



浙江财经大学
Zhejiang University of Finance & Economics

单因素方差分析



朱宗元

浙江财经大学数据科学学院



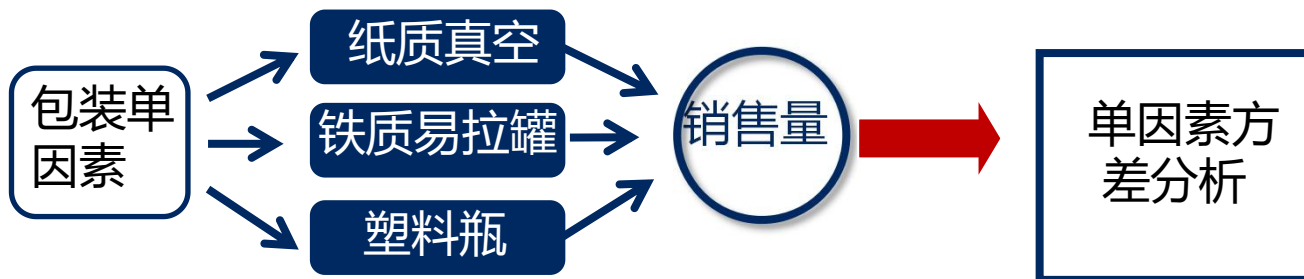
统计数据收集的含义和要求

含义



单因素 方差分析

只考虑一种因素对观察（试验）指标影响的方差分析，称为单因素方差分析。





单因素方差分析模型

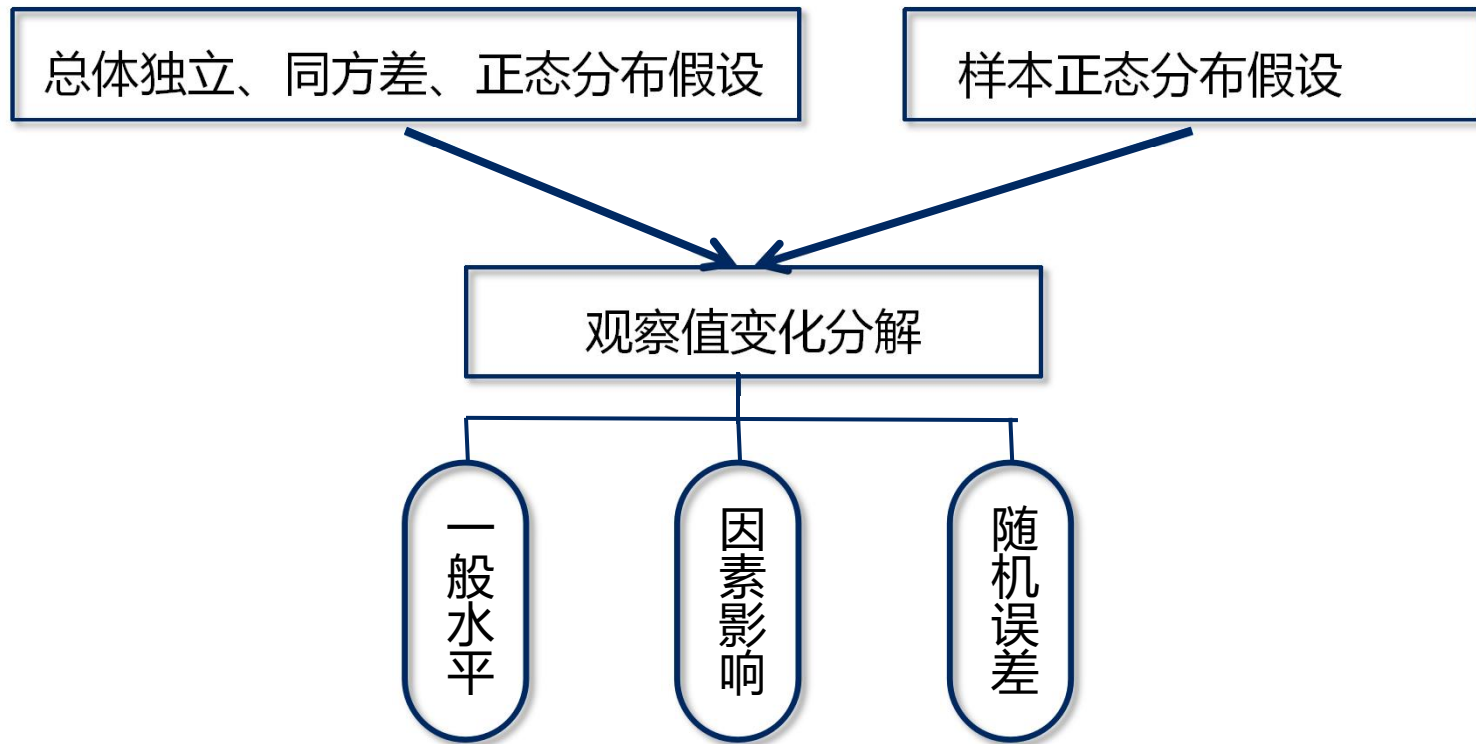
数据结构表

水平号	观察指标值				算术均值	方差
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n_1}	\bar{x}_1	s_1^2
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n_2}	\bar{x}_2	s_2^2
...
A_r	x_{r1}	x_{r2}	...	x_{rn_r}	\bar{x}_r	s_r^2



单因素方差分析模型

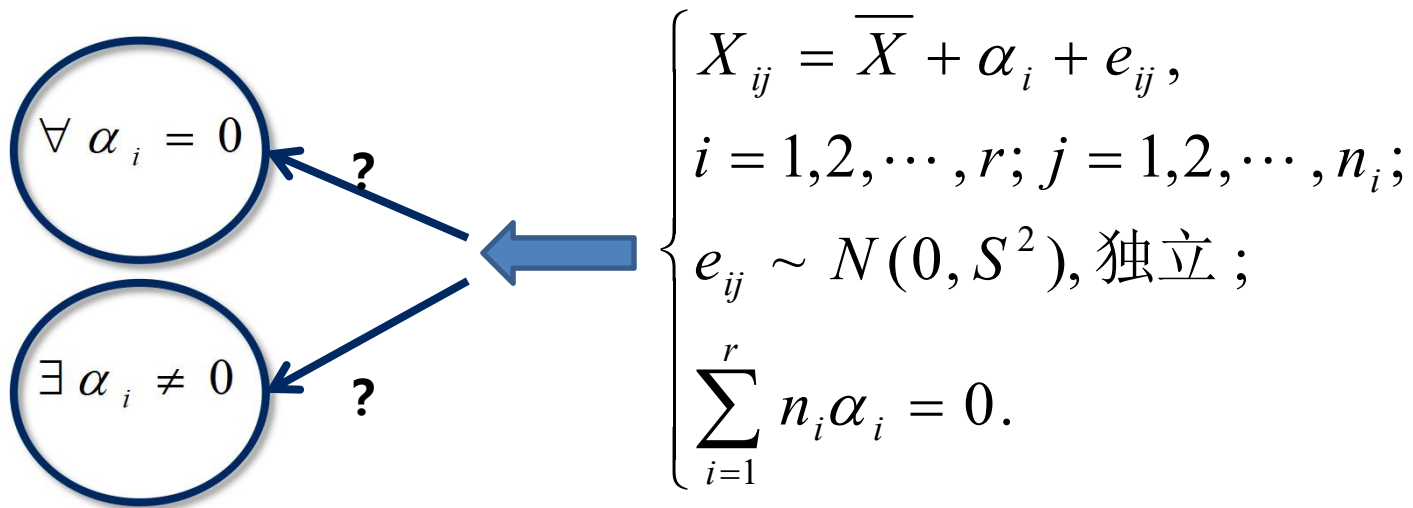
基本假设





单因素方差分析模型

模型





单因素方差分析偏差平方和分解

平方和分解

$$\text{总均值 } \bar{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} / \sum_{i=1}^r n_i$$

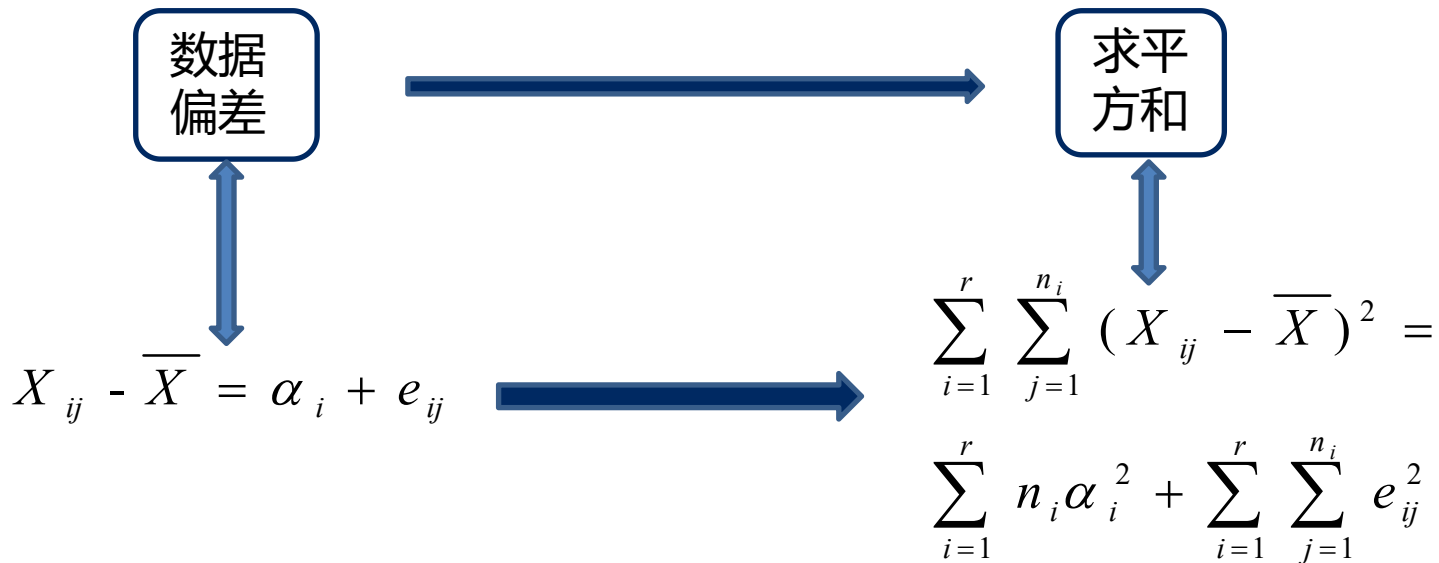
$$i\text{水平均值 } \bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$\alpha_i = \bar{x}_i - \bar{x}, e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i$$



单因素方差分析偏差平方和分解

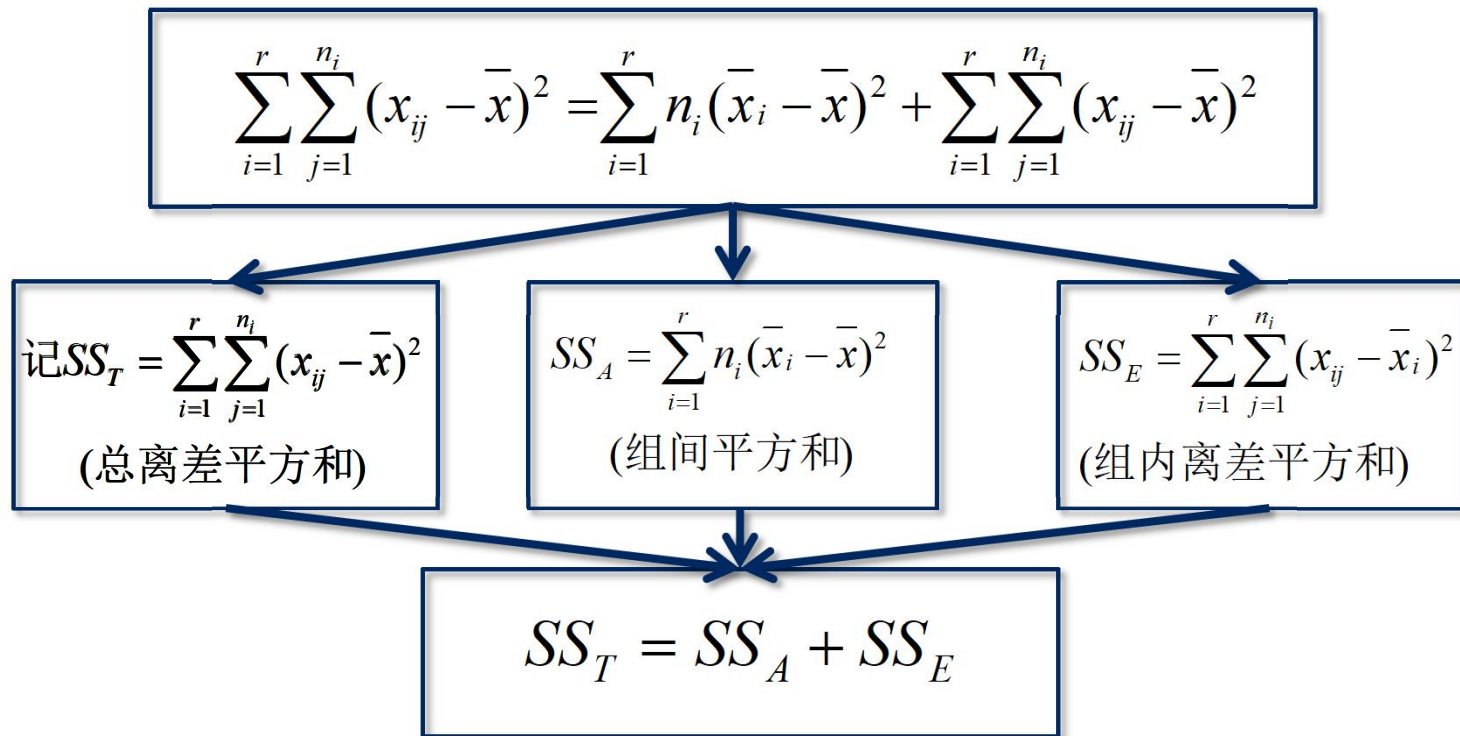
平方和分解





单因素方差分析偏差平方和分解

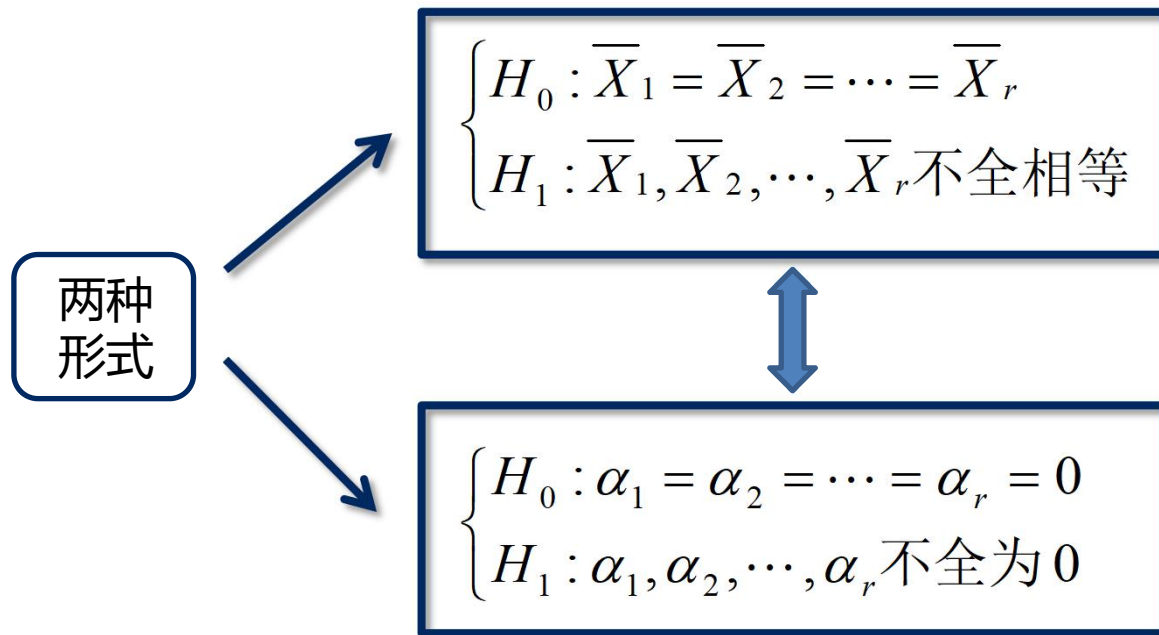
偏差平方和分解公式





单因素方差分析显著性检验

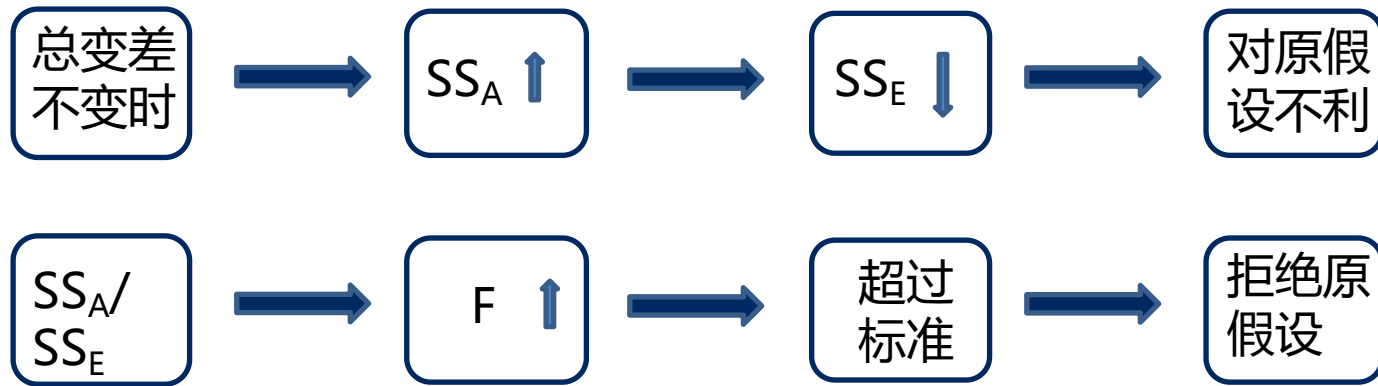
检验形式





单因素方差分析显著性检验

检验统计量构造





单因素方差分析显著性检验

检验统计量构造

记 $n = \sum_{i=1}^r n_i$,
当 H_0 成立时

$$\begin{cases} \frac{SS_T}{S^2} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{x_{ij} - \bar{x}}{S} \right)^2 \sim \chi^2(n-1) \\ \frac{SS_A}{S^2} = \sum_{i=1}^r n_i \left(\frac{\bar{x}_i - \bar{x}}{S} \right)^2 \sim \chi^2(r-1) \\ \frac{SS_E}{S^2} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{S} \right)^2 \sim \chi^2(n-r) \end{cases}$$



单因素方差分析显著性检验

检验统计量

$$F = \frac{SS_A / (r - 1)}{SS_E / (n - r)} \sim F(r - 1, n - r)$$



单因素方差分析显著性检验

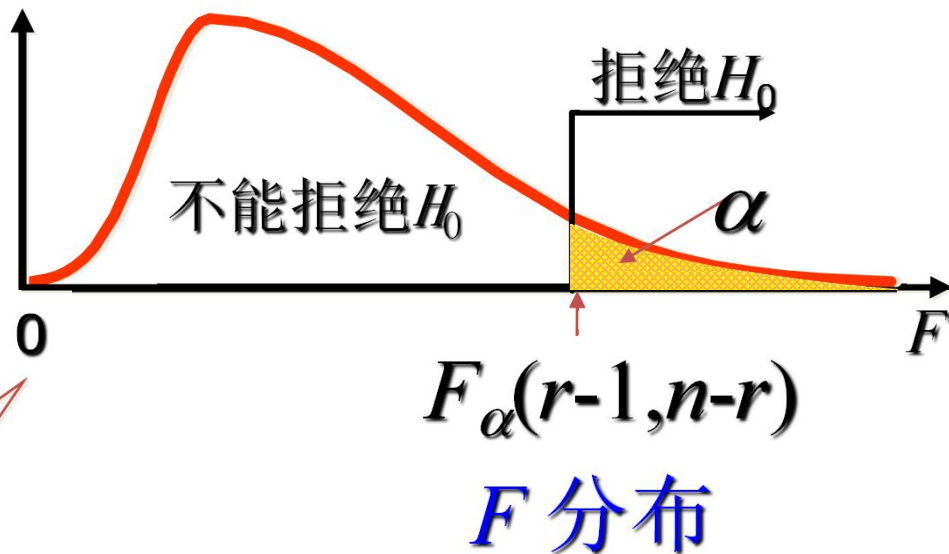
统计量分布与决策

如果均值近似相等,

$$F = \overline{S_A^2} / \overline{S_E^2} \rightarrow 1$$

如果均值显著不等,

$$F = \overline{S_A^2} / \overline{S_E^2} > 1$$





单因素方差分析显著性检验

方差分析表

方差来源	自由度	离差平方和	均方差	F值	P值
因素A	$r-1$	SS_A	$\overline{S_A^2} = \frac{SS_A}{r-1}$	$F = \overline{S_A^2} / \overline{S_E^2}$	P
随机误差	$n-r$	SS_E	$\overline{S_E^2} = \frac{SSE}{n-r}$		
总和	$n-1$	SS_T			



单因素方差分析实例

例题

利用儿童运动饮料试销量的数据，进行单因素方差分析，回答三种包装形式对饮料销售量的影响是否具有显著性（0.05）？

产品包装类型	商店（试销店）							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
纸质真空(A ₁)	152	188	238	192	180	115	125	100
铁质易拉罐(A ₂)	208	256	300	280	270	210	185	165
塑料瓶(A ₃)	182	198	268	220	200	128	110	105



单因素方差分析实例

实例分析

1

计算总平均值、各水平均值等有关中间结果。

解： $r = 3, n = 24, \bar{x} = 190.625,$

$\bar{x}_1 = 161.25, \bar{x}_2 = 234.25, \bar{x}_3 = 176.375,$

$$\sum_{i=1}^3 n_i \bar{x}_i^2 = 895862.125, \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 = 950917.$$



单因素方差分析显著性检验

计算

2

计算组间、组内和总离差平方和。

$$SS_A = \sum_{i=1}^r n_i \bar{x}_i^2 - n \bar{x}^2 = 23752.75$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^r n_i \bar{x}_i^2 = 55054.875$$

$$SS_T = SS_A + SS_E = 78807.625$$



单因素方差分析显著性检验

计算

2

计算均方误差和F统计量。

$$F = \frac{SS_A / (r - 1)}{SS_E / (n - r)} = \frac{23752.75 / 2}{55054.875 / 21} = 4.53$$



单因素方差分析显著性检验

方差分析表

方差来源	自由度	离差平方和	均方差	F值	P值
因素A (组间)	2	23752.750	11876.375	4.530	0.023
随机误差E (组内)	21	55054.875	2621.661	--	--
总和	23	78807.625	--	--	--



单因素方差分析显著性检验

分析结论

临界值法

$$F = 4.53 > F_{0.95}(2, 21) = 3.505.$$

P值法

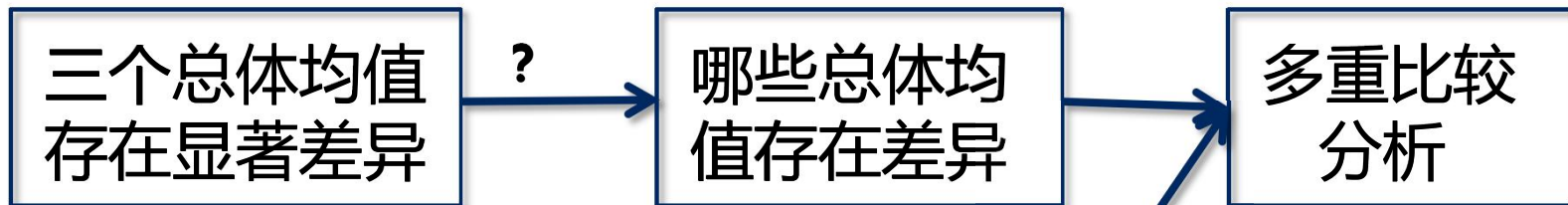
$$P = 0.023 < 0.05.$$

结论：拒绝 H_0 ，即认为包装形式对饮料销售量的影响显著。



单因素方差分析显著性检验

讨论



课下学习



浙江财经大学
Zhejiang University of Finance & Economics

谢 谢

日期：17/08/5