V101

Das Trägheitsmoment

Sophia Brechmann
sophia.brechmann@tu-dortmund.de

Simon Kugler
simon.kugler@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.11.2023 Abgabe: 05.12.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

[1] Ziel des Versuches ist es, das Trägheitsmoment verschiedener Körper experimentell zu bestimmen, teilweise unter Benutzung des Satz von Steiner.
Die, für den Versuch, wichtigste Größe ist das Trägheitsmoment, welche sich durch die Masse m eines Körpers sowie den Abstand r seiner Ausdehnung zur Drehachse zusammensetzt. Je schwerer die Massen sind und je größer der Abstand zur Drehachse ist, desto größer ist das Trägheitsmoment. Dies wird für eine diskrete Massenverteilung durch

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i$$

beschrieben. Für kontinuierliche Verteilungen lässt sich I durch

$$I = \int r^2 \, dm$$

ausdrücken. Für nur eine Masse mit homogener Masservetilung und einem konstanten mittleren Abstand r zur Drehachse gilt damit

$$I = mr^2 \,. \tag{1}$$

Häufig gebrauchte Trägheitsmomente sind die eines langen dünnen Stabes, eines Zylinders oder auch einer Kugel. Langer dünner Stab:

$$I_{\mathrm{St}} = \frac{m \cdot I^2}{12}. \tag{2}$$

Kugel:

$$I_{\mathrm{K}} = \frac{2}{5} m \cdot R^2. \tag{3}$$

Für einen Zylinder, dessen Drehachse durch die Deckelflächen verläuft,

$$I_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot R^2}{2} \,. \tag{4}$$

Für einen Zylinder, dessen Drehachse durch den Schwerpunkt parallel zu den Deckelflächen verläuft,

$$I_{\mathrm{Zh}} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \,. \tag{5}$$

Liegt ein Problem vor, bei dem die Drehachse, für welche das Trägheitsmoment bestimmt werden soll, nicht durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft, kann der Satz von Steiner genutzt werden,

$$I = I_S + m \cdot a^2 \,. \tag{6}$$

I ist das Trägheitsmoment um die verschobene, aber zur ursprünglichen Achse parallelen Achse, m die Masse des Körpers. I_S ist das schon bestimmte Trägheitsmoment um die Drehachse und a beschreibt die Länge zwischen beiden Achsen.
Das Drehmoment $\vec{M}$ setzt sich aus einer Kraft $\vec{F}$ die im Abstand $\vec{r}$ am Rotationskörper angreift zusammen:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}. \tag{7}$$

Wird ein sogenanntes „schwingungsfähiges“ System um einen Winkel φ ausgelenkt, stellt sich eine Schwingung mit der Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{8}$$

D ist hierbei die Winkelrichtgröße und lässt sich durch

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi} \tag{9}$$

beschreiben. Damit lässt sich ebenso das Drehmoment M berechnen

$$M = D \cdot \varphi. \tag{10}$$

Diese Beschreibung gilt nur für kleine Auslenkungen φ.

2 Durchführung

Die Apparatur besteht aus einem Fuß mit drehbarer Scheibe, welche durch eine Feder in einer bestimmten Position gehalten wird. Wird die Scheibe um einen Winkel φ gedreht, so wirkt proportional zur Auslenkung eine rückstellende Kraft. Mit dem Drehmechanismus ist eine Aufnahme für Stangen fest verbunden, um entweder senkrecht oder waagerecht eine Stange festzustecken. Zu Anfang des Versuches wurde die Winkelrichtgröße D dieser Apparatur bestimmt. Hierzu wird waagerecht eine Stange eingesteckt, dessen Mittelpunkt in der Mitte der Scheibe liegt. Dann wird die Stange um 10 verschiedene Winkel bis zu 120° ausgelenkt und mit einem Federkraftmesser die dafür benötigte Kraft benötigt. Der Federkraftmesser wird in einem Abstand von 20 cm zum Mittelpunkt angesetzt. Die nächste zu bestimmende Messgröße ist das Eigenträgheitsmoment der Drillachse I_D. Dazu werden zwei Gewichte, dessen Gewicht und Maße vorher gemessen werden, auf der Stange so befestigt, dass sie jeweils den gleichen Abstand zum Mittelpunkt haben. Für 10 verschiedene Abstände zum Mittelpunkt der Gewichte wird für eine Startauslenkung von 90° die Schwingungsdauer T für 5 Schwingungen gemessen. Es wird im ganzen Versuch die 5-fache Dauer gemessen, da dies den Fehler bei sehr kleinen Schwingungsdauern minimiert.

2.1 Trägheitsmoment einer Kugel

Zum Bestimmen des Trägheitsmoment einer Kugel wird diese zunächst vermessen und gewogen. Dann wird sie über einen mittig angebrachten Stab auf die Apparatur gesteckt. Sie wird 10 mal um einen Winkel von 90° ausgelenkt um dann jeweils wieder die 5-fache Schwingungsdauer zu messen.

2.2 Trägheitsmoment eines Zylinders

Um das Trägheitsmoment eines Zylinders zu bestimmen, wird exakt analog zum Verfahren bei der Kugel vorgegangen.

2.3 Trägheitsmoment einer Puppe

Zunächst wird auch die Puppe wieder vermessen. Es werden Maße der Arme, Beine, des Kopfes und des Torsos gemessen. Die Höhe bzw. Länge wird nur einmal gemessen, der Durchmesser der Arme, Beine und des Torsos zehn mal. Der Durchmesser des Kopfes wird 5 mal gemessen. Zum Messen aller Größen wird eine Schieblehre verwendet. Das Tägheitsmoment der Puppe wird mit zwei unterschiedlichen Haltungen der Puppe bestimmt. Sie ist so befestigt, als würde sie aufrecht auf der Drillachse stehen. In der ersten Position sind die Arme zur Seite ausgestreckt. In der zweiten Haltung sind dann zusätzlich die Beine nach vorn gestreckt. Die Schwingungsdauer wird insgesamt 20 mal gemessen. Jeweils 10 pro Haltung sowie jeweils 5 mal für die Auslenkung von 90 und 120°.

3 Vorbereitung

Es wird für 10 Abstände r zwischen 5 und 25 cm das Drehmoment auf eine Stange berechnet. Einmal wird die Kraft im rechten Winkel angesetzt, einmal im 45°-Winkel.

Senkrecht:

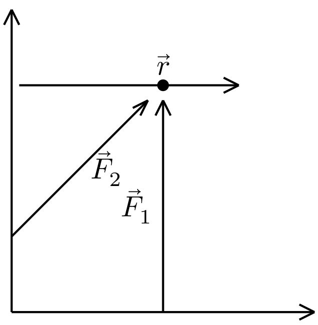
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = F \cdot r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

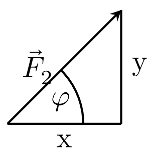
$$\Rightarrow |\vec{M}| = F \cdot r$$

45°-Winkel:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi F) \\ \sin(\varphi F) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot F \cdot \sin(\varphi) \\ -r \cdot F \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{M}| = Fr \cdot \sin(\varphi)$$





$$\sin(\varphi) = \frac{y}{|\vec{F}_2|}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{|\vec{F}_2|}$$

Tabelle 1: Drehmoment für zwei verschiedene Winkel und zehn verschiedene Radien und eine Kraft von 0,1 N.

r / cm	M für $\vec{F} \perp \vec{r}$ / J	M für $\angle(\vec{r}, \vec{F}) = 45°$ / J
5	0,5	0,35
7	0,7	0,49
9	0,9	0,63
11	1,1	0,78
13	1,3	0,92
15	1,5	1,06
17	1,7	1,20
19	1,9	1,34
21	2,1	1,48
23	2,3	1,63
25	2,5	1,77

4 Auswertung

Zur Berechnung des Mittelwerts $\overline{x}$ einer Größe mit n Messungen der Größe x wird die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_n, \tag{11}$$

verwendet. Die dazu gehörige Standardabweichung σ ergibt sich über

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_n - \overline{x})^2}. \tag{12}$$

Zum Berechnen der Fehler wird die Gaußsche Fehlerfortpflanzung genutzt

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\mathrm{k}} \right)^2 (\Delta x_\mathrm{k})^2}\,. \tag{13}$$

Dabei ist f die zur Berechnung der Größe gegebene Formel und x_k dessen Argumente. Δx_k ist der jeweilige Fehler der einzelnen Argumente.
Mittelwerte, Standardabweichungen und sonstige Fehler werden für diesen Versuch alle mit Python bzw. numeric python berechnet.

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße und des Eigenträgheitmoments

Zunächst wird aus den Messwerten in Tabelle 2 die Winkelrichtgröße D bestimmt.

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung der Winkelrichtgröße.

$\phi\,/°$	$F\,/\mathrm{N}$
110	0.21
100	0.19
90	0.188
80	0.168
70	0.147
60	0.118
50	0.090
40	0.060
30	0.038
20	0.016

Hierfür werden die Drehwinkel ϕ zu nächst von ° in *rad* umgerechnet, was mit $\phi_{\text{neu}} = {}^{\phi\pi}/_{180}$ durchgeführt wird. D wird daraufhin mittels

$$D = \frac{FR}{\phi_{\text{neu}}} \tag{14}$$

bestimmt. Dabei ist F die gemessene Kraft und R der Radius, an dem der Kraftmesser befestigt wird. In diesem Versuch wird $R = 0{,}2\,\mathrm{m}$ gewählt. Es werden die Winkelrichtgrößen aller Winkel einzeln ausgerechnet. Anschließend wird der Mittelwert und die Standardabweichung dieser gebildet und die Winkelrichtgröße

$$D = (0{,}019\,97 \pm 0{,}004\,66)\,\mathrm{N\,m}$$

ergibt sich. Die gemessenen Werte zur Bestimmung des Eigenträgheitmoments I_D der Drillachse sind in Tabelle 3 zu sehen. Dabei ist a der Abstand der Zylinder zur Drillachse und T die Schwingungsdauer. Die Quadrate beider Größen werden ebenfalls aufgeführt. Die lineare Regression wird durch diese beiden Größen gelegt, wie in Abbildung 1 dargestellt.

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung des Trägheitsmoments

$R\,/\mathrm{m}$	$F\,/\mathrm{N}$	$R^2\,/\mathrm{m}^2$	$F^2\,/\mathrm{N}^2$
0.05	2.83	0.003	8.020
0.08	3.19	0.006	10.202
0.10	3.67	0.010	13.454
0.13	4.16	0.016	17.272
0.15	4.69	0.023	22.034
0.18	5.29	0.031	28.026
0.20	5.96	0.040	35.545
0.23	6.96	0.051	43.060
0.25	7.16	0.063	51.323
0.30	8.36	0.090	69.856

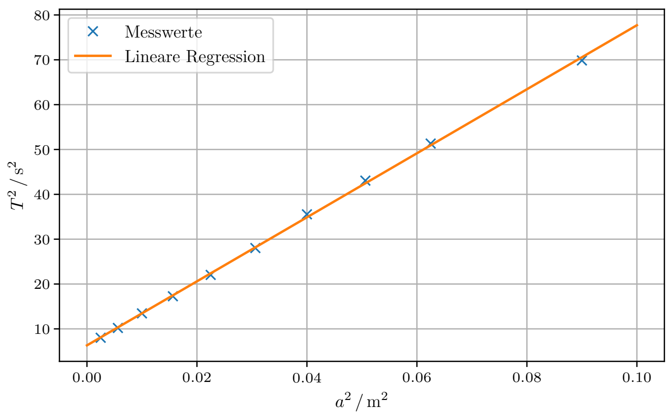


Abbildung 1: Das Quadrat des Abstandes aufgetragen gegen das Quadrat der einfachen Schwingungsdauer.

Das gemessene Trägheitsmoment setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment der beiden Zylinder I_{Zylinder} und dem Eigenträgheitsmoment der Drillachse I_D

$$I_{\text{ges}} = I_D + I_{\text{Zylinder}}$$

wobei

$$I_{\text{Zylinder}} = 2m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}) + 2ma^2 \tag{15}$$

ist. Mit Gleichung (8) ergibt sich

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}(I_D + 2m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12})) + \frac{8\pi^2 m}{D}a^2. \tag{16}$$

Aus der linearen Regression in Abbildung 1, die die Gleichung der Form $y = bx + c$ hat, ergeben sich die Parameter

$$
\begin{aligned}
b &= 714 \pm 5\,, \\
c &= 6.3 \pm 0.2\,.
\end{aligned}
$$

Durch hinschauen lässt sich erkennen, dass

$$
b = \frac{8\pi^2 m}{D}
$$

und

$$
c = \frac{4\pi^2}{D}(I_D + 2m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}))
$$

gilt. Nun wird c nach I_D um gestellt und

$$
I_D = \frac{cD}{4\pi^4} - 2m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12})
$$

ergibt sich. Durch Einsetzten der Messwerte

$$
\begin{aligned}
m &= (261{,}2 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \\
R &= (22{,}26 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\
h &= (20{,}40 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

und Formel 13 ergibt sich für das Trägheitsmoment

$$
I_D = (3{,}10 \pm 0{,}75) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}\,.
$$

4.2 Trägheitsmoment einer Kugel

Tabelle 4: Schwingungsdauer einer Kugel für eine Auslenkung von 90°.

t / s	t / s
1.83	1.87
1.86	1.88
1.84	1.86
1.87	1.86
1.86	1.87

Die verwendete Holzkugel hat die Masse $M_\mathrm{K} = 1172{,}6\,\mathrm{g}$ und den Radius $R_\mathrm{K} = 7{,}34\,\mathrm{cm}$. Mittels Gl. (11) und (12) ergibt sich aus den Daten der Tabelle 4 eine mittlere Schwingungsdauer von $\bar{t} = (1{,}860 \pm 0{,}015)\,\mathrm{s}$. Mit Einsetzen der gemessenen Werte in Gleichung (3) ein ergibt sich ein Theoriewert für das Trägheitsmoment der Kugel von $I_\mathrm{K,theo} = 2{,}53 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$. Unter Verwendung der Gl. (8) umgestellt nach I ergibt sich ein experimenteller Wert von $I = 1{,}75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$.

4.3 Trägheitsmoment eines Zylinders

Der verwendete Zylinder hat eine Masse $M_\text{Z} = 423{,}2\,\text{g}$, eine Höhe von $H_\text{Z} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$ und einen Radius von $R_\text{Z} = 11{,}125 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$.

Tabelle 5: Schwingungsdauer eines Zylinders für eine Auslenkung von 90°.

t / s	t / s
1.90	1.86
1.89	1.88
1.86	1.86
1.89	1.86
1.86	1.86

Aus Tabelle 5 berechnet sich die mittlere Schwingungsdauer zu $\bar{t} = (1{,}870 \pm 0{,}015)\,\text{s}$. Mit Gleichung 8 und umstellen nach I ergibt sich für den experimentellen Wert des Zylinders $I = 1{,}77 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2$. Der Theoriewert resultiert aus dem Einsetzen der gemessenen Werte in Gleichung $I_\text{Z,theo} = 2{,}61 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2$.

4.4 Trägheitsmoment einer Puppe

Um das Trägheitsmoment einer Puppe zu bestimmen, muss diese vermessen werden. Wie in der Durchführung bereits beschrieben, wurde die Höhe der einzelnen Körperteile jeweils ein mal, die Dicke 5 oder 10 mal gemessen. Folgende Maße wurden abgenommen. Die Puppe hat eine Masse von $m_\text{P} = 167{,}2\,\text{g}$. Die zu den Abmessungen der Puppe in

Tabelle 6: Maße der Puppe.

d_Bein / mm	d_B / mm	d_Arm / mm	d_A / mm	d_Torso / mm	d_T / mm	d_Kopf / mm
13,04	16,00	11,84	13,04	32,96	26,08	22,56
13,24	16,78	11,18	12,88	37,56	31,08	27,36
14,32	19,42	12,46	13,24	38,74	36,08	28,44
16,58	18,54	14,42	14,32	33,34	39,22	27,86
17,00	16,68	14,52	13,14	25,10	40,37	24,82

Tabelle 6 gehörigen Höhen H der Körperteile wurden jeweils einfach vermessen.

$$
\begin{aligned}
H_\text{A} &= 133{,}12\,\text{mm}\\
H_\text{B} &= 136{,}58\,\text{mm}\\
H_\text{T} &= 99{,}02\,\text{mm}\\
H_\text{K} &= 42{,}02\,\text{mm}
\end{aligned}
$$

Hier und im weiteren Verlauf steht die Abkürzung A für Arm, B für Bein, T für Torsos und K für Kopf. Ziel ist es, über die Volumina der einzelnen Körperteile und die Gesamtmasse einzelner Massenwerte zu errechnen. Damit kann der Satz von Steiner angewandt und gezeigt werden. Mittels Gleichung (11) und Gleichung (12) werden die Mittelwerte und Standardabweichungen der verschiedenen Dicken berechnet. Das Ergebnis geteilt durch zwei ergibt den Radius r.

$$
\begin{aligned}
r_\mathrm{A} &= (6{,}6 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm} \\
r_\mathrm{B} &= (8{,}1 \pm 1{,}0)\,\mathrm{mm} \\
r_\mathrm{T} &= (17{,}0 \pm 2{,}5)\,\mathrm{mm} \\
r_\mathrm{K} &= (13{,}1 \pm 1{,}1)\,\mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

Das Volumen eines Zylinders ist gegeben durch $V = \pi \cdot r^2 \cdot H$. Durch Anwendung der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung nach Gl. (13) ergeben sich für die Volumina sowie deren Fehler

$$
\begin{aligned}
V_A &= (1{,}80 \pm 0{,}29) \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^3, \\
V_B &= (2{,}8 \pm 0{,}7) \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^3, \\
V_T &= (9{,}0 \pm 2{,}7) \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^3, \\
V_K &= (2{,}3 \pm 0{,}4) \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^3.
\end{aligned}
$$

Durch addieren der Volumina sowie verdoppeln des Volumens für Arme und Beine wird das Gesamtvolumen bestimmt. Der Fehler ergibt sich aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung.

$$V_\mathrm{Ges} = (2{,}05 \pm 0{,}31) \cdot 10^5\,\mathrm{mm}^3$$

Nun sollen die Massen m der einzelnen Körperteile bestimmt werden. Dazu wird bestimmt, wie viel ein Körperteil jeweils vom Gesamtvolumen ausmacht und dieser Anteils-Koeffizient dann mit der Gesamtmasse multipliziert. Die Dichte des Holzes wird hierfür als konstant angenommen und Unterschiede in dem Metall-Anteil der Körperteile vernachlässigt.

$$
\begin{aligned}
m_A &= \frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{Ges}} \cdot m_\mathrm{P} = (14{,}7 \pm 2{,}9)\,\mathrm{g} \\
m_B &= \frac{V_\mathrm{B}}{V_\mathrm{Ges}} \cdot m_\mathrm{P} = (23 \pm 5)\,\mathrm{g} \\
m_T &= \frac{V_\mathrm{T}}{V_\mathrm{Ges}} \cdot m_\mathrm{P} = (74 \pm 14)\,\mathrm{g} \\
m_K &= \frac{V_\mathrm{K}}{V_\mathrm{Ges}} \cdot m_\mathrm{P} = (19 \pm 4)\,\mathrm{g}
\end{aligned}
$$

Die Fehler ergeben sich erneut über Gauß'sche Fehlerfortpflanzung (13). Nun soll der Satz von Steiner (6) angewandt und anhand zwei verschiedener Sitzpositionden einer Puppe überprüft werden. Mit seitlich ausgestreckten Armen im 90°-Winkel zum Oberkörper und geraden Beinen befindet sich die Puppe im ersten Zustand. Im zweiten Zustand werden zusätzlich noch die Beine, ebenfalls in einem 90°-Winkel zum Oberkörper, ausgestreckt. Dazu werden mittels (6) die einzelnen Trägheitsmomente ermittelt. Für die Beine, den Kopf und den Torso wird angenommen, dass die Drehachse durch den Schwerpunkt verläuft. Die Beine werden als ein Zylinder mit Radius $r = D_{\mathrm{B}} = 2r_{\mathrm{B}}$ angenommen. Der Kopf und Torso werden jeweils auch als Zylinder angenommen. Das Trägheitsmoment der Arme wird mithilfe der Formel in Gl. (5) berechnet. Die Verschiebung a zwischen Dreh- und Schwerpunktsachse setzt sich aus dem Radius des Torsos und der Länge des Arms zusammen.

$$a = r_T + \frac{H_{\mathrm{A}}}{2}$$

Damit ergibt sich für einen Arm mit Gl.(6)

$$I_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}} \left(\frac{r_{\mathrm{A}}^2}{4} + \frac{(r_T \cdot 0,5 \cdot H_{\mathrm{A}})^2}{12} \right) \, , \tag{17}$$

Für das Trägheitsmoment der Beine ergibt sich nach Gl. (4)

$$I_{2\mathrm{B}} = \frac{2m_{\mathrm{B}} \cdot 2r_{\mathrm{B}}^2}{2} = m_{\mathrm{B}} \cdot r_{\mathrm{B}}^2 \, .$$

Analog dazu für Kopf und Torso

$$I_{\mathrm{i}} = \frac{m_i \cdot r_i^2}{2}; \quad i \in \{T, K\} \, .$$

Aus diesen Formeln und vorher berechneten Werten ergibt sich der Theorie-Wert für das Gesamtträgheitsmoment

$$I_{1,\mathrm{theo}} = (32{,}1 \pm 6{,}8) \cdot 10^{-4} \, \mathrm{kg\,m^2} \, .$$

Das Trägheitsmoment soll nun mittels Gleichung (8) und den in Tabelle 7 aufgeführten Daten bestimmt und mit dem Theorie-Wert abgeglichen werden. Gl. (8) nach I umgestellt ergibt

$$I = \frac{T^2}{2\pi} D \, . \tag{18}$$

Tabelle 7: Messdaten der Schwingungsdauer für zwei verschiedene Winkel in der ersten Körperhaltung der Puppe.

$\phi = 90°$	$\phi = 120°$
$5T$ / s	$5T$ / s
3,06	2,88
3,28	2,87
2,72	2,87
3,06	2,84
3,16	2,90

Für das experimentell bestimmte Trägheitsmoment der Puppe in der ersten Haltung ergibt sich

$$I_{1,\mathrm{exp}} = (11{,}2 \pm 2{,}9) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Für die zweite Haltung der Puppe verläuft die Rechnung sehr analog. Die Trägheitsmomente der Arme, des Torsos sowie des Kopfes können übernommen werden, die Beine müssen jedoch mittels des Satzes von Steiner berechnet werden. Dies geschieht jedoch genau wie bei der anderen Haltung für die Arme mit Gleichung (17) und (6). Die Beine werden ebenso wieder als ein Zylinder mit doppeltem Radius angenommen. Es ergibt sich ein gesamt theoretisch bestimmtes Trägheitsmoment

$$I_{2,\mathrm{theo}} = (5{,}2 \pm 1{,}3) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Mit den in Tabelle Tabelle 8 und Gleichung (18) ergibt sich ein experimentell bestimmtes Trägheitsmoment

$$I_{2,\mathrm{exp}} = (3{,}00 \pm 0{,}73) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,.$$

Tabelle 8: Messdaten der Schwingungsdauer für zwei verschiedene Winkel in der zweiten Körperhaltung der Puppe.

$\phi = 90°$	$\phi = 120°$
$5T$ / s	$5T$ / s
4,84	4,85
4,87	4,94
4,72	4,90
4,93	4,97
4,79	4,94

5 Diskussion

Im Versuch bzw. der Auswertung wurden insgesamt 5 Trägheitsmomente und eine Winkelrichtgröße bestimmt. 4 dieser Werte lassen sich davon mit theoretisch errechneten Werten abgleichen. Da das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse zu vernachläsigen war, sind alle experimentell bestimmten Trägheitsmomente deutlich größer als die theoretisch berechneten. Für die Kugel ergibt sich für das Verhältnis $I_{\text{exp}}/I_{\text{theo}} = 0.69$, also eine Abweichung von 31% des experimentellen zum theoretischen Wert. Analog dazu ergibt sich für den Zylinder eine Abweichung von 32%. Die beiden Fehler liegen also sehr nah beieinander. Für die zwei Haltungen der Puppe ergeben sich ebenso erneut experimentell deutlich kleinere Werte als theoretisch berechnet. Für die erste Haltung lässt sich eine Abweichung von 65% feststellen, für die Haltung mit ausgestreckten Beinen 42%. Damit sind die Fehler hier deutlich höher, was mehrere Ursachen haben könnte. Erstens werden für die Puppe einige Näherungen angenommen. Zunächst passt die Annäherung eines an einen Zylinder nicht unbedingt gut, ebenso werden die Mettalstäbe, Gelenke, Füße und der Hals vernachlässigt. Der Winkel der abgeknickten Beine in Haltung 2 wird nicht genau 90° gewesen sein, was den Abstand der Masse zum Körper verringert. Ebenso schwingt die Puppe deutlich schneller als die Kugel oder der Zylinder. Dies erschwert ein genaues Starten und Stoppen der Zeitmessung.
Eine Fehlerquelle für alle Messreihen ist die nicht reibungsfreie Apparatur. Diese verkürzt die Schwingungsdauern deutlich gegenüber der reibungsfreien theoretischen Berechnung. Dadurch verkleinert sich das Trägheitsmoment. Ebenso war die Messung für die Winkelrichtgroesse sehr schwierig, da gleichzeitig auf ein senkrechtes Halten des Kraftmessers an der Stange als auch gleichzeitig auf den richtig eingestellten Winkel geachtet werden musste. Ebenso wurde in der Messreihe der Kraftmesser gewechselt, da jeder nur einen gewissen Messbereich abdecken kann. Da D für alle weiteren Berechnungen benötigt wurde, kann dies großen Einfluss auf die Qualität der Werte bewirken.
Das Eigenträgheitmoments der Drillachse wird aufgrund der schon aufgeführten Gründe ebenso fehlerbehaftet sein. Dies lässt sich jedoch aufgrund einer fehlenden theoretischen quantitativen Größe nicht einordnen.
Abschließend lassen sich bei allen Messungen große Unsicherheiten feststellen, jedoch sind diese immer in einer Größenorndung mit dem Theoriewert, was auf viele systematische Fehler und Ablesefehler schließen lässt, der Versuch jedoch richtig durchgeführt wurde.

Anhang

> Messung Puppe:

$M_P = 167{,}2\,g$

Bein:

$H_B = 136{,}58\,mm$

Dicke in mm: 13,04; 13,24; 14,32; 16,58; 17,00; 16,00; 16,78; 19,42; 18,54; 16,68;

Rumpf:

$H_R = 99{,}02\,mm$

Dicke in mm: 32,96; 37,56; 38,74; 33,34; 25,10; 26,08; 31,08; 36,08; 39,22; 40,37;

Kopf:

$H_K = 42{,}02\,mm$

Dicke in mm: 22,56; 27,36; 28,44; 27,86; 24,82;

Arm:

$H_A = 133{,}12$

Dicke in mm: 13,84; 11,18; 12,46; 14,42; 14,82; 13,04; 12,88; 13,24; 14,32; 13,14;

Messung	90°-Winkel	120° Winkel	← Schwingungsdauer in s 5-fach
1	3,06	2,88	Mit Armen ausgestreckt zur Seite Beine unten
2	3,28	2,87	
3	2,72	2,87	
4	3,06	2,84	
5	3,16	2,90	
1	4,84	4,85	Mit Armen ausgestreckt zur Seite und Beine nach vorne
2	4,87	4,94	
3	4,72	4,90	
4	4,93	4,97	
5	4,79	4,94	

ka

V101: Das Trägheitsmoment

> Messung zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D

$r = 20\,cm \pm 1\,cm$

Winkel in Grad	Kraft in N
110	0,21
100	0,19 ← wechsel NM
~~100~~ 90	0,188
80	0,168
70	0,147
60	0,118
50	0,09
40	0,06
30	0,038
20	0,016

> Messung zum Trägheitsmoment von Drillachse I_D

Auslenkung um 90°

Radius in cm	Schwingungsdauer in s
5	14,16 ↳ 5-fach
7,5	15,97
10	18,34
12,5	20,78
15	23,47
17,5	26,47
20	29,81
22,5	32,81
25	35,82
30	~~38~~ 41,79

$M = 261{,}2\,g$
$D = 45{,}1\,mm$
$H = 20{,}4\,mm$

$R_Z = 11{,}125\,cm$ $H_Z = 1{,}50\,cm$
$R_K = \cancel{7{,}5}\ 7{,}34\,cm$ $M_Z = 423{,}2\,g$
$M_K = 1172{,}6\,g$

> Messung mit ~~Zylinder~~ Kugel

Messung	Kugel	Scheibe/Zylinder
1	9,15	~~[illegible]~~ 9,47
2	9,31	9,43
3	9,19	9,31
4	9,34	9,47
5	9,28	9,31
6	9,35	9,28
7	9,41	9,41
8	9,28	9,31
9	9,31	9,28
10	9,35	9,28

← Schwingungsdauer in s
↳ 5-fach

Literatur

[1] *Versuchsanleitung zum V101.* TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.