

## Versuch Nr. 04

# V103 Biegung elastischer Stäbe

Nele Preißler

Nele.Preissler@tu-dortmund.de

Matrikel Nr. 238596

Paul Kohnke

Paul.Kohnke@tu-dortmund.de

Matrikel Nr. 241592

Durchführung: 05.12.2023

Abgabe: 12.12.2023

 Korrektur

 Bemerkungen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Biegen durch einseitiges Einspannen . . . . .	4
2.2 Biegen durch beidseitiges Einspannen . . . . .	6
<b>3 Durchführung</b>	<b>8</b>
3.1 Biegen durch einseitiges Einspannen . . . . .	8
3.2 Biegen durch beidseitiges Einspannen . . . . .	8
<b>4 Fehlerberechnung</b>	<b>9</b>
<b>5 Auswertung</b>	<b>9</b>
5.1 Bestimmung der Dichte der Metallstäbe . . . . .	9
5.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls . . . . .	10
5.2.1 Plots der Auslenkung . . . . .	10
5.2.2 Berechnung des Elastizitätsmoduls . . . . .	13
<b>6 Diskussion</b>	<b>14</b>
<b>7 Anhang</b>	<b>16</b>
<b>Literatur</b>	<b>18</b>

Das Protokoll ist an sich gut, allerdings braucht ihr in der Theorie nicht so ausführlich die Formeln herzuleiten. Es sollte verständlich und kurz gehalten werden.

Die Auswertung lässt sich auch leider etwas schwer lesen. Ihr habt zwar am Anfang erklärt was ihr macht, jedoch wird es durch die parallele Auswertung und die Plots etwas unübersichtlich. Auch wenn es sich doppelt wäre es hier schöner die Auswertungen aus zu teilen.

## 1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es durch Biegen von Metallstäben den Elastizitätsmodul zu berechnen und damit auf das verwendete Metall zu schließen.

## 2 Theorie

Wird auf die Oberfläche eines Körpers eine Kraft angewandt, teilt sich diese in Horizontal- und Tangentialkomponente auf. Die Normal- und Schubspannung.

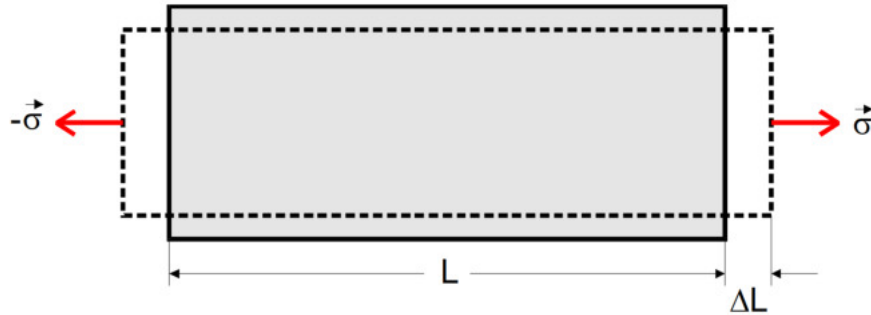


Abbildung 1: Spannung beim Dehnen eines Stabes [3].

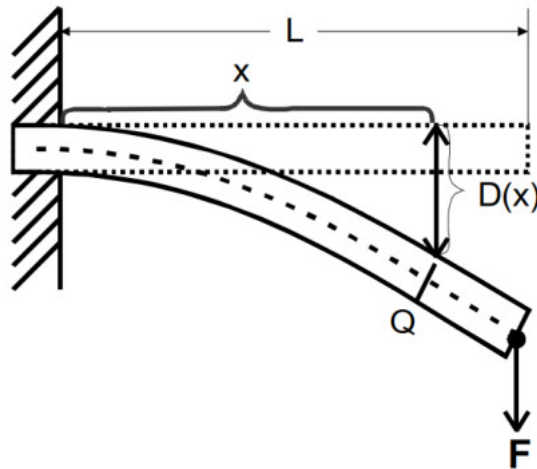
Abbildung 1 zeigt die Dehnung eines rechteckigen Körpers, mit anfallenden Spannungen und der Längenänderung des Körpers.

Ist  $\Delta L/L$  hinreichend klein, darf das Hooksche-Gesetz

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

angewandt werden.  $E$  ist hierbei der Elastizitätsmodul,  $\sigma$  die Normalspannung und  $\Delta L/L$  die relative Längenänderung. Im folgenden werden zwei Verfahren erläutert, um kleine Änderungen zuverlässig messen zu können.

## 2.1 Biegen durch einseitiges Einspannen

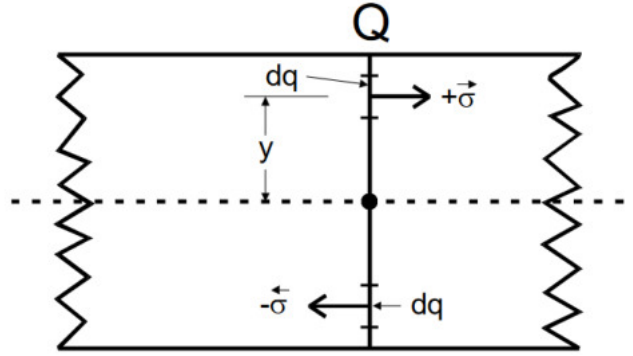


**Abbildung 2:** Biegung eines Stabes unter Einfluss einer Kraft am Ende des Stabes [3].

Abbildung 2 zeigt den belasteten und unbelasteten Stab (gepunktet). Die Abbildung zeigt einen einfachen Aufbau zur Bestimmung von  $E$ . Es wird die Auslenkung  $D$  in Abhängigkeit von der Stelle am Stab  $x$  dargestellt.  $L$  ist die Länge des Stabes,  $Q$  die Querschnittsfläche und  $F$  die Kraft, die auf den Stab wirkt. Weil durch die Kraftausübung der Querschnitt  $Q$  gedreht wird, lässt sich ein Drehmoment  $M_F$  bestimmen. Der Stab wird während des Vorgangs unterhalb gestaucht und oberhalb gedehnt. Dadurch bilden sich im Stab Normalspannungen aus, die dem entgegenwirken. Genau in der Mitte des Stabes gibt es eine Linie, auf die diese Spannungen nicht wirken, die neutrale Faser. Wie erwähnt, wirken die Kräfte im Inneren der äußeren Kraft entgegen, versuchen somit den Querschnitt zurückzudrehen und bewirken ebenfalls ein Drehmoment  $M_\sigma$ . Wenn die Kräfte ausgeglichen sind, sind die Drehmomente ebenfalls gleich und es ergibt sich

$$M_F = M_\sigma \quad . \quad (2)$$

Dies gilt für jede Stelle  $x$  des Stabes.



**Abbildung 3:** Spannungen innerhalb des Stabes und Messgrößen zur bestimmung von  $M_\sigma$  [3].

Gleichung 2 lässt sich umschreiben zu

$$\int_Q y \sigma(y) \, dq = F(L - x) \quad . \quad (3)$$

Links wird über die Querschnittsfläche  $Q$  integriert. Abbildung 3 zeigt die Spannungen im inneren des Stabes, wobei  $dq$  ein Flächenstück aus  $Q$ ,  $y$  der Abstand von der neutralen Faser zum Flächenstück  $dq$  und  $\sigma(y)$  die dortige Normalspannung ist. In einem gebogenen Stab gilt, für kleine Stabstücke und noch kleinere Auslenkungen, die aus dem Hookschen Gesetz hergeleitete Formel

$$\sigma(y) = Ey \frac{d^2 D}{dx^2} \quad .$$

Die Gleichung beinhaltet die zweifach differenzierte Funktion  $D(x)$  nach  $x$ . Es folgt

$$E \frac{d^2 D}{dx^2} \int_Q y^2 \, dq = F(L - x) \quad (4)$$

aus Gleichung 3. Mit

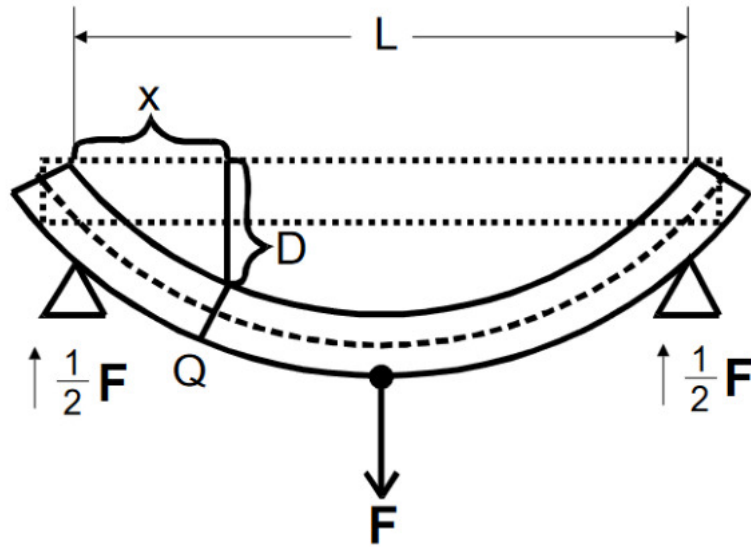
$$I := \int_Q y^2 \, dq \quad (5)$$

ergibt sich für die Auslenkung

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left( Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad , \quad (6)$$

wobei  $0 \leq x \leq L$  gelten muss.

## 2.2 Biegen durch beidseitiges Einspannen



**Abbildung 4:** Skizze vom Biegen eines Stabes, der beidseitig aufliegt [3].

Auch hier gibt es wieder Drehmomente, die sich gleichsetzen lassen. Abbildung 4 zeigt das beidseitige Aufliegen, wodurch die Kraft nur die Hälfte beträgt. Mit

$$M_F = -\frac{F}{2}x$$

ergibt sich aus Gleichung 4

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{4EI}x^2 + C \quad , \quad (7)$$

für  $0 \leq x \leq L/2$ . Für  $L/2 \leq x \leq L$  wird zuerst

$$\tilde{x} := L - x \quad (8)$$

berechnet und ebenfalls Gleichung 7 benutzt. Da im tiefsten Punkt des gebogenen Stabes die Auslenkung  $D$  maximal ist, folgt

$$\frac{dD(\frac{L}{2})}{dx} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{FL^2}{16EI} \quad ,$$

woraus sich durch Integrieren von Gleichung 7 schließlich

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \quad (9)$$

ergibt. Schubspannung ~~an~~ kann der Elastizitätsmodul berechnet werden.

Die Dichte eines Metalles ist die Masse pro Volumen und kann mit der Formel

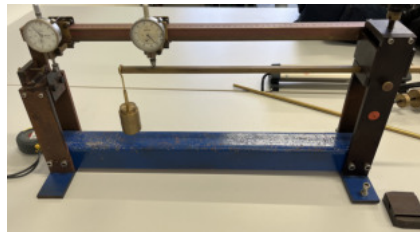
$$\rho = \frac{m}{V} \tag{10}$$

bestimmt werden.

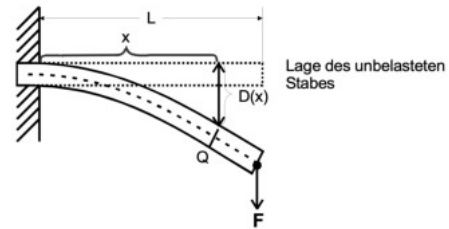
### 3 Durchführung

Die beiden folgenden Messungen wurden zuerst mit einem quadratischen und anschließend mit einem runden Stab durchgeführt. Zudem wird von beiden Stäben die Länge, die Breite oder der Durchmesser und das Gewicht gemessen. Die Messuhren werden vor jeder Messung genullt.

#### 3.1 Biegen durch einseitiges Einspannen



(a)

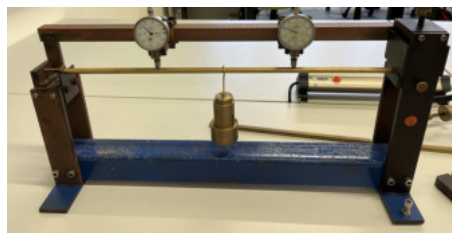


(b)

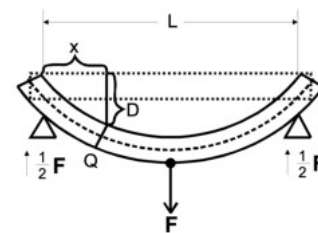
**Abbildung 5:** Die einseitige Biegung eines Stabes als Versuchsaufbau (links) und theoretisch (rechts) [3].

Zu Beginn des Versuches aus Abbildung 5 wird der Stab auf einer Seite in die Messvorrichtung eingespannt und fixiert. Dann wird die Länge des eingespannten Stabes gemessen. Anschließend wird der Abstand der Messuhr mithilfe der Skala an der Messvorrichtung eingestellt und danach genullt. Daraufhin wird ein Gewicht von ungefähr 500 g an den Stab gehängt und der Ausschlag der Messuhr abgelesen. Diese Messung wird analog für 20 Messpunkte auf dem Stab ausgeführt.

#### 3.2 Biegen durch beidseitiges Einspannen



(a)



(b)

**Abbildung 6:** Die beidseitige Biegung eines Stabes als Versuchsaufbau (links) und theoretisch (rechts) [3].

Der Stab wird zuerst mit beiden Seiten in die Messvorrichtung aus Abbildung 6 eingespannt und mithilfe der Schrauben fixiert. Nun wird erneut die Länge des eingespannten Stabes gemessen. Für diesen Teil des Versuches werden zwei Messuhren verwendet, die von den



Enden des Stabes aus um den gleichen Abstand verschoben werden. Beide Messuhren werden genullt, woraufhin ein Gewicht von ungefähr 1000 g in die Mitte des Stabes gehängt wird. Nun kann der Ausschlag der Messuhren abgelesen werden. Daraufhin werden beide Messuhren erneut um den gleichen Abstand verschoben und die Messung wird erneut ausgeführt. Analog werden für beide Seiten des Stabes 13 Werte aufgenommen.

Kein extra Kapitel für die Fehlerrechnung.

## 4 Fehlerberechnung

Fehlerbehaftete Größen werden mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2} \quad (11)$$

bestimmt.

Die Abweichung vom Theoriewert kann mit der Formel

$$A_{\%} = \left| \frac{T - E}{T} \cdot 100 \right| \quad (12)$$

bestimmt werden.

## 5 Auswertung

### 5.1 Bestimmung der Dichte der Metallstäbe

**Tabelle 1:** Messdaten des quadratischen Stabes.

Länge	60,1 cm
Gewicht	(502,4 ± 0,1) g
Seitenlänge	1 cm
Länge, eingespannt (einseitig)	(42,5 ± 0,1) cm
Länge, eingespannt (beidseitig)	(54,9 ± 0,1) cm

**Tabelle 2:** Messdaten des runden Stabes.

Länge	59,1 cm
Gewicht	(390,6 ± 0,1) g
Seitenlänge	1 cm
Länge, eingespannt (einseitig)	40,5 cm
Länge, eingespannt (beidseitig)	54,9 cm

Anhand der Daten aus Tabelle 1 und Tabelle 2 ergibt sich die Dichte nach Gleichung 10 und Gleichung 11 des quadratischen und des runden Stabes wie in Tabelle 3.

**Tabelle 3:** Dichte des runden und des quadratischen Metallstabes.

	Quadratischer Stab	Runder Stab
Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	8,3590 ± 0,0017	8,4150 ± 0,0022

## 5.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls

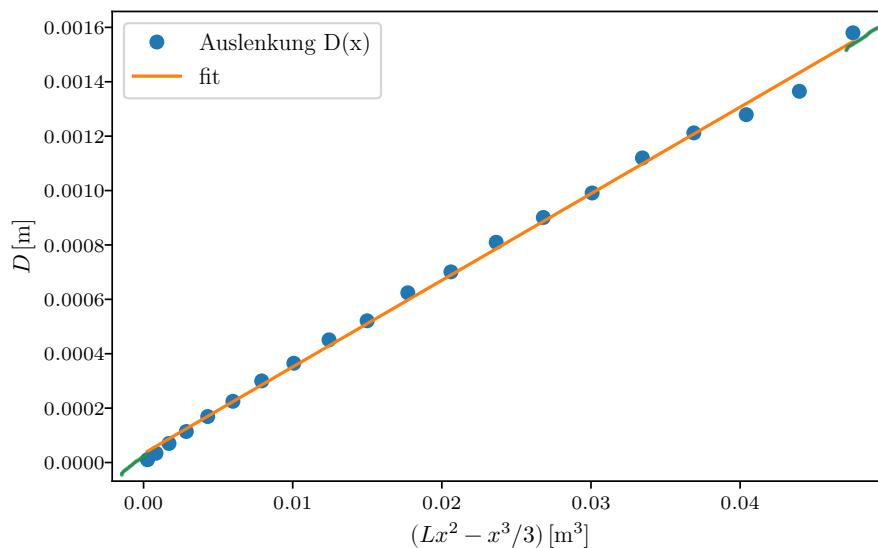
### 5.2.1 Plots der Auslenkung

Um die Elastizitätsmodule zu bestimmen werden die gemessenen Auslenkungen  $D$  auf eine um  $Lx^2 - x^3/3$  (Einseitig) oder  $L^2x - 4x^3$  (Beidseitig) skalierte x-Achse aufgetragen. Die Steigung  $a = F(2EI)^{-1}$ , bzw.  $a = F(48EI)^{-1}$  kann benutzt werden, um  $E$  zu berechnen.

Die Ausgleichsgerade hat die Form  $f(x) = ax + b$ . Diese Koeffizienten sowie ihre Fehler wurden mit *Python* berechnet.

Für die Plots wurden Tabelle 7, Tabelle 8 und Tabelle 9 benutzt.

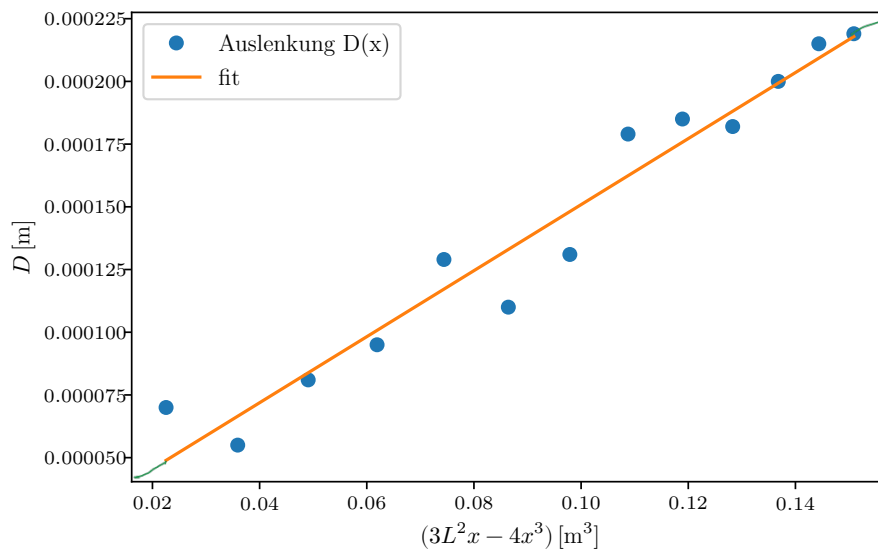
Lineare Regression  
Sollte bis zum  
Rand weiterlaufen.



**Abbildung 7:** Darstellung der Auslenkung des einseitig eingespannten quadratischen Drahtes.

Der Plot aus Abbildung 7 hat die Parameter  $a = (3,184 \pm 0,039) \cdot 10^{-2} 1/m^2$  und  $b = (3,306 \pm 0,953) \cdot 10^{-5} 1/m^2$ .

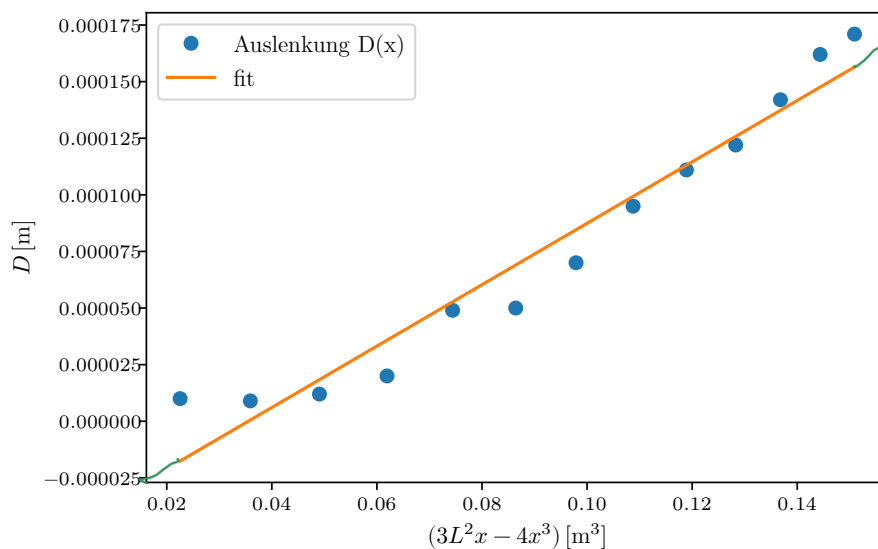
S.o.



**Abbildung 8:** Darstellung der Auslenkung des beidseitig eingespannten quadratischen Drahtes linke Seite.

Der Plot aus Abbildung 8 hat die Parameter  $a = (1,316 \pm 0,092) \cdot 10^{-3} 1/m^2$  und  $b = (1,925 \pm 0,939) \cdot 10^{-5} 1/m^2$ .

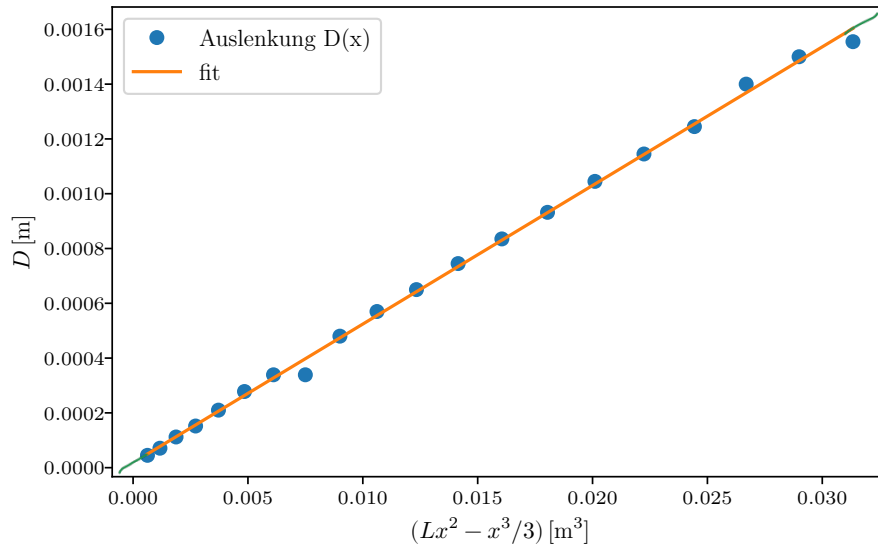
S.o.



**Abbildung 9:** Darstellung der Auslenkung des beidseitig eingespannten quadratischen Drahtes rechte Seite.

Der Plot aus Abbildung 9 hat die Parameter  $a = (1,356 \pm 0,096) \cdot 10^{-3} 1/m^2$  und  $b = (-4,815 \pm 0,980) \cdot 10^{-5} 1/m^2$ .

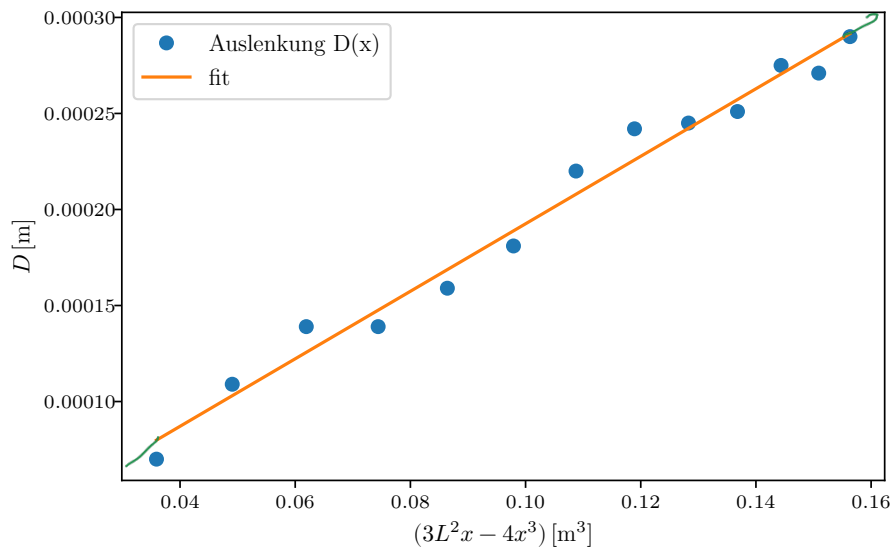
S.O.



**Abbildung 10:** Darstellung der Auslenkung des einseitig eingespannten runden Drahtes.

Der Plot aus Abbildung 10 hat die Parameter  $a = (5,059 \pm 0,049) \cdot 10^{-2} 1/m^2$  und  $b = (1,823 \pm 0,802) \cdot 10^{-5} 1/m^2$ .

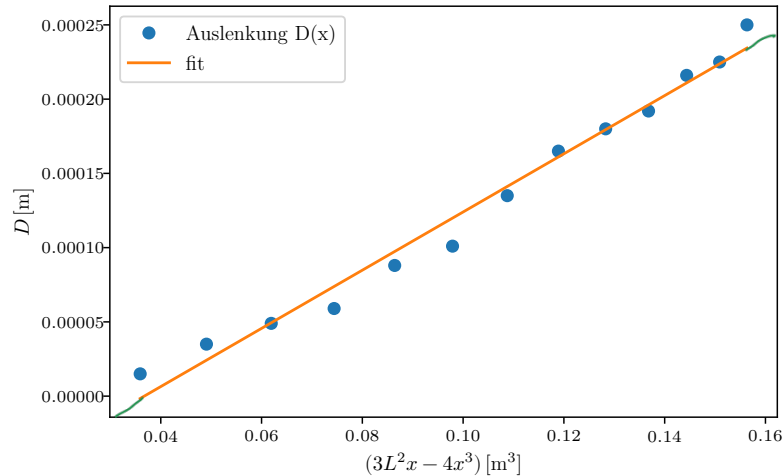
S.O.



**Abbildung 11:** Darstellung der Auslenkung des beidseitig eingespannten runden Drahtes linke Seite.

Der Plot aus Abbildung 11 hat die Parameter  $a = (1,758 \pm 0,074) \cdot 10^{-3} 1/m^2$  und  $b = (1,680 \pm 0,815) \cdot 10^{-5} 1/m^2$ .

S.O.



**Abbildung 12:** Darstellung der Auslenkung des beidseitig eingespannten runden Drahtes rechte Seite.

Der Plot aus Abbildung 12 hat die Parameter  $a = (1,960 \pm 0,082) \cdot 10^{-3} 1/m^2$  und  $b = (-7,196 \pm 0,903) \cdot 10^{-5} 1/m^2$ .

### 5.2.2 Berechnung des Elastizitätsmoduls

Mit Gleichung 6, Gleichung 9 und den mit *Python* bestimmten Steigungen  $a$ , können die Elastizitätsmodule berechnet werden. Zusätzlich muss die Kraft  $F$  über die triviale Formel  $F = mg$  bestimmt werden und die Flächenträgheitsmomente für den runden und quadratischen Stab, mit Gleichung 5. Um beim beidseitigen Einspannen Gleichung 9 benutzen zu können, wurden die Daten im Vorhinein nach Gleichung 8 umgerechnet. Zur Fehlerberechnung wurden zusätzlich die Abweichungen von  $a$  und Gleichung 11 genutzt.

Verweis im Text fehlt.

**Tabelle 4:** Daten für die Berechnung des Elastizitätsmoduls.

Kraft einseitig	4.929 N
Kraft beidseitig	9.853 N
Flächenträgheitsmoment Quadrat	$8,333 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$
Flächenträgheitsmoment Kreis	$4,909 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$
$E_1$ quadratischer Stab einseitig	$(92,89 \pm 1,54) \text{ GPa}$
$E_2$ quadratischer Stab beidseitig links	$(187,20 \pm 1,76) \text{ GPa}$
$E_3$ quadratischer Stab beidseitig rechts	$(181,70 \pm 1,73) \text{ GPa}$
$E_4$ runder Stab einseitig	$(99,24 \pm 0,39) \text{ GPa}$
$E_5$ runder Stab beidseitig links	$(237,80 \pm 0,04) \text{ GPa}$
$E_6$ runder Stab beidseitig rechts	$(213,30 \pm 0,04) \text{ GPa}$

## 6 Diskussion

Durch die Bestimmung der Dichte, mit sehr präzisen Messungen, lässt sich schnell auf den gesuchten Werkstoff schließen. Die Abweichungen zum Theoriewert sind in Tabelle 5 zu sehen. Hierbei handelt es sich wahrscheinlich um Messing.

**Tabelle 5:** Dichte des runden und des quadratischen Metallstabes und Theoriewert für die Dichte von Messing [2] .

	Dichte $[\text{g}/\text{cm}^3]$	Abweichung
Messing	8,4	
Quadratischer Stab	$8,3590 \pm 0,0017$	0,483 %
Runder Stab	$8,4150 \pm 0,0022$	0,179 %

Die bestimmten Elastizitätsmodule aus Tabelle 4 lassen darauf nicht direkt schließen. Da der Elastizitätsmodul von Messing von dessen Zusammenstellung abhängt und somit nur ein Intervall als Theoriewert zu finden ist, wird in Tabelle 6 die Abweichung zu 80 GPa und 103 GPa berechnet.

**Tabelle 6:** Vergleich der durch Messung bestimmten Elastizitätsmodule zum Theoriewert von Messing [1] .

	Elastizitätsmodul [ GPa]	Abw. $E = 80$ GPa	Abw. $E = 103$ GPa
Messing	80-103		
$E_1$	$92,89 \pm 1,54$	16.11 %	9.82 %
$E_2$	$187,20 \pm 1,76$	134 %	81.75 %
$E_3$	$181,70 \pm 1,73$	127.13 %	76.41 %
$E_4$	$99,24 \pm 0,39$	24.05 %	3.65 %
$E_5$	$237,80 \pm 0,04$	197.25 %	130.87 %
$E_6$	$213,30 \pm 0,04$	166.63 %	107.09 %

Es ist zu sehen, dass der Elastizitätsmodul durch das einseitige Messen wesentlich besser zu bestimmen war, als durch das beidseitige. Beide Ergebnisse liegen im Theorieintervall. Die beidseitige Messung lief jedoch katastrophal mit Abweichungen bis fast 200%. Schon an den Plots zum beidseitigen Messen ist zu sehen, dass die Daten sehr voneinander abweichen und es schwer ist, darüber eine Ausgleichsgerade zu legen. Umso erstaunlicher ist der doch geringe Fehler, den *Python* zur Ausgleichsgerade ausgibt und damit ein sehr kleines Fehlerintervall vorgibt. Hierbei lässt sich auf einen systematischen Fehler schließen, da alle Elastizitätsmodule für das beidseitige Einspannen konsequent zu hoch sind. Schon beim Experimentieren ist aufgefallen, dass die linke Messuhr teilweise zehnfach höhere Auslenkungen anzeigt, als die rechte. Insgesamt war der Versuchsaufbau für solch eine präzise Messung ungeeignet. Die Stäbe ließen sich auf der linken Seite wesentlich schlechter einspannen, als auf der rechten. Das Gewicht genau in der Mitte des Stabes zu plazieren war praktisch unmöglich und die Messuhren verrutschten während des Messens. Kleinste Veränderungen, beispielsweise zufälliges Berühren der Messvorrichtung oder dem Tisch, führte dazu, dass die Messuhren einen anderen Wert anzeigten.

Im Anhang sollten die Originalmessdaten als Bilder angehängt werden und die Tabellen wären besser in der Auswertung.

## 7 Anhang

**Tabelle 7:** Messwerte der einseitige Biegung des quadratischen und des runden Stabes.

Quadratisch		Rund	
x[cm]	D(x)[mm]	x[cm]	D(x)[mm]
2,5	$0,01 \pm 0,01$	4	$0,045 \pm 0,001$
4,5	$0,034 \pm 0,001$	5,5	$0,071 \pm 0,001$
6,5	$0,07 \pm 0,01$	7	$0,112 \pm 0,001$
8,5	$0,114 \pm 0,001$	8,5	$0,152 \pm 0,001$
10	$0,169 \pm 0,001$	10	$0,21 \pm 0,01$
12	$0,225 \pm 0,001$	11,5	$0,278 \pm 0,001$
14	$0,30 \pm 0,01$	13	$0,339 \pm 0,001$
16	$0,365 \pm 0,001$	14,5	$0,399 \pm 0,001$
18	$0,451 \pm 0,001$	16	$0,48 \pm 0,01$
20	$0,521 \pm 0,001$	17,5	$0,57 \pm 0,01$
22	$0,624 \pm 0,001$	19	$0,65 \pm 0,01$
24	$0,701 \pm 0,001$	20,5	$0,745 \pm 0,001$
26	$0,81 \pm 0,01$	22	$0,835 \pm 0,001$
28	$0,901 \pm 0,001$	23,5	$0,932 \pm 0,001$
30	$0,991 \pm 0,001$	25	$1,045 \pm 0,001$
32	$1,12 \pm 0,01$	26,5	$1,145 \pm 0,001$
34	$1,212 \pm 0,001$	28	$1,245 \pm 0,001$
36	$1,279 \pm 0,001$	29,5	$1,40 \pm 0,01$
38	$1,365 \pm 0,001$	31	$1,50 \pm 0,01$
40	$1,58 \pm 0,01$	32,5	$1,555 \pm 0,001$



**Tabelle 8:** Messwerte der beidseitige Biegung des quadratischen Stabes.

links		rechts	
x[cm]	D(x)[mm]	x[cm]	D(x)[mm]
2,5	$0,07 \pm 0,01$	2,5	$0,01 \pm 0,01$
4	$0,055 \pm 0,001$	4	$0,009 \pm 0,001$
5,5	$0,081 \pm 0,001$	5,5	$0,012 \pm 0,001$
7	$0,095 \pm 0,001$	7	$0,02 \pm 0,01$
8,5	$0,129 \pm 0,001$	8,5	$0,049 \pm 0,001$
10	$0,11 \pm 0,01$	10	$0,05 \pm 0,01$
11,5	$0,131 \pm 0,001$	11,5	$0,07 \pm 0,01$
13	$0,179 \pm 0,001$	13	$0,095 \pm 0,001$
14,5	$0,185 \pm 0,001$	14,5	$0,111 \pm 0,001$
16	$0,182 \pm 0,001$	16	$0,122 \pm 0,001$
17,5	$0,20 \pm 0,01$	17,5	$0,142 \pm 0,001$
19	$0,215 \pm 0,001$	19	$0,162 \pm 0,001$
20,5	$0,219 \pm 0,001$	20,5	$0,171 \pm 0,001$

**Tabelle 9:** Messwerte der beidseitige Biegung des runden Stabes.

links		rechts	
x[cm]	D(x)[mm]	x[cm]	D(x)[mm]
4	$0,07 \pm 0,01$	4	$0,015 \pm 0,001$
5,5	$0,109 \pm 0,001$	5,5	$0,035 \pm 0,001$
7	$0,139 \pm 0,001$	7	$0,049 \pm 0,001$
8,5	$0,139 \pm 0,001$	8,5	$0,059 \pm 0,001$
10	$0,159 \pm 0,001$	10	$0,088 \pm 0,001$
11,5	$0,181 \pm 0,001$	11,5	$0,101 \pm 0,001$
13	$0,22 \pm 0,01$	13	$0,135 \pm 0,001$
14,5	$0,242 \pm 0,001$	14,5	$0,165 \pm 0,001$
16	$0,245 \pm 0,001$	16	$0,18 \pm 0,01$
17,5	$0,251 \pm 0,001$	17,5	$0,192 \pm 0,001$
19	$0,275 \pm 0,001$	19	$0,216 \pm 0,001$
20,5	$0,271 \pm 0,001$	20,5	$0,225 \pm 0,001$
22	$0,29 \pm 0,01$	22	$0,25 \pm 0,01$

## Literatur

- [1] Dieter (Editor) Geschke. *Physikalisches Praktikum. 11. Auflage.* Teubner, 1998. ISBN: 978-3-519-00206-2.
- [2] Dieter (Editor) Geschke. *Physikalisches Praktikum. Mit multimedialen Ergänzungen.* Teubner, 2001. ISBN: 978-3-8351-9081-8.
- [3] *Moodle-Skript: "Versuchsanleitung V103 Biegung elastischer Stäbe".* TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.

