

# Appunti di Topologia Algebrica

Simone Riccio

1 giugno 2025

## Indice

<b>1 Gruppo Fondamentale</b>	<b>1</b>
1.1 Motivazione . . . . .	1
<b>2 Rivestimenti</b>	<b>6</b>

## 1 Gruppo Fondamentale

### 1.1 Motivazione

Una delle motivazioni che porta a definire il gruppo fondamentale è la necessità di distinguere due spazi topologici a meno di omeomorfismo.

#### Esempio 1.1.

Si consideri il disco

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

Al variare di  $n$  naturale i  $D^n$  non sono intuitivamente omeomorfi, tuttavia dimostrarlo usando solo la topologia generale è difficile.

È semplice mostrare che  $D^1 \not\cong D^n$  per  $n \geq 2$ , usando l'insieme delle componenti connesse. Infatti, per ogni  $x \in D^n$  lo spazio topologico  $D^n \setminus \{x\}$  è connesso per ogni  $n \geq 2$ , mentre  $D^1 \setminus \{x\}$ , essendo il segmento  $[-1, 1]$  senza un punto, ha due componenti connesse.

Tale argomentazione non funziona già per provare a distinguere  $D^2$  dai  $D^n$  con  $n \geq 3$ . Introduciamo quindi il gruppo fondamentale, che permetterà in futuro di distinguerli tutti.

#### Definizione 1.1 (Omotopia).

Date due funzioni continue  $f, g : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici, si dice che  $f$  e  $g$  sono **omotope** se esiste una funzione

$$H : I \times X \rightarrow Y$$

**continua** e tale che:

- $H(0, x) = f(x)$  per ogni  $x \in X$ ;
- $H(1, x) = g(x)$  per ogni  $x \in X$ .
- $H(s, y) = H(s, x)$  per ogni  $s \in I$  e per ogni  $x, y \in X$  tali che  $f(x) = f(y)$ .

Si dice che  $H$  è un'**omotopia** tra  $f$  e  $g$  e si scrive

$$f \sim g.$$

Inoltre si può vedere un'omotopia come una famiglia di funzioni continue:

$$\{f_s : X \rightarrow Y\}_{s \in I} \quad \text{con } f_s(x) = H(s, x).$$

Che rappresentano una deformazione continua di  $f$  in  $g$ .

**Definizione 1.2** (Omotopia di cammini a estremi fissi).

Due cammini  $\gamma_0, \gamma_1 : I \rightarrow X$  si dicono **omotopi (a estremi fissi)** se esiste una funzione

$$H : I \times I \rightarrow X$$

**continua** e tale che:

- $H(0, t) = \gamma_0(t)$  per ogni  $t \in I$ ;
- $H(1, t) = \gamma_1(t)$  per ogni  $t \in I$ ;
- $H(s, 0) = H(s, 1)$  per ogni  $s \in I$ .

Si dice che  $H$  è un'**omotopia di cammini a estremi fissi** e si scrive

$$\gamma_0 \sim \gamma_1.$$

Infatti è facile verificare che l'essere omotopi a estremi fissi induce una relazione di equivalenza sull'insieme dei cammini in  $X$ .

**Definizione 1.3** (Giunzione di cammini).

Siano  $f, g : I \rightarrow X$  due cammini in  $X$  con  $f(1) = g(0)$ , allora la **giunzione** di  $f$  e  $g$  è il cammino

$$f * g : I \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

**Lemma 1.1** (Giunzione di cammini e omotopia).

Se  $f \sim f'$  e  $g \sim g'$ , allora  $f * g \sim f' * g'$ .

*Dimostrazione.* Sia  $H_f : I \times I \rightarrow X$  un'omotopia di  $f$  e  $f'$  e  $H_g : I \times I \rightarrow X$  un'omotopia di  $g$  e  $g'$ .

Definiamo l'omotopia

$$H : I \times I \rightarrow X : (s, t) \mapsto \begin{cases} H_f(2s, t) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ H_g(2s - 1, t) & \text{se } \frac{1}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

che risulta continua. Infatti la continuità di  $H_f$  e  $H_g$  implica la continuità di  $H$ , essendo le due funzioni definite su due intervalli disgiunti. Inoltre si verifica facilmente che  $H$  soddisfa le condizioni richieste.  $\square$

**Osservazione 1.1.**

Si noti che la giunzione di cammini non è definita su ogni coppia di cammini, ma solo su quelle che hanno il punto finale del primo uguale al punto iniziale del secondo. Tuttavia, se si considerano solo i cammini chiusi che **partono da uno stesso punto iniziale**, la giunzione è chiaramente sempre definita.

Da ora in poi gli spazi topologici considerati saranno sempre localmente connessi.

**Teorema 1.1** (Poincaré).

Se  $X$  uno spazio topologico e  $x_0 \in X$  un punto fisso.

Il prodotto dato dalla giunzione di cammini induce una struttura di gruppo sulle classi di omotopia dei cammini chiusi in  $X$  aventi punto iniziale  $x_0$ .

Tale gruppo è chiamato **gruppo fondamentale** di  $X$  in  $x_0$  e si denota con  $\pi_1(X, x_0)$ .

In tale gruppo l'elemento neutro è rappresentato dal cammino costante in  $x_0$  e l'inverso di un cammino  $\gamma$  è il cammino

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$$

che è l'inverso rispetto alla giunzione di cammini.

Per la dimostrazione del teorema di Poincaré ci basta dimostrare prima un lemma.

**Lemma 1.2.** (Riparametrizzazione di un cammino e omotopia)

Sia  $\gamma : I \rightarrow X$  un cammino in  $X$  e sia  $\varphi : I \rightarrow I$  una funzione continua tale che  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi(1) = 1$ .

Allora  $\gamma \circ \varphi : I \rightarrow X$  è un cammino in  $X$  e  $\gamma \sim \gamma \circ \varphi$ .

*Dimostrazione.* Basta mostrare che la funzione  $\varphi$  è omotopa all'identità  $id_I$ .  
L'omotopia è data dalla famiglia di funzioni

$$\varphi_s : I \rightarrow I : t \mapsto (1-s)t + s\varphi(t).$$

E poi boh.. buco. □

*Teorema di Poincarè.*

- (Associatività)

Siano  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \rightarrow X$  tre cammini chiusi in  $X$  con punto iniziale  $x_0$ . Si ha che

$$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3).$$

Poiché  $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$  si può vedere come una Riparametrizzazione del cammino  $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$  e quindi usare il lemma.

- (Unità)

L'elemento neutro del gruppo fondamentale è il cammino costante in  $x_0$ , che si denota con  $e : I \rightarrow x_0$ .

Infatti, per ogni cammino  $\gamma : I \rightarrow X$  si ha che  $\gamma * e$  è la Riparametrizzazione di  $\gamma$  secondo la mappa

$$\varphi : I \rightarrow I : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$

- (Inverso)

Sia

$$\gamma_s : I \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } 0 \leq t \leq s, \\ \gamma(s) & \text{se } s < t \leq 1. \end{cases}$$

La famiglia di cammini  $\{\gamma_s\}_{s \in I}$ , che non sono lacci, rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in  $x_0$  e il cammino  $\gamma$ , tuttavia **non rappresenta un'omotopia ad estremi fissi** poiché  $\gamma_s(1) \neq \gamma(1)$ . Vale però che  $\gamma_s(0) = \gamma(0)$  cioè il punto iniziale è fisso.

In modo analogo la famiglia di cammini data da

$$\gamma_s^{-1}(t) := \gamma_{1-s}(1-t)$$

rappresenta un'omotopia tra il cammino costante in  $x_0$  e il cammino  $\gamma^{-1}$ , ma non ad estremi fissi. A questo punto si verifica che la famiglia di **cammini chiusi**  $\{\gamma_s * \gamma_s^{-1}\}_{s \in I}$  rappresenta un'omotopia **ad estremi fissi** tra il cammino costante in  $x_0$  e il cammino  $\gamma * \gamma^{-1}$ .

Si fa in maniera analoga per mostrare che  $\gamma^{-1} * \gamma \sim e_{x_0}$  □

## Esempio 1.2.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Siano  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  due cammini chiusi in  $\mathbb{R}^n$  con punto iniziale  $x_0$ .  
La famiglia di cammini chiusi definita da

$$f_s : I \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$$

definisce un'omotopia ad estremi fissi tra  $\alpha$  e  $\beta$ .

Più in generale, l'omotopia definita è quella che per ogni punto dei cammini percorre al variare di  $s$  il segmento che unisce i due cammini in quell'istante  $t$ , e dunque la stessa argomentazione vale per dimostrare che:

$$\forall X \subset \mathbb{R}^n \text{ convesso,}$$

$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposizione 1.1** (Gruppo fondamentale di un connesso per archi).

*Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi, allora*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in X.$$

*In altre parole, il gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi non dipende dal punto iniziale scelto.*

*Dimostrazione.* Sia  $f : I \rightarrow X$  un cammino tale che  $f(0) = x_0$  e  $f(1) = x_1$ , che esiste poiché  $X$  è connesso per archi. Tale cammino induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali in  $x_0$  e  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [f * \gamma * f^{-1}] \end{aligned}$$

con inversa data da

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f^{-1} * \gamma * f]. \end{aligned}$$

Infatti, si verifica prima di tutto la buona definizione:

Se  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  sono due cammini chiusi in  $X$ , per il lemma della Riparametrizzazione, si ha che

$$f * \gamma_1 * f^{-1} \sim f * \gamma_2 * f^{-1}.$$

Inoltre, si verifica che l'immagine di un cammino chiuso in  $x_0$  è un cammino chiuso in  $x_1$  e viceversa. Si verifica che le funzioni appena definite sono effettivamente degli omomorfismi di gruppo poiché si ha che:

$$f * \gamma_1 * \gamma_2 * f^{-1} \sim (f * \gamma_1 * f^{-1}) * (f * \gamma_2 * f^{-1})$$

usando l'associatività che anche se non dimostrata vale anche per cammini chiusi.

Infine, si verifica facilmente che le due mappe sono una l'inversa dell'altra.  $\square$

**Osservazione 1.2.**

*L'isomorfismo tra i due gruppi fondamentali non è canonico, poiché dipende dalla scelta del cammino  $f$  tra i due punti  $x_0$  e  $x_1$ .*

**Definizione 1.4** (Spazio semplicemente connesso).

*Uno spazio topologico  $X$  si dice **semplicemente connesso** se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale, cioè*

$$\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\} \quad \forall x_0 \in X.$$

**Osservazione 1.3.**

*Se  $X$  è semplicemente connesso e  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  sono due cammini allora*

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha(1) = \beta(1) \implies \alpha \sim \beta$$

*Dato che il cammino  $\alpha * \beta^{-1}$  è chiuso e il gruppo fondamentale è banale, quindi*

$$\alpha * \beta^{-1} \sim e_{x_0} \implies \alpha \sim \beta.$$

**Osservazione 1.4** (La funtorialità del gruppo fondamentale).

*Siano  $X, Y$  due spazi topologici e  $\varphi : X \rightarrow Y$  una mappa continua tale che  $\varphi(x_0) = y_0$  per due punti fissi  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ .*

*Allora  $\varphi$  induce un omomorfismo di gruppi*

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

*definito da*

$$\varphi_*([\gamma]) = [\varphi \circ \gamma]$$

*Si verifica facilmente che la mappa è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi.*

*Inoltre, vale che, se  $\varphi = \text{id}_X$  allora  $\varphi_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$  e se  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ .*

*Nel linguaggio delle categorie quindi si dice che*

$$\pi_1 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grp} : X \mapsto \pi_1(X, x_0)$$

*è un **functore** da **Top**, la categoria degli spazi topologici, a **Grp**, la categoria dei gruppi.*

**Proposizione 1.2.**

Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  è un omeomorfismo tra spazi topologici, allora

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

è un isomorfismo di gruppi, dove  $x_0 \in X$  e  $y_0 = \varphi(x_0) \in Y$ .

*Dimostrazione.*

Poiché  $\varphi$  è un omeomorfismo, essa è continua e ha un'inversa continua  $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ .

Cioè  $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_X$  e  $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_Y$ , quindi segue dalla funtorialità che

$$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)} \quad \text{e} \quad \varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}.$$

Quindi  $\varphi_*$  è un isomorfismo di gruppi, poiché ha un'inversa data da  $\varphi_*^{-1}$ .  $\square$

**Definizione 1.5** (Spazi omotopicamente equivalenti).

Due spazi topologici  $X$  e  $Y$  si dicono **omotopicamente equivalenti** se esistono due funzioni continue

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{e} \quad g : Y \rightarrow X$$

tali che:

- $g \circ f$  è omotopa all'identità su  $X$ ;
- $f \circ g$  è omotopa all'identità su  $Y$ .

Si denota con  $X \simeq Y$  se  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti.

**Esempio 1.3.**

1.  $\mathbb{R}^n$  è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè si dice che  $\mathbb{R}^n$  è **contraibile**. Infatti sia  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  la funzione costante in 0, che è continua. e sia  $\psi : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  anch'essa continua.

Si ha che  $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\{0\}}$ , mentre  $\psi \circ \varphi$  è omotopa all'identità su  $\mathbb{R}^n$  tramite l'omotopia definita da

$$H : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (s, x) \mapsto sx.$$

2.  $S^n$  è omotopicamente equivalente a  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$   
Infatti se  $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  è l'inclusione di  $S^n$  in  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  e

$$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

Si ha che  $i \circ \psi = \text{id}_{S^n}$  e  $\psi \circ i \sim \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$  tramite l'omotopia

$$H : I \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : (s, x) \mapsto (1-s)x + s \frac{x}{\|x\|}.$$

3. Il Nastro di Möbius è omotopicamente equivalente al cerchio  $S^1$ .

Infatti, sia  $M$  il Nastro di Möbius e sia  $\varphi : M \rightarrow S^1$  la proiezione che manda ogni punto del nastro sul suo bordo. Si ha che  $\varphi$  è continua e suriettiva.

Infatti se consideriamo il quadrato  $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , tale spazio è omotopicamente equivalente al segmento  $[-1, 1]$  tramite l'inclusione del segmento nel quadrato e la proiezione naturale del quadrato sul segmento. Identificando i lati opposti del quadrato in modo da ottenere il Nastro di Möbius, si ha che la proiezione del quadrato sul segmento induce una mappa continua e suriettiva dal Nastro di Möbius al cerchio, con omotopie che passano al quoziente.

**Teorema 1.2.** (Spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppo fondamentale isomorfo)

Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici **connessi per archi** omotopicamente equivalenti, allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

per ogni coppia di punti fissi  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ .

**Lemma 1.3.**

Siano  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  due funzioni continue tra spazi topologici e siano  $x_0 \in X$ .

Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) & \\
 \varphi_{0*} \nearrow & \downarrow \tau_f & \\
 \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \\
 \varphi_{1*} \searrow & & 
 \end{array}$$

dove  $\tau_f : \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_1(x_0))$  è l'isomorfismo indotto dal cammino  $f : I \rightarrow Y : s \mapsto \varphi_s(x_0)$  e  $\{\varphi_s | s \in I\}$  è l'omotopia tra  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$ .

*Dimostrazione.*

Si lavorerà con

$$\tau_f^{-1} = \tau_{f^{-1}} : \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) : g_Y \mapsto f * g_Y * f^{-1}.$$

Inoltre si definisce, con  $s \in I$  fisso la mappa

$$f_s : I \rightarrow Y : t \mapsto f(st)$$

che è una riparametrizzazione di  $f$  ristretta a  $[0, s]$ , è facile verificare che  $f_0 : I \rightarrow \varphi_0(x_0)$  mentre  $f_1 = f$  e dunque  $f$  è omotopa al cammino costante tramite l'omotopia data dalla famiglia  $\{f_s\}_{s \in I}$ .

Sia ora  $g_X$  un cammino chiuso in  $x_0$ , per quanto detto prima vale che la mappa

$$I \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) : s \mapsto f_s * \varphi_s(g_X) * f_s^{-1}$$

induce un'omotopia tra  $\varphi_0(g_X)$  e  $f * \varphi_1(g_X) * f^{-1}$ , e si è dunque mostrato che

$$[\varphi_0(g_X)] = \tau_f^{-1}(\varphi_{1*}[g_X]).$$

□

*Dimostrazione.*

□

## 2 Rivestimenti