V351

Fourier-Analyse und Synthese

Sophia Brechmann
sophia.brechmann@tu-dortmund.de

Simon Kugler
simon.kugler@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.11.2023 Abgabe: ~~05.12.2023~~

21.11.

- Kommentar
- Anmerkung (keine Korrektur notwendig)
- (Bitte korrigieren)

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuchs ist es eine Funktion in ihre Fourieranteile zu zerlegen und aus Fourieranteilen eine Funktion synthetisieren.

2 Theorie

[1] Fourier-Analysen werden in der Physik oft zur Bildverarbeitung verwendet. Die Grundvorraussetzung hierfür sind periodische Funktionen, die zeitlich periodisch

$$f(t+T) = f(t)$$

oder räumlich periodisch

$$f(x+D) = f(x)$$

sein können. Beispiele für periodische Funktionen sind Sinus- und Kosinusfunktionen. Mit diesen beiden Funktionen können viele periodische Vorgänge in der Natur beschrieben werden. Hierfür wird das Fouriersche Theorem verwendet, welches wie folgt aussieht:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}t) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T}t)) \tag{1}$$

Wenn die Reihe gleichmäßig konvergiert, stellt sie eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode T dar. Dies ist immer dann der Fall, wenn $f(t)$ stetig ist. An Stellen, an denen f unstetig ist, kann die Fourier-Reihe die Funktion nicht approximieren und es entsteht eine endliche Abweichung. In Formel 1 kommen nur die Phasen $0, \pi/2$ und $3\pi/2$ und π vor. Außerdem treten nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\nu = \frac{1}{T}$ auf. Als Grundfrequenz wird die Frequenz des periodischen Vorgangs beschrieben. Die Koeffizienten a_n und b_n werden wie folgt berechnet

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi n}{T}t)\,\mathrm{d}t \ , n = 1, 2, ... \tag{2}$$

Übersichtlicher: Nur nummerieren, wenn ihr nochmal auf die Gleichung verweist

und

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi n}{T}t)\,\mathrm{d}t \ , n = 1, 2, ... \tag{3}$$

Für gerade Funktionen gilt $f(t) = f(-t)$ und somit verschwinden alle Koeffizienten b_n. Bei ungerade Funktionen verschwinden alle a_n, da $f(t) = -f(-t)$ gilt.

Mit der Fourier-Transformation

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

kann das gesamte Frequenzspektrum einer Funktion bestimmt werden. Das Frequenzspektrum einer nicht-periodischen Funktion ist kontinuierlich, während das einer periodischen

Funktion aus einer Reihe von δ-Funktionen besteht. Die Transformation lässt sich auch wieder umkehren mit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}\omega \,. \tag{5}$$

Da oft nicht über unendliche Zeiträume integriert werden kann, wird die Integration auf einen endlich langen Zeitraum beschränkt.

3 Vorbereitungsaufgaben

Die Vorbereitungaufgabe ist es die Fourier-Koeffizienten von 3 verschiedenen periodischen Schwingungsformen zu berechnen. Die Funktionen werden als gerade oder ungerade Funktionen definiert, um das Wegfallen der Koeffizienten auszunutzen.

3.1 Rechteckspannung

Die Funktion wird definiert als

$$f(t) = \begin{cases} V, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -V, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Da sie ungerade ist, gilt $a_n = 0 \, \forall \, n$. Die Koeffizienten b_n lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\frac{2\pi n}{T} t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{T} \Big(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} V \sin(\frac{2\pi n}{T} t) \, \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{T}{2}} (-V) \sin(\frac{2\pi n}{T} t) \, \mathrm{d}t \Big) \\ &= \frac{2}{T} \Big(\Big[-V \frac{T}{2n\pi} \cos(\frac{2\pi n}{T} t) \Big]_{-\frac{T}{2}}^{0} + \Big[V \frac{T}{2n\pi} \cos(\frac{2\pi n}{T} t) \Big]_0^{\frac{T}{2}} \Big) \\ &= \frac{V}{n\pi} (-1 + \cos(-n\pi) + \cos(n\pi) - 1) = \frac{2V}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \\ \Rightarrow b_n &= -\frac{4V}{n\pi} \text{ für n ungerade} \end{aligned}$$

Die Amplitude der Rechteckspannung nimmt mit $1/n$ ab.

3.2 Dreieckspannung

Die Funktion wird definiert als

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4V}{T} t + V, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -\frac{4V}{T} t + V, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Die Funktion ist gerade, also gilt $b_n = 0 \,\forall\, n$. Die Koeffizienten a_n lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi n}{T}t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{T}\Bigg(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(\frac{4V}{T}t+V)\cos(\frac{2\pi n}{T}t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{T}{2}}(-\frac{4V}{T}t+V)\cos(\frac{2\pi n}{T}t)\,\mathrm{d}t\Bigg)
\end{aligned}$$

Mit partieller Integration und einsetzten der Grenzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{4V}{\pi^2 n^2}(\pi n\sin(n\pi) + cos(n\pi) - 1)\\
\Rightarrow a_n &= \frac{8V}{\pi^2 n^2} \text{ für n ungerade}
\end{aligned}$$

Die Amplitude der Rechteckspannung nimmt mit $1/n^2$ ab.

3.3 Sägezahnspannung

$$f(t) = \frac{V}{T}\cdot t,\; 0 \leq t \leq T$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt $a_n = 0 \,\forall\, n$. Die Koeffizienten b_n lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi n}{T}t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{T}\Bigg(\Bigg[-\frac{VT}{2n\pi}\cos(\frac{2\pi n}{T}t)\Bigg]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(\frac{VT}{2n\pi}\cos(\frac{2\pi n}{T}t)\,\mathrm{d}t\Bigg)\\
&= \frac{1}{T}\Big(-\frac{VT}{2n\pi}\cos(n\pi) - \frac{VT}{2n\pi}\cos(n\pi)\Big)\\
\Rightarrow b_n &= -\frac{V}{2n\pi}(-1)^n
\end{aligned}$$

Diesen Term ruhig nummerieren und später drauf verweisen

Die Amplitude der Rechteckspannung nimmt mit $1/n$ ab.

4 Durchführung

Der Versuch besteht aus zwei Teilen, der Synthese und der Analyse der Fuorier-Transformation. Der Versuchsaufbau zur Synthese besteht aus 4 Geräten. Der Oberwellengenerator erzeugt die Schwingungen, welche zum Synthetisieren gebraucht werden. Ein digitales Oszilloskop ist zur Visualsierung der Wellen und späteren Fuorier-Analyse angeschlossen. Außerdem gibt es einen Scanner, welcher zum Ablesen und Messen der Amplituden genutzt wird, welcher auf einem Funktionen-Erzeuger steht, mit dem verschieden aussehende Schwingungen erzeugt werden können.

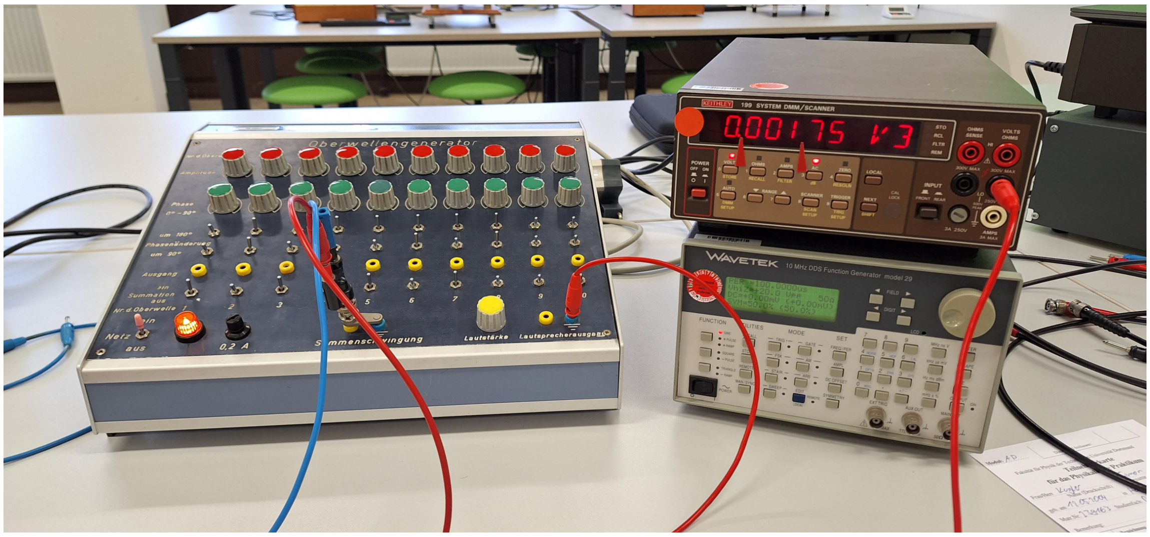

Abbildung 1: Oberwellengenerator, Funktions Erzeuger und Scanner während des Versuchs.

4.1 Synthese verschieden aussehender Schwingungen

Um verschieden aussehende Schwingungen zu synthetisieren, werden mit dem Oberwellengenerator verschiedene Oberwellen erzeugt, welche jeweils in verschiedenen Phasen geschaltet eine Dreiecks-, Sägezahn- oder Rechtecksschwingung ergeben sollen. Um für die Wellen die richtigen Amplituden zu finden, werden die in der Vorbereitungsaufgabe berechneten Koeffizienten benötigt. Mit der jeweilig errechneten $^1/_n$-Abhängigkeit wird die Amplitude des Obertons für $n \in \{1, 9\}$ durch n dividiert, um jeweils die richtige Amplitude für die n-te Oberwelle einzustellen. Außerdem wird die Phase der Oberwellen so eingestellt, dass sie mit dem Oberton übereinstimmt. Dies wird jeweils nur bei den in der Vorbereitungsaufgabe bestimmten n-ten Wellen eingestellt, für die die jeweilige Abhängigkeit gilt.

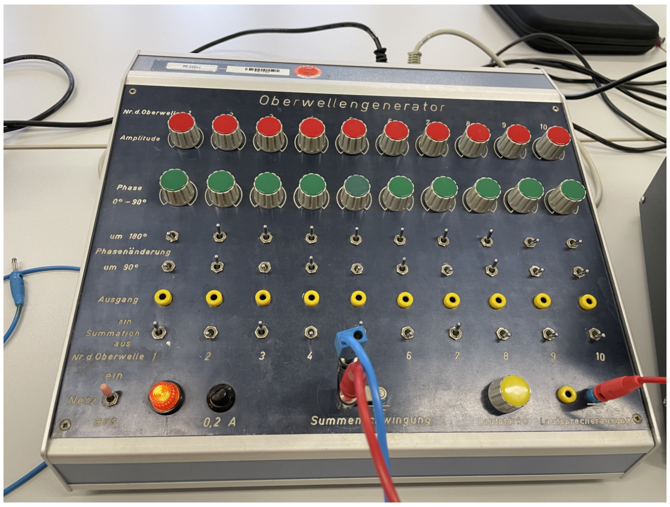

Abbildung 2: Der Oberwellengenerator zum Einstellen der Oberwellen sowie derer Amplituden und Phasen.

Franzose

4.2 Fuorier-Analyse

Es werden am Funktions-Generator verschiedene Schwingungen eingestellt und mit dem Oszilloskop verbunden um sie zu visualsieren. Eine Frequenz von 10 000 kHz wird vorgewählt. Um eine Fuorier-Analyse durchzuführen, muss am Oszilloskop der Mathe-Modus angewählt und die Einstellung „FFT“ für „Fast Fuorier transformation“ eingestellt werden. Das Sichtfenster und der Frequenz-Teiler werden so eingestellt, dass die Funktion sowie alle Peaks der Zerlegung gut zu erkennen sind um die Messung der Peaks durchzuführen. Dafür wird ein Courser auf dem Bildschirm eingestellt, mit dessen Hilfe nach richtigem justieren auf einen Peak x und y Werte abgelesen werden können. Der x-Wert ist angegeben in kHz, der y-Wert in Dezibel. Es werden die Peaks für eine Sägezahn-, Dreiecks- und Rechtecksschwingung gemessen.

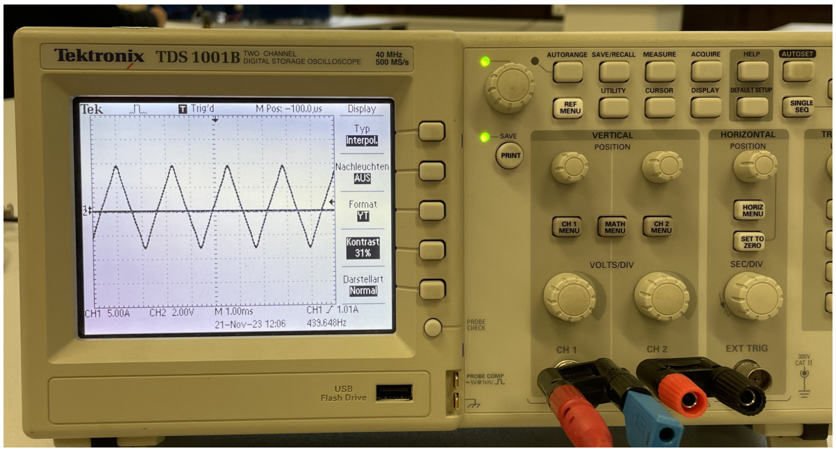

Abbildung 3: Das zur Fuorier-Analyse verwendete Oszilloskop.

5 Auswertung

Der erste Teil der Auswertung befasst sich mit der Fuorier-Synthese, der zweite mit der Analyse.

5.1 Fuorier-Synthese

Wie schon in der Durchführung beschrieben, werden hier verschiedene Schwingungsmuster aus verschiedenen Oberwellen synthetisiert. Zuerst wird durch einstellen jeder $(1 + 2n)$-ten Oberwelle und Anpassung der Amplituden nach $1/n$ sowie der Phase versucht eine Rechtecksschwingung zu approximieren. Dies funktioniert, so wie auch bei den anderen beiden, durch einzelnes Schalten der Phasenverschiebung um 90 oder 180 Grad an den eingeschalteten Oberwellen.
Für die Rechtecksschwingung wurden die als ungerade nummerierten Oberwellen eingeschaltet und das folgende Bild erzeugt. hier z.B. Verweis auf theo. Rechnung

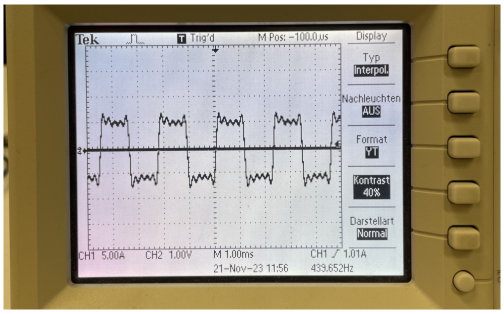

Abbildung 4: Synthetisierte Rechtecksschwingung.

Da bei den letzten Oberwellen durch die kleine Amplitude ein hohes Rauschen im Bild des Oszilloskop durch die sehr kleine Amplitude zu verzeichnen war, wurden nicht alle möglichen Oberwellen zugeschaltet.

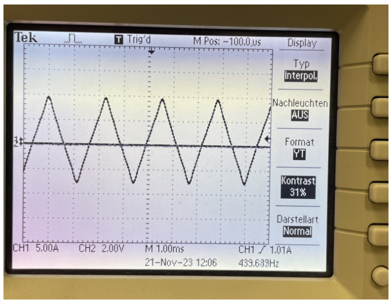

Abbildung 5: Synthetisierte Dreiecksschwingung.

Die Dreiecksschwingung wird ebenfalls mit allen ungeraden Oberwellen generiert, jedoch fallen die Amplituden mit $1/n^2$. Daher wird hier deutlich früher eine kleine Amplitude erreicht, weshalb auch deutlich früher ein starkes Rauschen auftritt.

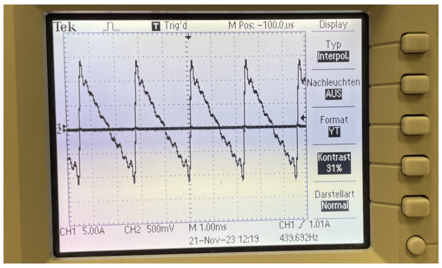

Abbildung 6: Synthetisierte Sägezahnschwingung.

5.2 Fuorier-Analyse

Exponent

Da die Amplituden vom Oszilloskop in Dezibel angegeben sind, mussten diese zur Berechnung des Fits in Volt umgerechnet werden. Dazu wird die Formel $1V = 10\mathrm{dB}/20$ genutzt. Diese ist zwar nur bis auf einen Vorfaktor korrekt, dieser ist jedoch zur Bestimmung des Funkionsverlaufes vernachlässigbar, da nur die $1/n$-Abhängigkeit wichtig ist.
Es sollen die $1/n$-Abhängigkeiten der verschiedenen Schwingungsmuster untersucht werden. Dazu werden die am Oszilloskop abgelesenen Messwerte geplottet und eine Funktion der Form $U(\nu) = a \cdot x^b$ gefittet. Der Koeffizent b gibt Aufschluss über die besagte $1/n$-Abhängigkeit. Für die Fuorier-Analyse der Rechtecksschwingung wird ein Abfall von $1/n^1$ der Peaks erwartet. Mittels Python lässt sich folgender Fit plotten sowie die Koeffizienten a und b ermitteln. Da die Amplituden vom Oszilloskop in Dezibel angegeben sind, mussten diese zur Berechnung in Volt umgerechnet werden.

ν statt x

$$a = (896{,}8 \pm 4{,}6)\,\mathrm{V\,s} \cdot 10^{-3}$$
$$b = -1.003 \pm 0.002$$

Es liegt also eine Kurve mit einer genäherten $1/n$-Abhängigkeit vor, so wie erwartet.

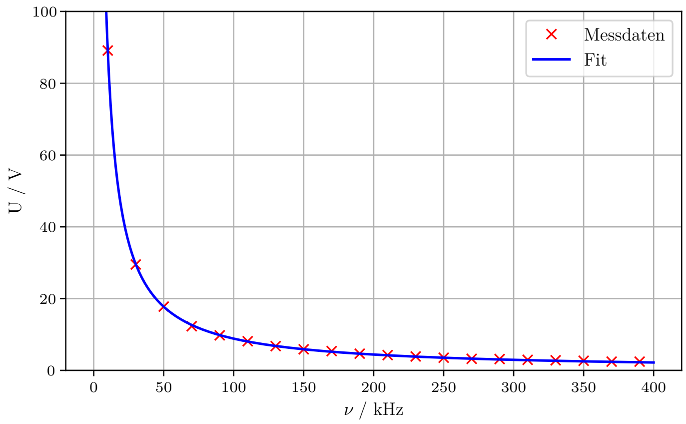

Abbildung 7: Messwerte und Fit zur Fourier-Analyse der Rechtecksschwingung.

Wie schon diskutiert, fällt die Amplitude bei der Dreiecksschwingung mit $1/n^2$, sodass hier deutlich weniger Messwerte abzulesen waren. Dieses Ergebnis spiegelt sich auch im

Koeffizienten b wieder.

$$a = (5570{,}0 \pm 38{,}7)\,\mathrm{V\,s}^2 \cdot 10^{-6}$$
$$b = -1.996 \pm 0.003$$

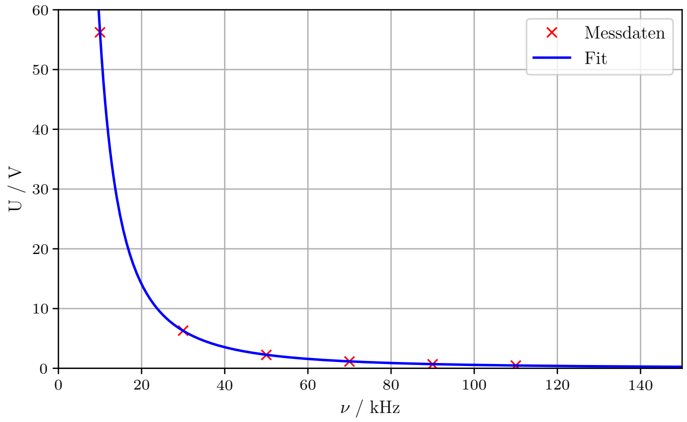

Abbildung 8: Messwerte und Fit zur Fourier-Analyse der Dreiecksschwingung.

Für die Sägezahnschwingung gibt es wieder deutlich mehr Messwerte, da wieder eine $1/n$-Abhängigkeit in der Kurve zu erwarten ist und die Peaks im Abstand von 10 kHz vorkommen.

$$a = (443{,}008 \pm 2{,}415)\,\mathrm{V\,s} \cdot 10^{-3}$$
$$b = -0.997 \pm 0.002$$

Einheiten wären präzise $Vs^{-b} \sim Vs^1$

Wieder ist ein Koeffizient b bestimmt worden, der sehr nah an dem Theorie-Wert liegt.

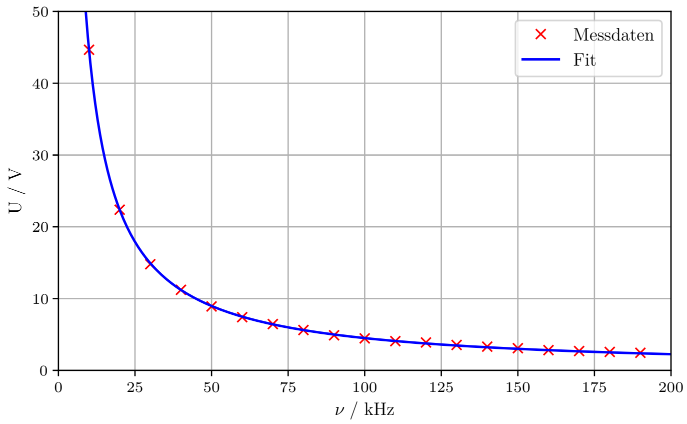

Abbildung 9: Messwerte und Fit zur Fourier-Analyse der Sägezahnschwingung.

6 Diskussion

Der zur Erzeugung verschiedener Oberwellen genutzte Oberwellengenerator stellte sich als fehlerhaft heraus. Die Amplitude der ersten Oberwelle änderte sich mit an- und abschalten des Schalters „Summation“ an der ersten Obewelle. Der Schalter wurde daraufhin für die Dauer der Durchführung auf „ein“ gelassen, da dort einereseits die höhere Amplitude zu verzeichnen war, andererseits wird die erste Oberwelle immer gebraucht.
Dieser Fehler hat jedoch zu keinem Zeitpunkt die Durchführung eingeschränkt oder verkompliziert. Durch leichtes Rauschen der Apparatur konnten bei der Synthese die Amplituden der letzten Oberwellen nur schwierig bis garnicht einstellen, vor allem stellte sich dieses Problem bei der Dreieckspannung durch die $^1/_{n^2}$-Abhängigkeit der Amplitude dar. Die Synthese konnte trotzdem gut durchgeführt werden, da die größerzahligen Oberwellen einen immer kleineren Beitrag zum Gesamtbild leisten. Die Ergebnis-Bilder der Synthese sahen also so aus wie erwartet.
Das schon erwähnte Rauschen machte das Messen hier im Berech kleiner Amplituden wieder schwierig bis unmöglich. Daher wurde die Messung der Peaks bei der Analyse abgebrochen, sobald das Rauschen zu groß wurde. Bis dorthin wurden jedoch sehr sinnvolle Messwerte abgelesen, die jeweils sehr nah am Theoriewert, jedoch leicht außerhalb der von Python errechneten Fehlertoleranz liegen. Die Abweichung beträgt zwei mal $0,3\%$, ein mal liegt sie bei $0,4\%$. Bei der größeren Abweichung ist der errechnete Fehler jedoch auch leicht erhöht. Abschließend lässt sich also sagen, dass die Synthese sowie die Analyse gute, zu erwartende Ergebnisse geliefert haben.

7 Anhang

Tabellen würde ich zu den Plots in die Auswertung parken

Tabelle 1: Messdaten zur Rechtecksschwingung.

ν / kHz	U / V	dB	ν / kHz	U / V	dB
10	89.12	39.0	210	4.26	12.6
30	29.51	29.4	230	3.89	11.8
50	17.78	25.0	250	3.54	11.0
70	12.30	21.8	270	3.23	10.2
90	9.77	19.8	290	3.16	10.0
110	8.12	18.2	310	2.95	9.41
130	6.76	16.6	330	2.82	9.01
150	5.88	15.4	350	2.69	8.61
170	5.37	14.6	370	2.45	7.81
190	4.67	13.4	390	2.45	7.81

Tabelle 2: Messdaten zur Dreiecksschwingung.

ν / kHz	dB	U / V	dB
10	56.23	35.0	
30	6.30	16.0	
50	2.24	7.01	
70	1.14	1.21	
90	0.67	-3.39	
110	0.46	-6.59	

Tabelle 3: Messdaten zur Sägezahnschwingung.

ν / kHz	U / V	dB	ν / kHz	U / V	dB
10	44.66	33.0	110	4.07	12.2
20	22.38	27.0	120	3.89	11.8
30	14.79	23.4	130	3.54	11.0
40	11.22	21.0	140	3.31	10.4
50	8.91	19.0	150	3.09	9.81
60	7.41	17.4	160	2.82	9.01
70	6.45	16.2	170	2.69	8.61
80	5.62	15.0	180	2.57	8.21
90	4.89	13.8	190	2.45	7.81
100	4.46	13.0			

V351 Fourieranalyse und Synthese

> Rechteckspannung

Frequenz f in ~~Hz~~ kHz	Lautstärke in dB
~~100~~	~~39,0~~
~~300~~	~~29,4~~
~~500~~	~~25,0~~
~~700~~	~~20,2~~
10	39,0
30	29,4
50	25,0
70	21,8
90	19,8
110	18,2
130	16,6
150	15,4
170	14,6
190	13,4
210	12,6
230	11,8
250	11,0
270	10,2
290	10,0
310	9,41
330	9,01
350	8,61
370	7,81
390	7,81

> Dreiecksspannung

f in kHz	Lautstärke in dB
10	35,0
30	16,0
50	7,01
70	1,21
90	-3,39
110	-6,59

> Sägezahnspannung

f in kHz	Lautstärke in dB
10	33,0
20	27,0
30	23,4
40	21,0
50	19,0
60	17,4
70	16,2
80	15,0
90	13,8
100	13,0
110	12,2
120	11,8
130	11,0
140	10,4
150	9,81
160	9,01
170	8,61
180	8,21
190	7,81

Literatur

[1] *Versuchsanleitung zum V351*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.

Schönes Protokoll!