

V302

Brückenschaltungen

Sophia Brechmann

sophia.brechmann@tu-dortmund.de

Simon Kugler

simon.kugler@tu-dortmund.de

Durchführung: 05.12.2023

Abgabe: 12.12.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Allgemeine Brückenschaltung	3
2.2 Abgegliche Brücke	4
2.3 Wheatstonsche Brücke	4
2.4 Kapazitätsmessbrücke	4
2.5 Induktivitätsmessbrücke	5
2.6 Maxwell-Brücke	5
2.7 Wien-Robinson-Brücke	6
3 Durchführung	7
3.1 Konstante Frequenz	7
3.2 Variierte Frequenz	8
4 Auswertung	8
4.1 Wheatston'sche Messbrücke	8
4.2 Kapatitätsmessbruecke	8
4.3 Induktivitätsmessbruecke	9
4.4 Maxwell-Brücke	10
4.5 Wien-Robinson-Brücke	10
4.6 Klirrfaktor	12
5 Diskussion	13
Literatur	16

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung einzelner Bauteile im elektrischen Schaltkreis, sowie die Ermittlung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung einer Wien-Robinson-Brücke.

2 Theorie

Die Inhalte des Theorieteils sind auf Grundlage des Dokuments [1] zusammengetragen. Brückenschaltungen sind eine essentielle Messmethode, da sie sehr viel präziser sind als herkömmliche Methoden. Besondere Bedeutung bekommt dabei die Nullmethode, welche die zu messende Größe mit einer hohen Genauigkeit bestimmt. Hierbei wird die sogenannte Brückenspannung abgeglichen. Dabei ist es wichtig, dass sich jede physikalische Größe durch Widerstände ausdrücken lässt.

2.1 Allgemeine Brückenschaltung

Bei der allgemeinen Brückenschaltung sind alle Widerstände bekannt und die Brückenspannung zwischen A und B (siehe Abb. 1) kann berechnet werden. Dafür werden die

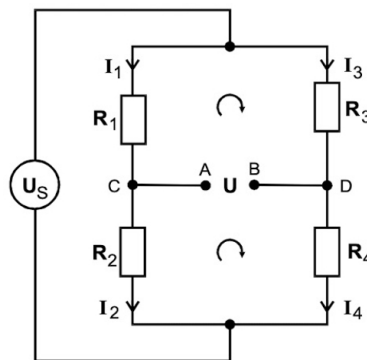


Abbildung 1: Prinzipielle Brückenschaltung

zwei Kirchhoffschen Gesetze verwendet.

1. Die Maschenregel besagt, dass in jedem in sich geschlossenen Stromkreis die Summe der Spannung gleich null ist.

Aufgrund der Knotenregel gilt $I_1 = I_2$ und $I_3 = I_4$. Mit der Maschenregel ergibt sich $U = -R_1 I_1 + R_3 I_3$ und $U = R_2 I_2 - R_4 I_4$. Außerdem ist die Speisespannung der Brücke gegeben durch $U_S = I_1(R_1 + R_2)$. So berechnet sich die Spannung U zwischen A und B mit

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S. \quad (1)$$

Hierbei gelten die Bezeichnungen gemäß Abb. 1.

2.2 Abgegliche Brücke

Als abgegliche Brücke wird der Fall bezeichnet, bei dem die Brückenspannung gleich null ist. Dies ist dann erreicht, wenn

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (2)$$

gilt. Durch diese Abgleichbedingung kann eine Widerstandsmessung durchgeführt werden, da die Brückenspannung nur von dem Verhältnis der Widerstände abhängt. Wie Gl. (1) zeigt, ist U proportional zu U_S . Also muss U_S möglichst groß gewählt werden, damit die Genauigkeit der Messung verbessert wird.

2.3 Wheatstonsche Brücke

Die Wheatstonsche Brücke wird zur Bestimmung unbekannter Widerstände genutzt. Diese Brücke ist aufgebaut gemäß Abb. 2. Um den unbekannten Widerstand R_x zu bestimmen,

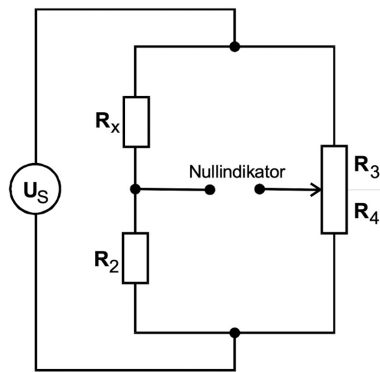


Abbildung 2: Wheatstonsche Brückenschaltung

wird die Abgleichbedingung (2) nach R_x umgestellt. Somit ergibt sich

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}.$$

2.4 Kapazitätsmessbrücke

Auch komplexe Widerstände können mit diesem Prinzip ermittelt werden. Ein solches Schaltbild ist in Abb. 3 dargestellt. Um die Verlustleistung des zu ermittelnden Kondensators mit zu berücksichtigen, wird ein Widerstand mit diesem in Reihe geschaltet und das typische Ersatzschaltbild eines realen Kondensators, entsteht. R_x wird wieder über die Abgleichbedingung (2) bestimmt. C_x ergibt sich zu

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (3)$$

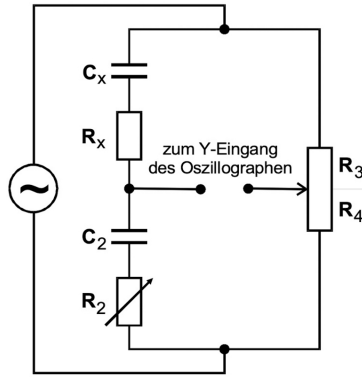


Abbildung 3: Kapazitätsmessbrücke für Kondensatoren mit dielektrischen Verlusten

2.5 Induktivitätsmessbrücke

Zur Bestimmung der Induktivität einer Spule gelten gleich Bedingungen wie bei der Kapazitätsmessung. Somit ist das Schaltbild, wie in Abb. 4 dargestellt. R_x wird wieder

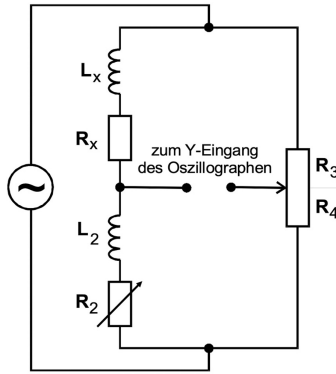


Abbildung 4: Messbrücke für verlustbehaftete Induktivitäten

über die Abgleichbedingung (2) berechnet. Für L_x ergibt sich

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (4)$$

2.6 Maxwell-Brücke

Die Maxwell-Brücke (sieht Abb. 5) ist eine andere Brücke zur Untersuchung der Induktivität einer Spule. Mit den Kirchhoffschen Gesetzen lassen sich wieder Gesetzmäßigkeiten für die Verhältnisse der Widerstände aufstellen. So wird R_x über die Abgleichbedingung (2) und L_x mit

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \quad (5)$$

bestimmt.

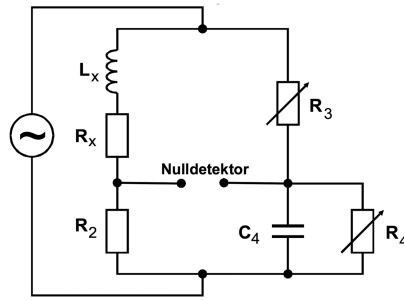


Abbildung 5: Maxwell-Brücke zur Messung einer verlustbehafteten Induktivität

2.7 Wien-Robinson-Brücke

Bei der Wien-Robinson-Brücke, in Abb. 6 dargestellt, sind keine Abgleichelemente mehr enthalten. Der Abgleich erfolgt hier über die veränderbare Frequenz der Speisespannung U_S . Durch Überlegungen mit den Kirchhoffschen Gesetzen kann erkannt werden, dass die

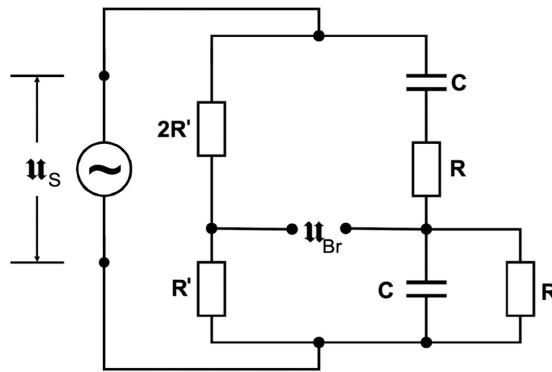


Abbildung 6: Schaltbild einer Wien-Robinson-Brücke.

Brückenspannung genau dann verschwindet, wenn $\omega_0 = 1/RC$ gilt. Wobei ω_0 die Frequenz ist, bei der die Brückenspannung minimal wird. Anschließend wird das Verhältnis von ω_0 zu ω eingeführt als

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Damit ergibt sich das Betragsquadrat des Verhältnisses zwischen Speise- und Brückenspannung

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}. \quad (6)$$

Der Klirrfaktor k wird mittels

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1} \quad (7)$$

bestimmt. Hierbei ist U_1 die Amplitude der Grundwelle und U_n die Amplitude der n -ten Oberwelle mit der Frequenz $n\omega_0$. Um dies zu vereinfachen, wird nur die Spannung der ersten Oberwelle U_2 betrachtet. So ergibt sich

$$k = \frac{U_2}{U_1} . \quad (8)$$

Für die Spannung U_2 gilt

$$U_2 = \frac{U_{Br}}{f(\Omega = 2)} . \quad (9)$$

Damit lässt sich der Klirrfaktor k berechnen.

3 Durchführung

Der Versuchsaufbau ist gegeben durch ein digitales Oszilloskop, einen Funktionengenerator, verschiedenartige Widerstände sowie Kabel. Ebenso ist auch ein Tiefpass-Filter vorhanden, welcher aber nicht zwingend zur Durchführung benötigt wird.

3.1 Konstante Frequenz

Hauptaufgabe ist es, die Kondensatoren, Spulen sowie Ohmschen Widerstände nach verschiedenen Schaltbildern aus Kapitel 2 zusammenzuschließen. Damit werden dann jeweils die Widerstände, Kapazitäten bzw. Induktivitäten bestimmt. Ist eine Schaltung aufgebaut, wird der verstellbare Widerstand so justiert, dass die auf dem Oszilloskop dargestellte Schwingung ihr Amplituden-Minimum erreicht. An diesem Punkt, an dem die Amplitude genähert gleich null ist, gelten die in der Theorie aufgestellten Spannungs- bzw. Widerstandsverhältnisse. Dieses Vorgehen wird für einige Schaltbilder umgesetzt. Die Amplitude wird während des ganzen Versuchs auf einen Wert von 0.5V gestellt. Ab einem Volt könnte die Apparatur Schaden nehmen.

Zu Anfang wird der Wert eines Ohm'schen Widerstand mithilfe der Wheatonschen Brückenschaltung nach dem gerade beschriebenen Vorgehen bestimmt. Dies wird für einen zweiten unbekannten Ohm'schen Widerstand durchgeführt.

Die nächste Schaltung ist eine Kapazitätsmessbrücke, mit dessen Gebrauch die Kapazität eines Kondensators bestimmt wird. Auch hier gibt es wieder zwei Messungen, nach bereits erläuterten Vorgehen für zwei Kondensatoren. In diesem Schaltbild wird ebenfalls ein RC-Glied verwendet.

Nun soll die Induktivität einmal mittels einer Induktivitätsmessbrücke, und ein zweites Mal mithilfe der Maxwell-Brücke bestimmt werden. Bis zu diesem Zeitpunkt wird die Frequenz auf einem festen Wert gelassen.

3.2 Variierte Frequenz

Zur letzten Messreihe wird die Frequenz nicht mehr konstant gelassen, sondern stufenweise erhöht, denn es soll die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung untersucht werden. Dazu wird hier die Wien-Robinson-Brücke verwendet. In einem Messbereich von 50 bis 500 Hz wird jeweils in Schritten von 50 Hz die Amplitude der auf dem Oszilloskop angezeigten Schwingung gemessen. Ab 500 Hz wird die Messung in Schritten von 500 Hz fortgesetzt.

4 Auswertung

4.1 Wheatston'sche Messbrücke

Die Wheatonsche Brückenschaltung weist im Verhältnis der Widerstände R_3 und R_4 einen systematischen Fehler von $\Delta = 0.005 \cdot R_3/R_4$ auf. Für die erste Messung wird der Widerstand mit dem Theoriewert $10 = 239 \Omega$ genutzt, welcher dann experimentell bestimmt wurde. Mit den Messdaten aus Tab. 1, sowie über die Abgleichbedingung (2) und die Gaußsche Fehlerfortpflanzung ergibt sich

$$R_x = (271,0 \pm 1,4) \Omega.$$

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung wird nach der Formel

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 (\Delta x_k)^2}$$

mittels Python durchgeführt. Dabei ist f die zur Berechnung der Größe gegebene Formel und x_k dessen Argumente. Δx_k ist der jeweilige Fehler der einzelnen Argumente. Damit ergibt sich für die erste Messung eine Abweichung von 13.5% gegenüber dem Theoriewert. Die zweite Messung wird mit Wert 12 als Unbekannte durchgeführt, die Messdaten sind in Tab. 1 dargestellt. Es ergibt sich folgender Wert

$$R_x = (322,0 \pm 1,6) \Omega.$$

Gegenüber dem Theoriewert von $390,4 \Omega$ ist dies eine Abweichung von 17,4%.

Tabelle 1: Verwendete Widerstände für die Wheatonschen Brückenschaltung.

Messung	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	664	290	710
2	664	327	673

4.2 Kapazitätsmessbrücke

Mithilfe der Kapazitätsmessbrücke werden pro Messung ein Widerstand, mittels (2), und ein kapazitiver Widerstand, mittels (3), bestimmt. Zur ersten Messung werden R

(Wert 12) und C (Wert 1) mit den Werten aus Tab. 2 zu

$$R_x = (393 \pm 2) \Omega \text{ und}$$

$$C_x = (673,6 \pm 3,4) \text{ nF}$$

bestimmt. Da sich auch C_x über das Verhältnis R_3/R_4 bestimmen lässt, gilt der gleiche relative Fehler. Für R ergibt sich eine Abweichung von 0,7%, von dem Theoriewert von $390,4 \Omega$. Für C ergibt sich eine Abweichung von 2,1%, von dem Theoriewert von 660 nF . Zur zweiten Messreihe ist C gegeben durch $2 \cdot \text{Wert } 3$, R bleibt unverändert mit Wert 12. Mit den verwendeten Widerständen und Kondensatoren aus Tab. 2 ergeben sich folgende Werte

$$R_x = (370,0 \pm 1,9) \Omega$$

$$C_x = (716 \pm 4) \text{ nF} .$$

Die Fehler zu den Theoriewerten $390,4 \Omega$ und $839,89 \text{ nF}$ betragen

$$\Delta R_x = 5,2\%$$

$$\Delta C_x = 14,8\% .$$

Tabelle 2: Verwendete Widerstände und Kondensatoren für die Kapazitätsmessbrücke.

Messung	C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	399	664	372	628
2	399	664	358	642

4.3 Induktivitätsmessbrücke

Um die Induktivität einer Spule zu bestimmen wird die, in Abb. 4, dargestellte Induktivitätsmessbrücke verwendet. Die Induktivität berechnet sich dann nach Gleichung (4). R und L sind zusammengefasst zu Wert 19, für welchen die Theoriewerte $108,7 \Omega$ und $26,96 \text{ mH}$ angegeben sind. Aus den verwendeten Widerständen und der verwendeten Induktivität, welche in Tab. 3 dargestellt sind, ergeben sich folgende Werte

$$R_x = (156,8 \pm 0,8) \Omega$$

$$L_x = (6,50 \pm 0,03) \text{ H} .$$

Die Fehler ergeben sich zu 44,2% für den Widerstand und 75,9% für die Induktivität.

Tabelle 3: Verwendete Widerstände und Induktivitäten für die Induktivitätsmessbrücke.

Messung	L_2 / H	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	27,5	664	191	809

4.4 Maxwell-Brücke

Die Maxwell-Brücke ist die zweite durchgeführte Methode zur Bestimmung der Induktivität. Die unbekannten Werte werden gleich gelassen (Wert 19), jedoch hat sich das Schaltbild geändert. Es ergeben sich mittels Gleichung (5) und den verwendeten Widerständen und Kondensatoren aus Tab. 4 die Werte

$$R_x = (62,0 \pm 2,6) \Omega$$

$$L_x = (9,8 \pm 0,3) \text{mH}.$$

Die Fehler belaufen sich auf eine Induktivitätsabweichung von 100% und eine Widerstandsabweichung von 42.8% gegenüber den Theoriewerten $108,7 \Omega$ und $26,96 \text{mH}$.

Tabelle 4: Verwendete Widerstände und Kondensatoren für die Maxwell-Brücke.

Messung	C_4 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	399	664	37	395

4.5 Wien-Robinson-Brücke

In diesem Teil des Versuches wird die Frequenz nicht mehr konstant eingestellt, sondern moduliert. Es soll die Frequenzabhängigkeit der Spannung gemessen werden. Dabei werden, die in Tabelle ?? aufgeführten, Daten messen. Die Theoriekurve, auf der die Messwerte im Idealfall liegen sollten, ist beschrieben durch Gleichung (6). Da die Spannung in verschiedenen Schritten gemessen wird, wird die x -Skala logarithmiert. Dabei werden folgende Werte verwendet

$$R' = 332 \Omega$$

$$2R' = 664 \Omega$$

$$C = 994 \text{nF}$$

$$R = 664 \Omega$$

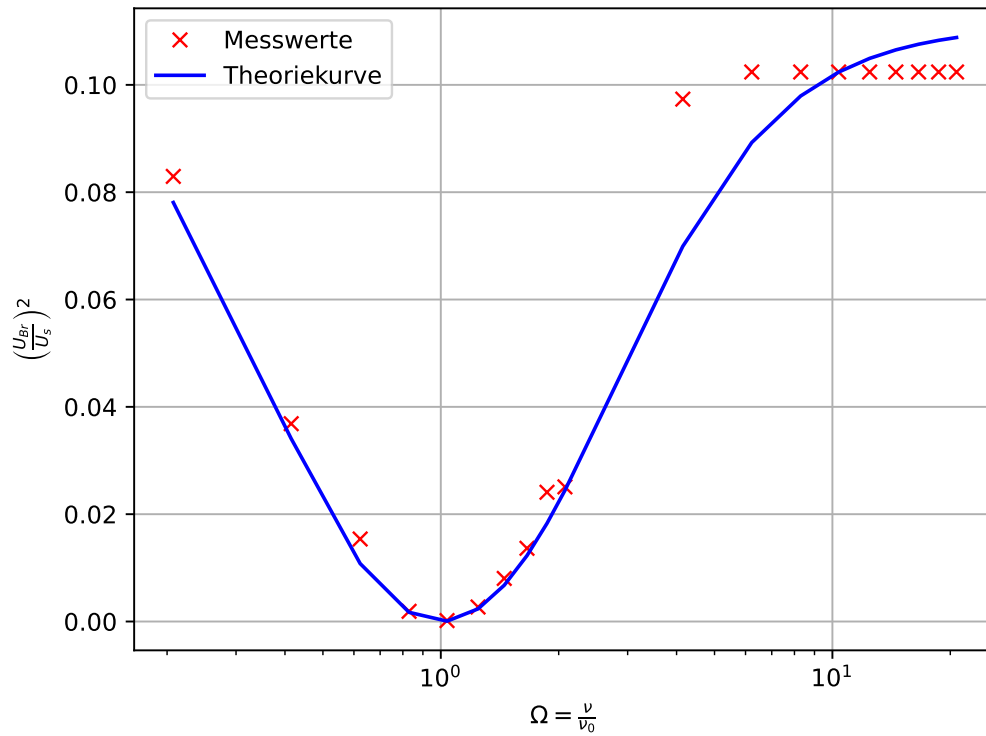
$$U_S = 0,5 \text{V}.$$

Die nach Gleichung (6) aufgetragenen Messwerte, sowie die Theoriekurve sind in Abb. ?? visualisiert.

Tabelle 5: Spannung in Abhängigkeit der Frequenz zur Wien-Robinson-Brücken-Schaltung.

ν / Hz	U / mV	ν / Hz	U / mV
50	144.0	1000	156
100	96.0	1500	160
150	62.0	2000	160
200	21.8	2500	160
250	6.6	3000	160
300	26.0	3500	160
350	44.8	4000	160
400	58.4	4500	160
450	77.6	5000	160
500	79.2		

Abbildung 7: Die Spannung aufgetragen gegen den Logarithmus der Frequenz.



4.6 Klirrfaktor

In der Theorie sollte die Brückenspannung bei der Frequenz ν_0 verschwinden. Da dies experimentell jedoch durch nicht gewollte Oberwelle nicht geschieht, wird dies durch den Klirrfaktor (7) beschrieben. Näherungsweise wird angenommen, dass nur die zweite Oberwelle mit der Spannung U_2 Einfluss nimmt. Über (7) bzw. (8) und (9) ergibt sich der Klirrfaktor.

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{U_{\text{Br}}(2\nu_0)}{f(2)} = \frac{0,0792 \text{ V}}{0,022} \\ &= 3,56 \text{ V} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich k zu

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{3,56 \text{ V}}{0,5 \text{ V}} = 7,13$$

5 Diskussion

Die Fehler der Messwerte der Messreihen mit konstanter Frequenz sind sehr unterschiedlich. Bei einigen ist der Fehler sehr klein, bei anderen sehr groß. Die kleinste Abweichung lässt sich mit 5,2% für den zweiten Widerstand der Kapazitätsmessbrücke feststellen. Die größte Abweichung beträgt 100% für den Widerstand der Maxwell-Brücke. Der wohl größte systematische Fehler ist das Ablesen der Nulllinie auf dem Oszilloskop, welche sich je nach Skala nicht genau bestimmen ließ. Dies hat sich dadurch bemerkbar gemacht, dass bei feinsten Auflösung des Oszilloskops eine augenscheinliche Nulllinie für ein Band von verschiedenen Widerständen zu erkennen war. Als statistischer Fehler lässt sich das nicht variieren des Widerstandes R_2 einstufen. Durch wechseln dieses hätte sich der Fehler minimieren lassen können, jedoch wurde dies aufgrund fehlender variabler Widerstände nicht durchgeführt. Einer der beiden vorhandenen variablen Widerstände hat eine fehlerhafte Einstell- bzw. Messskala, was das korrekte Justieren deutlich erschwert hat. Der Ring, auf welchem sich der eingestellte Widerstand ablesen lässt und welcher im Normalfall fest mit dem Drehknopf verbunden ist, war in diesem Fall nicht fest verbunden. Daher musste vorsichtig gedreht beziehungsweise abgelesen werden um ein ungewolltes Verrutschen des Rings zu vermeiden. Ein weiterer systematischer Fehler, dessen Einfluss jedoch schwer abzuschätzen ist, ist die Verbindung der Kabel miteinander. Je nach Schaltbild wurden drei Kabel an- bzw. ineinander gesteckt. Die Stecker der Kabel waren jedoch von unterschiedlichem Typ, was zum Beispiel ungewollte Widerstände hervorgebracht haben könnte. Dies wäre auch eine Erklärung für die Differenz zwischen den einzelnen Abweichungen.

Der zweite Teil des Versuchs weist weniger fehlerbehaftete Größen auf. Ein Ablesefehler ist hier nicht vorhanden, da sowohl die zu justierende Frequenz, als auch die Amplitude am Oszilloskop digital als Zahl angezeigt wurden. Die in Abbildung ?? zu erkennende Theoriekurve bildet im Groben gut den Verlauf der Messwerte ab. Im ersten Teil bis zum Wendepunkt der Kurve liegen die Messwerte sehr nah an der Theoriekurve, ab dort zeichnen Messwerte und Theoriekurve einen leicht anderen Verlauf ab. Die Messwerte erreichen deutlich schneller ihren Grenzwert, jedoch liegt der Grenzwert der Theoriekurve etwas höher. Dies lässt sich durch etwaige Störfrequenzen oder unbekannte Widerstände im System erklären.

Der bereits berechnete Klirrfaktor k liegt leicht über der gemessenen kleinsten Spannung, was genau so zu erwarten war.

Anhang

V302 Elektrische Brückenschaltung

> Nulllinie für Wert 10:

$$\begin{aligned} R_x &= \text{Wert } 10 \\ R_2 &= 664,0 \, \Omega \\ R_3 &= 290 \, \Omega \\ R_4 &= 710 \, \Omega \end{aligned}$$

Frequenz: 1000 Hz

Literaturwerte:

$$\begin{aligned} \text{Wert } 10 &= 239 \, \Omega \\ 12 &= 390,4 \, \Omega \\ 1 &= 660 \, \text{nF} \\ 2.3 &= 839,89 \, \text{nF} \\ 19 &= 26,96 \, \text{mH} \\ R &= 108,7 \, \Omega \end{aligned}$$

> Nulllinie für Wert 12:

$$\begin{aligned} R_x &= \text{Wert } 12 \\ R_2 &= 664,0 \, \Omega \\ R_3 &= 327 \, \Omega \\ R_4 &= 673 \, \Omega \end{aligned}$$

> Kapazitätsmessung

$$\begin{aligned} 1.: C_x &= \text{Wert } 1 \\ R_x &= \text{Wert } 12 \\ C_2 &= 399 \, \text{nF} \\ R_2 &= 664,0 \, \Omega \\ R_3 &= ~~392~~ 372 \, \Omega \\ R_4 &= 628 \, \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.: C_x &= 2 \cdot \text{Wert } 3 \\ R_x &= \text{Wert } 12 \\ C_2 &= 399 \, \text{nF} \\ R_2 &= 664,0 \, \Omega \\ R_3 &= 358 \, \Omega \\ R_4 &= 642 \, \Omega \end{aligned}$$

> Induktivitätsmessung

$$\begin{aligned} L_x, R_x &= \text{Wert } 19 \\ L_2 &= 27,5 \, \text{mH} \\ R_2 &= 664,0 \, \Omega \\ R_3 &= 191 \, \Omega \\ R_4 &= 809 \, \Omega \end{aligned}$$

- Mit Maxwell-Brücke

$$\begin{aligned} L_x, R_x &= \text{Wert } 19 \\ R_2 &= 664,0 \, \Omega \\ C_4 &= 399 \, \text{nF} \\ R_3 &= 37 \, \Omega \\ R_4 &= 395 \, \Omega \end{aligned}$$

> Frequenzabhängigkeit Wien-Robinson-Brücke

→

> Frequenzabhängigkeit Wien-Robinson-Brücke

Frequenz in Hz	U_{Br} in mV
50	144
100	96
150	62
200	21,8
250	6,64
300	26,0
350	44,8
400	58,4
450	77,6
500	79,2
1000	156
1500	160
2000	160
2500	160
3000	160
3500	160
4000	160
4500	160
5000	160

$$\begin{aligned}
 R' &= 332 \, \Omega \\
 2R' &= 664 \, \Omega \\
 C &= 894 \, \text{nF}, 892 \, \text{nF} \\
 R &= 664 \, \Omega \\
 U_s &= 0,5 \, \text{V}
 \end{aligned}$$

Handwritten signature

Literatur

- [1] *Versuchsanleitung zum V302*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.