Versuch Nr.353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

1. Ableitung einer allgemeinen Relaxationsgleichung und ihre Anwendung auf den RC-Kreis

Relaxationserscheinungen treten auf, wenn ein System aus seinem Ausgangszustand entfernt wird und es wieder nicht-oszilllatorisch in denselben zurückkehrt[1]. Die Änderungsgeschwindigkeit im Zeitpunkt t der betrachteten physikalischen Größe A ist dabei meist proportional zur Abweichung der Größe A vom (nur asymptotisch erreichbaren) Endzustand A(∞)

$$\frac{dA}{dt} = c\left[A(t) - A(\infty)\right] \quad . \tag{1}$$

Die Integration dieser Gleichung vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t liefert

$$\int_{A(0)}^{A(t)} \frac{dA'}{A' - A(\infty)} = \int_0^t c\, dt'$$

oder

$$\ln \frac{A(t) - A(\infty)}{A(0) - A(\infty)} = ct$$

und schließlich

$$A(t) = A(\infty) + \left[A(0) - A(\infty)\right] e^{ct} \quad . \tag{2}$$

In (2) muss c < 0 sein, damit A beschränkt bleibt.
Beispiele für Relaxationsvorgänge stellen die Ent- und die Aufladung eines Kondensators über einen Widerstand dar.

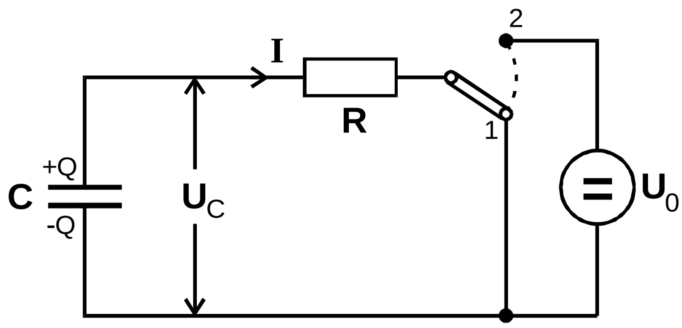

Abb.1: Entladung (Stellung 1) und Aufladung (Stellung 2) eines Kondensators über einen Widerstand

Entladevorgang:

Angenommen auf den Platten des Kondensators mit der Kapazität C in Abb.1 befinde sich die Ladung Q. Dann liegt zwischen ihnen eine Spannung U_C, die durch

---

[1] *Diese Bedingung ist bei mechanischen Systemen erfüllt, wenn Trägheitskräfte gegenüber anderen Kräften vernachlässigt werden können.*

(3) $$U_C = \frac{Q}{C}$$

gegeben ist. Nach dem ohmschen Gesetz bedingt diese einen Strom

(4) $$\mathbf{I} = \frac{U_C}{R}$$

durch den Widerstand R, der einen Ausgleich der Ladungen herbeiführt. Im Zeitintervall dt fließt die Ladung $\mathbf{I}$dt über; die Ladung auf den Kondensatorplatten ändert sich also um

(5) $$dQ = -\mathrm{I}dt \quad .$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3), (4) und (5) kann man die Größen U_C und $\mathbf{I}$ eliminieren, sodass man eine Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Ladung des Kondensators bekommt, die die gleiche Gestalt wie (1) hat

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}\, Q(t) \quad .$$

Da der Kondensator nach unendlicher langer Zeit entladen ist, gilt

$$Q(\infty) = 0 \quad .$$

Somit liefert die Integration (siehe (2))

(6) $$Q(t) = Q(0)\, \mathbf{exp}(-t/RC) \quad .$$

Aufladevorgang:

Entsprechend lässt sich die Gleichung für die Aufladung eines Kondensators, der über einen Widerstand an eine Spannungsquelle mit der Spannung U_0 angeschlossen ist, berechnen. Hier gelten die Randbedingungen

$$Q(0) = 0 \quad \text{und} \quad Q(\infty) = CU_0 \quad ,$$

sodass der Aufladevorgang durch die Gleichung

$$Q(t) = CU_0\,(1 - \mathbf{exp}(-t/RC))$$

beschrieben wird. Den Ausdruck RC bezeichnet man als die **Zeitkonstante** des Relaxationsvorganges. Sie ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der das System seinem Endzustand $Q(\infty)$ zustrebt, denn während des Zeitraumes $\Delta T = RC$ ändert sich die Ladung auf dem Kondensator um den Faktor

$$\frac{Q(t = RC)}{Q(0)} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368 \quad .$$

Nach $\Delta T = 2{,}3$ RC sind nur noch etwa 10% des Ausgangswertes vorhanden und nach $\Delta T = 4{,}6$ RC nur noch 1%.

2. Relaxationsphänomene, die unter dem Einfluss einer periodischen Auslenkung aus der Gleichgewichtslage auftreten

Auch in diesem Falle besteht eine enge Analogie zwischen dem Verhalten eines mechanischen Systems, das unter dem Einfluss einer Kraft mit sinusförmiger Zeitabhängigkeit steht, und einem RC-Kreis, an welchem eine Sinusspannung anliegt (Abb.2). Aus diesem Grunde soll im Folgenden wiederum das Verhalten des RC-Kreises als übertragbares Beispiel auf Relaxationsphänomene in anderen Gebieten der Physik betrachtet werden.

Solange die Kreisfrequenz ω der äußeren Wechselspannung U(t) mit

$$U(t) = U_0 \cos\omega t$$

in der Schaltung nach Abb.2 hinreichend niedrig ist, das heißt $\omega \ll 1/RC$, wird die Spannung U_C (t) am Kondensator in jedem Zeitpunkt praktisch gleich U(t) sein. Mit zunehmender Frequenz bleibt jedoch die Auf- und Entladung des Kondensators über den Widerstand R immer weiter hinter dem zeitlichen Verlauf der Generatorspannung zurück. Es wird sich also eine Phasenverschiebung φ zwischen beiden Spannungen ausbilden, und die Amplitude A der Kondensatorspannung wird abnehmen. Die Frequenzabhängigkeit der Phase und der Amplitude von U_C sollen nun im Folgenden näher betrachtet werden.

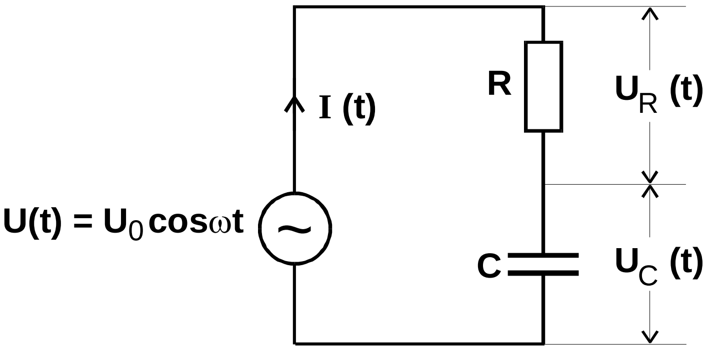

Abb.2: Schaltungsbeispiel zur Diskussion von Relaxationsphänomenen, die unter dem Einfluss einer periodischen Auslenkung auftreten

Mit dem Ansatz

(7) $$U_C(t) = A(\omega) \cos\left(\omega t + \varphi\{\omega\}\right)$$

versucht man, eine Lösung des Problems zu finden. Nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz (siehe V302, Kap.2) gilt für den Stromkreis in Abb.2

(7a) $$U(t) = U_R(t) + U_C(t) \quad .$$

oder ausführlich geschrieben

(8) $$U_0 \cos\omega t = \mathbf{I}(t) R + A(\omega) \cos\left(\omega t + \varphi\right) \quad .$$ [2]

$\mathbf{I}$(t) lässt sich mit Hilfe der Gleichungen (3) und (5) durch U_C ausdrücken

(9) $$\mathbf{I}(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad .$$

Damit folgt aus (7), (8) und (9)

(10) $$U_0 \cos\omega t = -A\omega RC \sin\left(\omega t + \varphi\right) + A(\omega) \cos\left(\omega t + \varphi\right) \quad .$$

---

[2] *Der Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle (V301) soll null sein; sonst wäre $U_R(t) = (R + R_i) \cdot \mathbf{I}(t)$.*

Gleichung (10) muss für alle t gültig sein. So folgt zum Beispiel für $\omega t = \pi/2$ aus (10)

$$0 = -\omega RC\, \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

und weiter wegen **sin**($\varphi + \pi/2$) = **cos** φ und **cos**($\varphi + \pi/2$) = - **sin** φ:

$$\frac{\mathbf{sin}\,\varphi}{\mathbf{cos}\,\varphi} = \mathbf{tan}\;\varphi(\omega) = -\omega RC \qquad \text{oder}$$

(11) $$\varphi(\omega) = \mathbf{arctan}\left(-\omega RC\right) \quad .$$

Damit ist eine Beziehung für die Frequenzabhängigkeit der Phase φ hergeleitet. Man erkennt, dass - wie erwartet - φ für niedrige Frequenzen gegen null geht, während es sich für hohe Frequenzen asymptotisch dem Wert $\pi/2$ nähert. Für $\omega = 1/RC$ ist $\varphi = \pi/4$.
Aus (10) folgt weiter für

$$\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}:$$

$$U_0\, \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -A\,\omega RC$$

oder

(12) $$A(\omega) = -\frac{\mathbf{sin}\,\varphi}{\omega RC} U_0 \quad .$$

Aus (11) leitet man unter Benutzung von

$$\mathbf{sin}^2\varphi + \mathbf{cos}^2\varphi = 1$$

die Beziehung

$$\mathbf{sin}\,\varphi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

her. Damit folgt aus (12) die Gleichung

(13) $$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$ [3],

die eine Beziehung zwischen der Amplitude der Kondensatorspannung und der Kreisfrequenz der erregenden Spannung herstellt. Man erkennt, dass für $\omega \to 0$ $A(\omega)$ gegen U_0 geht und dass für $\omega \to \infty$ $A(\omega)$ verschwindet. Weiterhin ist A (1/RC) = $U_0 / \sqrt{2}$.
Wegen der Eigenschaft (13) verwendet man RC-Glieder in der elektrischen Schaltungstechnik häufig als Tiefpässe. Sie lassen Wechselspannungen, deren Frequenz klein gegen 1/RC nahezu ist, ungehindert hindurch, während solche mit ω >> 1/RC mit wachsender Frequenz immer weiter heruntergeteilt werden. Nachteilig ist allerdings für viele Anwendungen, das $A(\omega)$ nach Aussage von (13) nur mit $1/\omega$ gegen 0 geht.

---

[3] *Gleichung (13) stellt die **Frequenz**abhängigkeit einer Relaxationsgröße und (6) ihre **Zeit**abhängigkeit dar. Beide Darstellungen sind grundsätzlich nicht unabhängig voneinander. Sie lassen sich durch eine Fourier-Transformation in einander überführen.*

3. Der RC-Kreis als Integrator

Ein RC-Kreis ist auch in der Lage, eine zeitlich veränderliche Spannung U(t), die gemäß Abb.2 angeschlossen wird, unter bestimmten Voraussetzungen zu integrieren. Man kann zeigen, dass die Spannung U_C am Kondensator proportional zu $\int U(t)\,dt$ ist, wenn ihre Frequenz $\omega \gg 1/RC$ ist. Man geht dazu aus von Gleichung (7a):

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = \mathbf{I}(t) \cdot R + U_C(t) \qquad .$$

Hierin ersetzt man I(t) durch (9) und erhält

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t) \qquad .$$

Unter der Voraussetzung $\omega \gg 1/RC$ ist $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$. Somit kann man näherungsweise schreiben

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt}$$

oder

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t')\,dt' \qquad .$$

4. Aufgaben

a) Man bestimme die Zeitkonstante eines RC-Gliedes durch Beobachtung des Auf- oder Entladevorganges des Kondensators.

b) Man messe die Amplitude der Kondensatorspannung an einem RC-Glied, welches an einem Sinusspannungsgenerator angeschlossen ist, in Abhängigkeit von der Frequenz.

c) Man messe die Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung an einem RC-Glied in Abhängigkeit von der Frequenz.

d) Man zeige, dass ein RC-Kreis unter bestimmten Voraussetzungen als Integrator arbeiten kann.

5. Beschreibung geeigneter Messverfahren und -apparaturen

zu 4a: Die Zeitkonstante kann mit der in Abb.3 wiedergegebenen Schaltung bestimmt werden. Dazu wird die Spannung U_C(t) am Kondensator mit Hilfe eines Oszilloskopes in Abhängigkeit von der Zeit beobachtet. Die Aufladung des Kondensators beginnt, wenn die Ausgangsspannung am Rechteckgenerator unstetig von null auf ihren Maximalwert springt. Sie dauert solange an, wie die Rechteckspannung auf ihrem Maximalwert verharrt. Sobald sie auf null zurückspringt, setzt die Entladung ein. Sie hält solange vor, wie die Rechteckspannung auf null verbleibt. Man bekommt daher nur Ausschnitte aus den (unendlich langen) Lade- und Entladekurven auf dem Bildschirm

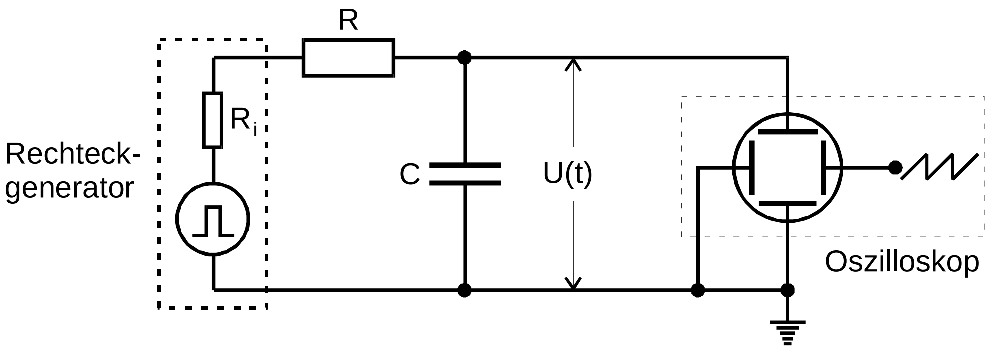

Abb.3: Messschaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes durch Beobachtung des Auf- oder Entladevorganges des Kondensators

zu sehen. Die Rechteckfrequenz und die Ablenkgeschwindigkeit des Kathodenstrahls sind nun so zu wählen, dass sich U_C (t) während der Aufzeichnungszeit etwa um den Faktor 5 bis 10 ändert (siehe Abb.4).

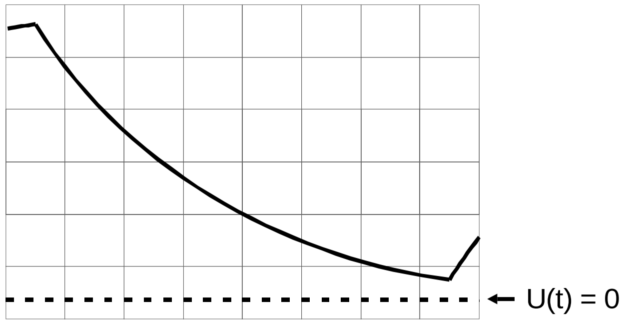

Abb.4: Für die Auswertung geeignete Darstellung der Entladekurve auf dem Bildschirm

Wichtig ist hierbei auch die richtige Einstellung des Triggerpegels[4]. Für die Auswertung der erhaltenen Kurve muss die Lage des Spannungsnullpunktes auf dem Bildschirm bekannt sein. Um sie zu finden, kann man vorübergehend eine Rechteckperiodendauer einschalten, die groß gegen RC ist. U_C (t) sieht dann während der Entladung praktisch auf null ab.

Die Eichung der Zeitachse kann am Drehknopf für die Einstellung der Ablenkgeschwindigkeit an der Frontplatte des Oszilloskops abgelesen werden. Sie lässt sich – wenn erforderlich – auch mit dem Recheckgenerator und einem digitalen Periodendauermesser überprüfen.

Wenn auf dem Bildschirm eine geeignete Kurve zu sehen ist, wird das Signal U_C(t) auf ein Speicheroszilloskop gegeben und dann ein Thermodruck angefertigt, der für die Auswertung verwendet werden kann.

zu 4b: Die Messaufgabe 4b kann man mit der in Abb.5 wiedergegebenen Schaltung lösen. Mit Hilfe eines geeigneten Millivoltmeters misst man die Kondensatorspannungsamplitude A in Abhängigkeit von der Frequenz über ca. 3 Zehnerpotenzen hinweg. Es ist sinnvoll, auch zu kontrollieren, ob die Generatorspannungsamplitude U_0 tatsächlich von der Frequenz unabhängig ist. Den Widerstand R messe man mit einem digitalen Ohmmeter.

[4] *Näheres hierzu: siehe „Arbeitsmethoden in der Experimentellen Physik“, Kap.c: Messgeräte*

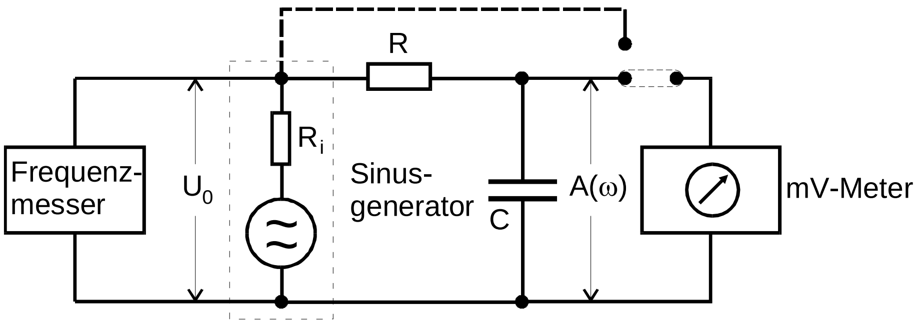

Abb.5: Messschaltung zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannungsamplitude A in einem RC-Kreis

zu 4c: Für die Messung der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung verwende man die in Abb.6 dargestellte Schaltung.

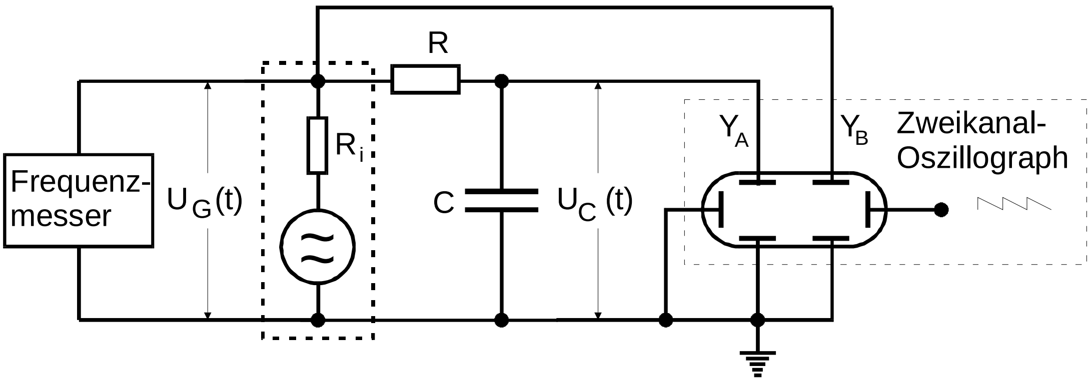

Abb.6: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen mit einem Zweikanal-Oszilloskop

Hier gibt man die Kondensatorspannung $U_C(t)$ auf dem Eingang Y_B und die Generatorspannung $U_G(t)$ auf dem Eingang Y_A eines Zweistrahl-Oszilloskops. Ist die Phase $\varphi > 0$, so wird man in etwa das in Abb.7 wiedergegebene Schirmbild erhalten.
Hier misst man den zeitlichen Abstand a der beiden Nulldurchgänge der Schwingungen aus und vergleicht ihn mit der Länge b, die der Schwingungsdauer entspricht. Die gesuchte Phasenverschiebung ist dann gegeben durch

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 360 \qquad \text{oder} \qquad \varphi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad .$$

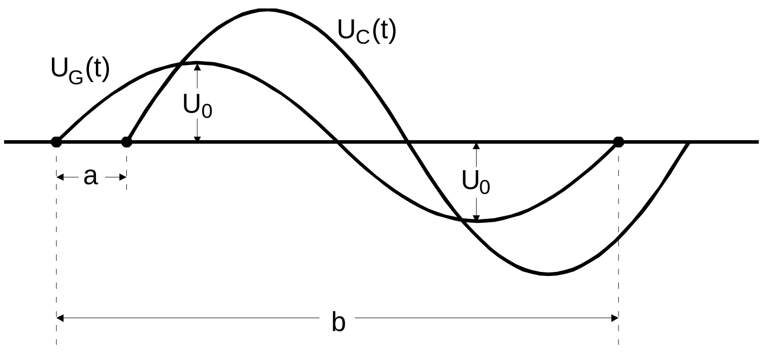

Abb.7: Messung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen mit dem Zweistrahloszillographen

Das Verfahren liefert nur dann brauchbare Ergebnisse, wenn beide Sinuskurven symmetrisch zur X-Achse liegen. Die Größe b misst man mit einem digitalen Periodendauermessgerät.

zu 4d: Man stelle am Generator eine für die Integration geeignete Frequenz ein, gebe der Reihe nach eine Rechteck-, Sinus und Dreiecksspannung auf das RC-Glied und stelle die integrierte sowie die zu integrierende Spannung auf dem Bildschirm eines Zweikanal-Speicheroszilloskopes dar. Die Schaltung in Abb.6 ist für diese Zwecke zu gebrauchen. Anschließend fertige man Thermodrucke von den Oszillogrammen an.

6. Hinweise zur Auswertung der Messergebnisse

a) Aus dem Thermodruck entnehme man einige Wertepaare ($U_C(t)$, t), stelle diese in einem halblogarithmischen Diagramm dar und führe eine lineare Ausgleichsrechnung mit der Menge der Wertepaare $\{(\ln U_C(t_i), t_i)\}$ aus. Aus dem Anstieg der Ausgleichsgeraden errechne man RC.

b) Man trage in einem halblogarithmischen Diagramm die Menge der Wertepaare $\{A(\nu_i)/U_0, \nu_i)\}$ ein. Mit Hilfe einer nicht-linearen Ausgleichsrechnung ermittle man aus den Wertepaaren $\{A(\nu_i)/U_0, \nu_i)\}$ eine optimale Zeitkonstante RC. Mit dieser errechne man die Kurve, die durch (13) beschrieben wird und trage sie ebenfalls in das halblogarithmische Diagramm ein. Kann man eine systematische Abweichung zwischen den nach 6a und 6b bestimmten Zeitkonstanten feststellen? **Hinweis:** Man beachte den Einfluss des Generatorinnenwiderstandes R_i = 600 Ω auf die Messschaltungen gemäß Abb.3 und Abb.5.

c) Mit den Messwertepaaren $\{(\varphi(\nu_i), \nu_i)\}$ verfahre man entsprechend wie unter 6b beschrieben.

d) Man berechne für den RC-Kreis die Abhängigkeit der Relativamplitude $A(\omega)/U_0$ von der Phase φ nach der Gleichung (12) mit Hilfe des zuvor ermittelten RC-Wertes und trage sie in ein Polarkoordinatensystem ein. Zusätzlich zeichne man auch einige Messwertepaare $\{A(\omega_i)/U_0, \varphi(\omega_i))\}$ in das Diagramm ein.