V206

Wärmepumpe

Sophia Brechmann
sophia.brechmann@tu-dortmund.de

Simon Kugler
simon.kugler@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.12.2023 Abgabe: 19.12.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es, den Wirkungsgrad bzw. vor allem die reale Güteziffer einer Wärmepumpe zu bestimmen.

2 Theorie

Das System einer Wärmepumpe besteht aus zwei Reservoiren, die während des Betriebs der Pumpe verschiedene Tem eperaturen aufweisen. Thermodynamische Beobachtungen zeigen, dass sich in einem abgeschlossenen System, die Wärmeenergie immer von warm zu kalt begibt. Diesen Prozess umzukehren bewirkt die Wärmepumpe. Dies kann jedoch nur mit verrichteter Arbeit geschehen. Um den Wirkungsgrad einer Wärmepumpe zu quantifizieren, wird die Güteziffer ν eingeführt. Sie wird über den ersten Hauptsatz der Thermodynamik hergeleitet und berechnet sich über

$$\nu = Q_1/A\,.$$

Dabei ist Q_1 die vom Transportmedium an das wärmere Reservoir abegebene Wärme und A die dafür verwendete Arbeit. ν stellt also das Verhältnis zwischen übergebener Wärme und dafür benötigter Arbeit dar. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich folgender idealisierter Ausdruck für das Verhältnis der übertragenen Wärme und deren Temperaturen herleiten

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0\,.$$

Da hierfür gefordert ist, dass die Wärmeübertagung sowie die dafür aufgewandte Arbeit komplett reversibel sei, gilt für reale Systeme

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0\,.$$

Aus diesen Feststellungen lässt sich für die ideale und reale Güteziffer der Ausdruck

$$\begin{aligned} \nu_{\text{ideal}} &= \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \\ \nu_{\text{real}} &< \frac{T_1}{T_1 - T_2} \end{aligned} \tag{1}$$

finden. Aus diesen Ausdrücken ist zu erkennen, dass eine Wärmepumpe bei kleinen Temperaturdifferenzen einen höheren Wirkunsgrad hat als bei großen. Die von der Wärmepumpe transportierte Energie ist eine Phasenumwandlungsenergie. Das bedeutet, dass das als Transportmedium verwendete Gas beim Verdampfen Wärme aufnimmt und diese beim Kondensieren wieder abgibt, worin schließlich die Energieübertragung liegt. In Abbildung 1 ist der Aufbau einer Wärmepumpe, sowie die zum Durchführen des Versuchs nötigen Anbauten skizziert. Zunächst wird am flüssigen Teil des Mediums die Temeperatur T_1 sowie der Druck p_{b} gemessen. Nach Durchfließens des Dorsselventils D

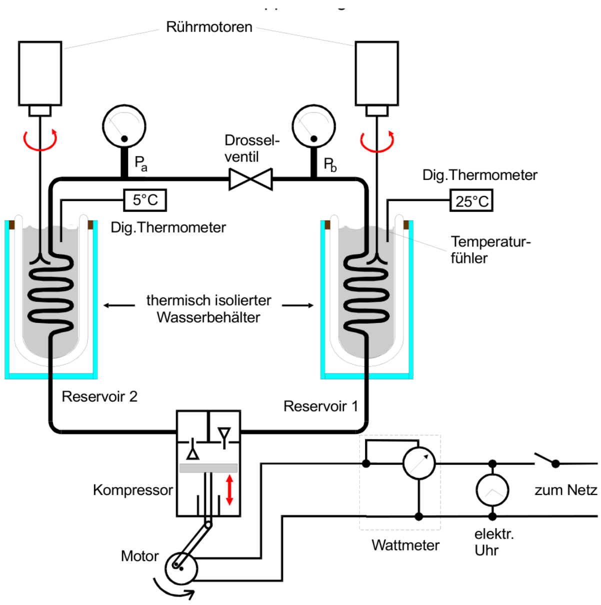

Abbildung 1: Die im Versuch verwendete Messapparatur der Wärmepumpe. [1]

verdampft die Flüssigkeit und es werden die Temeperatur T_2 sowie der Druck p_a gemessen. Dabei werden die Temeperaturen jeweils in einem Reservoir gefüllt mit Wasser gemessen, durch das sich spiralenförmig Leitungen, gefüllt mit dem Transportmedium, befinden. Um die Temeperatur im jeweils ganzen Reservoir konstant zu halten, sind in beiden Rührmotoren eingebaut, um das Wasser ständig zu mischen. Die jeweils übertragene Energie wird in Kondensations- bzw. Verdampfungswärme L pro Gramm Stoff angegeben. Wichtig für den realen Betrieb ist außerdem der Reiniger R, der dafür sorgt dass die Flüssigkeit frei von Gasbläschen ist. Anderesherum sorgt die Steuereinheit S dafür, dass nur reines Gas ohne Flüssigkeit in den Kompressor gelangt. Um die schon definierte reale Güteziffer aus einer Messreihe der Temeperatur in Abhängigkeit der Zeit zu bestimmen, wird erst die pro Zeit gewonnen Wärmemenge definiert mit

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_\mathrm{w} + m_\mathrm{k} c_\mathrm{k}) \frac{\Delta T_1}{\Delta t} \,.$$

Die Wärmekapazität des Kupferrohrs sowie des Eimers werden durch $m_\mathrm{k} c_\mathrm{k}$ beschrieben, die Wärmekapazität des Wassers im ersten Reservoir durch $m_1 c_\mathrm{w}$. Mit der neuen Variable N, welche die über Δt zeitlich gemittelte Leistung des Wattmeters angibt, ergibt sich für die Güteziffer

$$\nu = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t \, N} \,. \tag{2}$$

Analog zur ersten Temperaturmessung ergibt sich für die zweite Temperaturmessung

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = (m_2 c_\mathrm{w} + m_\mathrm{k} c_\mathrm{k}) \frac{\Delta T_2}{\Delta t} \tag{3}$$

als Differenzenqueotient. Daraus ergibt sich bei bekannter Verdampfungswärme L eine Formel, aus der sich der Massendurchsatz bestimmen lässt

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = L \frac{\Delta m}{\Delta t} \,. \tag{4}$$

Für die Arbeit A_{m}, welche der Kompressor leisten muss, um ein Gasvolumen von V_{a} auf V_{b} zu verringen, gilt

$$A_{\mathrm{m}} = -\int_{V_{\mathrm{a}}}^{V_{\mathrm{b}}} p \,\mathrm{d}V.$$

Über die Annahme, die Kompression verlaufe adiabatisch und den damit geltenen Poissonsche Gleichung ergibt sich für die mechanische Kompressorleistung

$$N_{\text{mechanisch}} = \frac{\Delta A_{\mathrm{m}}}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_{\mathrm{b}} \sqrt{\frac{p_{\mathrm{a}}}{p_{\mathrm{b}}}} - p_{\mathrm{a}} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} \,. \tag{5}$$

Bei Druck p_{a} ist ρ die Dichte des gasförmigen Tansportmediums.

3 Durchführung

Bevor die Messung gestartet wird, müssen beide Reservoirs mit jeweils 3 Litern Wasser gefüllt werden. Dies geschieht mithilfe eines ein-Liter-Glaskolbens und Leitungswasser. Sind die Reservoirs voll, werden sie in die Apparatur eingesetzt und alle Messinstrumente eingeschaltet. Ebenso werden die Rührer, welche sich jeweils in den Reservoirs befinden, eingeschaltet. Die Messung beginnt mit Einschalten des Kompressors. Ab dann werden minütlich die verschiedenen Messinstrumente zyklisch abgelesen, bis das warme Reservoir eine Temperatur von 50 °C oder das kalte 0 °C erreicht hat.

4 Auswertung

In Tabelle **??** sind beide gemessenen Temperaturen, Drücke sowie die Arbeit in Abhängigkeit der Zeit aufgetragen. Die Messunsicherheiten betragen ±0,1 °C für beide Temperaturen, ±0,5 mbar für beide Drücke sowie ±5 W für die Arbeit.

Tabelle 1: Die Messwerte beider Drücke, der Temperaturen beider Reservoirs sowie die Arbeit zu verschiedenen Zeiten.

t / min	T_1 / °C	p_b / mbar	T_2 / °C	p_a / mbar	A / W
1	21,5	4,4	21,0	4,1	150
2	22,0	6,0	21,0	1,4	165
3	22,8	6,2	21,0	1,6	175
4	23,8	6,6	20,4	2,0	185
5	26,7	7,5	17,4	2,1	200
6	28,5	8,0	15,6	2,2	200
7	30,3	8,2	13,9	2,2	200
8	32,0	8,6	12,2	2,2	205
9	33,7	9,0	10,6	2,2	205
10	35,4	9,4	9,0	2,2	206
11	37,0	9,7	7,5	2,2	210
12	38,5	10,1	6,2	2,3	210
13	40,1	10,4	5,1	2,3	210
14	41,6	10,8	4,1	2,3	210
15	43,0	11,0	3,4	2,3	210
16	44,4	11,5	2,8	2,3	210
17	45,6	11,7	2,2	2,3	210
18	46,8	12,0	1,7	2,3	210
19	48,0	12,2	1,3	2,3	210
20	49,0	12,5	0,9	2,2	205
21	50,0	12,8	0,4	2,2	205

4.1 Ausgleichsrechnung

Abbildung 2 zeigt die Messwerte der Messreihen für T_1 und T_2 sowie die Plots einer nichtlinearen Ausgleichsrechnung der Messwerte. Für die Ausgleichsrechnung werde die Funktion

$$T(t) = at^2 + bt + c \tag{6}$$

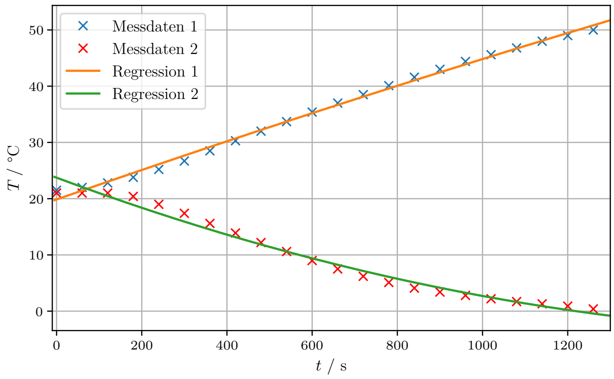

Abbildung 2: Die Temperatur in Abhängigkeit der Zeit der beiden Reservoire.

gewählt. Mittels Python werden folgende Werte errechnet

$$a_1 = (-1{,}5 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-6}\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}^2} \qquad a_2 = (7{,}2 \pm 1{,}8) \cdot 10^{-6}\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}^2}$$

$$b_1 = (2{,}6 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-2}\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}} \qquad b_2 = (-2{,}8 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-2}\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$

$$c_1 = (19{,}9 \pm 0{,}4)\,°\mathrm{C} \qquad c_2 = (23{,}7 \pm 0{,}7)\,°\mathrm{C}$$

wobei die Werte mit dem Index 1 den Verlauf der blauen Kurve beschreiben und die Werte mit dem Index 2 den der orangenen Kurve beschreiben. Die Fehler berechnen sich über Scipy mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung, welche durch die Formel

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2} \tag{7}$$

beschrieben wird. Dabei ist f die zur Berechnung genutzte Formel, x_i dessen Variablen und Δx_i die jeweilige Unsicherheit.

4.2 Berechnung der Differentialquotienten

Die Differentialquotienen ${}^{\mathrm{d}T_i}/_{\mathrm{d}t}$ berechnen sich durch einsetzen von t in die Ableitung von Gleichung 6, $T'(t) = 2at + b$. Die errechneten Werte der Ableitung sind in Tabelle **??** dargestellt.

t/s	$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}$ / °C/s	$\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}$ / °C/s	N/W
300	$0,029 \pm 0,002$	$-0,027 \pm 0,004$	200
600	$0,026 \pm 0,003$	$-0,021 \pm 0,005$	206
900	$0,023 \pm 0,004$	$-0,015 \pm 0,006$	210
1200	$0,021 \pm 0,004$	$-0,008 \pm 0,007$	205

Tabelle 2: Differentialquotienten für vier Zeiten der zwei Temperaturverläufe.

4.3 Berechnung der Güteziffer

Die ideale Güterziffer lässt sich über Gleichung 1 berechnen. Die reale Güteziffer wird mit Gleichung 2 berechnent. Hierbei gilt $m_1 = 3\,\text{kg}$ und $c_w = 4200\,\text{J}/(\text{kg K})$. Die Wärmekapazität der Kupferschlange und der Reservoire ist $m_\text{k}c_\text{k} = 750\,\text{J/K}$. Die Güteziffern sind in Tabelle 3 aufgeführt.

t/s	ν_ideal	ν_real für T_1	$\Delta\nu$
300	22,38	$1,9 \pm 0,1$	20,48
600	9,51	$1,7 \pm 0,2$	7,81
900	6,63	$1,5 \pm 0,3$	5,13
1200	5,52	$1,4 \pm 0,3$	3,12

Tabelle 3: Ideale und reale Güteziffer für vier Zeiten und deren Abweichung.

4.4 Die Verdampfungswärme L

Die Verdampfungswärme des Transportgases kann aus seiner Dampfdruckkurve bestimmt werden. Die Dampfdruck-Kurve wird aus den Messwerten T_1 und p_b gewonnen. Dafür wird der Logarithmus der Drucks p_b gegen die reziproke absolute Temperatur T_1 aufgetragen.

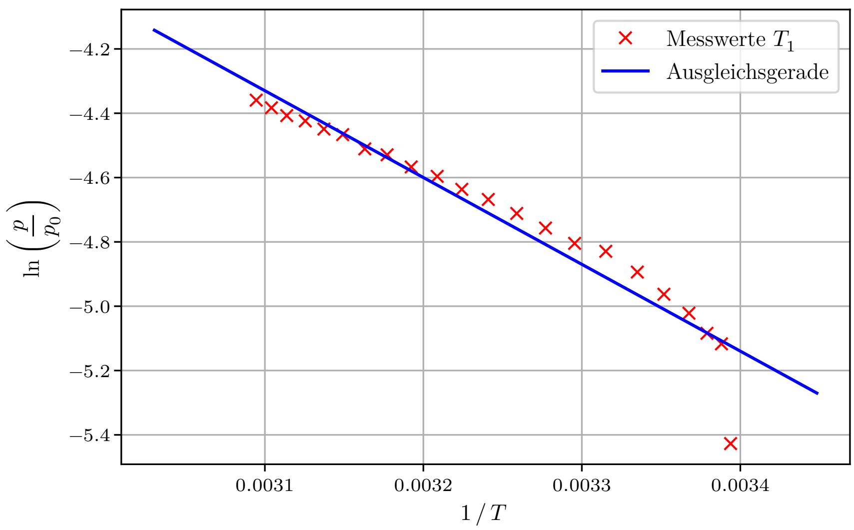

Abbildung 3: Die Messwerte des warmen Reservoirs aufgetragen als der Logarithmus der Drucks p_b gegen die reziproke absolute Temperatur T_1 mit der Ausgleichsgeraden. $p_0 = 1001\,\text{mbar}$

Die Gleichung zur Bestimmung von L und dem damit einhergehenden Fit ist

$$\ln(p) = -\frac{L}{R} \cdot \frac{1}{T} \Rightarrow y = m \cdot x + b\,. \tag{8}$$

Nummeric Python berechnet $m = (2726 \pm 179)\,\mathrm{K}$ und $b = 4.1 \pm 0.6$. Damit ergibt sich mit $L = -a \cdot R$, wobei R die Universelle Gaskonstante mit dem Wert $R = 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}$ [2],

$$L = (2{,}27 \pm 0{,}15) \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}\,.$$

4.5 Massendurchsatz

Der Massendurchsatz wird durch Umstellen der Gleichung 4 errechnet. Die Werte sind in

$\frac{\Delta m}{\Delta t}(1)$	$-1.9 \pm 0.3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$
$\frac{\Delta m}{\Delta t}(2)$	$-1.5 \pm 0.4\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$
$\frac{\Delta m}{\Delta t}(3)$	$-1.0 \pm 0.4\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$
$\frac{\Delta m}{\Delta t}(4)$	$-0.6 \pm 0.5\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$

Tabelle 4: Die Massendurchsätze und deren Abweichungen der vier Zeiten.

Tabelle 4 dargestellt.

4.6 Bestimmung der mechanischen Arbeit

Der Sinn einer Wärmepumpe ist, im idealen Falle nur die Arbeit zur Phasenumwandlung aufzuwenden. Diese mechanisch geleistete Arbeit soll nun berechnet werden. Um die dazu in der Theorie angegebene Gleichung 5 anwenden zu können, muss zunächst ρ bestimmt werden. Dazu wird die allgemeine Gasgleichung verwendet

$$pV = nRT. \tag{9}$$

Es gilt $nR = \text{const.}$, woraus folgt, dass $n_1 R = n_2 R$ korrekt ist. Über dies und die Beziehung $V = {}^{m}/{}_{\rho}$ lässt sich für ρ herleiten, sodass

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Leftrightarrow \frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_\mathrm{a}}{T_2 \rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{\rho_0 T_0 p_\mathrm{a}}{T_2 p_0} \tag{10}$$

gilt. Die Einheit bar sowie g/s müssen jeweils in SI-EInheiten umgerechnet werden. Um mittels Formel (5) nun die mechanische Arbeit berechnen zu können, sind einige Werte aus der Aufgabenstellung gegeben. Für das Transportgas Cl_2F_2C gilt die Dichte $\rho_0 = 5{,}51\,\mathrm{g/L}$ bei $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$, $p = 1\,\mathrm{bar}$ sowie $k = 1,14$. Folgend ergeben sich für die Kompressorleistung sowie die Dichte die in Tabelle **??** eingetragenen Werte.

Tabelle 5: Die Dichte ρ und die darüber berechnete Kompressorleistung zu vier verschiedenen Messzeiten.

t / s	ρ / kg/L	Leistung / W
300	5,2	95 $\pm$ 6,0
600	5,3	86 $\pm$ 6,0
900	5,4	67 $\pm$ 4,0
1200	5,5	41 $\pm$ 2,7

5 Diskussion

Für die Abweichungen der idealen zur realen Güteziffer ergeben sich für die 4 verschiedenen Zeiten von 5 bis 20 Minuten Abweichungen von 92 %, 82%, 77% sowie 74%. Die festgestellten Abweichungen befinden sich deutlich außerhalb des berechneten Fehlers. Dies lässt sich vor allem auf die sehr schlechte Wärmedämmung der Apparatur zurückführen. Die Deckel der Reservoirs saßen nicht ganz dicht beziehungsweises luftdicht auf, da sie nur darüber geschoben werden konnten. Ebenso ist die Isolierung der gesammten Apparatur nicht optimal. Da 5 Messwerte theoretisch gleichzeitig abgenommen werden mussten, bringt der Zeitversatz des zyklischen Ablesens eine Unsicherheit in die Daten, dessen Größenordnung sich nich abschätzen lässt. Nach einigen Messungen hat die Routine bewirkt, dass das Ablesen der Werte schneller von Statten ging. Dies hat eine kleine zusätzliche Verzerrung der zeitlichen Skala herbeigeführt.

Anhang

V206 Wärmepumpe

p_b, p_a + 1 bar

t/min	T_1/°C	p_b/Bar	T_2/°C	p_a/Bar	A/Watt
0	21,5	4,4	21,0	4,1	0
1	22,0	6,0	21,0	1,4	165
2	22,8	6,2	21,0	1,6	175
3	23,8	6,6	20,4	2,0	185
4	25,2	7,0	19,0	2,0	192
5	26,7	7,5	17,4	2,1	200
6	28,5	8,0	15,6	2,2	200
7	30,3	8,2	13,9	2,2	200
8	32,0	8,6	12,2	2,2	205
9	33,7	9,0	10,6	2,2	205
10	35,4	9,4	9,0	2,2	206
11	37,0	9,7	7,5	2,2	210
12	38,5	10,1	6,2	2,3	210
13	40,1	10,4	5,1	2,3	210
14	41,6	10,8	4,1	2,3	210
15	43,0	11,0	3,4	2,3	210
16	44,4	11,5	2,8	2,3	210
17	45,6	11,7	2,2	2,3	210
18	46,8	12,0	1,7	2,3	210
19	48,0	12,2	1,3	2,3	210
20	49,0	12,5	0,9	2,2	205
21	50,0	12,8	0,4	2,2	205
	±0,1	±0,5	±0,1	±0,2	±5

Wärmekapazität Kupferschlange / Reservoire 750 J/K

3 Liter Wasser in jedem Reservoir ± 1,2 mL

17.12.23

Jil Meyer

Literatur

[1] *Versuchsanleitung zum V206*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.

[2] *Wasser (Stoffdaten)*. 20. Nov. 2023. URL: https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?r%7Csearch_for=gas+constant.