方差的假设检验

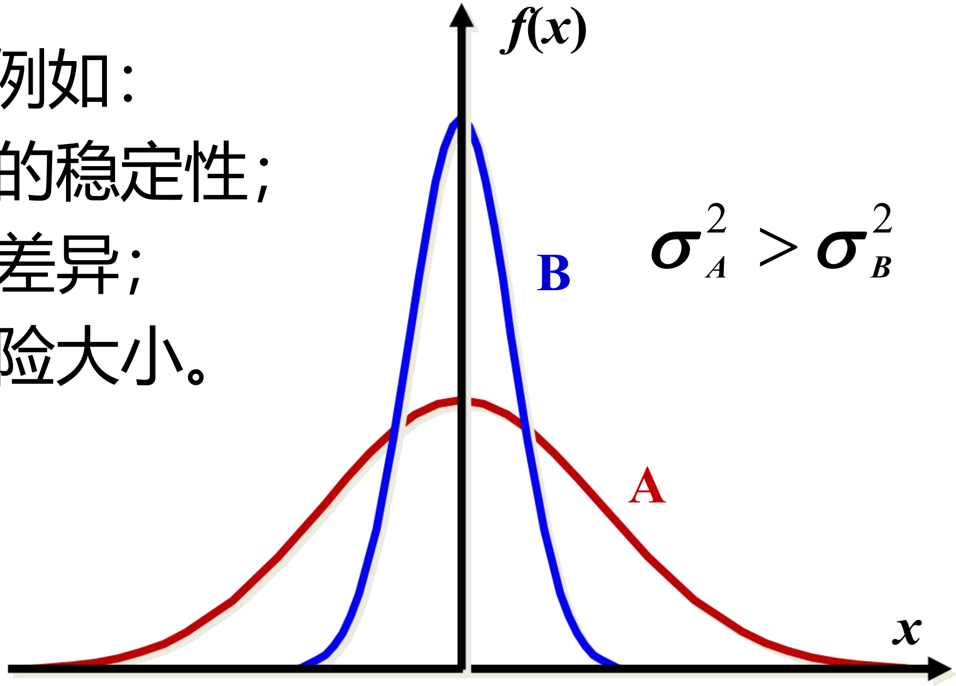
授课教师：陈雄强

浙江财经大学 数据科学学院

方差

方差反映数据的离散程度。例如：

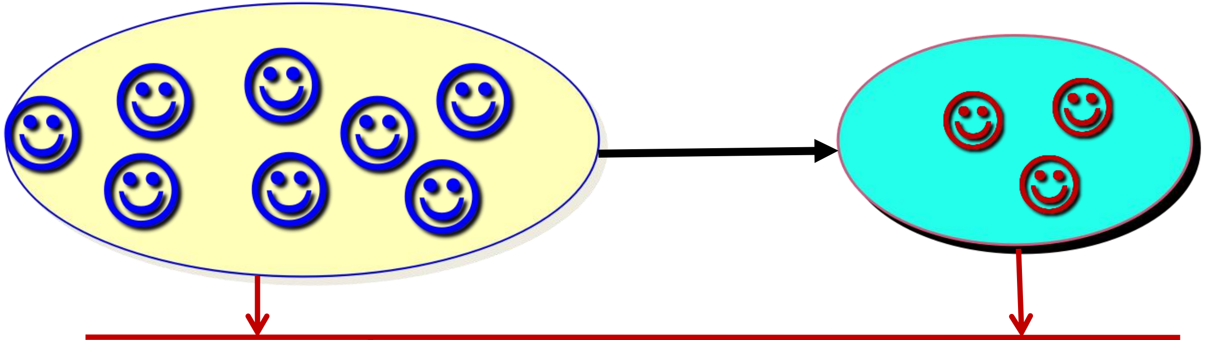
- 产品规格的方差反映产品的稳定性；
- 收入的方差反映收入分配差异；
- 收益率的方差反映投资风险大小。



$$\sigma_A^2 > \sigma_B^2$$

方差的两类检验问题

- 1.单个总体的方差检验：判断方差是否等于给定值?
- 2.两个总体的方差检验：判断方差是否相等?



总 体		样 本
σ^2	方 差	s^2

一、单个总体方差的检验

- 假设总体服从正态分布，即$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ均未知。欲检验假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$;

$$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

- 当H_0成立时，可以证明统计量

样本方差，可计算

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

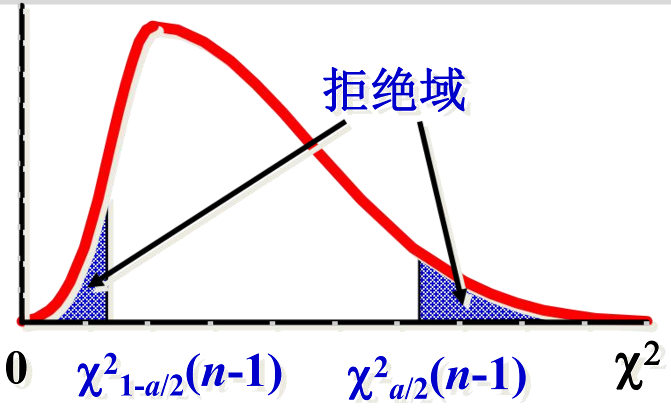
假设的总体方差值，已知

临界值和拒绝域

临界值:

$$P\left\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\} = \frac{\alpha}{2},$$

$$P\left\{\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = \frac{\alpha}{2}.$$



拒绝域:

$$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1).}$$

一、单个总体均值的检验

【例】根据长期正常生产的资料可知，某厂所产导线的电阻服从正态分布，其方差为0.0025。现从某日产品中随机抽取20根，测得样本方差为0.0042。试判断该机工作是否正常？(α=0.05)

一、单个总体均值的检验

检验步骤:

1.提出原假设与备择假设: $H_0: \sigma^2 = 0.0025;$

$H_1: \sigma^2 \neq 0.0025$

2.构建检验统计量:

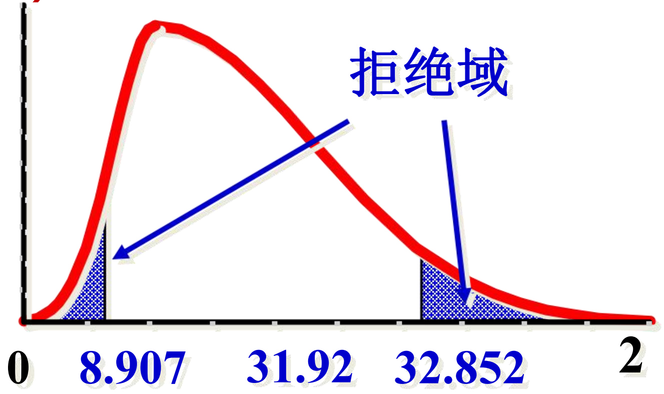
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

$$= \frac{(20-1)\times 0.0042}{0.0025} = 31.92$$

一、单个总体均值的检验

检验步骤：

3.确定拒绝域（α=0.05）



4.作出统计决策

在 α= 0.05的水平上无法拒绝H_0，说明该机器工作正常。

二、两个总体方差的检验

- 设两个样本分别来自正态总体$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，上述参数未知。
- 两个样本相互独立，样本方差分别为s_1^2和s_2^2。
- 欲检验假设：H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，H_1：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$
- 当H_0成立时，检验统计量：

$$F=\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}=\frac{s_1^2}{s_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

由于 $\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1), \frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$

又 σ_1^2和σ_2^2独立。所以当H_0为真时，即$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$时，由F分布的定义有：

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1-1)}{\frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2-1)} = \frac{s_1^2 / s_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

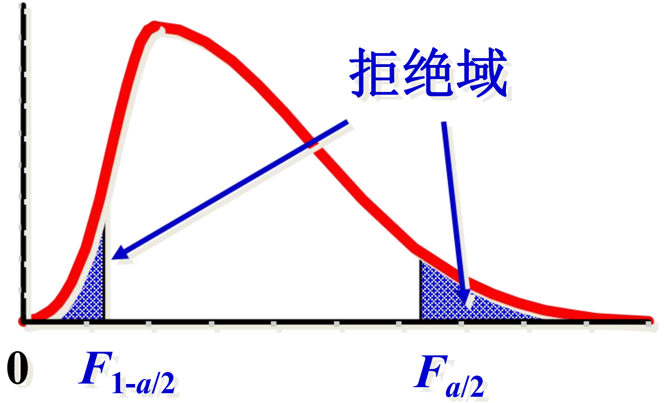
故取检验统计量为 $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

二、两个总体方差的检验

- 当原假设H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 成立时， s_1^2/s_2^2应该接近于1。
- 拒绝域

$$s_1^2 / s_2^2 \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

$$或\ s_1^2 / s_2^2 \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$



二、两个总体方差的检验

【例】两台车床加工同一零件，分别取6件和9件测量直径，得$s_1^2= 0.345$， $s_2^2= 0.357$。假定零件的直径服从正态分布，能否据此断定两个总体的方差相等？ （a=0.05）

两个总体方差比的检验

检验步骤：

1.提出原假设与备择假设：　H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$；

H_1：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2.构建检验统计量：

$$F = \frac{s_1^{\ 2}}{s_2^{\ 2}} = \frac{0.345}{0.357} = 0.964$$

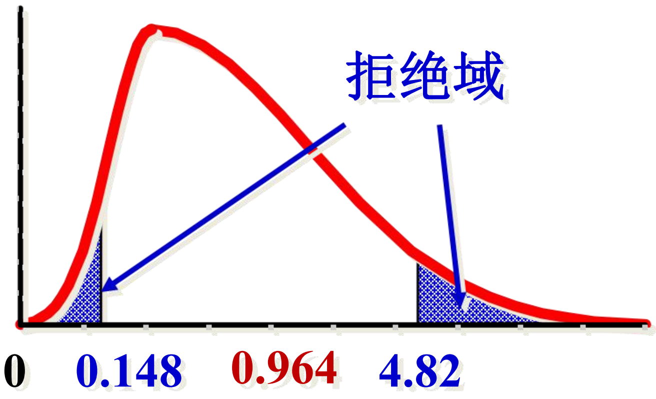
两个总体方差比的检验

检验步骤：

3.确定拒绝域（α=0.05）

$$F_{1-\alpha/2}(5,\ 8)=0.148,$$

$$F_{\alpha/2}(5,\ 8)=4.82,$$



4.作出统计决策

在 α= 0.05的水平上无法拒绝$\sigma_1^2=\sigma_2^2$。可以认为这两个总体的方差没有显著差异。

总结

	原假设H_0	备择假设H_1	检验统计量	拒 绝 域
单个总体	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
两个总体	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$F \ge F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

谢 谢