Versuch Nr. 351

Fourier-Analyse und Synthese

Simon Reck
simon.reck@tu-dortmund.de

Robert Kinzel
robert.kinzel@tu-dortmund.de

19. November 2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

In diesem Versuch sollen drei elektrische Schwingungen mit der Fourier Analyse zerlegt werden, im zweiten Teil werden diese wieder aus ihren Teilen zusammengesetzt. So soll der Umgang mit dem Fourier Theorem, der Fourieranalyse und der Fouriertransformation geübt werden.

2 Theorie

2.1 Einführung

Periodische Funktionen existieren in der Zeit oder im Raum. Sie lassen sich durch die Funktionen 1 und 2 beschreiben.

$$f(t+T) = f(t), \quad (1)$$
$$f(x+D) = f(x). \quad (2)$$

Die wichtigsten periodischen Funktionen sind die Sinus- und die Cosinusfunktion. Beide haben eine Periode von 2π und sind hauptsächlich von Bedeutung, weil sich fast jede natürliche periodische Funktion durch sie ausdrücken lässt.

Zeitabhängig Sinus- oder Cosinusfunktion, mit einer Periodendauer von T und einer Amplitude von a und b lassen sich also wie folgt ausdrücken.

$$f(t) = a\sin(\frac{2\pi}{T}t),$$
$$f(t) = b\cos(\frac{2\pi}{T}t).$$

2.2 Das Fouriersche Theorem

Das Fouriersche Theorem besagt, dass wenn die Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t)). \quad (3)$$

gleichmäßig Konvergent ist, sie eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode T darstellt. die Koeffizienten a_n und b_n ergeben sich durch.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t, \quad (4)$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t. \quad (5)$$

Mit Ausnahme der Grundfrequenz, $v_1 = \frac{1}{T}$, die der Frequenz des periodischen Vorgangs entspricht, treten in der Fourier-Entwicklung nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz auf. Diese nennt man die harmonischen Oberschwingungen. Diese sind nur bei den

Phasen 0, $\frac{\pi}{2}, \pi$ und $\frac{3\pi}{2}$ auf. Die Bestimmung der Amplitude nennt man die Fourieranalyse. Trägt man die Amplitude der jeweiligen Oberschwingungen gegen die Frequenz auf, ergit sich ein Linienspektrum.

Da die Reihe 3 nur gleichmäßig konvergiert, wenn $f(t)$ stetig ist, tritt bei unstetigen Punkten t_0 das sogenannte Gibbsche-Phänomen auf. Dies besagt, dass für unstetige t_0 diese Stelle sich nicht mehr durch die Fourierreihe approximieren lässt. Stadt dessen kommt es eine endliche Abweichung von der Reihe, die anders als andere Abweichung, nicht mit wachsenden n kleiner wird.

2.3 Die Fourier-Transformation

Mithilfe der Fourier-Transformation ist es möglich, das gesamte Frequenzspektrum einer zeitabhängigen Funktion zu bestimmen. Dabei ist es egal, ob f periodisch ist oder nicht. Die Fourier-Transformation lautet.

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-ivt}\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Angewendet auf eine periodische Funktion ergibt sich ein Linien-Spektrum, bei einer nicht periodischen Funktion ein kontinuierliches Spektrum. Da eine Integration über unendlich lange Zeiträume nicht möglich ist, hebt sich die Periodizität auf und es entsteht ein Linien-Spektrum mit endlicher Breite. Es entstehen auch neben Maxima, deren Amplituden mit steigendem n schnell abnehmen.

3 Durchführung

3.1 Vorbereitung

Zur Vorbereitung des Versuchs wurden für 3 verschiedene periodischen Schwingungen die Koeffizienten berechnet. Die von uns gewählten Schwingungen sind die Reckteck, Dreieck und Sägezahn Schwingung, da sie sehr elementar sind und häufig vorkommen.

Im Folgenden werden die Koeffizienten dieser Schwingungen berechnet. Die Rechnungen sind hier stark gekürzt und beinhalten nur die wichtigsten Schritte. Eine detaillierte Version befindet sich im Anhang.

3.1.1 Rechteckschwingung

Die Rechteckschwingung wird Parametriesiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} -A, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ A, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} .$$

Da $f(-x) = -f(x)$ gilt ist die Funktion ungrade. Daraus folgt, dass $a_n = 0$ ist. Wir lösen als nur für b_n.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t. \\ &= \frac{2}{T}\Big(\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin\big(n\frac{2\pi}{T}t\big)\,\mathrm{d}t - \int_{-\frac{T}{2}}^0 A\sin\big(n\frac{2\pi}{T}t\big)\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= \frac{2A}{2\pi n}\left(1-(-1)^n\right). \end{aligned}$$

Die b_n sind somit proportional zu $\frac{1}{n}$. In Tabelle 1 wird zwischen geradem und ungeradem n differenziert.

Tabelle 1: Fourierkoeffizienten der Rechteckschwingung in Abhängigkeit von n.

n gerade	n ungerade
0	$\frac{4A}{\pi n}$

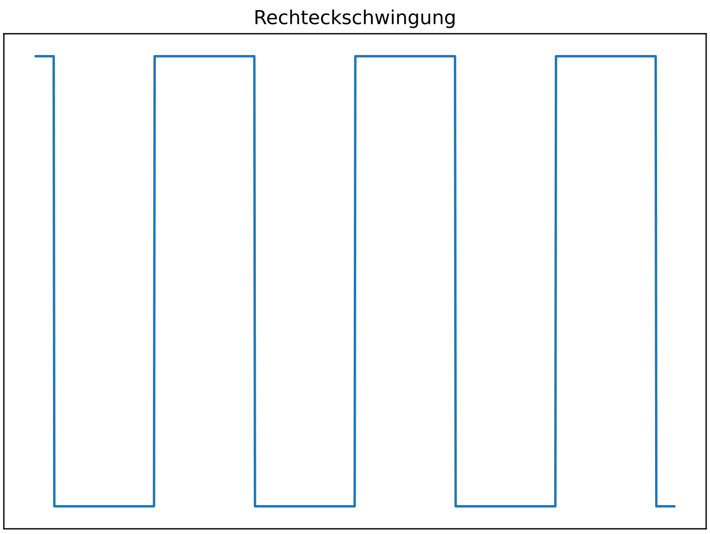

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Rechteckschwingung

3.1.2 Sägezahnschwingung

Die Sägezahnschwingung wird Parametriesiert durch

$$f(t) = \frac{A}{T}t \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Die Sägezahnschwingung ist eine ungrade Funktion, somit sind die b_n erneut die wichtigen Koeffizienten.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\left(\left[-\frac{ATt}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right]_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{T}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{A}{n\pi}\cos(n\pi) \\
&= \frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Die Sägezahnschwingung ist also proportional zu $\frac{1}{n}$.

Tabelle 2: Fourierkoeffizienten der Sägezahnschwingung in Abhängigkeit von n.

n gerade	n ungerade
$-\frac{A}{n\pi}$	$\frac{A}{n\pi}$

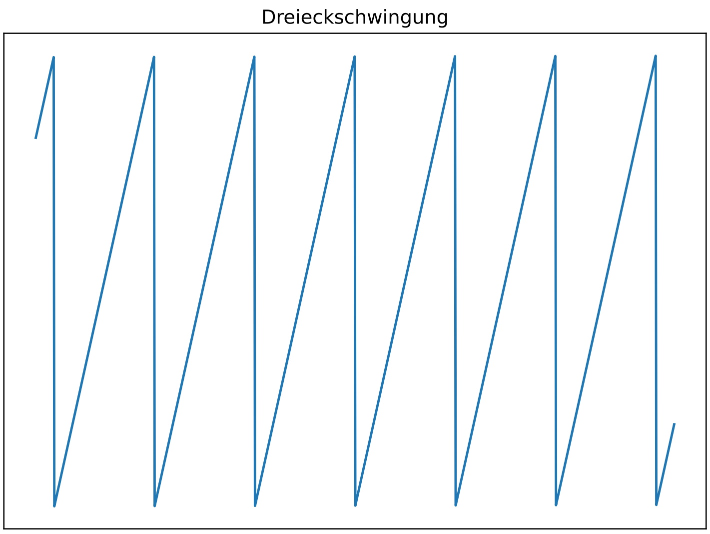

Abbildung 2: Graphische Darstellung der Sägezahnschwingung

3.1.3 Dreiecksschwingung

Die Dreiecksschwingung wird Parametriesiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4At}{T} + A, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -\frac{4At}{T} + A, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}.$$

Die Dreiecksschwingung ist eine grade Funktion da $f(x) = f(-x)$ gilt. Somit werden die Koeffizienten alleine von den a_n bestimmt.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{T}\Big(\frac{4A}{T}\Big(\int_0^{\frac{T}{2}}(-t\cdot\cos(\frac{2n\pi t}{T})+A)\mathrm{d}t+\Big(\int_0^{\frac{T}{2}}1\mathrm{d}t\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{0}1\mathrm{d}t\Big)\Big)\Big) \\ &= \frac{4A}{\pi^2}\Big((-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\Big) \end{aligned}$$

Die Dreiecksschwingung ist also proportional zu $\frac{1}{n^2}$.

Tabelle 3: Fourierkoeffizienten der Dreiecksschwingung in Abhängigkeit von n.

n gerade	n ungerade
0	$-\frac{8A}{n^2\pi^2}$

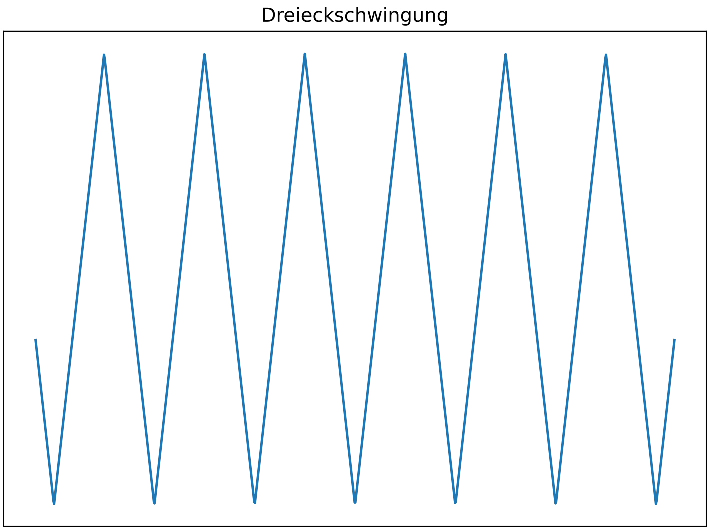

Abbildung 3: Graphische Darstellung der Dreiecksschwingung

3.2 Fouriersynthese

Ein Oberwellengenerator wird an ein Amplituden Messgerät angeschlossen. Am Generator wird die Amplitude der Grundschwingung maximiert. Alle nachfolgenden Oberwellen werden dann nach den berechneten Koeffizienten eingestellt. So wird z. B. für die Rechteckschwingung, die mit $\frac{1}{n}$ abfällt und nur für die ungeraden n's existiert, die Amplitude der dritten Oberwelle gedrittelt, der fünften gefünftelt und so weiter. Danach werden die Phasen der verschiedenen Oberwellen angepasst. Dafür schließt man den Oberwellen Generator an das Oszilloskop an. Das Oszilloskop wird in den „xy“ Modus gesetzt und jeweils die Oberwellen mit der Grundschwingung verglichen. Dafür verwendet man die sogenannten Lissajous-Figuren. Eine grafische Darstellung dieser Figuren ist in Abbildung 4 zu finden.

Abbildung 4: Graphische Darstellung der Dreiecksschwingung

Das Ziel ist es, dass die auf dem Bildschirm angezeigte Figur sich entweder überlappt oder symmetrisch ist. Diese Figur muss für jede Oberwelle einzeln erzeugt werden. Hiernach wird das Oszilloskop wieder in den normalen Modus gesetzt. Jetzt werden alle Oberwellen hinzugeschaltet. Es empfiehlt sich dies einzeln zu tun, da die Phase zwar schon eingestellt wurde, aber trotzdem noch um $\frac{\pi}{2}$ oder π abweichen kann. Diese Phasenänderungen können einfach am Oberwellengenerator eingestellt werden. Die auf dem Oszilloskop erscheinenden Wellen sollten den ursprünglich zerlegten entsprechen. Dieser Vorgang wird für alle in 3.1 zerlegten Wellen wiederholt.

3.3 Fourieranalyse

Für den letzten Teil des Experiments wird ein Funktionsgenerator an das Oszilloskop angeschlossen. Das Oszilloskop sollte hierfür auf „FFT“ stehen. Die in 3.1 zerlegten Schwingungen werden einzeln generiert und das Linienspektrum mit der Cursorfunktion des Oszilloskop untersucht. Der Cursor wird einzeln auf die Peaks des Spektrums gesetzt und die Frequenz und die Amplitude werden notiert. Eine schematische Darstellung des Aufbaus ist in Abbildung 5 zu finden.

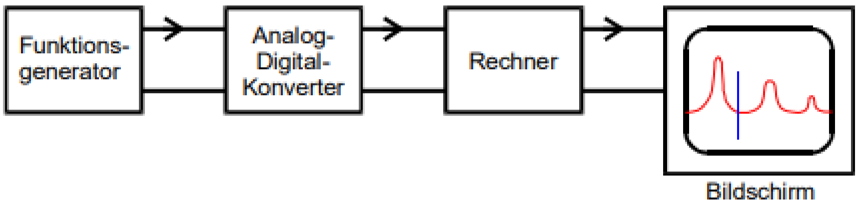

Abbildung 5: schematische Darstellung des Aufbaus