

# Appunti di Topologia Algebrica

Simone Riccio

1 giugno 2025

## Indice

<b>1 Gruppo Fondamentale</b>	<b>1</b>
1.1 Omotopia . . . . .	1
1.2 Definizione del gruppo fondamentale . . . . .	2
1.3 Primi gruppi fondamentali . . . . .	6
1.4 Teorema di Seifert-Van Kampen e richiami di teoria dei gruppi . . . . .	9
<b>2 Rivestimenti</b>	<b>12</b>

## 1 Gruppo Fondamentale

### 1.1 Omotopia

Una delle motivazioni che porta a definire il gruppo fondamentale è la necessità di distinguere due spazi topologici a meno di omeomorfismo.

#### Esempio 1.1.

Si consideri il disco

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

Al variare di  $n$  naturale i  $D^n$  non sono intuitivamente omeomorfi, tuttavia dimostrarlo usando solo la topologia generale è difficile.

È semplice mostrare che  $D^1 \not\cong D^n$  per  $n \geq 2$ , usando l'insieme delle componenti connesse. Infatti, per ogni  $x \in D^n$  lo spazio topologico  $D^n \setminus \{x\}$  è connesso per ogni  $n \geq 2$ , mentre  $D^1 \setminus \{x\}$ , essendo il segmento  $[-1, 1]$  senza un punto, ha due componenti connesse.

Tale argomentazione non funziona già per provare a distinguere  $D^2$  dai  $D^n$  con  $n \geq 3$ . Introduciamo quindi il gruppo fondamentale, che permetterà in futuro di distinguerli tutti.

#### Definizione 1.1 (Omotopia).

Date due funzioni continue  $f, g : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici, si dice che  $f$  e  $g$  sono **omotope** se esiste una funzione

$$H : I \times X \rightarrow Y$$

**continua** e tale che:

- $H(0, x) = f(x)$  per ogni  $x \in X$ ;
- $H(1, x) = g(x)$  per ogni  $x \in X$ ;
- $H(s, y) = H(s, x)$  per ogni  $s \in I$  e per ogni  $x, y \in X$  tali che  $f(x) = f(y)$ .

Si dice che  $H$  è un'**omotopia** tra  $f$  e  $g$  e si scrive

$$f \sim g.$$

Inoltre si può vedere un'omotopia come una famiglia di funzioni continue:

$$\{f_s : X \rightarrow Y\}_{s \in I} \quad \text{con } f_s(x) = H(s, x).$$

Che rappresentano una deformazione continua di  $f$  in  $g$ .

**Definizione 1.2** (Omotopia di cammini a estremi fissi).

Due cammini  $\gamma_0, \gamma_1 : I \rightarrow X$  si dicono **omotopi (a estremi fissi)** se esiste una funzione

$$H : I \times I \rightarrow X$$

continua e tale che:

- $H(0, t) = \gamma_0(t)$  per ogni  $t \in I$ ;
- $H(1, t) = \gamma_1(t)$  per ogni  $t \in I$ ;
- $H(s, 0) = H(s, 1)$  per ogni  $s \in I$ .

Si dice che  $H$  è un'omotopia di cammini a estremi fissi e si scrive

$$\gamma_0 \sim \gamma_1.$$

Infatti è facile verificare che l'essere omotopi a estremi fissi induce una relazione di equivalenza sull'insieme dei cammini in  $X$ .

**Definizione 1.3** (Giunzione di cammini).

Siano  $f, g : I \rightarrow X$  due cammini in  $X$  con  $f(1) = g(0)$ , allora la **giunzione** di  $f$  e  $g$  è il cammino

$$f * g : I \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

**Lemma 1.1** (Giunzione di cammini e omotopia).

Se  $f \sim f'$  e  $g \sim g'$ , allora  $f * g \sim f' * g'$ .

*Dimostrazione.* Sia  $H_f : I \times I \rightarrow X$  un'omotopia di  $f$  e  $f'$  e  $H_g : I \times I \rightarrow X$  un'omotopia di  $g$  e  $g'$ .

Definiamo l'omotopia

$$H : I \times I \rightarrow X : (s, t) \mapsto \begin{cases} H_f(2s, t) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ H_g(2s - 1, t) & \text{se } \frac{1}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

che risulta continua. Infatti la continuità di  $H_f$  e  $H_g$  implica la continuità di  $H$ , essendo le due funzioni definite su due intervalli disgiunti. Inoltre si verifica facilmente che  $H$  soddisfa le condizioni richieste.  $\square$

**Osservazione 1.1.**

Si noti che la giunzione di cammini non è definita su ogni coppia di cammini, ma solo su quelle che hanno il punto finale del primo uguale al punto iniziale del secondo. Tuttavia, se si considerano solo i cammini chiusi che partono da uno stesso punto iniziale, la giunzione è chiaramente sempre definita.

## 1.2 Definizione del gruppo fondamentale

Da ora in poi gli spazi topologici considerati saranno sempre localmente connessi.

**Teorema 1.1** (Poincaré).

Se  $X$  uno spazio topologico e  $x_0 \in X$  un punto fisso.

Il prodotto dato dalla giunzione di cammini induce una struttura di gruppo sulle classi di omotopia dei cammini chiusi in  $X$  aventi punto iniziale  $x_0$ .

Tale gruppo è chiamato **gruppo fondamentale** di  $X$  in  $x_0$  e si denota con  $\pi_1(X, x_0)$ .

In tale gruppo l'elemento neutro è rappresentato dal cammino costante in  $x_0$  e l'inverso di un cammino  $\gamma$  è il cammino

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$$

che è l'inverso rispetto alla giunzione di cammini.

Per la dimostrazione del teorema di Poincaré ci basta dimostrare prima un lemma.

**Lemma 1.2.** (Riparametrizzazione di un cammino e omotopia)

Sia  $\gamma : I \rightarrow X$  un cammino in  $X$  e sia  $\varphi : I \rightarrow I$  una funzione continua tale che  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi(1) = 1$ .

Allora  $\gamma \circ \varphi : I \rightarrow X$  è un cammino in  $X$  e  $\gamma \sim \gamma \circ \varphi$ .

*Dimostrazione.* Basta mostrare che la funzione  $\varphi$  è omotopa all'identità  $id_I$ .  
L'omotopia è data dalla famiglia di funzioni

$$\varphi_s : I \rightarrow I : t \mapsto (1-s)t + s\varphi(t).$$

E poi boh.. buco. □

*Teorema di Poincarè.*

- (Associatività)

Siano  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \rightarrow X$  tre cammini chiusi in  $X$  con punto iniziale  $x_0$ . Si ha che

$$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3).$$

Poiché  $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$  si può vedere come una Riparametrizzazione del cammino  $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$  e quindi usare il lemma.

- (Unità)

L'elemento neutro del gruppo fondamentale è il cammino costante in  $x_0$ , che si denota con  $e : I \rightarrow x_0$ .

Infatti, per ogni cammino  $\gamma : I \rightarrow X$  si ha che  $\gamma * e$  è la Riparametrizzazione di  $\gamma$  secondo la mappa

$$\varphi : I \rightarrow I : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$

- (Inverso)

Sia

$$\gamma_s : I \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } 0 \leq t \leq s, \\ \gamma(s) & \text{se } s < t \leq 1. \end{cases}$$

La famiglia di cammini  $\{\gamma_s\}_{s \in I}$ , che non sono lacci, rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in  $x_0$  e il cammino  $\gamma$ , tuttavia **non rappresenta un'omotopia ad estremi fissi** poiché  $\gamma_s(1) \neq \gamma(1)$ . Vale però che  $\gamma_s(0) = \gamma(0)$  cioè il punto iniziale è fisso.

In modo analogo la famiglia di cammini data da

$$\gamma_s^{-1}(t) := \gamma_{1-s}(1-t)$$

rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in  $x_0$  e il cammino  $\gamma^{-1}$ , ma non ad estremi fissi.

A questo punto si verifica che la famiglia di **cammini chiusi**  $\{\gamma_s * \gamma_s^{-1}\}_{s \in I}$  rappresenta un'omotopia **ad estremi fissi** tra il cammino costante in  $x_0$  e il cammino  $\gamma * \gamma^{-1}$ .

Si fa in maniera analoga per mostrare che  $\gamma^{-1} * \gamma \sim e_{x_0}$  □

## Esempio 1.2.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Siano  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  due cammini chiusi in  $\mathbb{R}^n$  con punto iniziale  $x_0$ .  
La famiglia di cammini chiusi definita da

$$f_s : I \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$$

definisce un'omotopia ad estremi fissi tra  $\alpha$  e  $\beta$ .

Più in generale, l'omotopia definita è quella che per ogni punto dei cammini percorre al variare di  $s$  il segmento che unisce i due cammini in quell'istante  $t$ , e dunque la stessa argomentazione vale per dimostrare che:

$$\forall X \subset \mathbb{R}^n \text{ convesso,}$$

$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposizione 1.1** (Gruppo fondamentale di un connesso per archi).

*Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi, allora*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in X.$$

*In altre parole, il gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi non dipende dal punto iniziale scelto.*

*Dimostrazione.* Sia  $f : I \rightarrow X$  un cammino tale che  $f(0) = x_0$  e  $f(1) = x_1$ , che esiste poiché  $X$  è connesso per archi. Tale cammino induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali in  $x_0$  e  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [f * \gamma * f^{-1}] \end{aligned}$$

con inversa data da

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f^{-1} * \gamma * f]. \end{aligned}$$

Infatti, si verifica prima di tutto la buona definizione:

Se  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  sono due cammini chiusi in  $X$ , per il lemma della Riparametrizzazione, si ha che

$$f * \gamma_1 * f^{-1} \sim f * \gamma_2 * f^{-1}.$$

Inoltre, si verifica che l'immagine di un cammino chiuso in  $x_0$  è un cammino chiuso in  $x_1$  e viceversa. Si verifica che le funzioni appena definite sono effettivamente degli omomorfismi di gruppo poiché si ha che:

$$f * \gamma_1 * \gamma_2 * f^{-1} \sim (f * \gamma_1 * f^{-1}) * (f * \gamma_2 * f^{-1})$$

usando l'associatività che anche se non dimostrata vale anche per cammini chiusi.

Infine, si verifica facilmente che le due mappe sono una l'inversa dell'altra.  $\square$

**Osservazione 1.2.**

*L'isomorfismo tra i due gruppi fondamentali non è canonico, poiché dipende dalla scelta del cammino  $f$  tra i due punti  $x_0$  e  $x_1$ .*

**Definizione 1.4** (Spazio semplicemente connesso).

*Uno spazio topologico  $X$  si dice **semplicemente connesso** se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale, cioè*

$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in X.$$

**Osservazione 1.3.**

*Se  $X$  è semplicemente connesso e  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  sono due cammini allora*

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha(1) = \beta(1) \implies \alpha \sim \beta$$

*Dato che il cammino  $\alpha * \beta^{-1}$  è chiuso e il gruppo fondamentale è banale, quindi*

$$\alpha * \beta^{-1} \sim e_{x_0} \implies \alpha \sim \beta.$$

**Osservazione 1.4** (La funtorialità del gruppo fondamentale).

*Siano  $X, Y$  due spazi topologici e  $\varphi : X \rightarrow Y$  una mappa continua tale che  $\varphi(x_0) = y_0$  per due punti fissi  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ .*

*Allora  $\varphi$  induce un omomorfismo di gruppi*

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

*definito da*

$$\varphi_*([\gamma]) = [\varphi \circ \gamma]$$

*Si verifica facilmente che la mappa è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi.*

*Inoltre, vale che, se  $\varphi = \text{id}_X$  allora  $\varphi_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$  e se  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ .*

*Nel linguaggio delle categorie quindi si dice che*

$$\pi_1 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grp} : X \mapsto \pi_1(X, x_0)$$

*è un **functore** da **Top**, la categoria degli spazi topologici, a **Grp**, la categoria dei gruppi.*

**Proposizione 1.2.**

Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  è un omeomorfismo tra spazi topologici, allora

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

è un isomorfismo di gruppi, dove  $x_0 \in X$  e  $y_0 = \varphi(x_0) \in Y$ .

*Dimostrazione.*

Poiché  $\varphi$  è un omeomorfismo, essa è continua e ha un'inversa continua  $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ .

Cioè  $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_X$  e  $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_Y$ , quindi segue dalla funtorialità che

$$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)} \quad \text{e} \quad \varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}.$$

Quindi  $\varphi_*$  è un isomorfismo di gruppi, poiché ha un'inversa data da  $\varphi_*^{-1}$ . □

**Definizione 1.5** (Spazi omotopicamente equivalenti).

Due spazi topologici  $X$  e  $Y$  si dicono **omotopicamente equivalenti** se esistono due funzioni continue

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{e} \quad g : Y \rightarrow X$$

tali che:

- $g \circ f$  è omotopa all'identità su  $X$ ;
- $f \circ g$  è omotopa all'identità su  $Y$ .

Si denota con  $X \simeq Y$  se  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti.

**Esempio 1.3.**

1.  $\mathbb{R}^n$  è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè si dice che  $\mathbb{R}^n$  è **contraibile**. Infatti sia  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  la funzione costante in 0, che è continua. e sia  $\psi : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  anch'essa continua.

Si ha che  $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\{0\}}$ , mentre  $\psi \circ \varphi$  è omotopa all'identità su  $\mathbb{R}^n$  tramite l'omotopia definita da

$$H : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (s, x) \mapsto sx.$$

2.  $S^n$  è omotopicamente equivalente a  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$   
Infatti se  $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  è l'inclusione di  $S^n$  in  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  e

$$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

Si ha che  $i \circ \psi = \text{id}_{S^n}$  e  $\psi \circ i \sim \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$  tramite l'omotopia

$$H : I \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : (s, x) \mapsto (1-s)x + s \frac{x}{\|x\|}.$$

3. Il Nastro di Möbius è omotopicamente equivalente al cerchio  $S^1$ .  
Infatti, sia  $M$  il Nastro di Möbius e sia  $\varphi : M \rightarrow S^1$  la proiezione che manda ogni punto del nastro sul suo bordo. Si ha che  $\varphi$  è continua e suriettiva.  
Infatti se consideriamo il quadrato  $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , tale spazio è omotopicamente equivalente al segmento  $[-1, 1]$  tramite l'inclusione del segmento nel quadrato e la proiezione naturale del quadrato sul segmento. Identificando i lati opposti del quadrato in modo da ottenere il Nastro di Möbius, si ha che la proiezione del quadrato sul segmento induce una mappa continua e suriettiva dal Nastro di Möbius al cerchio, con omotopie che passano al quoziente.

**Teorema 1.2.** (Spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppo fondamentale isomorfo)

Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici **connessi per archi** omotopicamente equivalenti, allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

per ogni coppia di punti fissi  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ .

**Lemma 1.3.**

Siano  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  due funzioni continue **omotope** tra spazi topologici e siano  $x_0 \in X$ .  
Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) & \\ \varphi_{0*} \nearrow & \downarrow \tau_f & \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \\ \varphi_{1*} \searrow & & \end{array}$$

dove  $\tau_f : \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_1(x_0))$  è l'isomorfismo indotto dal cammino  $f : I \rightarrow Y : s \mapsto \varphi_s(x_0)$  e  $\{\varphi_s \mid s \in I\}$  è l'omotopia tra  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$ .

*Dimostrazione.*

Si consideri la mappa

$$\tau_f^{-1} := \tau_{f^{-1}} : \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) : g_Y \mapsto f * g_Y * f^{-1}.$$

Al variare di  $s \in I$  si ha che

$$f_s : I \rightarrow Y : t \mapsto f(st)$$

rappresenta un'omotopia tra il cammino  $f_0 : I \rightarrow \{\varphi_0(x_0)\}$  e il cammino  $f$ .

Quindi, se ora si considera  $g_X$  un cammino chiuso in  $x_0 \in X$ , allora la mappa

$$I \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) : s \mapsto f_s * \varphi_0(g_X) * f_s^{-1}$$

induce un'omotopia tra il cammino chiuso  $\varphi_0(g_X)$  e il cammino chiuso  $f(\varphi_1(g_X))$ , dunque vale che

$$\varphi_{0*}(g_X) = \tau_f(\varphi_{1*}(g_X)).$$

□

*del teorema.*

Siano  $\varphi : X \rightarrow Y$  e  $\psi : Y \rightarrow X$  le funzioni continue che definiscono l'equivalenza omotopica tra  $X$  e  $Y$ .  
Grazie al lemma precedente, dato che vale  $\psi \circ \varphi \sim \text{id}$  si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi_1(X, (\psi \circ \varphi)(x_0)) \\ & \searrow \text{id} & & \downarrow \tau_f & \\ & & & \cong & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Cioè vale che  $\tau_f \circ \psi_* \circ \varphi_* = \text{id}$ , quindi  $\psi_* \circ \varphi_* = \tau_f^{-1}$ , ma se la composizione di due mappe è bigettiva allora la prima  $\varphi_*$  è iniettiva e la seconda  $\psi_*$  è suriettiva, ragionando in maniera analoga per il verso opposto si ha che  $\varphi_* \circ \psi_* = \tau_f$  e quindi  $\psi_*$  è iniettiva e  $\varphi_*$  è surgettiva.

Si conclude quindi che  $\varphi_*$  e  $\psi_*$  sono isomorfismi di gruppi.

□

### 1.3 Primi gruppi fondamentali

Da questo momento in poi, se  $X$  è uno spazio topologico connesso per archi, si denota con  $\pi_1(X)$  il gruppo fondamentale di uno spazio topologico  $X$  in un punto fissato.

**Teorema 1.3** (Gruppo fondamentale del cerchio).

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Ed il cammino chiuso  $t \mapsto e^{2\pi i t}$  rappresenta il generatore del gruppo fondamentale  $\pi_1(S^1, 1)$ .

**Definizione 1.6** (Mappa esponenziale).

Si definisce la mappa

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$$

**Lemma 1.4** (Sollevamento di un cammino di  $S^1$  in  $\mathbb{R}$ ).

1. Per ogni cammino chiuso  $f : I \rightarrow S^1$  con  $f(0) = f(1)$ , **esiste ed unico** un cammino (in generale non chiuso)  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  detto **sollevamento di  $f$  in  $\mathbb{R}$**  tale che

$$\tilde{f}(0) = 0 \quad e \quad \rho \circ \tilde{f} = f.$$

Il terminale mi dice di aver committato, ma su github la repository non sembra essere commi  
Ovvero il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ & \searrow f & \downarrow \rho \\ & & S^1 \end{array}$$

2. Inoltre se  $f_0, f_1$  sono due cammini chiusi omotopi allora

$$\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1) \in \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione.* (Lemma  $\implies$  Teorema)

Dal lemma segue che la mappa:

$$\Phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z} : [f] \mapsto \tilde{f}(1)$$

Il terminale mi dice di aver committato, ma su github la repository non sembra essere commi è ben definita, ed inoltre induce un omomorfismo di gruppi, poiché

$$\Phi([\gamma_1 * \gamma_2]) = \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(1) = \Phi([\gamma_1]) + \Phi([\gamma_2]).$$

. Si dimostra ora la surgettività di  $\Phi$ , infatti dato il cammino chiuso  $f_1 : I \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$ , si ha che

$$\Phi([f_1^n]) = n\tilde{f}_1(1) = n.$$

Infine, si verifica che il nucleo di  $\Phi$  è l'insieme dei cammini chiusi omotopi al cammino costante in 1, dato che se  $f : I \rightarrow S^1$  è un cammino chiuso tale che  $\tilde{f}(1) = 0$ , si ha che  $\tilde{f}$  è un cammino chiuso in  $\mathbb{R}$  che parte da 0 e torna a 0, quindi poiché  $\mathbb{R}$  è semplicemente connesso, esiste un'omotopia  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  da  $\tilde{f}$  al cammino costante in 0. Ma a questo punto si ha che  $\rho \circ H$  è un'omotopia da  $f$  al cammino costante in 1, quindi  $f$  è omotopo al cammino costante in 1.  $\square$

*Dimostrazione.* (del teorema)

OK LA DIMOSTRAZIONE DI QUESTO FATTO FATTA DA TAMAS È RIDICOLA, MEGLIO FARE QUELLA PIÙ GENERALE DI FRIGERIO QUANDO SARÀ POI

1. si consideri il ricoprimento di aperti di  $S^1$  dato da due aperti  $U_0, U_1$ , archi che si intersecano in due componenti connesse per archi di  $S^1$ , una che contiene 1 e l'altra che contiene  $-1$ .

DISEGNO DA FARE

Considero le componenti connesse per archi di  $\rho^{-1}(U_1)$ , che formano un ricoprimento di aperti per  $\rho^{-1}(U_1)$ . La mappa  $\rho$  induce un omeomorfismo  $\rho|_{\rho^{-1}(U_1)} : \rho^{-1}(U_1) \rightarrow U_1$  (si vedrà che è un rivestimento di  $U_1$ ).

Inoltre, le componenti connesse per archi di  $f^{-1}(U_0), f^{-1}(U_1)$  formano un ricoprimento di aperti per  $I$ .

L'intervallo  $I$  è uno spazio metrico compatto, e dunque ammette un numero di Lebesgue.

Siano quindi  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$  i punti di  $I$  tali che ciascun intervallo della  $[t_i, t_{i+1}]$  è interamente contenuto in uno ed uno solo tra  $f^{-1}(U_0)$  e  $f^{-1}(U_1)$  e inoltre  $t_i \in f^{-1}(U_0) \cap f^{-1}(U_1) \quad \forall i$ .

$\square$

**Corollario 1.1.**

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(D^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$$

In particolare  $D^2 \setminus \{0\}$  non è omotopicamente equivalente a  $D^2$  (e quindi nemmeno omeomorfo).

**Definizione 1.7** (Retrazione).

Sia  $Y \subset X$  un sottospazio topologico. Si dice che una mappa continua  $r : X \rightarrow Y$  è una *retraazione* se vale

$$r \circ i = \text{id}_Y$$

dove  $i : Y \hookrightarrow X$  è l'inclusione di  $Y$  in  $X$ .

In altre parole,  $r$  è una retrazione se è continua e manda ogni punto di  $Y$  su se stesso.

Si dice che  $Y$  è **retratto** in  $X$  se esiste una retrazione da  $X$  a  $Y$ .

**Esempio 1.4.** 1. In ogni spazio topologico  $X$  ogni punto  $x_0 \in X$  è un retratto di  $X$ .

2. Il segmento  $I = [-1, 1]$  è un retratto di  $\bar{D}^2 = \bar{B}(0, 1)$ , infatti la mappa

$$r : \bar{D}^2 \rightarrow I : (x, y) \mapsto x$$

è una retrazione, poiché  $r$  manda ogni punto del segmento su se stesso.

**Lemma 1.5** (Retrazione e gruppo fondamentale).

Sia  $Y \subset X$  un retratto di  $X$  e sia  $x_0 \in Y$ . Allora la mappa indotta dall'inclusione naturale

$$i_* : \pi_1(Y, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

è un omomorfismo di gruppi **iniettivo**

*Dimostrazione.*

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(Y, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(Y, x_0) \\ & & \searrow \text{id} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

Dunque  $r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(Y, x_0)}$ , quindi  $i_*$  è iniettiva perché ha inversa sinistra. □

**Corollario 1.2.**

$S^1$  non è un retratto di  $\bar{D}^2$ .

*Dimostrazione.*

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\bar{D}^1, 1) \cong \{1\}$$

e quindi  $i_*$  non è iniettiva, perché è forzata ad essere banale. □

**Teorema 1.4** (Brouwer).

Ogni applicazione continua  $f : D^2 \rightarrow D^2$  ammette un punto fisso.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è per assurdo.

Si supponga che per ogni punto  $x \in D^2$  si ha che  $f(x) \neq x$ .

Consideriamo la mappa continua

$$r : D^2 \rightarrow S^1 : x \mapsto \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}.$$

Questa mappa associa ad ogni punto  $x \in D^2$  un punto sulla circonferenza unitaria  $S^1$ , che rappresenta la direzione del vettore che punta da  $x$  a  $f(x)$ .

Una tale mappa sarebbe una retrazione del disco unitario  $D^2$  su  $S^1$ , poiché ogni punto di  $S^1$  sarebbe raggiunto da un punto di  $D^2$  che non si mappa su se stesso. **Vorrei metterci il fulmine** □

**Teorema 1.5** (Fondamentale dell'algebra).

Ogni  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  polinomio di grado  $n \geq 1$  ammette almeno una radice complessa.

*Dimostrazione.*

Si supponga  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ , allora  $\forall r > 0$  la mappa

$$f_r(t) := \frac{f(r \cos(2\pi t) + ir \sin(2\pi t))}{|f(r \cos(2\pi t) + ir \sin(2\pi t))|}$$



definisce un cammino chiuso in  $I \rightarrow S^1$  che parte da 1.

La famiglia di cammini chiusi  $\{f_r | r \in I\}$  rappresenta un'omotopia tra il cammino costante  $f_0 : I \rightarrow \{1\}$  e il cammino chiuso  $f_1$ .

Componendo inoltre con la mappa  $I \rightarrow [0, r] : s \rightarrow sr$  otteniamo un'omotopia ad estremi fissi tra il cammino costante e il cammino chiuso  $f_r$ .

Quindi  $[f_r^0] = 0 \in \mathbb{Z}$ . Vogliamo ora dimostrare che  $[f_r^1] \neq 0 \in \mathbb{Z}$  per ogni  $r > 0$  e raggiungere una contraddizione.

Sia ora il polinomio

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

e per  $s \in I$  si consideri

$$f_r^s(z) = z^n + s(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0).$$

Se  $r > \max\{1, \sum |a_i|\}$  e  $|z| = r$ , allora

$$|z^n| = r^n > s \left( \sum |a_i| \right) |z^{n-1}| \geq |s(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)|$$

e quindi poiché vi è il maggiore stretto se  $|z| = r$ ,  $f_r^s(z) \neq 0$  per ogni  $s \in I$ .

In particolare vale

$$f_r^s(r \cos 2\pi t + ir \sin(2\pi t)) \neq 0$$

E quindi è ben definita la famiglia di cammini chiusi

$$f_r^s : I \rightarrow S^1 : t \mapsto \frac{f_r^s(r \cos 2\pi t + ir \sin(2\pi t))}{|f_r^s(r \cos 2\pi t + ir \sin(2\pi t))|}.$$

che da un'omotopia tra  $f_r^0$  e  $f_r^1$ .

$f_r^0 = z^n$  e quindi  $f_r^0(t) = \cos(2n\pi t) + i \sin(2n\pi t)$  ma si avrebbe quindi che la classe di omotopia di  $f_r^0$  è  $n \in \mathbb{Z}$ , ma ciò contraddice il fatto che  $[f_r^0] = 0 \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

## 1.4 Teorema di Seifert-Van Kampen e richiami di teoria dei gruppi

**Teorema 1.6** (debole di Seifert-van Kampen).

Siano  $X = X_1 \cup X_2$  dove  $X_1, X_2 \subset X$  sono aperti. Siano  $i_1 : X_1 \hookrightarrow X$  e  $i_2 : X_2 \hookrightarrow X$  le inclusioni naturali.

Si suppongano  $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$  connessi per archi allora:

$$\pi_1(X, x_0) \text{ è generato da } i_{1*}(\pi_1(X_1, x_0)) \text{ e } i_{2*}(\pi_1(X_2, x_0)) \text{ dove } x_0 \in X_1 \cap X_2.$$

*Dimostrazione.*

$\square$

**Corollario 1.3.**

$S^n$  è semplicemente connesso per ogni  $n \geq 1$ .

**Corollario 1.4.**

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  è omotopicamente equivalente a  $S^{n-1}$  per ogni  $n \geq 2$ .

Quindi  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$  e  $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \{1\}$  per ogni  $n \geq 2$

**Corollario 1.5.**

$\mathbb{R}^2$  non è omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $n \geq 3$ .

**Teorema 1.7.** (di Seifert-van Kampen)

Siano  $X = X_1 \cup X_2$  dove  $X_1, X_2 \subset X$  sono aperti.

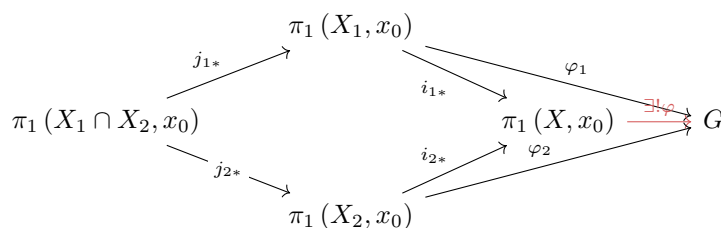
Siano  $j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1, j_2 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2, i_1 : X_1 \hookrightarrow X, i_2 : X_2 \hookrightarrow X$  le inclusioni naturali.

Si suppongano  $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$  connessi per archi allora

$\forall G$  gruppo, e mappe  $\varphi_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \rightarrow G$  e  $\varphi_2 : \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow G$  esiste un'unica mappa

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$$

tale che il seguente diagramma commuta:



Il teorema di Van-Kampen necessita di un richiamo di teoria dei gruppi, che non è stato ancora fatto.

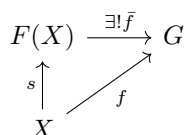
**Definizione 1.8** (Gruppo libero generato da un insieme).

Dato un insieme  $X$  si indica  $F(X)$  il **gruppo libero generato da  $X$**  il dato di un gruppo  $F(X)$  ed una mappa iniettiva  $s : X \hookrightarrow F(X)$  tale che la seguente proprietà universale sia soddisfatta:

Per ogni gruppo  $G$  e per ogni mappa iniettiva  $f : X \hookrightarrow G$  esiste un unico omomorfismo di gruppi

$$\bar{f} : F(X) \rightarrow G$$

tale che il seguente diagramma commuta:



**Proposizione 1.3** (Unicità del gruppo libero).

Dalla definizione di gruppo libero via proprietà universale ne segue l'unicità a meno di isomorfismo di gruppi.

*Dimostrazione.* Facile provaci un attimo

□

**Proposizione 1.4** (Costruzione del gruppo libero generato da un insieme).

Si costruisce ora  $F(X)$  nel seguente modo:

Sull'insieme

$$F(X) = \{w \in X^* \mid w \text{ parola su } X\} / \sim$$

dove una parola  $w \in X$  è una sequenza un prodotto formale tra simboli della forma

$$w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$$

con  $x_i \in X$  e  $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ , e la relazione di equivalenza  $\sim$  identifica due parole se e solo se sono uguali a meno di semplificare i fattori di forma  $x_i^{\epsilon_i} x_i^{-\epsilon_i}$ .

L'operazione di gruppo su  $F(X)$  è data dalla concatenazione formale di parole.

Tale costruzione verifica la proprietà universale del gruppo libero generato da  $X$ .

*Dimostrazione.*

Per ogni mappa  $f : X \hookrightarrow G$  in un gruppo  $G$  si definisce la mappa

$$\bar{f} : F(X) \rightarrow G : x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} \mapsto f(x_1)^{\epsilon_1} f(x_2)^{\epsilon_2} \dots f(x_n)^{\epsilon_n}$$

□

**Lemma 1.6.**

Ogni gruppo  $G$  è il quoziente di un gruppo libero.

*Dimostrazione.*

Se  $\{g_i \mid i \in I\}$  si considera  $X = \{x_i \mid i \in I\}$  e la mappa

$$\Phi : F(X) \rightarrow G : x_i \rightarrow g_i \quad \text{assegnamento per generatori}$$

se i  $g_i$  sono un insieme di generatori per  $G$  allora  $\Phi$  è surgettiva e si conclude per il primo teorema di omomorfismo tra gruppi.

□

**Definizione 1.9** (Presentazione di un gruppo).

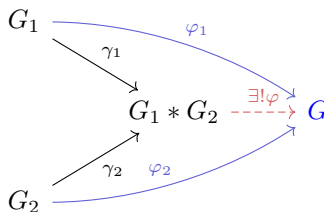
Data  $\Phi$  come sopra, sia  $N := \ker \Phi$  si può considerare un **sistema di generatori per  $N$  come sottogruppo normale**  $\{p_j \mid j \in J\}$ , la **presentazione tramite generatori e relazioni di  $G$**  è la seguente:

$$G := \langle g_i, i \in I \mid p_j, j \in J \rangle$$

**Definizione 1.10** (Prodotto libero di gruppi).

Siano  $G_1, G_2$  due gruppi, si definisce il **prodotto libero di gruppi**  $G_1 * G_2$  il dato di un gruppo  $G_1 * G_2$  e mappe  $\gamma_1 : G_1 \rightarrow_1 *G_2$ ,  $\gamma_2 : G_2 \rightarrow_1 *G_2$  che soddisfano la seguente proprietà universale:

Per ogni altro gruppo  $G$  e mappe  $\phi_1 : G_1 \rightarrow G$  e  $\phi_2 : G_2 \rightarrow G$  esiste un'unica mappa  $\phi : G_1 * G_2 \rightarrow G$  tale che il seguente diagramma commuti:



In teoria delle categorie tale costruzione è detta **coprodotto**.

**Proposizione 1.5** (Unicità del prodotto libero di gruppi).

Dalla definizione via proprietà universale segue che il prodotto libero è unico a meno di isomorfismo di gruppi.

*Dimostrazione.* Da fare, facile □

**Proposizione 1.6** (Costruzione del prodotto libero tra gruppi). Siano

$$G_1 = \langle g_i^1, i \in I_1 \mid p_j^1, j \in J_1 \rangle \quad G_2 = \langle g_i^2, i \in I_2 \mid p_j^2, j \in J_2 \rangle$$

le due presentazioni dei gruppi, allora la presentazione del prodotto libero è data da:

$$G_1 * G_2 = \langle \{g_i^1\} \cup \{g_i^2\} \mid \{p_j^1\} \cup \{p_j^2\} \rangle$$

**Osservazione 1.5.**

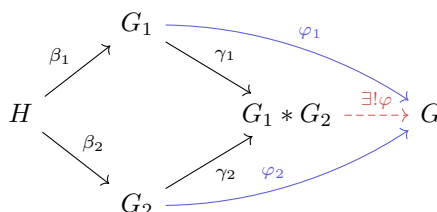
1. Il gruppo libero è generato dalle immagini dei generatori dei gruppi fattori.
2. Gli elementi di  $G_1 * G_2$  sono parole in  $G_1 \cup G_2$
3. Se  $X_1, X_2$  sono due insiemi allora

$$F(X_1 \cup X_2) = F(X_1) * F(X_2)$$

**Definizione 1.11** (Prodotto amalgamato di gruppi).

Siano  $G_1, G_2$  due gruppi e  $H$  un terzo gruppo, si definisce il **prodotto amalgamato di gruppi su  $H$**   $G_1 *_H G_2$  il dato di un gruppo  $G_1 *_H G_2$  e mappe  $\beta_1 : H \rightarrow G_1$ ,  $\beta_2 : H \rightarrow G_2$ ,  $\gamma_1 : G_1 \rightarrow_1 *G_2$ ,  $\gamma_2 : G_2 \rightarrow_1 *G_2$  che soddisfano la seguente proprietà universale:

Per ogni altro gruppo  $G$  e mappe  $\phi_1 : G_1 \rightarrow G$  e  $\phi_2 : G_2 \rightarrow G$  esiste un'unica mappa  $\phi : G_1 * G_2 \rightarrow G$  tale che il seguente diagramma commuti:



**Proposizione 1.7** (Costruzione del prodotto amalgamato se  $H$  è un gruppo libero).

*Siano*

$$G_1 = \langle g_i^1, i \in I_1 \mid p_j^1, j \in J_1 \rangle \quad G_2 = \langle g_i^2, i \in I_2 \mid p_j^2, j \in J_2 \rangle$$

$$H = \langle g_i^1, i \in I_1 \rangle \text{ che non ha relazioni perché libero}$$

*allora*

$$G_1 *_H G_2 = \langle \{g_i^1\} \cup \{g_i^2\} \mid \{p_j^1\} \cup \{p_j^2\} \cup \{\beta_1(h_i)\beta_2(h_i)^{-1}\} \rangle$$

## 2 Rivestimenti