浙江财经大学
Zhejiang University of Finance & Economics

调和平均数和几何平均数

授课教师： 洪兴建

浙江财经大学数据科学学院

2017.09

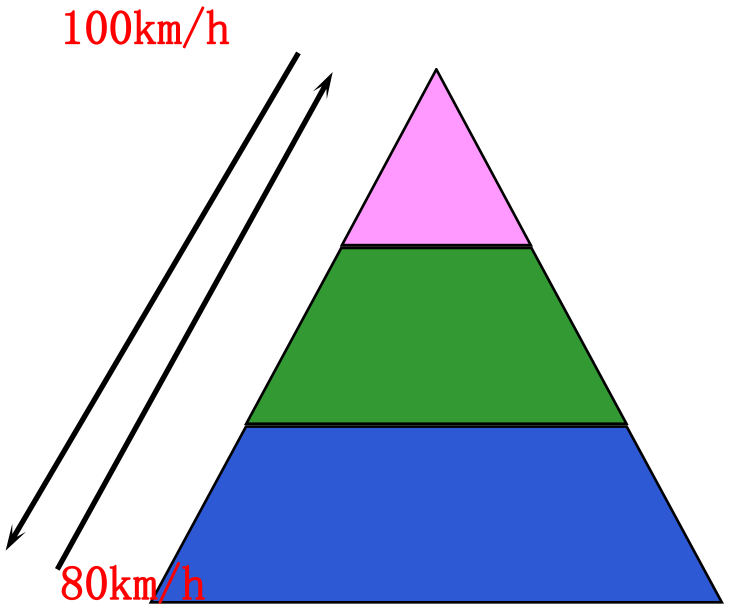
调和平均数和几何平均数

引例

小学算术题：

一辆小车以每小时80公里的速度从山下开到山顶，又以每小时100公里的速度沿原路返回到山下，求该车的平均速度。

$$\xcancel{\frac{80+100}{2}} = 90$$



为什么错？　　用时不等

问题解答

解答思路：

速度=距离/时间，故平均速度=总距离/总时间

$$\text{平均速度}=\frac{\text{总距离}}{\text{总时间}}=\frac{S+S}{\dfrac{S}{80}+\dfrac{S}{100}}=\frac{1+1}{\dfrac{1}{80}+\dfrac{1}{100}}=\frac{2}{\dfrac{1}{80}+\dfrac{1}{100}}=88.89$$

调和平均数

含义

如果该车山下→山顶→山下→...山顶来回开，n次的速度分别为$x_1,x_2,x_3,...,x_n$，则平均速度为：

$$H=\frac{n}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}=\frac{n}{\sum\frac{1}{x}}$$

调和平均数（Harmonic Mean）

$$H=\frac{1}{\frac{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}{n}}=\left[\frac{\left(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1}\right)}{n}\right]^{-1}$$

倒数平均数的倒数

调和平均数

例题

例1：某人在100元/股、200元/股、300元/股的三个不同价位各买进“贵州茅台”股票60000元，则所持该股票的均价是多少？

解题思路：均价=总金额/总股数

解：
$$H=\frac{60000+60000+60000}{\frac{60000}{100}+\frac{60000}{200}+\frac{60000}{300}}=\frac{3}{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}}=163.64\text{元/股}$$

调和平均数

例题

例1等价于：茅台股票100元/股时买了600股，200元/股时买了300股，300元/股时买了200股。要求计算股票均价。等价的计算方式是：

$$\bar{x}=\frac{\sum xf}{\sum f}=\frac{100\times600+200\times300+300\times200}{600+300+200}$$

$$=\frac{180000}{1100}=163.64\text{元}/\text{股}$$

✓ **某些情形下算术平均与调和平均是等价的。**

例2

设有某行业150个企业的有关产值和利润资料如表所示，计算该行业一、二季度的平均产值利润率。

产值利润率(%)	一季度		二季度	
	企业数(个)	实际产值(万元)	企业数(个)	实际利润(万元)
5—10	30	5700	50	710
10—20	70	20500	80	3514
20—30	50	22500	20	2250
合 计	150	48700	150	6474

调和平均数

例题

$$产值利润率=\frac{实际利润}{实际产值}\times 100\%$$

已知实际产值，采用实际产值加权，表现为算术平均

$$\frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i}=\frac{0.075\times 5700+0.15\times 20500+0.25\times 22500}{5700+20500+22500}=\frac{9127.5}{48700}=18.74\%$$

已知实际利润，采用实际利润加权，表现为调和平均

$$\frac{\Sigma m_i}{\Sigma \frac{m_i}{x_i}}=\frac{710+3514+2250}{\frac{710}{0.075}+\frac{3514}{0.15}+\frac{2250}{0.25}}=\frac{6474}{41893.3}=15.45\%$$

调和平均数

加权调和平均数

变形关系

$$\text{平均数} = \frac{\text{总体标志总量}}{\text{总体单位总数}}$$

已知各组标志总量 m 和水平值 x，可得频数 $f = \dfrac{m}{x}$

已知各组标志单位数 f 和水平值 x，可得各组标志总量 $m = xf$

$$\boxed{H = \frac{\sum m}{\sum \frac{m}{x}} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \bar{x}}$$

调和平均数

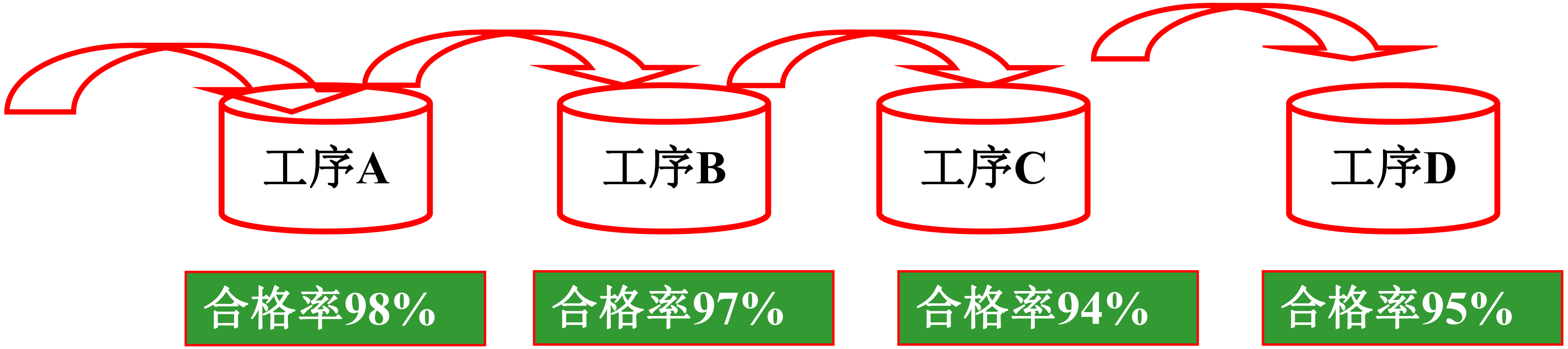
特点

- 受极小值影响相对更大
- 不能有0
- 运用相对较窄

几何平均数

引例

某企业的一条生产流水线有四道工序，每一道工序完成的产品都要作一次质量检查，只有合格的中间件才进入下一道工序。



问：平均合格率=？ $\cancel{\dfrac{98\%+97\%+94\%+95\%}{4}} = 96\%$

解题思路：总（最终）合格率=？

引例解答

总（最终）合格率为

98%×97%×94%×95%S/S= 98%×97%×94%×95%

平均合格率是指每一道工序合格率是相同的

$$G^4 = 98\% \times 97\% \times 94\% \times 95\%$$

$$\Rightarrow G = \sqrt[4]{98\% \times 97\% \times 94\% \times 95\%} = 95.99\%$$

定义

1 简单几何平均数

计算公式

$$G = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n} = \sqrt[n]{\prod_i X_i}$$

- **适用对象：计算平均比率或平均发展速度**

例题3

某同学在网贷平台借得一笔贷款，以季度按复利计算利息，各季利率根据市场变化适当调整。实际一年下来，第一季度的利率是5%，第二季度的利率是5.2%，第三季度的利率是4.6%，第四季度的利率是5.8%。问平均每季利率是多少？

$$G = (5\% + 5.2\% + 4.6\% + 5.8\%) / 4 = 5.2\%$$

$$G = \sqrt[4]{5\% \times 5.2\% \times 4.6\% \times 5.8\%} = 5.132\%$$

例题3

解题思路：即若借款总额为L万元，则一年之后本息和?

$$L\times(1+5\%)(1+5.2\%)(1+4.6\%)(1+5.8\%)$$

如果平均利率为G，则应该有：

$$1+G=\sqrt[4]{(1+5\%)(1+5.2\%)(1+4.6\%)(1+5.8\%)}=105.149\%$$

$$\Rightarrow G=5.149\%$$

定义

2 加权几何平均数

$$G = \sqrt[f_1+f_2+\cdots+f_n]{X_1^{f_1} \cdot X_2^{f_2} \cdot \cdots \cdot X_n^{f_n}} = \sqrt[\sum f]{\prod X^f}$$

fi 代表各个变量值出现的次数

几何平均数

例题4

某笔投资是按复利计算利息的，各年的利率分配如下：

利率	年数
3%	1
6%	4
8%	5
11%	3
15%	2

$$1+G=\sqrt[15]{103^{1}\times 106^{4}\times 108^{5}\times 111^{3}\times 115^{2}}$$

$$=108.62\%$$

平均年利率为8 .62%

则这笔投资的平均年利率是多少?

例题5

设某生产流水线由12道工序组成，据统计有3道工序的不合格率为2%，有4道工序的不合格率为4%，有5道工序的不合格率为5%，则平均的不合格率为多少？

$$\cancel{\sqrt[12]{2\%^3 \times 4\%^4 \times 5\%^5} = 3.364\%}$$

解题思路：流水作业的接力棒是什么？　　合格品

$$1-\sqrt[12]{(1-2\%)^3(1-4\%)^4(1-5\%)^5}$$

$$=1-\sqrt[12]{0.61856}=1-0.96076=3.924\%$$

✓

几何平均数

特点

- 受极值影响较算术平均数小
- 不能有0和负值

三种平均数关系

幂平均函数

数 值： $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

权 重： $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$

$$\text{幂平均数} \; M(p) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \right]^{1/p} \longrightarrow \begin{array}{l} M(1) = \bar{x} \\ M(-1) = H \\ M(\to 0) = G \\ M(2) = U \end{array}$$

$$\frac{dM(p)}{dp} > 0 \quad \Rightarrow \; H \le G \le \bar{x}$$

注意

- ✓ 实际问题计算平均数时，一般只能根据已知条件选择一种类型数值平均数。
- ✓ 数学中几个正数可以计算不同类型数值平均数。
- ✓ 综合评价时，可以选择不同类型数值平均数，排序结果可能会有差异。

例6

例：某企业对五名领导的综合素质进行综合评价，包括德、才两方面得得分如下，请分别用不同平均方法排序。

被评价者	“德”总得分	“才”总得分	算术平均	名次	调和平均	名次	几何平均	名次	平方平均	名次
甲	80	80	80	并列	80	1	80	1	80	5
乙	84	76	80		79.80	2	79.90	2	80.10	4
丙	88	72	80		79.20	3	79.60	3	80.40	3
丁	94	66	80		77.55	4	78.77	4	81.22	2
戊	100	60	80		75.00	5	77.46	5	82.46	1

三种平均数关系

结论

- 算术平均：**折衷型平均**→取长补短式的平均
- 几何平均和调和平均：**惩罚型平均**→鼓励均衡发展
- 平方平均：**激励型平均**→抓大放小式的平均
- 灵活选择p值体现奖罚程度