Allocations sans-envie pour les groupes en présence de biens et de tâches indivisibles

Simon Rey, en collaboration avec Haris Aziz

September 6, 2019

1. Partage équitable

Problématique

Étant donné un *ensemble d'objets* et un *ensemble d'agents* ayant des *préférences* sur les objets, comment *distribuer* les objets aux agents de la manière la plus *juste* possible ?

Problématique

Étant donné un *ensemble d'objets* et un *ensemble d'agents* ayant des *préférences* sur les objets, comment *distribuer* les objets aux agents de la manière la plus *juste* possible ?

Les applications potentielles peuvent être :

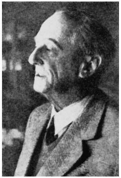
- Partage d'un héritage
- Allocation de créneaux horaires pour des cours
- Formation d'équipes sportives
- ...

Prémisses du partage équitable

La Genèse décrit pour la première fois le protocole *I cut, you choose* pour diviser un terrain entre Abraham et Lot.

Prémisses du partage équitable

La Genèse décrit pour la première fois le protocole *I cut, you choose* pour diviser un terrain entre Abraham et Lot.



Hugo Steinhauss définit en 1948 *The Fair Division Problem*, il introduit formellement le problème du *cake-cutting* et propose des règles de partage.

Fondements du partage équitable

$\boxed{\textit{Partage équitable}}$

Fondements du partage équitable

Équilibre général

Gérard Debreu

Kenneth Arrow

Partage équitable

Fondements du partage équitable

Équilibre général

Gérard Debreu

Kenneth Arrow

Choix social

Amartya Sen

Kenneth Arrow

Partage équitable

Fondements du partage équitable

Équilibre général

Gérard Debreu

Kenneth Arrow

Choix social

Amartya Sen

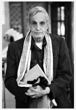
Kenneth Arrow

Partage équitable

Théorie des jeux

John von Neumann

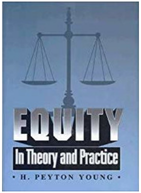
Oscar Morgenstern

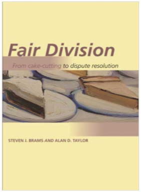


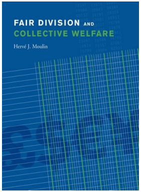
John Nash

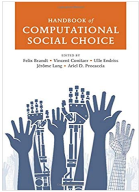
Lloyd Shpaley

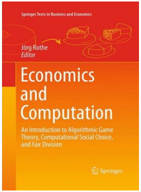
Une littérature foisonnante

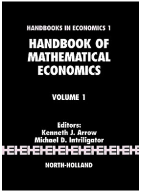


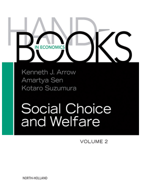


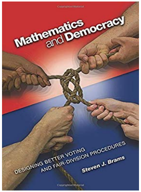


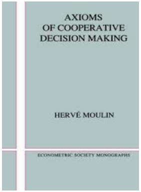


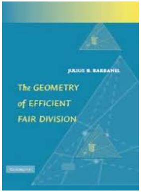








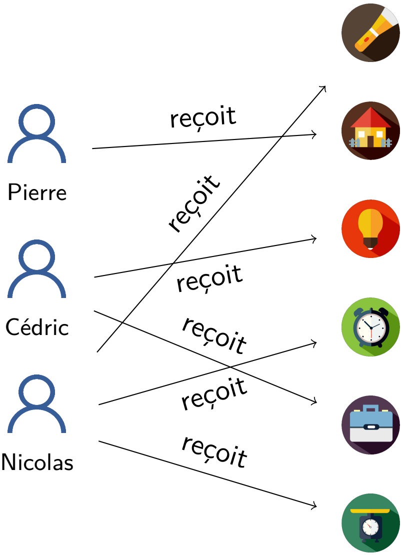




2. Modélisation

Allocation de ressources indivisibles

Allocation de ressources indivisibles



<u>Définition</u>: Allocation

Soient $\mathcal{N}$ un ensemble d'agent et $\mathcal{O}$ un ensemble d'objets, une allocation $\pi = \left\langle \pi_1, \ldots, \pi_{|N|} \right\rangle$ de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{N}$ est un vecteur d'ensemble d'objets dont la composante i correspond à l'ensemble d'objets reçu par l'agent i. Une allocation est telle que :

- tous les objets sont alloués, et,
- un objet n'est alloué qu'à un seul agent.

Préférences des agents

Un agent $i \in \mathcal{N}$ exprime ses préférences par une *fonction d'utilité* :

$$u_i : 2^{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}.$$

Préférences des agents

Un agent $i \in \mathcal{N}$ exprime ses préférences par une *fonction d'utilité* :

$$u_i : 2^{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}.$$

Les préférences sont supposées *additives* : pour tout agent $i \in \mathcal{N}$ et pour toute ressource $O \subseteq \mathcal{O}$, on a :

$$u_i(O) = \sum_{o \in O} u_i(o).$$

Préférences des agents

Un agent $i \in \mathcal{N}$ exprime ses préférences par une *fonction d'utilité* :

$$u_i : 2^{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}.$$

Les préférences sont supposées *additives* : pour tout agent $i \in \mathcal{N}$ et pour toute ressource $O \subseteq \mathcal{O}$, on a :

$$u_i(O) = \sum_{o \in O} u_i(o).$$

Pour un agent $i \in \mathcal{N}$, une ressource $o \in \mathcal{O}$ est :

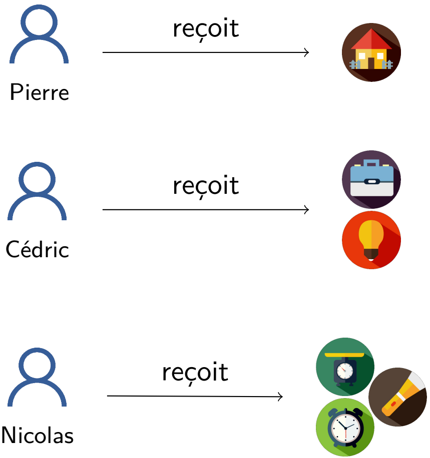
- un *bien* si $u_i(o) \geq 0$,
- une *tâche* si $u_i(o) \leq 0$.

3. L’absence d’envie comme critère de justice

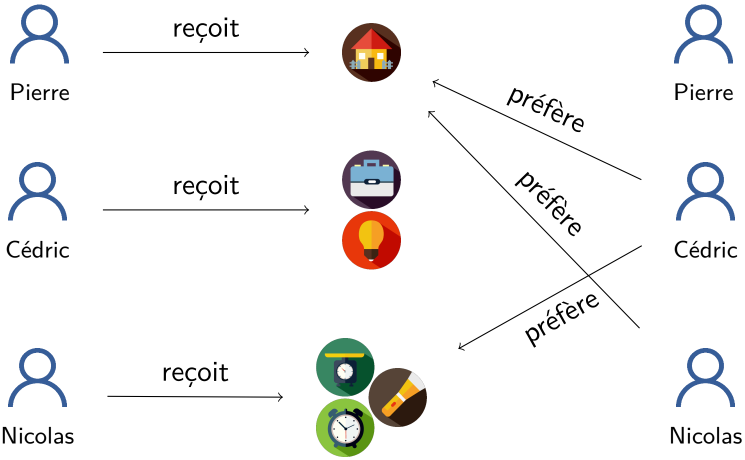
L’absence d’envie comme critère de justice

Lorsque toutes les ressources sont des biens

Absence d'envie (EF)



Absence d'envie (EF)



✗ (

Pierre: 

Cédric: 

Nicolas: 

) n'est pas sans-envie.

Résumé sur l’absence d’envie

✗ (
Pierre: 
Cédric: 
Nicolas: 
) n’est pas sans-envie.

✗ Il n’existe pas de garantie d’existence d’allocation sans-envie lorsque les ressources sont indivisibles.

Résumé sur l'absence d'envie

✗ Pierre: 

Cédric: 

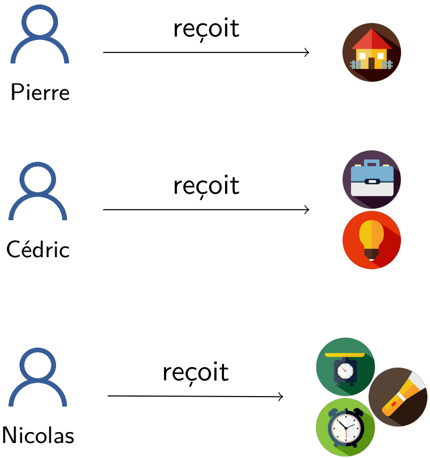
Nicolas: 

n'est pas sans-envie.

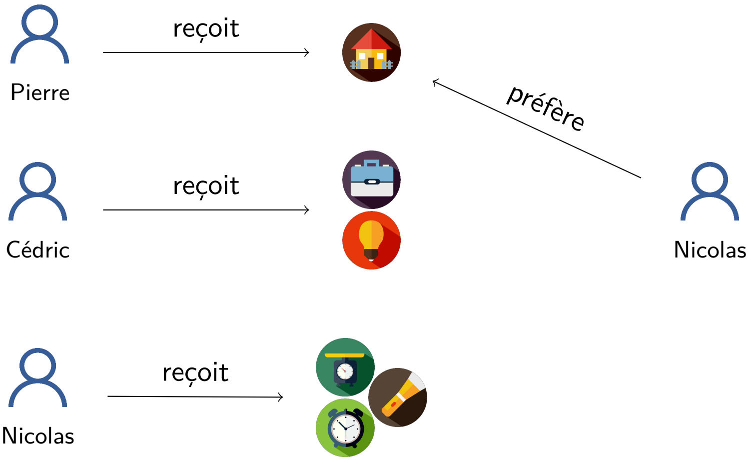
✗ Il n'existe pas de garantie d'existence d'allocation sans-envie lorsque les ressources sont indivisibles.

➥ Comment faire pour obtenir une garantie d'existence ?

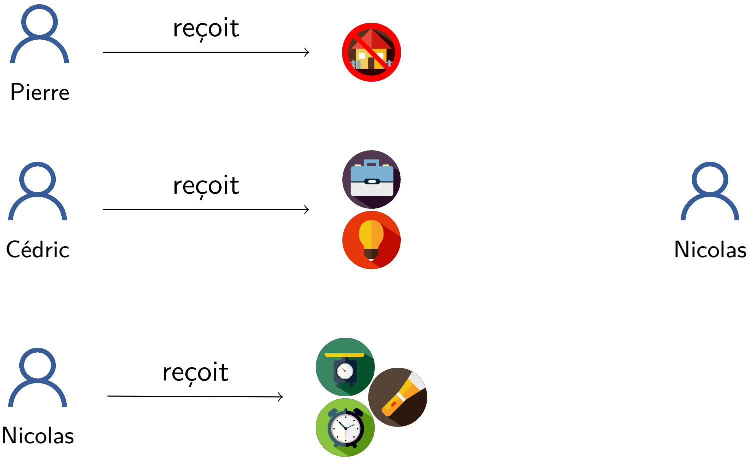
Absence d'envie à un bien près (EF1)



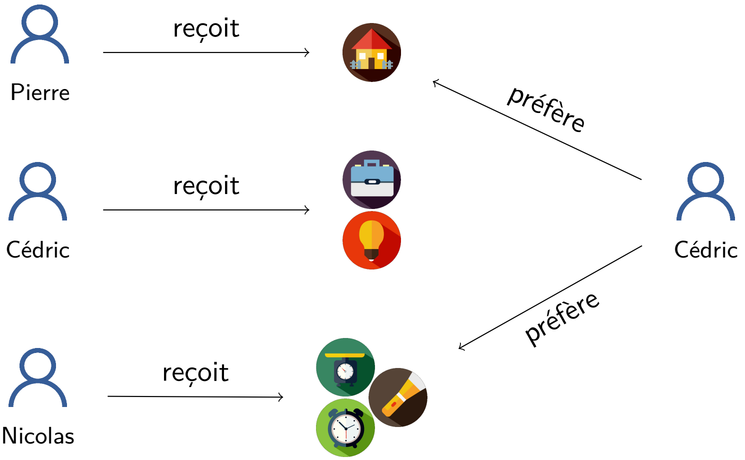
Absence d'envie à un bien près (EF1)



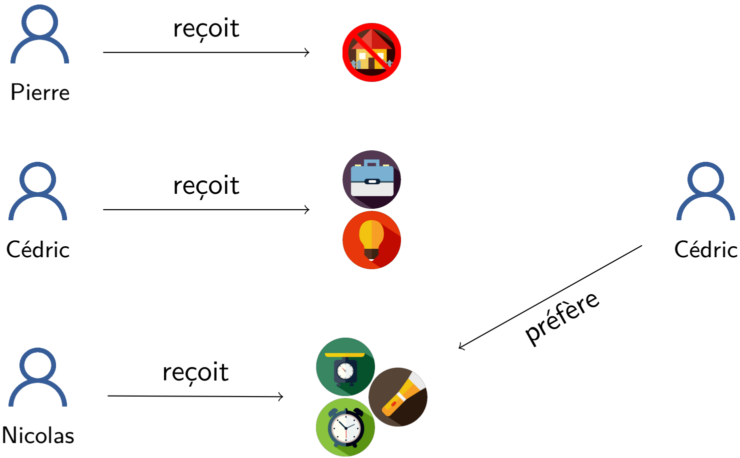
Absence d'envie à un bien près (EF1)



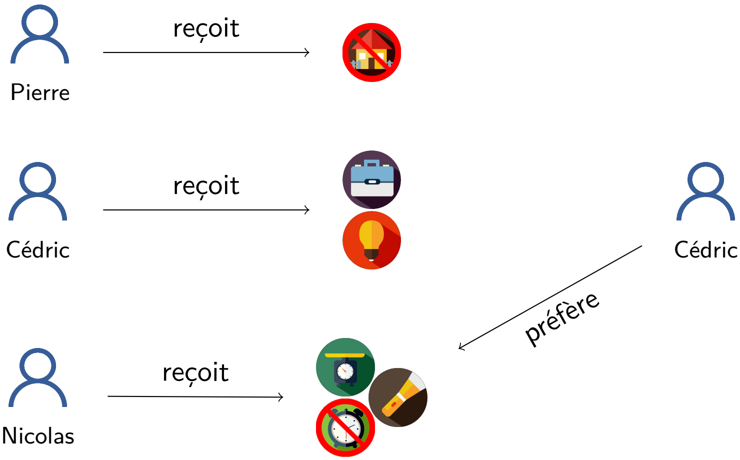
Absence d'envie à un bien près (EF1)



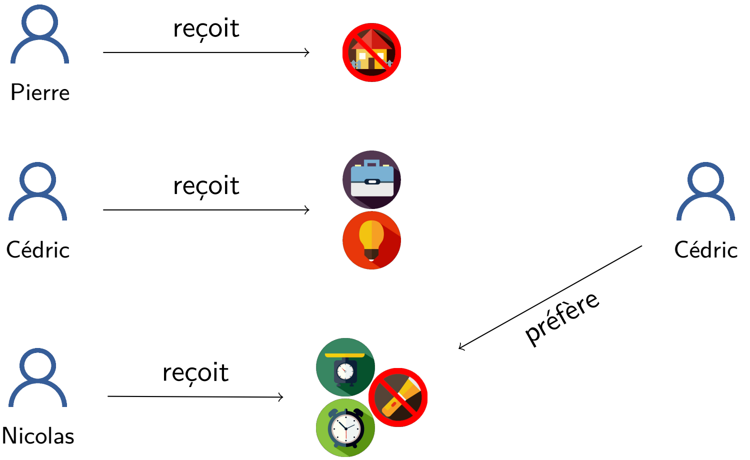
Absence d'envie à un bien près (EF1)



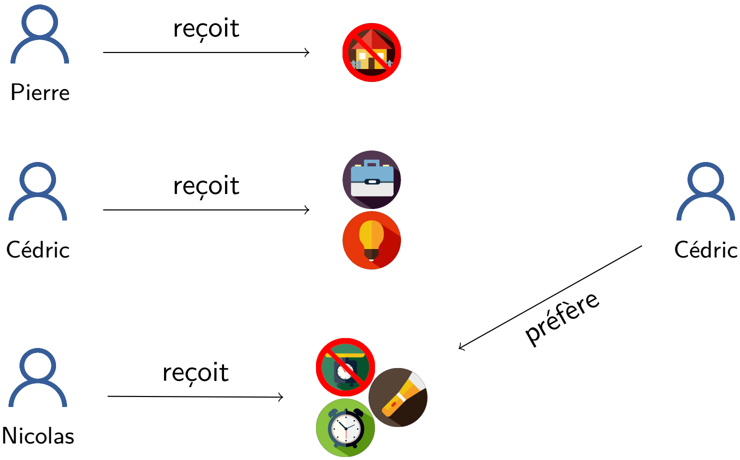
Absence d'envie à un bien près (EF1)



Absence d'envie à un bien près (EF1)



Absence d'envie à un bien près (EF1)



Résumé sur l'absence d'envie à un bien près

✗

Pierre: 

Cédric: 

Nicolas: 

n'est pas EF1 : Cédric est envieux à un bien près.

[1] Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi "On approximately fair allocations of indivisible goods" (2004)

Résumé sur l'absence d'envie à un bien près

✗

Pierre: 

Cédric: 

Nicolas: 

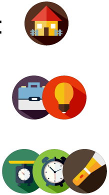
n'est pas EF1 : Cédric est envieux à un bien près.

✓ Une allocation sans-envie à un bien près peut toujours être calculé en temps polynomial même pour des préférences très générales. [1]

[1] Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi "On approximately fair allocations of indivisible goods" (2004)

Résumé sur l'absence d'envie à un bien près

✗ Pierre: / Cédric: / Nicolas: n'est pas EF1 : Cédric est envieux à un bien près.



✓ Une allocation sans-envie à un bien près peut toujours être calculé en temps polynomial même pour des préférences très générales. [1]

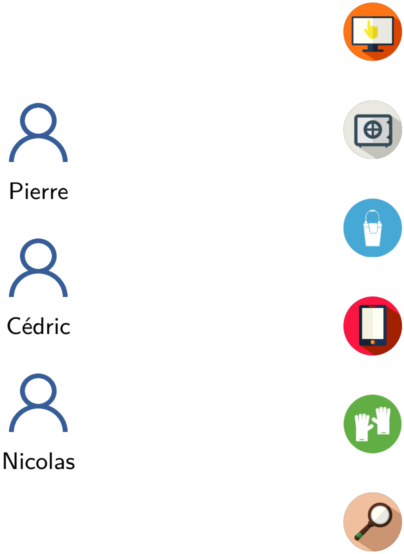
Qu'est ce qu'il se passe lorsque des *tâches* doivent être distribuées ?

[1] Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi "On approximately fair allocations of indivisible goods" (2004)

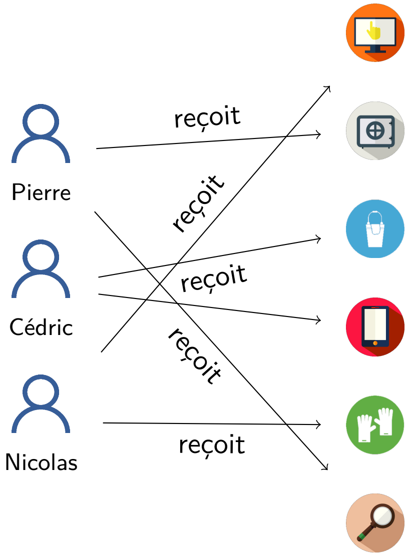
L’absence d’envie comme critère de justice

Lorsqu’il y a des biens et des tâches

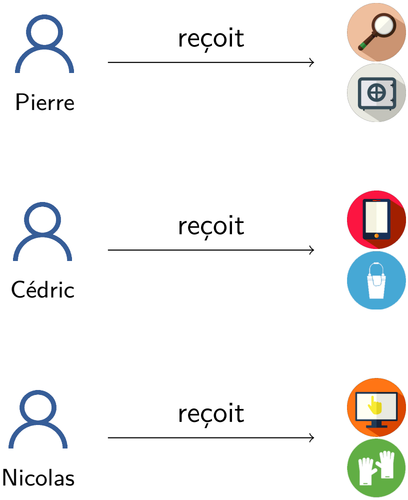
Allocation de biens et de tâches indivisibles



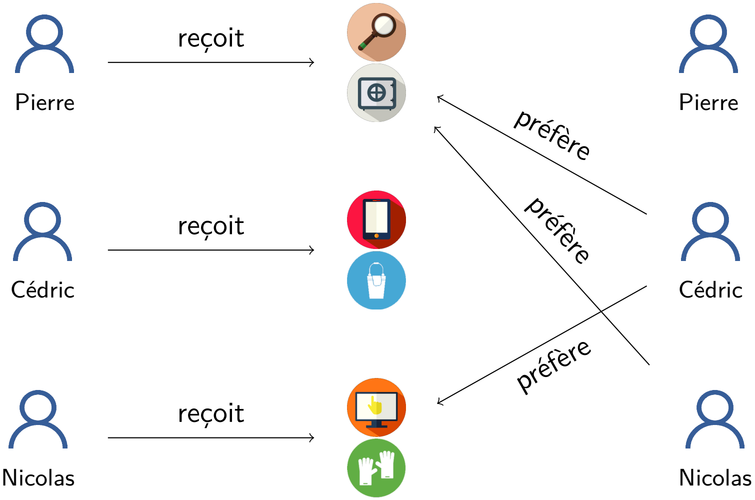
Allocation de biens et de tâches indivisibles



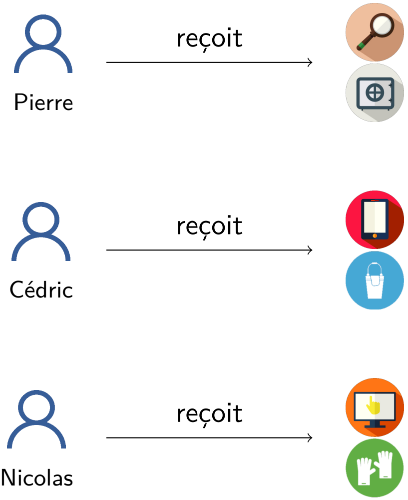
Absence d'envie (EF)



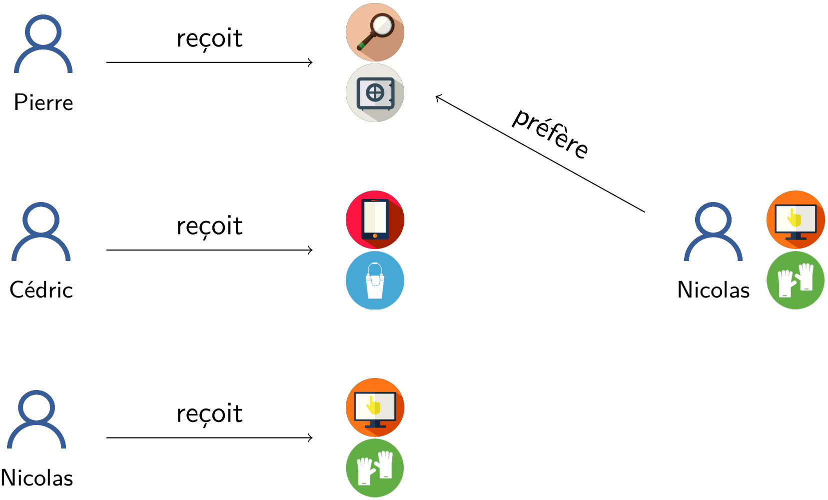
Absence d'envie (EF)



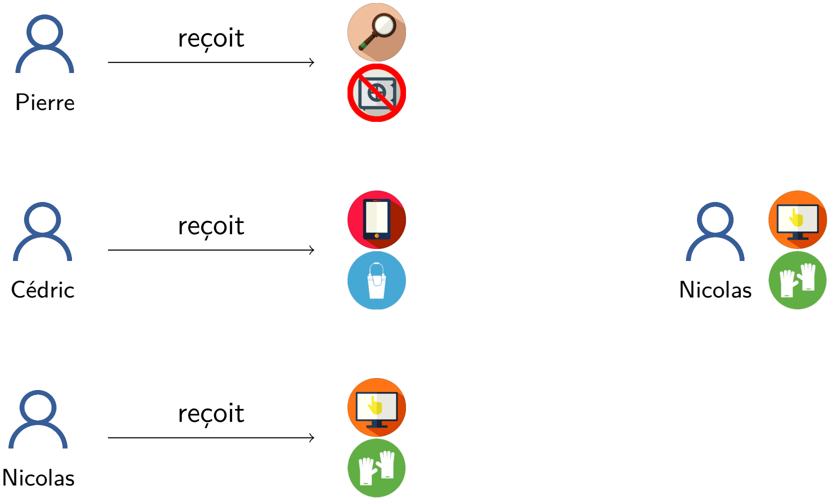
Absence d'envie à une ressource près (EF1)



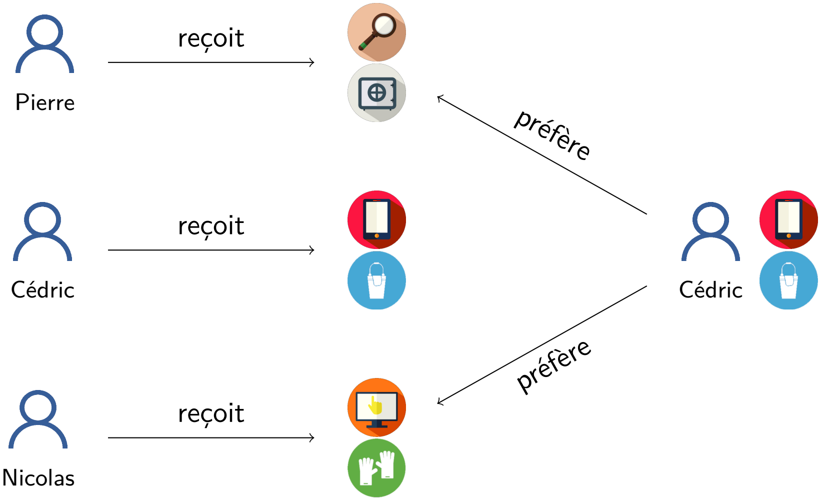
Absence d'envie à une ressource près (EF1)



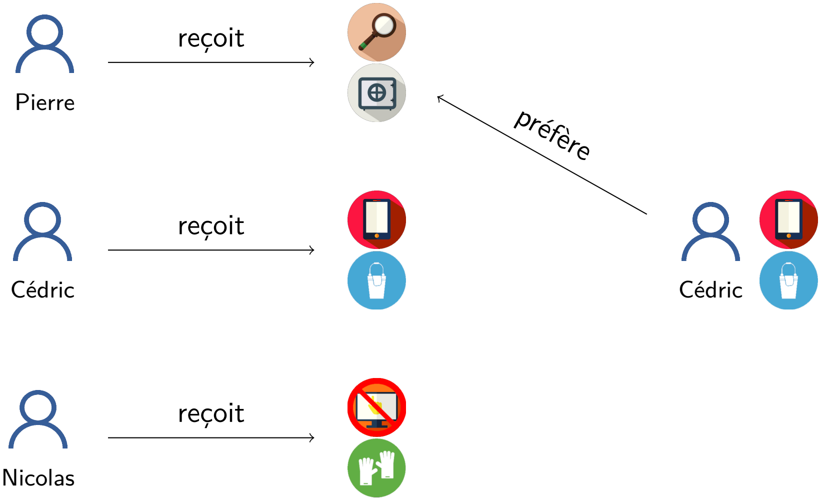
Absence d’envie à une ressource près (EF1)



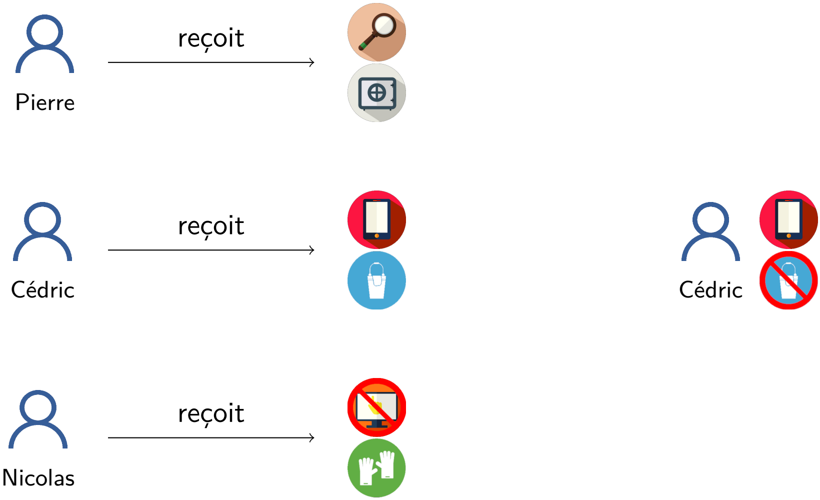
Absence d'envie à une ressource près (EF1)



Absence d'envie à une ressource près (EF1)



Absence d'envie à une ressource près (EF1)



Résumé sur l’absence d’envie à une ressource près

✓

Pierre: 

Cédric: 

Nicolas: 

satisfait EF1.

[2] Aziz, Caragiannis, Igarashi, and Walsh “Fair allocation of combinations of indivisible goods and chores” (2019)

Résumé sur l'absence d'envie à une ressource près

✓

Pierre: 

Cédric: 

Nicolas: 

satisfait EF1.

✓ Une allocations sans-envie à une ressource près peut toujours être calculée en temps polynomial, quelques soient les préférences. [2]

[2] Aziz, Caragiannis, Igarashi, and Walsh "Fair allocation of combinations of indivisible goods and chores" (2019)

Résumé sur l'absence d'envie à une ressource près

✓ Pierre: / Cédric: / Nicolas:

satisfait EF1.

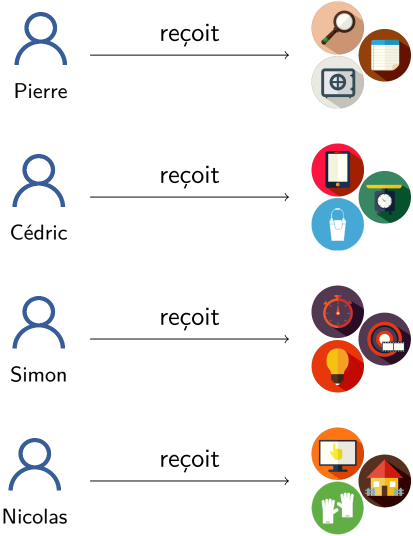
✓ Une allocations sans-envie à une ressource près peut toujours être calculée en temps polynomial, quelques soient les préférences. [2]

➥ Comment généraliser cette notion à des *groupes d'agents* ?

[2] Aziz, Caragiannis, Igarashi, and Walsh "Fair allocation of combinations of indivisible goods and chores" (2019)

4. Allocations sans-envie pour les groupes

Absence d'envie pour les groupes (GEF)

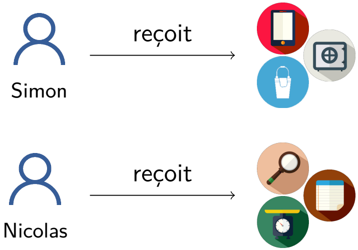


Absence d'envie pour les groupes (GEF)

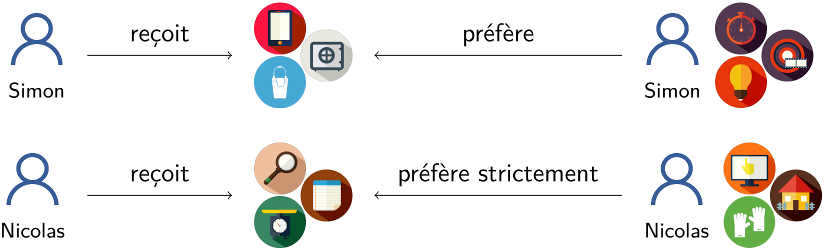
- Que veut dire "préfèrent" ?

Absence d'envie pour les groupes (GEF)

Que veut dire "préfèrent" ?



Que veut dire "préfèrent" ?



Résumé sur l’absence d’envie pour les groupes

✗

Pierre: 

Cédric: 

Simon: 

Nicolas: 

n’est pas sans-envie pour les groupes.

Résumé sur l'absence d'envie pour les groupes

✗ Pierre: 
Cédric: 
Simon: 
Nicolas: 
n'est pas sans-envie pour les groupes.

✗ Il n'existe pas de garantie d'existence d'allocation sans-envie lorsque les ressources sont indivisibles.

Résumé sur l'absence d'envie pour les groupes

✗ Pierre: 

Cédric: 

Simon: 

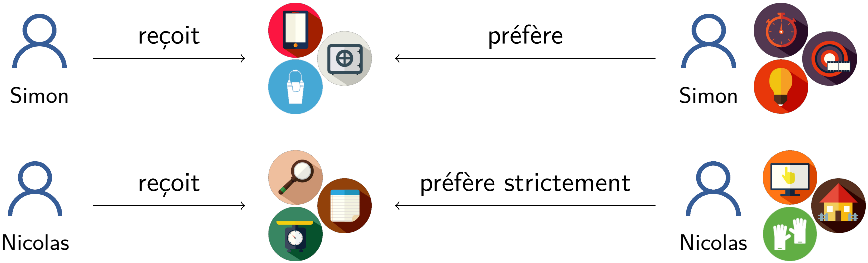
Nicolas: 

n'est pas sans-envie pour les groupes.

✗ Il n'existe pas de garantie d'existence d'allocation sans-envie lorsque les ressources sont indivisibles.

➥ Comment faire pour obtenir une garantie d'existences ?

Absence d'envie pour les groupes à une ressource près



Absence d'envie pour les groupes à une ressource près

Absence d'envie pour les groupes à une ressource près

Il faut vérifier que l'envie peut être éliminer pour toutes les réallocations des ressources de Pierre et Cédric à Simon et Nicolas.

Formalisation de GEF1

<u>Définition</u>: GEF1

Soit $I = \langle \mathcal{N}, \mathcal{O}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle$ une instance avec des biens et des tâches. Une allocation $\pi \in \Pi(\mathcal{O}, \mathcal{N})$ est sans-envie pour les groupes à une ressource près si :

1. pour toute paire de groupes d'agents non vide, $S \subseteq \mathcal{N}$ et $T \subseteq \mathcal{N}$, tels que $|S| = |T|$,
2. pour toute réallocation $\pi' \in \Pi\left(\pi_T, S\right)$, et
3. pour tout agent $i \in S$, il existe $o_i \in \pi_i \cup \pi'_i$ telle que

$\langle u_i(\pi'_i \setminus \{o_i\}) \rangle_{i \in S}$ ne Pareto-domine pas $\langle u_i(\pi_i \setminus \{o_i\}) \rangle_{i \in S}$.

5. Existence d’allocations GEF1

Lorsque les ressources sont des biens

Lorsqu'il n'y a que des biens, [3] ont montré qu'une allocation GEF1 peut être calculé via le produit de Nash.

<u>Théorème</u>: Conitzer, Freeman, Shah, and Vaughan

Soit $I = \langle \mathcal{N}, \mathcal{O}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle$ une instance avec seulement des biens et telle que les préférences sont *additives*. Une allocation $\pi \in \Pi(\mathcal{O}, \mathcal{N})$ satisfaisant GEF1 *existe toujours* et peut être calculé en *temps pseudo-polynomial*.

[3] Conitzer, Freeman, Shah, and Vaughan "Group Fairness for the Allocation of Indivisible Goods" (2019)

Lorsque les ressources sont des biens

Lorsqu'il n'y a que des biens, [3] ont montré qu'une allocation GEF1 peut être calculé via le produit de Nash.

<u>THÉORÈME</u>: CONITZER, FREEMAN, SHAH, AND VAUGHAN

Soit $I = \langle \mathcal{N}, \mathcal{O}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle$ une instance avec seulement des biens et telle que les préférences sont *additives*. Une allocation $\pi \in \Pi(\mathcal{O}, \mathcal{N})$ satisfaisant GEF1 *existe toujours* et peut être calculé en *temps pseudo-polynomial*.

Ce résultat peut-il être généralisé pour les tâches ?

[3] Conitzer, Freeman, Shah, and Vaughan "Group Fairness for the Allocation of Indivisible Goods" (2019)

Existence d'allocations GEF1

Lorsque les préférences sont identiques

GEF1 avec des préférences identiques

LEMME:

Soit $I = \langle \mathcal{N}, \mathcal{O}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle$ une instance avec des biens et des tâches et telle que les préférences sont *identiques et additives*. Toute allocation $\pi \in \Pi(\mathcal{O}, \mathcal{N})$ satisfaisant *EFX* est aussi *GEF1*.

L'algorithme egal-sequential

Lemme:

Une allocation satisfaisant *EFX* peut être calculée en temps $\mathcal{O}(mn)$.

Input: Une instance $I = \langle \mathcal{N}, \mathcal{O}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle \in \mathcal{I}$ telle que $\forall i \in \mathcal{N}, u_i = u$, pour une fonction d'utilité u
Output: $\pi \in \Pi(\mathcal{O}, \mathcal{N})$ une allocation satisfaisant EFX

$\pi \leftarrow$ allocation vide
Ordonner les ressources $o_1, \ldots, o_m$ de $\mathcal{O}$ en ordre décroissant de $|u(o)|$
for $j = 1$ à m **do**
    if $u(o_j) \geq 0$ **then**
        Choisir $i^* \in \arg\min_{i \in \mathcal{N}} u(\pi_i)$
    else
        Choisir $i^* \in \arg\max_{i \in \mathcal{N}} u(\pi_i)$
    Allouer o_j à i^* : $\pi_{i^*} \leftarrow \pi_{i^*} \cup \{o_j\}$
return π

GEF1 avec des préférences identiques

<u>THÉORÈME</u>:

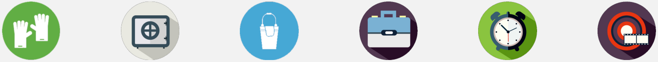
Soit $I = \langle \mathcal{N}, \mathcal{O}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle$ une instance avec des biens et des tâches et telle que les préférences sont *identiques et additives*. Une allocation $\pi \in \Pi(\mathcal{O}, \mathcal{N})$ satisfaisant GEF1 *existe toujours* et peut être calculé en *temps polynomial*.

Exemple d'application

EXEMPLE: Considérons deux agents avec les préférences suivantes

5	-4	3	-6	1	2

EXEMPLE: Considérons deux agents avec les préférences suivantes



-6 | 5 | -4 | 3 | 2 | 1

L'allocation construite est :

Pierre: $\emptyset$ | Cedric: $\emptyset$

Utilité : 0 | Utilité : 0

Exemple d'application

EXEMPLE: Considérons deux agents avec les préférences suivantes

-6 5 -4 3 2 1

L'allocation construite est :

Pierre: 

Utilité : -6

Cedric: $\emptyset$

Utilité : 0

Exemple d'application

<u>Exemple</u>: Considérons deux agents avec les préférences suivantes

-6	5	-4	3	2	1

L'allocation construite est :

Pierre: 

Utilité : -1

Cedric: $\emptyset$

Utilité : 0

Exemple: Considérons deux agents avec les préférences suivantes

-6 5 -4 3 2 1

L'allocation construite est :

Pierre: 

Utilité : -1

Cedric: 

Utilité : -4

EXEMPLE: Considérons deux agents avec les préférences suivantes

-6 $\quad 5 \quad$ -4 $\quad 3 \quad$ 2 $\quad 1$

L'allocation construite est :

Pierre: 

Utilité : -1

Cedric: 

Utilité : -1

Exemple d'application

EXEMPLE: Considérons deux agents avec les préférences suivantes

-6 5 -4 3 2 1

L'allocation construite est :

Pierre: 

Utilité : -1

Cedric: 

Utilité : 1

Exemple d'application

<u>Exemple</u>: Considérons deux agents avec les préférences suivantes

-6 5 -4 3 2 1

L'allocation construite est :

Pierre: 

Utilité : 0

Cedric: 

Utilité : 1

Existence d'allocations GEF1

Préférences symétriques et ternaires

Préférences symétriques et ternaires

DÉFINITION:

Un agent $i \in \mathcal{N}$ a des préférences symétriques et ternaires si elles sont additives et pour chaque ressources $o \in \mathcal{O}$, on a $u_i(o) \in \{-\alpha_i, 0, \alpha_i\}$ pour un $\alpha_i \in \mathbb{R}_{>0}$ donné.

GEF1 avec des préférences symétriques et ternaires

<u>LEMME</u>:

Soit $I = \langle \mathcal{N}, \mathcal{O}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle$ une instance avec des biens et des tâches et telle que les préférences sont *symétriques et ternaires*. Toute allocation $\pi \in \Pi(\mathcal{O}, \mathcal{N})$ *leximin-optimale* est aussi *GEF1*.

Algorithme de flot leximin-optimal

Lemme:

Une allocation *leximin-optimale* peut être calculée en temps *polynomial*.

Input: Une instance $I = \langle \mathcal{N}, \mathcal{O}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle$ avec des préférences symétriques et ternaires

Output: $\pi \in \Pi(\mathcal{O}, \mathcal{N})$ une allocation leximin-optimale

$O^+ = \{o \in \mathcal{O} : \max_i u_i(o) > 0\}$, $O^0 = \{o \in \mathcal{O} : \max_i u_i(o) = 0\}$

$O^- = \{o \in \mathcal{O} : \max_i u_i(o) < 0\}$

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall o \in O^+, u'_i(o) = \begin{cases} 1 \text{ si } u_i(o) = 1, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit π l'allocation calculée par le Nash flow algorithm sur $\langle \mathcal{N}, O^+, (u'_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle$.

for $o \in O^-$ **do**

  Allouer o à $i^* \in \arg\max_{i \in \mathcal{N}} u(\pi_i)$

for $o \in O^0$ **do**

  Allouer o à un agent i^* tel que $u_{i^*}(o) = 0$.

return π

GEF1 avec des préférences symétriques et ternaires

<u>Théorème</u>:

Soit $I = \langle \mathcal{N}, \mathcal{O}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}} \rangle$ une instance avec des biens et des tâches et telle que les préférences sont *symétriques et ternaires*. Une allocation $\pi \in \Pi(\mathcal{O}, \mathcal{N})$ satisfaisant GEF1 *existe toujours* et peut être calculé en *temps polynomial*.

<u>EXEMPLE</u>: Considérons trois agents avec les préférences suivantes

						
Cédric	1	-1	1	-1	0	1
Pierre	3	-3	0	-3	-3	3
Nicolas	-5	-5	5	-5	-5	5

On a donc :

O^+:  O^0:  O^-: 

Exemple d'application

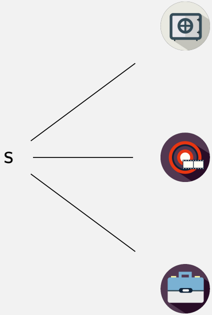
EXEMPLE: On applique alors le Nash flow algorithm [4] à l'instance

			
Cédric	1	1	1
Pierre	1	0	1
Nicolas	0	1	1

[4] Darmann and Schauer "Maximizing Nash product social welfare in allocating indivisible goods" (2015)

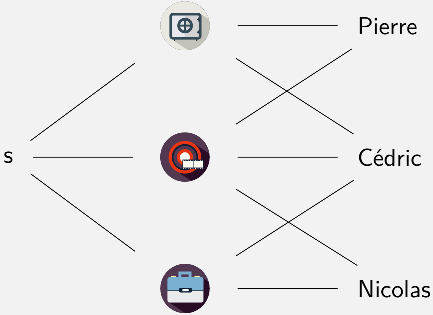
Exemple d'application

<u>EXEMPLE</u>:



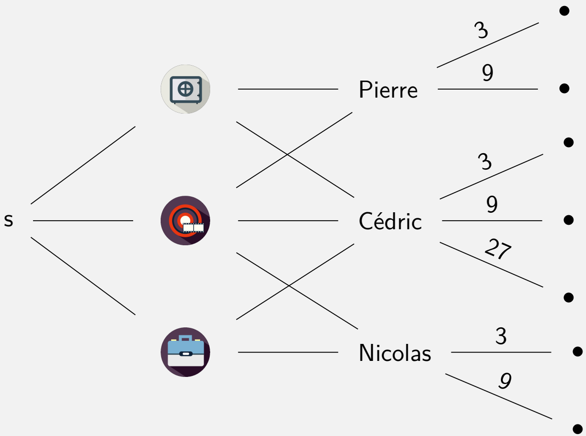
Exemple d'application

EXEMPLE:



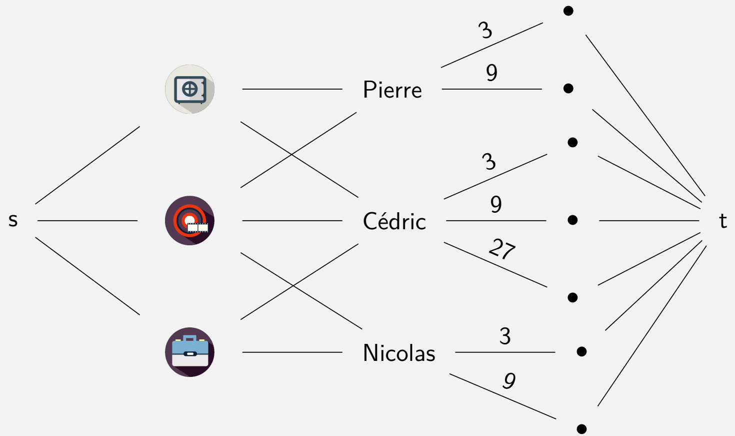
Exemple d'application

EXEMPLE:



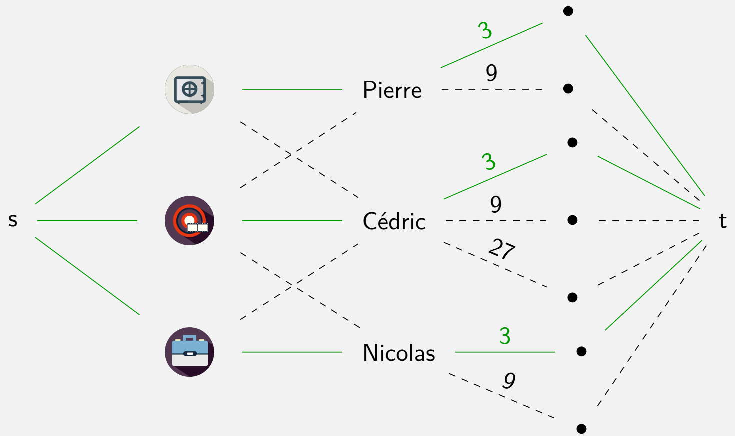
Exemple d'application

Exemple:



Exemple d'application

EXEMPLE:



Exemple d'application

Exemple: L'allocation partielle obtenue est :

Pierre: 

Utilité : 3

Nicolas: 

Utilité : 5

Cédric: 

Utilité : 1

Exemple d'application

EXEMPLE: L'allocation partielle obtenue est :

Pierre: 

Utilité : 3

Nicolas: 

Utilité : 5

Cédric: 

Utilité : 1

En distribuant les dernières ressources, on obtient :

Pierre: 

Utilité : 0

Nicolas: 

Utilité : 0

Cédric: 

Utilité : 1

6. Conclusion

Conclusion

Nous avons...

- ... introduit formellement une définition d'envie pour les groupes en présence de biens et de tâches,
- ... présenté ses relations avec d'autres concepts d'équité,
- ... et donné plusieurs résultats d'existence.

Conclusion

Nous avons...

- ... introduit formellement une définition d'envie pour les groupes en présence de biens et de tâches,
- ... présenté ses relations avec d'autres concepts d'équité,
- ... et donné plusieurs résultats d'existence.

Il reste à ...

- ... donner un résultat d'existence pour GEF1 avec des préférences additives,
- ... étudier une variante "up to any item" de GEFX pour obtenir des résultats sur EFX,
- ... développer de nouveaux critères de justice considérant des groupes d'agents.