (p_1(y_1), p_2(y_2))$$

è un rivestimento di $X_1 \times X_2$.

Ad esempio $\mathbb{R}^2 \rightarrow T = S^1 \times S^1$ è un rivestimento del toro.

2.2 Morfismi di rivestimenti

Definizione 2.2 (Morfismo di rivestimenti).

Un **morfismo di rivestimenti** è il dato di due rivestimenti $p_1 : Y_1 \rightarrow X, p_2 : Y_2 \rightarrow X$ ed una mappa continua $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ tale che

$$p_2 \circ \varphi = p_1$$

ovvero il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{\varphi} & Y_2 \\ & \searrow p_1 \quad \swarrow p_2 & \\ & X & \end{array}$$

Definizione 2.3 (Isomorfismo di rivestimenti).

Se $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ è un morfismo di rivestimenti come sopra tale che esiste un altro morfismo di rivestimenti $\psi : Y_2 \rightarrow Y_1$ tale che $\psi \circ \varphi = id_{Y_1}$ e $\varphi \circ \psi = id_{Y_2}$ si dice che φ è un isomorfismo tra i rivestimenti $p_1 : Y_1 \rightarrow X, p_2 : Y_2 \rightarrow X$.

Definizione 2.4 (Morfismi tra mappe continue).

Le stesse definizioni date sopra si possono dare nel caso generale in cui p_1, p_2 sono generiche mappe continue.

Proposizione 2.3 (Caratterizzazione dei rivestimenti).

Sia $p : Y \rightarrow X$ una mappa continua surgettiva.

p è un rivestimento $\iff \forall x \in X \quad \exists U$ tale che $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$ è isomorfo ad un rivestimento banale

Dimostrazione.

(\Leftarrow)

(\Rightarrow) Se $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, si può munire I della topologia discreta e in questo modo $p^{-1}(U) \cong I \times U$ e la mappa $\varphi : Y \rightarrow I \times U : y \mapsto (i, p(y))$ se $y \in U_i$ è un omeomorfismo e dunque un isomorfismo tra i due rivestimenti. \square

Teorema 2.1 (Fibre di un rivestimento).

Se X è uno spazio topologico connesso e $p : Y \rightarrow X$ è un rivestimento, allora tutte le fibre hanno la stessa cardinalità.

Cioè

$$\forall x, y \in X \quad |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|.$$

Definizione 2.5 (Grado di un rivestimento).

Il corollario precedente permette di definire il **grado** di un rivestimento $p : Y \rightarrow X$ come la cardinalità di una qualunque delle fibre di p .

Corollario 2.1 (I rivestimenti sono surgettivi). Se $p : Y \rightarrow X$ è un rivestimento e $Y \neq \emptyset$, allora p è surgettiva.

Dimostrazione.

Segue dal teorema precedente, poiché

$$p : Y \rightarrow X \text{ è surgettiva se e solo se } \forall x \in X \quad |p^{-1}(x)| \geq 1$$

cioè il grado del rivestimento è maggiore o uguale a 1.

Ma dato che $Y \neq \emptyset$, esiste un punto $y \in Y$ ed un punto $x = p(y) \in X$ tale che $p^{-1}(x) \neq \emptyset$, e quindi il grado di p è maggiore o uguale a 1. \square

Dimostrazione.

Dato $x_0 \in X$ si considera l'insieme

$$\Omega := \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|\}$$

Dato che X è connesso, mostrando che Ω è sia aperto che chiuso si conclude che $\Omega = X$.

Si mostra che Ω è aperto, mostrando che è intorno di ogni suo punto.

Infatti se $x \in \Omega$ allora esiste un intorno ben rivestito U_x di x tale che

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

con $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U_x$ omeomorfismo, e quindi in particolare bigezione.

Dunque per ogni $x \in X$ si ha che $|p|_{U_i}^{-1}(x)| = 1$ per ogni $i \in I$ e quindi si ha una bigezione tra $p^{-1}(x)$ e I e quindi in particolare in bigezione con $p^{-1}(x_0)$, per ogni $x \in U$, per cui $U \in \Omega$ che è quindi intorno di x .

Ora, dato che esistono degli $x \in X$ tali che gli insiemi $\Omega(x)$ partizionano X , si ha che $\Omega(x_0)$ è il complementare di un'unione arbitraria di aperti, che è aperta e dunque Ω è chiuso. Da cui segue la tesi. \square

2.3 Azioni propriamente discontinue

Definizione 2.6 (Azione di gruppo propriamente discontinua).

Si dice che un gruppo G agisce in maniera propriamente discontinua su uno spazio topologico Y se ogni punto $y \in Y$ ammette un intorno U_y tale che $\forall g, h \in G \quad g.U \cap h.U = \emptyset$ se $g \neq h$.

Proposizione 2.4 (Rivestimenti dati da azioni propriamente discontinue).

Sia Y uno spazio topologico e G un gruppo che agisce in maniera propriamente discontinua su Y . Allora la mappa $p : Y \rightarrow Y/G$ data dalla proiezione di Y su Y/G è un rivestimento di Y/G . Inoltre gli intorni ben rivestiti di ogni punto $x \in Y/G$ sono dati dall'immagine degli intorni che rendono l'azione propriamente discontinua.

Dimostrazione.

Chiaramente la proiezione al quoziente è sempre surgettiva ed è continua per definizione della topologia quoziente.

Per ogni punto $x \in Y$ sia U l'intorno che rende propriamente discontinua l'azione, allora vale

$$p^{-1}(p_g(U)) = \bigsqcup_{g \in G} g.U,$$

\square

Esempio 2.6.

Si consider l'azione propriamente discontinua di \mathbb{Z} su \mathbb{R} data da $n.x = x + n$, allora la mappa

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1 : x \mapsto x + \mathbb{Z}$$

è un rivestimento che possiamo identificare come il rivestimento $t \rightarrow e^{2\pi i t}$ di S^1 visto in precedenza.

Esempio 2.7.

Il rivestimento $\mathbb{R}^2 \rightarrow T = S^1 \times S^1$ può essere visto come il rivestimento indotto dall'azione propriamente discontinua di \mathbb{Z}^2 su \mathbb{R}^2 data da $(m, n).(x, y) = (x + m, y + n)$.

Esempio 2.8.

Anche il rivestimento $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ visto in precedenza può essere visto come il rivestimento indotto dall'azione propriamente discontinua del gruppo ciclico di n elementi $\{\zeta_n \in \mathbb{C} \mid \zeta_n^n = 1\}$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ data da

$$\zeta_n.z = \zeta_n z$$

Esempio 2.9 (Spazi proiettivo reale).

Si considera l'azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ data da

$$\tau.x = -x \text{ se } \tau \text{ è l'elemento non banale di } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Questa azione è propriamente discontinua e la proiezione al quoziente è un rivestimento $p : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Esempio 2.10 (Rivestimento banale).

Sia G un gruppo topologico munito della topologia discreta, allora l'azione naturale di G su $G \times X$ data da

$$g \cdot (g', x) = (gg', x)$$

e propriamente discontinua ed induce il rivestimento banale $G \times X \rightarrow X$.

Inoltre per ogni sottogruppo normale $H \trianglelefteq G$, la mappa $G \times X \rightarrow G/H \times X$ è ancora un rivestimento banale.

Definizione 2.7 (Automorfismo di rivestimenti).

Un automorfismo del rivestimento $p : Y \rightarrow X$ è un isomorfismo di p con se stesso, cioè

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

È facile verificare che l'insieme $\text{Aut}(Y/X) := \{\phi : Y \rightarrow Y \mid \phi \text{ automorfismi di } p \text{ in se stesso}\}$ forma un gruppo con l'operazione di composizione ed è detto **gruppo di automorfismi del rivestimento** Y/X .

Osservazione 2.2.

Nel caso del rivestimento $Y \rightarrow Y/G$ dato dalla proiezione, la mappa

$$G \rightarrow \text{Aut}(X/G) : g \mapsto \varphi_g(x \mapsto g.x)$$

è un omomorfismo iniettivo $G \hookrightarrow \text{Aut}(X/G)$.

Proposizione 2.5. Se Y è connesso allora la mappa, come sopra

$$G \rightarrow \text{Aut}(X/G) : g \mapsto \varphi_g(x \mapsto g.x)$$

è un isomorfismo tra G e $\text{Aut}(X/G)$.

Lemma 2.1.

Sia $Y \rightarrow X$ un rivestimento connesso e $\varphi \in \text{Aut}(Y/X)$, vale che

$$\exists y \in Y \text{ tale che } \varphi(y) = y \implies \varphi = \text{id}$$

Cioè l'unico automorfismo di rivestimento che lascia fisso un punto è l'identità.

Quindi gli automorfismi di rivestimenti indotti da azioni propriamente discontinue non hanno punti fissi.

Lemma \implies Proposizione.

Grazie all'osservazione, resta da verificare che tale mappa è surgettiva.

Cioè $\forall \varphi \in \text{Aut}(Y/X) \quad \exists g \in G$ tale che $\varphi = \varphi_g$.

siccome φ è un automorfismo di rivestimenti vale che $p \circ \varphi = p$, quindi

$$\forall y \in Y \quad p(\varphi(y)) = p(y).$$

ma quindi $\varphi(y)$ è un elemento di $p^{-1}(p(y)) = \{g.y \mid g \in G\}$ essendo la fibra di un punto tramite la proiezione al quoziente.

Dunque $\exists g \in G$ tale che $\varphi(y) = g.y$, e quindi $\varphi_g \circ \varphi$ fissa il punto y , ma grazie al lemma si conclude che $\varphi_g \circ \varphi = \text{id}_Y$.

Quindi $\varphi = \varphi_g$ e dunque la mappa è surgettiva. \square

Proposizione 2.6 (Unicità di sollevamenti di mappe continue qualunque).

Siano $p : Y \rightarrow X$ un rivestimento connesso e Z uno spazio topologico connesso. Siano inoltre $f, g : Z \rightarrow X$ due mappe continue tali che $p \circ f = p \circ g$.

$$\exists z \in Z \text{ tale che } f(z) = g(z) \implies f = g$$

Osservazione 2.3.

Il lemma precedente è il caso particolare del teorema appena enunciato, nel caso in cui $Z = Y$, $f = \varphi$ e $g = \text{id}_Y$.

Dimostrazione. Sia $z \in Z$ tale che $f(z) = g(z)$, e sia $x = p(f(z)) = p(g(z))$, che sono uguali per l'ipotesi. Sia U un intorno ben rivestito di x e siano U_i gli intorni che compongono la fibra di $p^{-1}(U)$, cioè

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i.$$

Poiché p è una funzione e $p \circ f = p \circ g$, deve esistere un intorno U_i tra quelli sopra tale che $f(z) = g(z) \in U_i$.

Si è mostrato che l'insieme

$$S := \{z \in Z \mid f(z) = g(z)\}$$

è non vuoto, mostrando che S è sia aperto che chiuso, si conclude per connessione che $S = Z$.

S è aperto perché intorno di ogni suo punto, infatti per ogni punto z tale che $f(z) = g(z)$ dalla continuità di f e g segue che esiste un intorno aperto V di z tale che $f(V), g(V) \subset U_i$, ma poiché $p \circ f = p \circ g$ e la restrizione di p ad U_i è un omeomorfismo, vale che $\forall z' \in V \quad f(z') = g(z')$ e quindi S è intorno di z . Si dimostra ora in maniera analoga che $S' := Z \setminus S = \{z \in Z \mid f(z) \neq g(z)\}$ è aperto e quindi S è anche chiuso.

Infatti, $\exists i \neq j$ tali che $f(z) \in U_i$ e $g(z) \in U_j$, allora per continuità, come prima $\exists V$ intorno aperto di z tale che $f(z) \in U_i$ e $g(z) \in U_j$ e come prima segue che $\forall z' \in V \quad f(z') \neq g(z')$. \square

Proposizione 2.7 (I rivestimenti sono dati da azioni propriamente discontinue).

Se $Y \rightarrow X$ è un rivestimento connesso. l'azione di $\text{Aut}((Y/X))$ su Y data da

$$\varphi \cdot y = \varphi(y)$$

è propriamente discontinua.

Dimostrazione. Si mostra che $\forall y \in Y, \exists U_i$ intorno di y tale che $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \text{Aut}((Y/X))$

$$\varphi_1(U_i) \cap \varphi_2(U_i) = \emptyset \text{ se } \varphi_1 \neq \varphi_2.$$

Si mostra prima che $\exists U_i$ tale che $\forall \varphi \in \text{Aut}(Y/X)$

$$\varphi(U_i) \cap U_i = \emptyset \text{ se } \varphi \neq \text{id}_Y.$$

La tesi seguirà ponendo $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, per cui

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(U_i) \cap U_i = \emptyset \implies \varphi_1(U_i) \cap \varphi_2(U_i) = \emptyset.$$

Tale fatto segue dal lemma precedente, infatti se U è un intorno ben rivestito di $x = p(y)$, allora

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

e se $\varphi \in \text{Aut}(Y/X)$ allora esiste $j \in I$ tale che $\varphi(U_j) = U_j$, e se quando $i \neq j$ esistesse un punto $y' \in U_i \cap U_j$, allora per il lemma precedente si avrebbe che $\varphi = \text{id}$. \square

2.4 Teoria di Galois per rivestimenti

Definizione 2.8 (Rivestimento di Galois).

Dalla proposizione precedente se $p : Y \rightarrow X$ è un rivestimento connesso si ha la fattorizzazione di p data da:

$$Y \xrightarrow{\pi} Y/\text{Aut}(Y/X) \xrightarrow{\bar{p}} X$$

p

Se \bar{p} è un omeomorfismo si dice che il rivestimento è di Galois. In sostanza un rivestimento è di Galois, se

$$X \cong \frac{Y}{\text{Aut}(Y/X)}$$

Osservazione 2.4. Se Y è connesso e G agisce su Y in maniera propriamente discontinua, il rivestimento $Y \rightarrow Y/G$ è di Galois.

Teorema 2.2 (Teorema di Galois per rivestimenti).

Sia $Y \rightarrow X$ un rivestimento di Galois e $G := \text{Aut} Y/X$. Vale che

$\forall H \leq G$ sottogruppo, la mappa $Y/H \rightarrow Y$ è un rivestimento connesso e

$$H \leq G \iff Y/H \rightarrow Y \text{ è un rivestimento di Galois.}$$

Inoltre, se $Z \rightarrow X$ è un rivestimento connesso tale che esiste un morfismo φ di rivestimenti che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

si ha che $Y \rightarrow Z$ è un rivestimento di Galois e $\text{Aut}(Y/Z) \leq G$

Dunque il teorema dà una corrispondenza:

$$\{H \leq G \text{ sottogruppi}\} \longleftrightarrow \{p_z : Z \rightarrow Y \text{ rivestimenti connessi} \mid p_z \circ \varphi = p_Y\}$$

Esempio 2.11.

Il rivestimento $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ è di Galois.

Esempio 2.12 (Esempio di rivestimento non di Galois).

2.5 Rivestimento universale

Teorema 2.3 (Sollevamento di cammini e omotopie).

Sia $p : Y \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $y \in p^{-1}(x_0)$. Vale

1. (Esistenza ed unicità del sollevamento)

Se $\gamma : I \rightarrow X$ è un cammino tale che $\gamma(0) = x_0$, allora $\exists! \tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$ cammino tale che $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}(0) = y$

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & Y \\ & \searrow \gamma & \downarrow p \\ & & X \end{array}$$

2. (Sollevamento dell'omotopia)

Se $\gamma_0 \sim \gamma_1$ sono due cammini omotopi allora $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ e $\tilde{\gamma}_0 \sim \tilde{\gamma}_1$

Esistenza ed unicità del sollevamento.

La dimostrazione di seguito riportata è quella fatta nel corso l'anno precedente. L'idea è la stessa, si è ritenuto che questa dimostrazione fosse più dettagliata.

Poiché p è un rivestimento, la famiglia

$$\mathcal{U} := \{U_x \subset X \mid x \in X \text{ e } U_x \text{ è un intorno ben rivestito di } x\}.$$

è un ricoprimento di aperti di X .

Poiché γ è un cammino, è in particolare una mappa continua e quindi

$$\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \{\gamma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

è un ricoprimento di aperti dell'intervallo $I = [0, 1]$.

L'intervallo è uno spazio metrico compatto e quindi ogni suo ricoprimento di aperti ammette numero di Lebesgue ε tale che

$$\forall t \in I \quad \exists V \in \mathcal{U} \text{ tale che } B(t, \varepsilon) \subset V.$$

Dunque se $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$ si può definire la sequenza finita di intervalli:

$$\left\{ I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

tali che $\forall k = 0, \dots, n-1$ si ha che $\gamma(I_k) \subset U_k$ per qualche $U_k \in \mathcal{U}$.

Si definisce ora la mappa $\tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$ definendola su ciascun I_k .

Per $k = 0$, $\gamma(I_0) \subset U_0$ che è ben rivestito, siano W_i gli intorno della fibra, cioè

$$p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_{i \in I} W_i,$$

e si sceglie l'unico $\bar{W}_0 := W_{i_0}$ tale che $y \in W_{i_0}$.

A tal punto si definisce $\tilde{\gamma}$ su I_0 come

$$\tilde{\gamma}|_{[0, \frac{1}{n}]} := p|_{\bar{W}_0}^{-1} \circ \gamma|_{[0, \frac{1}{n}]}.$$

Si costruisce ora $\tilde{\gamma}$ ricorsivamente, ponendo $y_k := \tilde{\gamma}|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(1)$. E

$$\tilde{\gamma}|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} = p|_{\bar{W}_k}^{-1} \circ \gamma|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}.$$

dove \bar{W}_k è l'unico intorno di y_k della fibra dell'intorno ben rivestito di $x = p(y_k)$.

L'unicità segue da un lemma della sottosezione precedente che dimostrava l'unicità dei sollevamenti di mappe continue qualunque. \square

Sollevamento dell'omotopia.

La seguente dimostrazione è quella invece data da Tamas, si è ritenuto fosse meno dispersiva (l'anno precedente si era sollevata l'omotopia in generale, mentre quest'anno solo quella di cammini).

Si dimostrerà che se $H : I \times I \rightarrow X$ l'omotopia ad estremi fissi tra due cammini $\gamma_0, \gamma_1 : I \rightarrow X$, allora

$$\exists \tilde{H} : I \times I \rightarrow Y \text{ tale che } p \circ \tilde{H} = H \text{ e } \tilde{H}(t, 0) = \tilde{\gamma}_0(t), \quad \tilde{H}(t, 1) = \tilde{\gamma}_1(t).$$

detto sollevamento dell'omotopia H .

Come nel sollevamento dei cammini, si considera il ricoprimento di aperti del quadrato dato da:

$$\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \{\gamma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

e poiché il quadrato è compatto, si ha che esiste un numero di Lebesgue ε tale che

$$\forall (t, s) \in I \times I \quad \exists V \in \mathcal{U} \text{ tale che } B((t, s), \varepsilon) \subset V.$$

Si può dare un'ordinamento lessicografico agli intervalli di $I \times I$ e si costruisce il sollevamento in maniera ricorsiva ed analoga al caso precedente ma lungo un "serpente" che attraversa il quadrato $I \times I$.

Per unicità del sollevamento di cammini, dato che il cammino $t \mapsto \tilde{H}(t, 0)$ è tale che

$$p(\tilde{H}(t, 0)) = H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad \forall t \in I,$$

allora vale che $(t \mapsto \tilde{H}(t, 0)) = \tilde{\gamma}_0$. Analogamente si ha che $(t \mapsto \tilde{H}(t, 1)) = \tilde{\gamma}_1$.

Inoltre, il cammino $s \mapsto \tilde{H}(0, s)$ è tale che

$$p(\tilde{H}(0, s)) = H(0, s) \quad \forall s \in I,$$

e quindi il cammino definito da $\tilde{H}(0, s)$ è un sollevamento del cammino definito da $H(0, s)$.

Ma dato che l'omotopia è ad estremi fissi tale cammino è il cammino costante $s \mapsto \gamma_0(0)$ e l'unico sollevamento del cammino costante è il cammino costante $s \mapsto \tilde{\gamma}_0(0)$, quindi

$$\tilde{H}(0, s) = \tilde{\gamma}_0(0) \quad \forall s \in I.$$

e analogamente si ha che $\tilde{H}(1, s) = \tilde{\gamma}_1(1)$.

Si conclude che il sollevamento dell'omotopia \tilde{H} è un omotopia ad estremi fissi tra i cammini $\tilde{\gamma}_0$ e $\tilde{\gamma}_1$. \square

Definizione 2.9 (Rivestimento universale).

Un rivestimento $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ si dice **universale** se \tilde{X} è semplicemente connesso.

Proposizione 2.8 (Proprietà universale del rivestimento universale). Sia $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento universale, per ogni altro rivestimento $p : Y \rightarrow X$ esiste un morfismo di rivestimenti $\varphi : \tilde{X} \rightarrow Y$ e fissati $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ ne esiste uno solo tale che $\varphi(\tilde{x}_0) = y_0$

Dimostrazione.

\tilde{X} è connesso per archi, quindi $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$ esiste un cammino $g : I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $g(0) = \tilde{x}_0$ e $g(1) = \tilde{x}$.

Sia $f := \pi \circ g$ che è un cammino in X tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = \pi(\tilde{x})$.

E sia $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = y_0$. (che esiste per il teorema di sollevamento di cammini e omotopie). Si definisce ora $\varphi : \tilde{X} \rightarrow Y$ come

$$\varphi(\tilde{x}) = \tilde{f}(1).$$

Tale mappa è ben definita e non dipende dalla scelta del cammino, perché dato che \tilde{X} è semplicemente connesso, ogni cammino g' che collega \tilde{x}_0 a \tilde{x} è omotopo a g , di conseguenza il cammino f è omotopo a $f' = \pi \circ g'$ e quindi per il sollevamento dell'omotopia si ha che $\tilde{f}(1) = \tilde{f}'(1)$.

L'unicità di φ fissati i punti segue dall'unicità del sollevamento di mappe qualunque.

Resta da mostrare che φ è una mappa continua. □

Corollario 2.2.

Dato $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ morfismo tra rivestimenti universali

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & X & \end{array}$$

φ è un isomorfismo.

Corollario 2.3 (Unicità del rivestimento universale).

Un qualunque morfismo di rivestimenti universali $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ è un isomorfismo.

In particolare, grazie alla proprietà universale il rivestimento universale di un qualunque spazio topologico X è unico a meno di isomorfismo.

Dimostrazione.

Siano $x_0 \in X$, $\tilde{x} \in \pi_1^{-1}(x_0)$ e $\tilde{y} \in \varphi(\tilde{x})$.

Per la proprietà universale esiste un unico morfismo di rivestimenti $\psi : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ tale che $\psi(\tilde{y}) = \tilde{x}$.

Si ha quindi il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xleftarrow{\psi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & X & \end{array}$$

Cioè

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow[\psi \circ \varphi]{\text{id}_{\tilde{X}_1}} & \tilde{X}_1 \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_1 \\ & X & \end{array}$$

E quindi per dato che $(\psi \circ \varphi)(\tilde{x}) = \psi(\tilde{y}) = \tilde{x}$ vale che $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\tilde{X}_1}$

Allo stesso modo $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\tilde{X}_2}$ e quindi φ è un isomorfismo. □

Corollario 2.4.

Ogni rivestimento di uno spazio X semplicemente connesso è banale.

Dimostrazione.

Non l'ho ancora capita... □

Teorema 2.4 (Gruppo di Galois e gruppo fondamentale).

Un rivestimento universale $\tilde{X} \rightarrow X$ è sempre di Galois e

$$\text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0) \quad \forall x_0 \in X$$

Osservazione 2.5.

Questo teorema permette di ricalcolare il gruppo fondamentale di alcuni spazi topologici precedenti:

$$1. \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

$$2. \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$$

$$3. S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(R)$$

Lemma 2.2 (Caratterizzazione dei rivestimenti di Galois).

Dato $p : Y \rightarrow X$ rivestimento connesso.

$$p \text{ è di Galois} \iff \exists x \in X \text{ tale che } \text{Aut}(Y/X) \text{ agisce transitivamente su } p^{-1}(x)$$

del lemma.

\Rightarrow Se p è di Galois, allora $X \cong \frac{Y}{\text{Aut} Y/X}$ e quindi le fibre dei punti sono esattamente le orbite dell'azione di $\text{Aut}(Y/X)$ su Y . Dunque è transitiva per definizione.

\Leftarrow p si fattorizza in

$$Y \longrightarrow Y/\text{Aut}(Y/X) \xrightarrow{\bar{p}} X$$

e \bar{p} è sempre un rivestimento connesso, ma se l'azione è transitiva su $p^{-1}(x)$, allora vale che $|\bar{p}^{-1}(x)| = 1$ e dunque \bar{p} è bigettiva, dato che è anche aperta (i rivestimenti sono aperti), è anche un omeomorfismo. Dunque p è di Galois per definizione. \square

del teorema.

Si vuole definire una mappa:

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}/X)$$

come segue: fissato un $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x_0)$, sia $g = [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ e $\tilde{x}_g := \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(x_0)$, dove $\tilde{\gamma}$ è l'unico sollevamento di γ tale che $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$.

Per il sollevamento dell'omotopia si ha in effetti che \tilde{x}_g dipende solo da g e non da γ .

Sia ora $\varphi_g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ l'unico morfismo di rivestimenti tale che

$$\varphi_g(\tilde{x}) = \tilde{x}_g.$$

Si definisce ora $\Phi(g) := \varphi_g$ e si mostra che è un omomorfismo di gruppi, iniettivo e suriettivo.

- **Omomorfismo**

Si fa incollando per esistenza ed unicità dei sollevamenti, un giorno sarà scritta.

- **Iniettivo**

Se $\Phi(g) = \text{id}$ allora $\varphi_g(\tilde{x}) = \tilde{x}$, cioè e dunque il sollevamento è $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{x}$ per ogni $t \in I$, che sollevamenti il cammino costante $I \rightarrow \{x_0\}$ e dunque la sua classe $g = e$ l'elemento neutro del gruppo fondamentale.

- **Suriettivo**

$\varphi \in \text{Aut}(\tilde{X}/X)$ è determinato dall'immagine $\varphi(\tilde{x})$ sia $\tilde{\gamma}$ un cammino da \tilde{x} a $\varphi(\tilde{x})$, allora $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ è un laccio, e quindi se $g = [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, allora $\Phi(g) = \varphi$. Dunque Φ è suriettivo. \square

Definizione 2.10 (Spazio localmente semplicemente connesso).

Uno spazio topologico X si dice localmente semplicemente connesso se ogni ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni fatto di intorni semplicemente connessi.

Teorema 2.5 (Esistenza del rivestimento universale).

Sia X spazio connesso e localmente semplicemente connesso, allora esiste $\tilde{X} \rightarrow X$ rivestimento universale di X .

Dimostrazione.

Fissato un punto $x_0 \in X$, il rivestimento universale \tilde{X} è definito come

$$\tilde{X} := \{\text{cammini } f : I \rightarrow X \mid f(0) = x_0\} / \sim$$

con $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ definita come

$$\pi([f]) := f(1).$$

- La topologia di \tilde{X} ha come base la seguente: se $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e U intorno semplicemente connesso di $f(1) = \pi(\tilde{x}) \in X$ (che esiste per le ipotesi),

$$\tilde{U}\tilde{x} := \{[f * g] \mid g : I \rightarrow U \text{ cammino tale che } g(0) = f(1)\} / \sim$$

dove \sim è l'omotopia di cammini ad estremi fissi.

Dato che U è semplicemente connesso, le classi di omotopia dei cammini g dipendono solo dal punto finale $g(1)$.

Resta da mostrare che gli $\tilde{U}\tilde{x}$ sono una base di una topologia su \tilde{X} e che π è continua.

- π è un rivestimento e gli intorni ben rivestiti sono proprio quelli semplicemente connessi dati dalle ipotesi, infatti $\forall x \in X$ se U è un intorno semplicemente connesso di x , allora

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\tilde{x} \in U} \tilde{U}\tilde{x}$$

- \tilde{X} è connesso per archi, infatti se $\tilde{x}_0 = [I \rightarrow \{x_0\}] \in \tilde{X}$ è la classe del cammino costante e $\tilde{x} = [f] \in \tilde{X}$ un qualsiasi altro elemento, allora il cammino

$$\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X} : s \mapsto [t \mapsto f(st)]$$

parte da $\tilde{f}(0) = [t \mapsto f(0)] = \tilde{x}_0$ e arriva a $\tilde{f}(1) = [t \mapsto f(t)] = \tilde{x}$, quindi \tilde{X} è connesso per archi.

Notare che tale cammino, essendo un sollevamento è unico.

- \tilde{X} è semplicemente connesso, infatti se $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}$ è un cammino chiuso tale che $\tilde{x} = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$, allora $\gamma := \pi \circ \tilde{\gamma} : I \rightarrow X$ è tale che $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, ma γ è omotopo al cammino costante $I \rightarrow \{x_0\}$, e per unicità del sollevamento di cammini si ha che

$$\tilde{\gamma} \sim I \rightarrow \{\tilde{x}\}$$

che è l'unico sollevamento del cammino costante $I \rightarrow \{x_0\}$.

□

2.6 Dimostrazione del teorema di Seifert-Van Kampen

Si considerino le seguenti due costruzioni:

1. Ad un omomorfismo surgettivo corrisponde un rivestimento di Galois:

Sia $\varrho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ un omomorfismo surgettivo e sia $N := \ker(\varrho)$ il suo nucleo.

N agisce su \tilde{X} , tramite l'azione $g.\tilde{x} := \tilde{tildex} * g$, tale azione si verifica essere propriamente discontinua e quindi definisce un rivestimento connesso

$$p_\varrho : Y_\varrho := \tilde{X}/N \rightarrow X$$

Tale rivestimento risulta inoltre essere di Galois, $\pi^{-1}(U) \cong U \times \pi_1(X, x_0)/N$ per ogni intorno ben rivestito U di x_0 , dove $\pi_1(X, x_0)/N$ è munito della topologia discreta.

Segue che

$$p^{-1}(U) \cong U \times \left(\frac{\pi_1(X, x_0)}{N} \right) \cong U \times G.$$

2. Dato un rivestimento $p : Y \rightarrow X$ di Galois, si definisce l'omomorfismo

$$\varrho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(Y/X) =: G$$

come segue: fissato un $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, sia $g = [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ e $\tilde{x}_g := \tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(x_0)$, dove Fissato un $y \in p^{-1}(x_0)$, per un teorema precedente esiste un unico morfismo di rivestimenti $\varphi : \tilde{X} \rightarrow Y$ tale che $\varphi(x_0) = y$.

Sia ora $\psi \in \text{Aut}(Y/X)$ e $y_\psi := (\varphi \circ \psi)(\tilde{x}_0) \in p^{-1}(x_0)$.

Poiché p è di Galois, esiste un unico $g \in G = \text{Aut}(Y/X)$ tale che $g(y) = y_\psi$. Vale dunque che

$$(\varphi \circ \psi)(\tilde{x}_0) = (g \circ \varphi)(\tilde{x}_0)$$

e

$$p \circ \varphi \circ \psi = p \circ g \circ \psi$$

cioè il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\psi} & \tilde{X} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\text{id}} & X \end{array}$$

A questo punto si definisce l'omomorfismo

$$\varrho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(Y/X) = G : \psi \mapsto g_\psi$$

che risulta essere omomorfismo perché $g_2 g_1$ è l'unico morfismo che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\psi_1} & \tilde{X} & \xrightarrow{\psi_2} & \tilde{X} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{g_1} & Y & \xrightarrow{g_2} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\text{id}} & X & \xrightarrow{\text{id}} & X \end{array}$$

Inoltre ϱ è surgettivo,

Teorema 2.6.

Le due costruzioni precedenti sono l'una l'inversa dell'altra ed inducono una corrispondenza : $\{\varrho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G\} \longleftrightarrow$

del Teorema di Seifert-Van-Kampen (preliminare).

Sia $X = X_1 \cup X_2$ la unione di due aperti X_1 e X_2 connessi per archi, tali che $X_1 \cap X_2$ sia connesso per archi. Per la corrispondenza enunciata prima la situazione del teorema è la seguente:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(X_1, x_0) & & \\ & \nearrow j_{1*} & & \searrow i_{1*} & \\ \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & & & & \pi_1(X, x_0) \\ & \searrow j_{2*} & & \nearrow i_{2*} & \\ & & \pi_1(X_2, x_0) & & \\ & & & \nearrow \varrho_1 & \\ & & & & G \\ & & & \searrow \varrho_2 & \end{array}$$

Si suppone per la dimostrazione che:

1. X è localmente semplicemente connesso, dunque esiste il suo rivestimento universale.
2. (per ora) le mappe ϱ_1 e ϱ_2 sono surgettive.

Per il teorema precedente si ha che esistono due rivestimenti $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1, p_2 : Y_2 \rightarrow X_2$ che corrispondono rispettivamente a ϱ_1 e ϱ_2 e che hanno come gruppo di Galois proprio G . Inoltre le restrizioni

$$p_i|_{p_i^{-1}(X_1 \cap X_2)} : p_i^{-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\sim} X_1 \cap X_2$$

sono isomorfismi gli unici isomorfismi fissato $x_0 \in X_1 \cap X_2$ e y_0 nella preimmagine.

Per continuare la dimostrazione ci sarà bisogno del lemma che segue. □

Lemma 2.3.

Siano $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1, p_2 : Y_2 \rightarrow X_2$ due rivestimenti e $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ un morfismo di rivestimenti, allora

$$\exists p : Y \rightarrow X (= X_1 \cup X_2) \text{ rivestimento tale che } p|_{p^{-1}(X_i)} \cong p_i^{-1}(X_i) \rightarrow X$$

Inoltre se p_1, p_2 sono di Galois allora anche p è di Galois.

$$\begin{array}{ccc} p_1^{-1}(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & p_2^{-1}(X_1 \cap X_2) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X_1 \cap X_2 & \end{array}$$

del lemma. Sia $Y := \frac{Y_1 \sqcup Y_2}{\sim}$ dove $y_1 \sim y_2$ se e solo se $y_i \in p_i^{-1}(X_1 \cap X_2)$ e $\varphi(y_1) = y_2$.
Sia $p : Y \rightarrow X$ la mappa indotta naturalmente da p_1 e p_2 , cioè

$$p(y) := \begin{cases} p_1(y) & \text{se } y \in Y_1 \\ p_2(y) & \text{se } y \in Y_2 \end{cases}$$

e poiché $p|_{p_i^{-1}(X_i)} \cong p_i$, si ha che p è un rivestimento.

Inoltre se Y_1, Y_2 sono connessi lo è anche Y .

Inoltre per qualche motivo a me non ancora ovvio, se p_1, p_2 sono di Galois con gruppo G , allora anche p è di Galois con gruppo G . □

del Teorema di Seifert-Van-Kamper (conclusione).

La p che esiste per il lemma precedente e che fa commutare il diagramma, e corrisponde proprio ad una $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ tale che il diagramma del prodotto amalgamato sia soddisfatto.

Per dimostrare che il teorema vale anche quando i ϱ_i non sono surgettivi va modificata la costruzione 1 in modo da fare una corrispondenza tra tutti gli omomorfismi e una nuova classe di rivestimenti, detti G -rivestimenti. Gli ultimi fatti del corso, puntano a costruire tale corrispondenza. □

Definizione 2.11 (G -rivestimento).

Un G -rivestimento è un rivestimento della forma $Y \rightarrow Y/G$ dove G è un gruppo che agisce in maniera propriamente discontinua su Y .

Teorema 2.7.

La mappa $\varrho \mapsto Y_\varrho$ induce una bigezione:

$$\{\varrho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G\} \longleftrightarrow \{G\text{-rivestimenti } p : Y \rightarrow X \mid y = p^{-1}(x_0) \text{ fissato}\}$$

con i rivestimenti a meno di isomorfismo.

3 Domande orali del 3 Giugno

3.1 Orale 1

1. Come si dimostra che il prodotto di 2 compatti è compatto?
2. Perché i compatti di \mathbb{R} sono chiusi?

Risposta. È T_2

□

3. Esempio di compatto di \mathbb{R} che non è unione finita di intervalli chiusi e limitati.

Risposta. L'insieme di Cantor

□

4. Se X e Y sono compatti e discreti, cosa si può dire? (TAMAS)

Risposta. X, Y sono finiti, quindi il prodotto di finiti è finito hahaha.

□

5. Esempio di un compatto non discreto

Risposta. Un intervallo chiuso.

□

3.2 Orale 2

1. Che relazione ci sono tra chiuso e compatto

Risposta. Chiuso in un compatto è compatto.

□

2. Quand'è che i sottoinsiemi compatti di X sono chiusi? E se vuole mi dia un controesempio di un compatto non chiuso.

Risposta. Se X è T_2 i compatti sono chiusi, il controesempio è un qualunque spazio con la topologia indiscreta.

□

3. Sia $p : Y \rightarrow X$ un rivestimento e $U \subset X$ aperto, come si definisce la restrizione del rivestimento p ad U ? Dimostrare che tale restizione è ancora un rivestimento. (TAMAS)

Risposta. $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$

□

4. X, Y e U connessi come sopra. Quando $p^{-1}(U)$ è sconnesso? Dopo un po' hanno chiesto, qual è il rivestimento connesso più semplice che uno possa pensare? (TAMAS)

Risposta. Alla prima domanda non si è saputo rispondere.

Alla seconda domanda $Y = X$ con $p = id_X$ che è un caso di omeomorfismo.

□

3.3 Orale 3

1. Com'è definito $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$? Munito della topologia quoziente a quale spazio è omeomorfo?

Risposta. Alla sfera S^1 , la dimostrazione si può fare con l'unicità della compattificazione di Alexandroff perché i due spazi sono T_2 e compatti.

□

2. Chi è il piano all'infinito di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Risposta. Il punto proiettivo $[0, 1]$

□

3. Esercizio: Verifica che le carte affini sono omeomorfismi.

4. Cos'è una conica in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$? Quante coniche non degeneri esistono in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$? E quante in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$?

5. Come si trova la tangente ad una conica passante per un punto?

3.4 Orale 4

1. Data una funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $|f(z)| \leq c_1 |z| + c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti. Cerchi una caratterizzazione di f .

Risposta. I polinomi di grado minore o uguale a d . Dimostrazione molto simile al Teorema di Louville. \square

2. È vero che f come sopra (quindi un polinomio) definisce un rivestimento $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$? Per esempio $z \mapsto z^n$ è un rivestimento da $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$? (Tamas)

Risposta. La mappa $\varrho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ non può dare un rivestimento perché per esempio, $\varrho^{-1}(0) = \{0\}$, mentre $\varrho^{-1}(1) = \{\zeta_n^i \mid i = 0, \dots, n-1\}$ e quindi non sarebbe ben definito il suo grado. (In generale tale osservazione si può fare per un polinomio generico al posto di z^n ed usando il teorema fondamentale dell'algebra)

Tuttavia la mappa $\varrho : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \mapsto z^n$ da un rivestimento indotto dall'azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su \mathbb{C}^* data da $[m].z \rightarrow (z)\zeta_n^m$, infatti in tal caso le orbite dell'azione sono proprio le radici n -esime di z^n e quindi le fibre del rivestimento $\varrho : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. \square

3.5 Orale 5

1. Esempio di un rivestimento di Galois e di un rivestimento non di Galois. Un esempio generale di rivestimento di Galois. (Tamas)

Risposta. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è di Galois ed in generale G che agisce p.d. su \tilde{X} semplicemente connesso da un rivestimento $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ di Galois.

L'esempio non di Galois è quello visto a lezione. \square

2. Qual è il gruppo fondamentale del bouquet $S^1 \vee S^1$, perché si poteva prevedere teoricamente? (Tamas)

Risposta. Per il teorema di Corrispondenza di Galois esiste perché ci sono sottogruppi non normali in $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. \square

3. Qual è la forma normale di una funzione f olomorfa con zero z_0 di ordine k ? Calcoli il residuo di $h(z) = \frac{f'}{f}$ in z_0

Risposta. $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, con $g(z) \neq 0$ olomorfa.

Se z_0 è uno zero di ordine k di $f(z)$ allora è di ordine $k-1$ per $f'(z)$, quindi la funzione $h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ ha un polo di ordine 1 in z_0 , quindi

$$\text{Res}(h, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = \dots = k.$$

\square

4. Secondo lei a cosa serve?

Risposta. Se si integra $\frac{f'(z)}{f(z)} dz$ lungo un cammino chiuso di indice di avvolgimento 1 intorno a z_0 si ottiene $2k\pi i$. \square

3.6 Orale 6

1. Sia I un segmento che collega il polo sud ed il polo nord di S^2 . Si calcoli il gruppo fondamentale di $X = S^2 \cup I$.

Risposta. Si prende $X_1 = X \setminus \text{segmento chiuso proprio di } I$ e $X_2 = I \cup \text{i punti a distanza } < \varepsilon \text{ da un meridiano}$ l'intersezione è semplicemente connessa, X_2 anche e quindi il gruppo fondamentale è lo stesso di X_1 cioè \mathbb{Z} . \square

2. Riesce a disegnare il rivestimento universale di $S^1 \vee S^2$? Di che grado è? E quello di X ?

Risposta. Il primo è una retta su cui si inseriscono delle sfere su ogni numero intero. Mentre il secondo è dato da una "catena" di sfere collegate da dei segmenti. \square

3.7 Orale 7

1. Il prodotto munito della topologia prodotto di spazi discreti è discreto?

Risposta. Sì, se il prodotto è finito se è infinito non necessariamente altrimenti. □

2. Esempio di prodotto infinito di discreti non discreto

Risposta. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ che non è discreto perché $\{(0, 0, \dots, 0)\}$ non è aperto. □

3. Prodotto numerabile di metrizzabili è metrizzabile? $0, 1^{\mathbb{N}}$ è I-numerabile?

Dimostrazione. Sì ed inoltre metrizzabile implica I-numerabile. □

4. Costruzione del cono topologico $\frac{X \times [0, 1]}{X \times \{0\}}$. Calcolo del gruppo fondamentale per $X = S^1$ e poi in generale.

5. Se X, Y sono metrizzabili e compatti, dimostri che $X \times Y$ è compatto.

Dimostrazione. Usando la caratterizzazione metrizzabili: compatto se e solo se compatto per successioni. (Oppure secondo TAMAS con il numero di Lebesgue) □

6. Cos'è il numero di Lebesgue?

3.8 Orale 8

1. Teorema di Van-Kampen con enunciato e dimostrazione.

Risposta. Dimostrazione diversa da quella di Tamas, più generale e probabilmente presa dall'Hatcher. □

2. Dimostra che se $\alpha \sim \beta$ allora $\varphi(\alpha) \sim \varphi(\beta)$.

3. Se $\pi_1(X, x_0)$ è abeliano, allora $\forall \alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$ si ha che $\alpha \# \beta = \beta \# \alpha$

3.9 Orale 9

1. Quali sono i legami tra la connessione e la connessione per archi?

Risposta. Connesso per archi implica connesso, ma non vale il viceversa. Per la dimostrazione si è dato per buono che I sia connesso. □

2. Un esempio di spazio connesso ma non connesso per archi.

Risposta. Il seno del topologo. La dimostrazione utilizza il fatto che se Y è connesso e $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ allora Z è connesso, ma questo fatto è dato per buono. □

3. Dimostra che il seno del topologo è connesso, senza utilizzare il lemma.

Risposta. Se esistessero A, B aperti non vuoti tali che $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$. Supponendo senza perdita di generalità che $(0, 0) \in A$, l'insieme $A \setminus \{(0, 0)\} \neq \emptyset$ (dato che $\{(0, 0)\} \in \overline{\Gamma(\sin(\frac{1}{x}))}$) è aperto nel grafico di $\sin(1/x)$ e quindi gli aperti $A \setminus \{(0, 0)\}$ e B sconnettono $\sin(\frac{1}{x})$ che però è connesso. □

4. Cosa sono le componenti connesse di uno spazio topologico? Se lo spazio ha una proprietà topologica "simpatica" cosa si sa dire? (TAMAS)

Risposta. Se lo spazio è localmente connesso le componenti connesse sono aperte e chiuse. □

5. Esempio di spazi localmente connessi e di spazio non localmente connessi. Per esempio in \mathbb{R}^n .

Risposta. Gli aperti di \mathbb{R}^n sono sempre localmente connessi, mentre i chiusi in generale no per esempio $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ non è localmente connesso. □

4 Domande orali del 9 Giugno

4.1 Orale

1. Qual è la definizione di componente connessa? Si dimostri la buona definizione.
2. Condizione sufficienti affinché le componenti connesse siano aperte.

Risposta. Se lo spazio è localmente connesso, allora le componenti connesse sono aperte e chiuse. \square

3. Qual è la definizione di omeomorfismo locale? Si estenda la nozione di sollevamento di cammino ad un qualunque omeomorfismo locale **surgettivo**, il sollevamento esiste? è unico? (TAMAS)

Risposta. Tamas è convinto dell'unicità, Frigerio no.

Alla fine Frigerio convince Tamas che non è vero in generale e che per esempio lui sa dimostrarlo $\varphi : Y \rightarrow X$ sia un omeomorfismo locale con Y **T2**. In generale però non si ha ne esistenza ne unicità.

In particolare nella dimostrazione si usa il fatto che se Y è T2 i limiti di successioni sono unici. \square

4.2 Orale

1. Come si definisce la restrizione di un rivestimento? (TAMAS)
2. Sia $X = A_1 \cup A_2$ aperti con $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ e due rivestimenti $p_1 : X_1 \rightarrow A_1$ e $p_2 : X_2 \rightarrow A_2$ tali che $p_1|_{p_1^{-1}(A_1 \cap A_2)}$ e $p_2|_{p_2^{-1}(A_1 \cap A_2)}$ sono isomorfismi. Come si fa a costruire un rivestimento $p : Y \rightarrow X$ come "rincollamento" dei due rivestimenti. (TAMAS)
3. Scegli una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra e la faccia.

Risposta. Quella con Louville. \square

4. Come si dimostra il teorema di Louville?

4.3 Orale

1. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e bigettiva, si trovi una caratterizzazione di f .

Risposta. Le affinità di \mathbb{C} . \square

2. In uno spazio topologico si dice irriducibile se ogni due aperti non vuoti si intersecano non banalmente. Mi dia un esempio di spazio connesso ma non irriducibile. Poi uno connesso, ma non T2.

Risposta. Beh \mathbb{R} non è irriducibile, La retta a cui aggiungo un punto in modo che non venga T2 come visto a negli esercizi. Dimostri che tale esempio è connesso. \square

4.4 Orale

1. Sia X metrico, compatto. A lezione si è dimostrato che ogni ricoprimento aperto ammette un numero di Lebesgue. Qual'è la definizione di numero di Lebesgue? Si dimostri l'esistenza del numero di Lebesgue.

4.5 Orale

1. Esempio di spazio topologico che non è T_2 , ma è T_1 .

Risposta. Una risposta corretta è qualsiasi spazio topologico con la topologia indiscreta. Però hanno dimostrato che basta un qualsiasi spazio topologico infinito con la topologia cofinita. \square

2. Prodotto di spazi T_2 è T_2 , è vero per gli spazi T_1 ? E nel caso del prodotto infinito?

Risposta. Certo, perché due punti distinti hanno almeno una coordinata distinta. E vale anche infinito. \square

3. E se invece si considera un quoziente di uno spazio T_1 , è ancora T_1 ?

Risposta. \square