Chapitre 2
Programmation linéaire
Algorithme du simplexe

Cours RO202

Zacharie ALES
(zacharie.ales@ensta.fr)

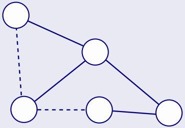
Adapté de cours de Marie-Christine Costa, Alain Faye et Sourour Elloumi

Créé le 21/01/2018
Modifié le 21/01/2021 (v4)

Programme

Optimisation dans les graphes

Chapitre 1

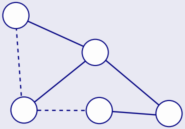


1.1 - Arbre couvrant

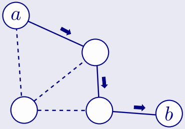
Programme

Optimisation dans les graphes

Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant

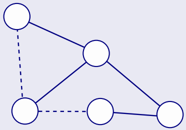


1.2 - Chemin

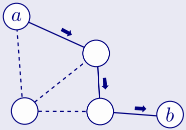
Programme

Optimisation dans les graphes

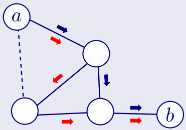
Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant



1.2 - Chemin

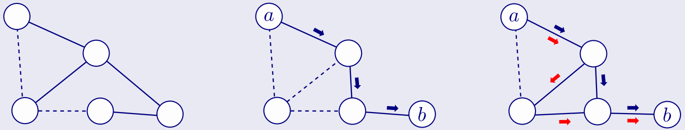


1.3 - Flot

Programme

Optimisation dans les graphes

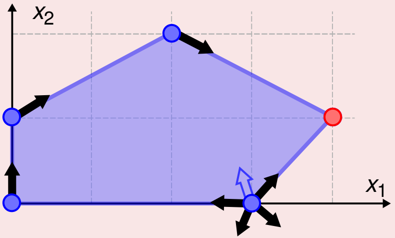
Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant 1.2 - Chemin 1.3 - Flot

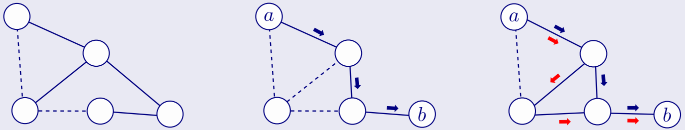
Programmation linéaire (PL)

Chapitre 2



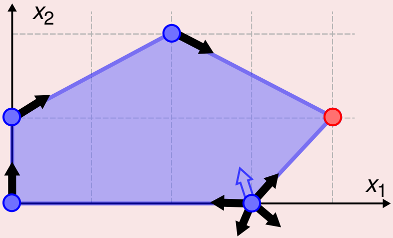
Programme

Optimisation dans les graphes
Chapitre 1

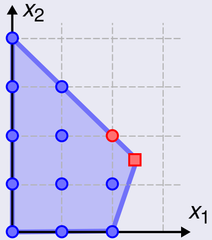


1.1 - Arbre couvrant 1.2 - Chemin 1.3 - Flot

Programmation linéaire (PL)
Chapitre 2



PL en nombres entiers
Chapitre 3



Programme linéaire

Définition - **Programme linéaire**

$$\begin{cases} \max & \overset{\text{Coefficients} \in \mathbb{R}^n \, \downarrow}{c}x \leftarrow \text{Variables} \in \mathbb{R}^n \\ \text{s.c.} & \overset{\text{Coefficients} \in \mathbb{R}^{m\times n} \, \downarrow}{A}x \leq b \leftarrow \text{Coefficients} \in \mathbb{R}^m \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Exemple - Flot maximal

$$\begin{cases} \max & \varphi_{ts} & & \\ & \varphi_{ij} \leq c_{ij} & \forall (ij) \in A & \text{(capacités)} \\ & \sum_{i \in \Gamma^-(j)} \varphi_{ij} = \sum_{i \in \Gamma^+(j)} \varphi_{ji} & \forall j \in V & \text{(conservation des flux)} \\ & \varphi_{ij} \geq 0 & \forall (ij) \in A & \end{cases}$$

Objectif de ce cours

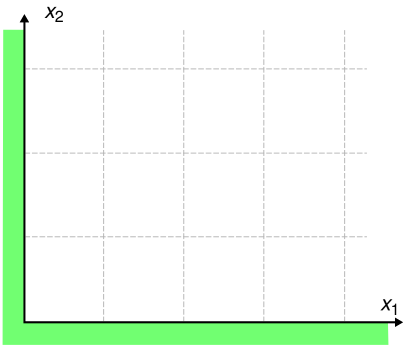
Méthode générale de résolution des programmes linéaires

Sommaire

Le domaine réalisable

Exemple

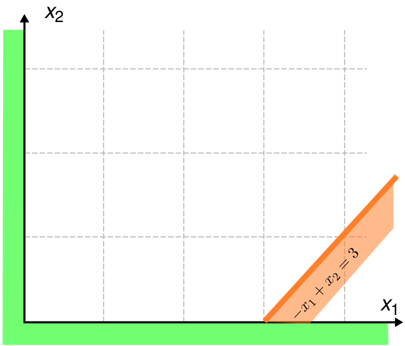
$$\begin{aligned} max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\quad -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Le domaine réalisable

Exemple

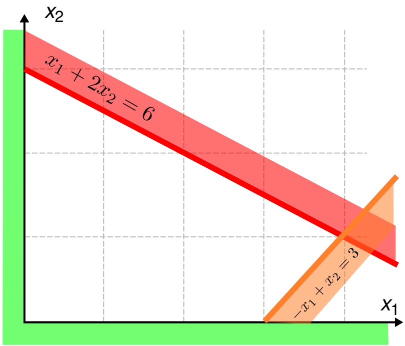
$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Le domaine réalisable

Exemple

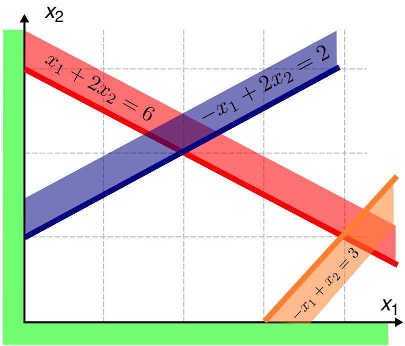
$$\begin{aligned} &max\ z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Le domaine réalisable

Exemple

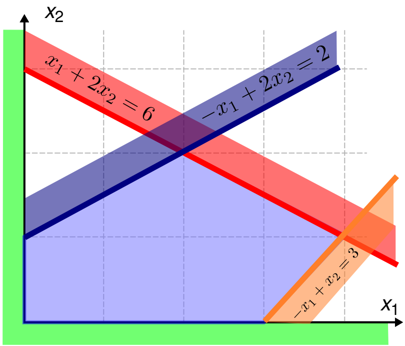
$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\quad & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Le domaine réalisable

Exemple

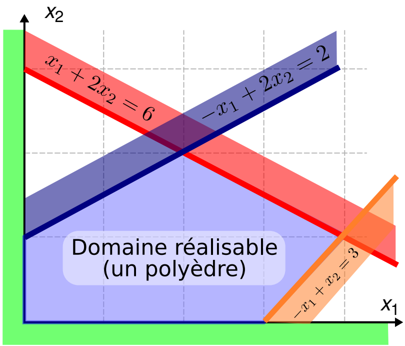
$$\begin{aligned} max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\quad & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Le domaine réalisable

Exemple

$$\begin{aligned} & max\ z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

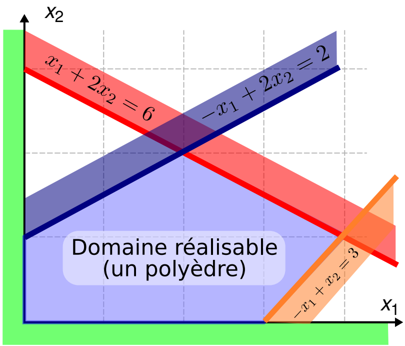


Le domaine réalisable

Exemple

$$\begin{aligned} max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\quad & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tout point du domaine est une **solution réalisable**

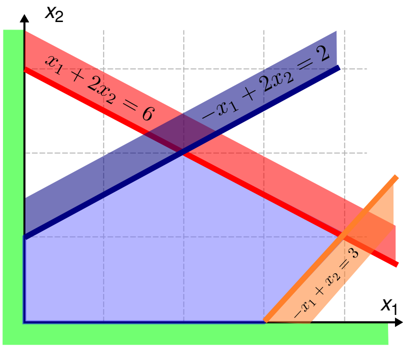


Optimiser la fonction objectif

Exemple

$$\begin{aligned} max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Trouver la valeur maximisant
$z = 2x_1 + x_2$

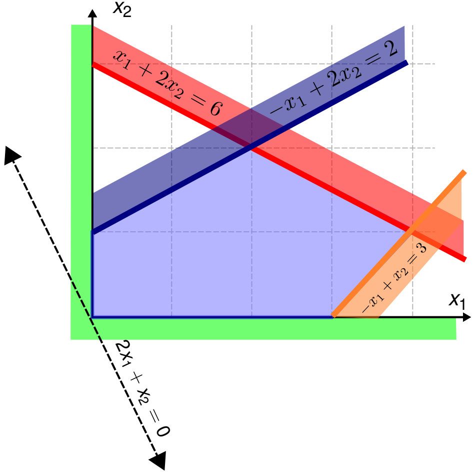


Optimiser la fonction objectif

Exemple

$$\begin{aligned} max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Trouver la valeur maximisant
$z = 2x_1 + x_2$

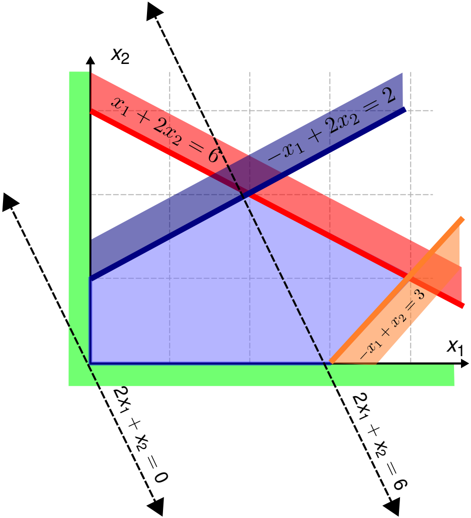


Optimiser la fonction objectif

Exemple

$$\begin{aligned} max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c. } -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Trouver la valeur maximisant
$z = 2x_1 + x_2$

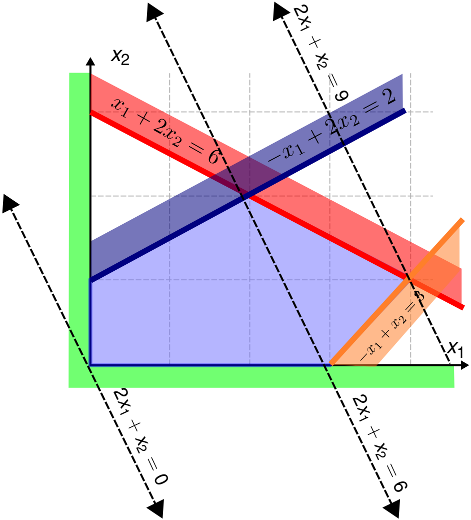


Optimiser la fonction objectif

Exemple

$$\begin{aligned} max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Trouver la valeur maximisant
$z = 2x_1 + x_2$



Problème résolu

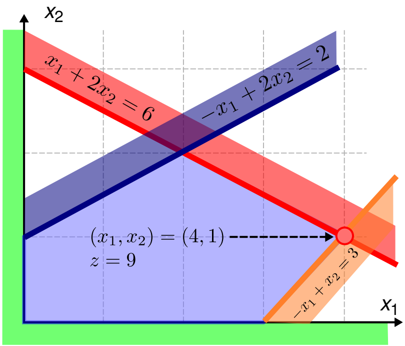
Exemple

$$\begin{aligned} \textit{max}\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution optimale

- $x_1 = 4$
- $x_2 = 1$

$$z = 9$$



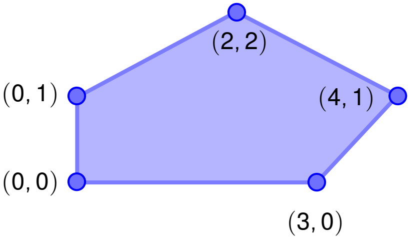
Résolution graphique

Définition - **Point extrême d'un polyèdre**

Point qui ne peut pas être exprimé comme une combinaison convexe d'autres points du polyèdre

Observation

Pour tout programme linéaire, un des points extrêmes du polyèdre correspond à une solution optimale



Résolution graphique

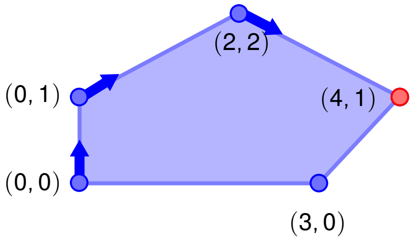
Algorithme naïf

Énumérer tous les points extrêmes et retenir un de ceux pour lequel z est le plus élevé

Très long quand la dimension augmente !

Idée de l'algorithme du simplexe

- Partir d'un point extrême du polyèdre
- Jusqu'à preuve d'optimalité ou de non-finitude
  - Aller d'un point extrême vers un autre qui améliore l'objectif



Sommaire

Forme **standard** d'un programme linéaire

Le simplexe utilise un programme linéaire mis sous **forme standard**

Définition - **Forme standard d'un PL**

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad n \text{ variables} \\
\max & \overset{\downarrow}{c}x \\
\text{s.c.} & Ax = b \leftarrow m \text{ contraintes} \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Exemple - PL sous forme standard

$$
\begin{array}{rrrrl}
max & 3x_1 + & 4x_2 + & x_3 & \\
\text{s.c.} & x_1 + & x_2 - & x_3 & = 4 \\
 & 4x_1 - & x_2 + & 4x_3 & = 6 \\
 & x_1 , & x_2 , & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Passage de la forme générale à la forme standard 1/2

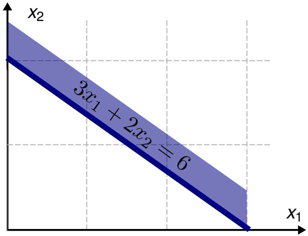
Il est toujours possible de mettre un PL sous forme standard

1/4 Contrainte $\leq$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$$

2/4 Contrainte $\geq$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$$



Passage de la forme générale à la forme standard 1/2

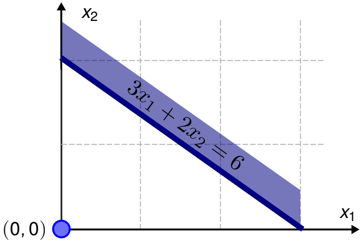
Il est toujours possible de mettre un PL sous forme standard

1/4 Contrainte $\leq$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$$

2/4 Contrainte $\geq$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$$



Passage de la forme générale à la forme standard 1/2

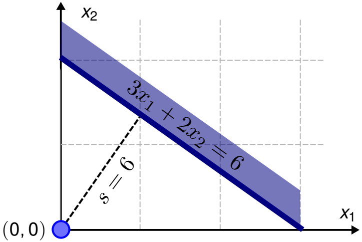
Il est toujours possible de mettre un PL sous forme standard

1/4 Contrainte $\leq$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \rightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

2/4 Contrainte $\geq$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18 \rightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$$



Passage de la forme générale à la forme standard 1/2

Il est toujours possible de mettre un PL sous forme standard

1/4 Contrainte $\leq$

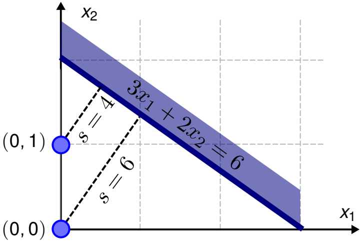
$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$$

....

2/4 Contrainte $\geq$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$$

....



Passage de la forme générale à la forme standard 1/2

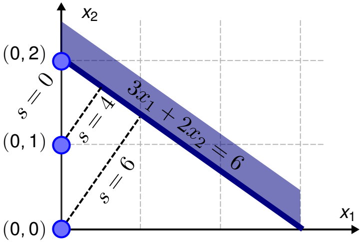
Il est toujours possible de mettre un PL sous forme standard

1/4 Contrainte $\leq$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$$

2/4 Contrainte $\geq$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$$



Quiz !

Question 1

Passage de la forme générale à la forme standard 2/2

3/4 Variable de signe quelconque

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

4/4 Minimisation

$$\min 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$\min f = -\max(-f)$

Mise sous forme standard

Exemple sous forme non standard

$$\begin{aligned} max\ \ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.}\ \ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exemple sous forme standard

$$\begin{array}{llllllll} max\ \ z = & 2x_1 & +x_2 & & & & & \\ \text{s.c.} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 3 \\ & x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 6 \\ & -x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Représentation matricielle

- $n = 5$ (5 variables)
- $m = 3$ (3 contraintes)
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

Bases et solutions de base

Problème sous forme standard

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Hypothèse : $A \in M_{m\times n}$ est de rang m

Définition - **Base d'un programme linéaire**

m variables dont les colonnes de A sont linéairement indépendantes

Notation - **Matrice B des variables d'une base**

Sous-matrice carrée $M_{m\times m}$ de A contenant les vecteurs colonnes de la base

Remarque

B est inversible
Car ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants

Bases et solutions de base

Notation - Matrice N des variables hors-base

Sous-matrice $M_{m \times n-m}$ de A contenant les vecteurs colonnes qui ne sont pas dans la base

Notation

- x_B : variables **de base**
- x_N : variables **hors base**

Exemple - Base $\{x_1, x_4, x_5\}$

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 6 \\ -x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 2 \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Quiz !

Questions 2 et 3

Solution associée à une base

Réorganisation

- $A = (B\ N)$
- $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ $\underbrace{Bx_B + Nx_N}_{=Ax} = b$

Propriété

B inversible donc

- ....

Solution associée à une base

Réorganisation

- $A = (B\ N)$
- $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ $\quad \underbrace{Bx_B + Nx_N}_{=Ax} = b$

Propriété

B inversible donc

- ....

Définition - **Solution associée** à une base *B*

- $x_B = B^{-1}b$
- $x_N = 0$

Solution associée à une base

Réorganisation

- $A = (B\ N)$
- $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ $\quad \underbrace{Bx_B + Nx_N}_{=Ax} = b$

Propriété

B inversible donc

- ....

Définition - **Solution associée** à une base B

- $x_B = B^{-1}b$
- $x_N = 0$

Définition - **Base réalisable**

Base dont la solution associée est réalisable
$\Leftrightarrow B^{-1}b \geq 0$ (sinon au moins une variable négative)

Solution associée à une base

Réorganisation

- $A = (B\ N)$
- $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ $\quad \underbrace{Bx_B + Nx_N}_{=Ax} = b$

Propriété

B inversible donc

- ....

Définition - **Solution associée** à une base B

- $x_B = B^{-1}b$
- $x_N = 0$

Définition - **Base réalisable**

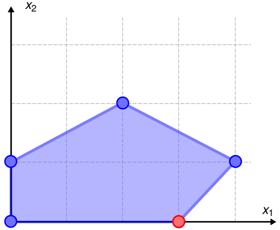
Base dont la solution associée est réalisable
$\Leftrightarrow B^{-1}b \geq 0$ (sinon au moins une variable négative)

Définition - **Base réalisable dégénérée**

Base dont la solution réalisable comporte une variable de base nulle
$\exists b \in B \;\; x_b = 0$

Exemple

$$\begin{array}{lrrrrrrl} \max & 2x_1 + & x_2 & & & & & \\ \text{s.c.} & x_1 - & x_2 + & x_3 & & & = & 3 \\ & x_1 + & 2x_2 & & + x_4 & & = & 6 \\ - & x_1 + & 2x_2 & & & + x_5 & = & 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$



Décomposition de $Bx_B + Nx_N = b$

Considérons la base $\{x_1, x_4, x_5\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solution de base réalisable $x_B = B^{-1}b$ et $x_N = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Remarques

- $\{x_1, x_4, x_5\}$ est une base car ....
- $\{x_1, x_4, x_5\}$ est une base réalisable car ....

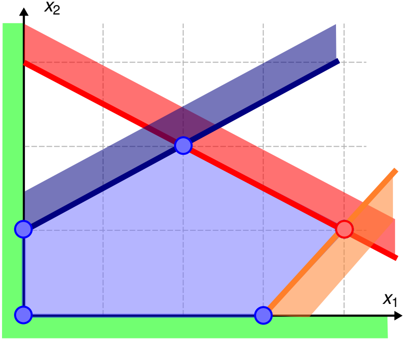
Quiz !

Questions 4 et 5

Correspondance entre points extrêmes et bases réalisables

Exemple

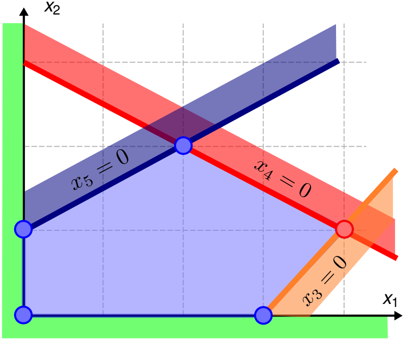
$$
\begin{array}{llllllll}
max\ \ z = & 2x_1 & +x_2 & & & & & \\
\text{s.c.} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 3 \\
 & x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 6 \\
 & -x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$



Correspondance entre points extrêmes et bases réalisables

Exemple

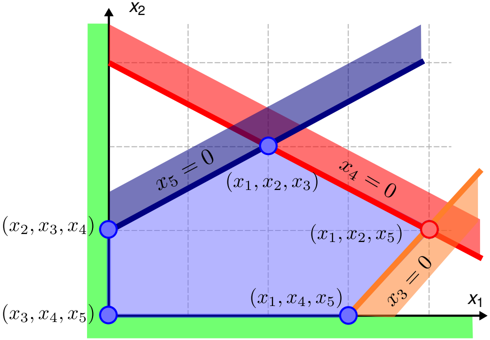
$$
\begin{array}{llllllll}
max\ z = & 2x_1 & +x_2 & & & & & \\
\text{s.c.} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 3 \\
 & x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 6 \\
 & -x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$



Correspondance entre points extrêmes et bases réalisables

Exemple

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
max\ \ z = & 2x_1 & +x_2 & & & & \\
\text{s.c.} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 3 \\
 & x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 6 \\
 & -x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$



Quiz !

Question 6

Théorèmes fondamentaux de la programmation linéaire

Théorème 1

L'ensemble des points extrêmes d'un polytope ou d'un polyèdre convexe correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables

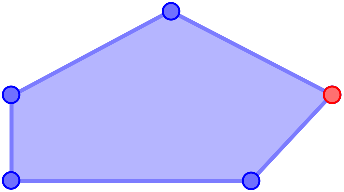
Théorèmes fondamentaux de la programmation linéaire

Théorème 1

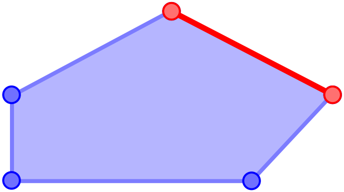
L'ensemble des points extrêmes d'un polytope ou d'un polyèdre convexe correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables

Théorème 2

L'optimum d'une fonction linéaire sur un polytope convexe est atteint en au moins un point extrême S'il est atteint en plusieurs points extrêmes, alors il est atteint en tout point combinaison convexe de ces points extrêmes



Optimum en 1 unique point extrême



Optimum en 2 points extrêmes

Théorème 2

L'optimum d'une fonction linéaire sur un polytope convexe est atteint en au moins un point extrême

Preuve

Conséquence des deux théorèmes

Lorsqu'un programme linéaire admet un optimum fini, il existe une base réalisable B^* telle que la solution de base associée est optimale

Comment savoir si une base réalisable B est optimale ?

Nécessite de réécrire l'objectif

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

Valeur de la solution associée à B

$$z = cx = c_Bx_B + c_Nx_N = \boxed{c_BB^{-1}b} + \boxed{(c_N - c_BB^{-1}N)}\, x_N$$

Δ_N : **coûts réduits** des variables hors base x_N

Comment savoir si une base réalisable B est optimale ?

Nécessite de réécrire l'objectif

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

Valeur de la solution associée à B

$$z = cx = c_B x_B + c_N x_N = \boxed{c_B B^{-1} b} + \boxed{(c_N - c_B B^{-1} N)} x_N$$

Δ_N : **coûts réduits** des variables hors base x_N

Théorème 3 (cas de la maximisation)

Une base réalisable non dégénérée B est une base optimale si et seulement si

$$\Delta_N \leq 0$$

$\Delta_N \geq 0$ en cas de minimisation

Comment savoir si une base réalisable B est optimale ?

Nécessite de réécrire l'objectif

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

Valeur de la solution associée à B

$$z = cx = c_B x_B + c_N x_N = \boxed{c_B B^{-1} b} + \boxed{(c_N - c_B B^{-1} N)}\, x_N$$

Δ_N : **coûts réduits** des variables hors base x_N

Théorème 3 (cas de la maximisation)

Une base réalisable non dégénérée B est une base optimale si et seulement si

$$\Delta_N \leq 0$$

$\Delta_N \geq 0$ en cas de minimisation

Idée de preuve

....

....

La base $\{x_1, x_4, x_5\}$ est-elle optimale ?

Programme linéaire

$$\begin{array}{lrrrrrl} \max & 2x_1 + & x_2 & & & & \\ \text{s.c.} & x_1 - & x_2 + & x_3 & & & = 3 \\ & x_1 + & 2x_2 & & + x_4 & & = 6 \\ & -x_1 + & 2x_2 & & & + x_5 & = 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Reformulation

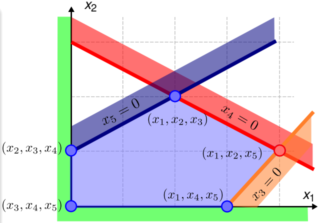
- $x_B = (x_1, x_4, x_5)$
- $x_N = (x_2, x_3)$
- $c_B = (2, 0, 0)$
- $c_N = (1, 0)$

Calcul des coûts réduits

$$\Delta_N = c_N - c_B B^{-1} N$$

$$= (1\ 0) - (2\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (3\ \ -2)$$



$\Delta_{N,1} > 0$ donc $\{x_1, x_4, x_5\}$ n'est pas une base optimale

Quiz !

Questions 7, 8 et 9

Résumé

Ce que l'on sait

1. Un PL peut être mis sous forme standard
   $\max Ax = b,\ x \geq 0$
   Ensemble de m variables dont les colonne de A son indépendantes
2. A chaque base est associée une solution
   Réalisable si $x_B = B^{-1}b \geq 0$ $\quad x_B = B^{-1}b,\ x_N = 0$
3. Point extrêmes $\Leftrightarrow$ solutions de bases réalisables
   Théorème 1
4. Il existe un point extrême optimal
   Théorème 2
   $c_N - c_B B^{-1} N$
5. Une base non dégénérée est optimale ssi $\Delta_N \leq 0$
   Théorème 3

Comment trouver une base fournissant une solution optimale ?

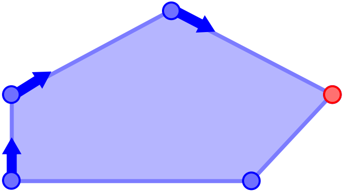
Sommaire

Idée de l'algorithme

- Partir d'une base réalisable
  i.e., d'un point extrême
- Passer d'une base à une base réalisable "voisine" en améliorant z
  Ou en ne modifiant pas z
- Stop quand on ne peut plus améliorer z

Remarque

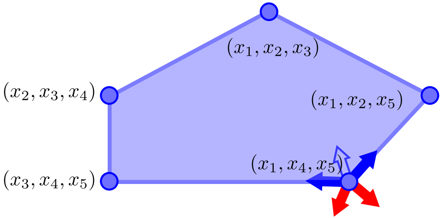
En programmation linéaire continue, **optimum local = optimum global**



Inconvénient

Le nombre de points extrêmes peut être **très** grand

Directions admissibles dans l'algorithme du simplexe




: direction admissible


: direction admissible mais non considérée


: direction non admissible

Passage d'une base à une base "voisine"

Variable entrante

1. Faire entrer une variable x_e dans la base
   i.e., augmenter la valeur de x_e
2. Faire sortir une variable x_s de la base
   $x_s \leftarrow 0$

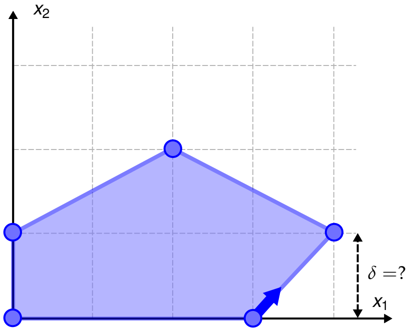
Variable sortante

Problématique 1

Quelle direction choisir ? (i.e., quelle variable faire entrer dans la base ?)

Corollaire du théorème 3 (cas de la maximisation)

Quand la base est non dégénérée, s'il existe un coût réduit > 0 alors on peut faire croître z, sinon le max est atteint



Problématique 1

Quelle direction choisir ? (i.e., quelle variable faire entrer dans la base ?)

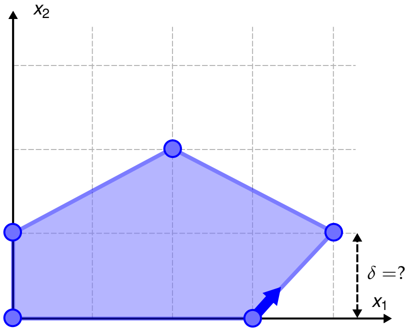
Corollaire du théorème 3 (cas de la maximisation)

Quand la base est non dégénérée, s'il existe un coût réduit > 0 alors on peut faire croître z, sinon le max est atteint

Exemple - Choix de la direction

$\Delta_2 = 3 > 0$ donc augmenter x_2 permet d'améliorer l'objectif

Si x_2 augmente de δ, ...



Problématique 1

Quelle direction choisir ? (i.e., quelle variable faire entrer dans la base ?)

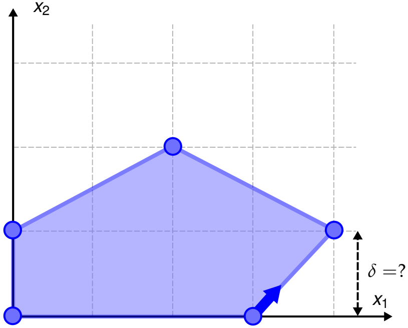
Corollaire du théorème 3 (cas de la maximisation)

Quand la base est non dégénérée, s'il existe un coût réduit > 0 alors on peut faire croître z, sinon le max est atteint

Exemple - Choix de la direction

$\Delta_2 = 3 > 0$ donc augmenter x_2 permet d'améliorer l'objectif

Si x_2 augmente de δ, ...



Problématique 2

Jusqu'où effectuer le déplacement ?

Les contraintes doivent être respectées

Problématique 2

Jusqu'où effectuer le déplacement ?

Les contraintes du problème indiquent de combien la variable entrant en base peut augmenter

Nécessite de reformuler les contraintes sous **forme canonique**

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &= . \\
.. &= \qquad\qquad x_N \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

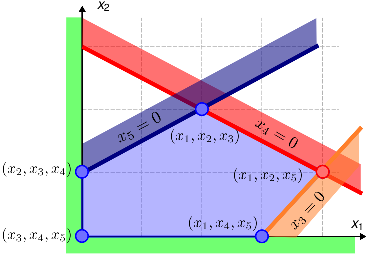
Quelles contraintes limitent l'entrée en base de x_2 ?

Exemple

$$\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}^{x_B} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}^{B^{-1}b} - \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{B^{-1}N} \overbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{x_N}$$

- x_3 reste hors base ($x_3 = 0$) donc

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + x_2 &\geq 0 \\ x_4 &= 3 - 3x_2 &\geq 0 \\ x_5 &= 5 - x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Quelles contraintes limitent l'entrée en base de x_2 ?

Exemple

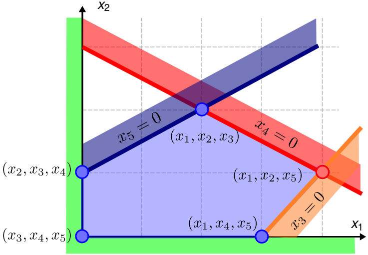
$$\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}^{x_B} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}^{B^{-1}b} - \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{B^{-1}N} \overbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{x_N}$$

- x_3 reste hors base ($x_3 = 0$) donc

$$x_1 = 3 + x_2 \geq 0 \Rightarrow \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$x_4 = 3 - 3x_2 \geq 0$$

$$x_5 = 5 - x_2 \geq 0$$



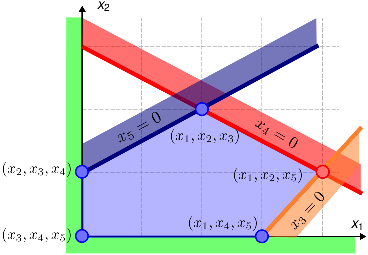
Quelles contraintes limitent l'entrée en base de x_2 ?

Exemple

$$\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}^{x_B} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}^{B^{-1}b} - \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{B^{-1}N} \overbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{x_N}$$

- x_3 reste hors base ($x_3 = 0$) donc

$$x_1 = 3 + x_2 \geq 0 \Rightarrow \text{........}$$
$$x_4 = 3 - 3x_2 \geq 0 \Rightarrow \text{......}$$
$$x_5 = 5 - x_2 \geq 0$$



Quelles contraintes limitent l'entrée en base de x_2 ?

Exemple

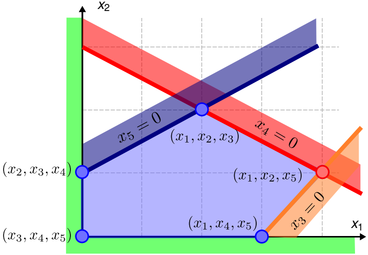
$$\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}^{x_B} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}^{B^{-1}b} - \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{B^{-1}N} \overbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{x_N}$$

- x_3 reste hors base ($x_3 = 0$) donc

$$x_1 = 3 + x_2 \quad \geq 0 \ \Rightarrow \ \ldots\ldots\ldots$$

$$x_4 = 3 - 3x_2 \geq 0 \ \Rightarrow \ \ldots\ldots$$

$$x_5 = 5 - x_2 \quad \geq 0 \ \Rightarrow \ \ldots\ldots$$



Quelles contraintes limitent l'entrée en base de x_2 ?

Exemple

$$\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}^{x_B} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}^{B^{-1}b} - \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{B^{-1}N} \overbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{x_N}$$

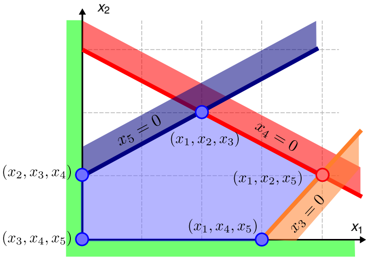
- x_3 reste hors base ($x_3 = 0$) donc

$$x_1 = 3 + x_2 \geq 0 \Rightarrow \ \dots\dots\dots$$

$$x_4 = 3 - 3x_2 \geq 0 \Rightarrow \ \dots\dots$$

$$x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \Rightarrow \ \dots\dots$$

$\rightarrow$ x_2 peut être augmenté jusqu'à $\min(1, 5)$



Quelles contraintes limitent l'entrée en base de x_2 ?

Exemple

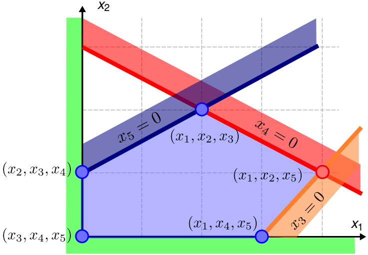
$$\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}^{x_B} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}^{B^{-1}b} - \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{B^{-1}N} \overbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{x_N}$$

- x_3 reste hors base ($x_3 = 0$) donc

  $$x_1 = 3 + x_2 \geq 0 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots$$
  $$x_4 = 3 - 3x_2 \geq 0 \Rightarrow \ldots\ldots$$
  $$x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \Rightarrow \ldots\ldots$$

  $\rightarrow$ x_2 peut être augmenté jusqu'à $\min(1, 5)$
- Si $x_2 \leftarrow 1$ alors $x_4 \leftarrow 0$

  x_4 sort donc de la base



Quelles contraintes limitent l'entrée en base de x_2 ?

Exemple

$$\overbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_4\\x_5\end{pmatrix}}^{x_B} = \overbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}}^{B^{-1}b} - \overbrace{\begin{pmatrix}-1&1\\3&-1\\1&1\end{pmatrix}}^{B^{-1}N} \overbrace{\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}}^{x_N}$$

- x_3 reste hors base ($x_3 = 0$) donc

$$x_1 = 3 + x_2 \geq 0 \Rightarrow \ ....$$

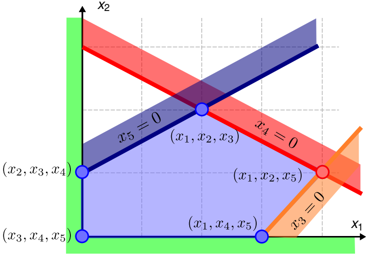
$$x_4 = 3 - 3x_2 \geq 0 \Rightarrow \ ......$$

$$x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \Rightarrow \ ......$$

$\rightarrow$ x_2 peut être augmenté jusqu'à $\min(1, 5)$

- Si $x_2 \leftarrow 1$ alors $x_4 \leftarrow 0$

  x_4 sort donc de la base



Nouvelle solution obtenue

- En base : $x_2 = 1$, $x_1 = x_5 = 4$
- Hors base : $x_3 = x_4 = 0$

Quiz !

Questions 10, 11 et 12

Changement de base - Récapitulatif

1 - Déterminer la variable *e* qui entre dans la base (maximisation)

Sélectionner une variable hors base de coût réduit positif

Plusieurs stratégies possibles :

- Choisir la variable **de plus petit indice**
  Règle de Bland
- Choisir une variable ayant le **plus grand coût réduit**

Minimisation : remplacer “positif” par “négatif”

Changement de base - Récapitulatif

1 - Déterminer la variable *e* qui entre dans la base (maximisation)

Sélectionner une variable hors base de coût réduit positif

Plusieurs stratégies possibles :

- Choisir la variable **de plus petit indice**
  Règle de Bland
- Choisir une variable ayant le **plus grand coût réduit**

Minimisation : remplacer “positif” par “négatif”

2 - Déterminer la variable qui sort de la base

- Les variables hors base $\neq e$ restent nulles,
- La variable sortante $x_i \in B$ deviendra nulle,

on aura donc :

- $(B^{-1}N)_{ie}x_e \leq (B^{-1}b)_i$

Si $(B^{-1}N)_{ie} > 0$, l’augmentation de x_e sera donc limitée par $\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ie}}$ $\forall i \in B$

La variable sortante *s* est celle fournissant le plus petit de ces rapports

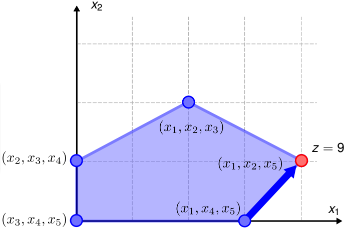
- $x_s \leftarrow 0$
- $x_e \leftarrow \frac{(B^{-1}b)_s}{(B^{-1}N)_{se}}$

Changement de base

Définition - Pivotage

Mettre les contraintes sous forme canonique par rapport à une nouvelle base

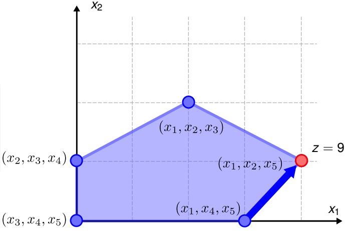
Éliminer x_e des contraintes et de l'objectif



Exemple - x_2 entre en base et x_4 sort

- $x_4 = 3 - 3x_2 + x_3 \geq 0$

Changement de base



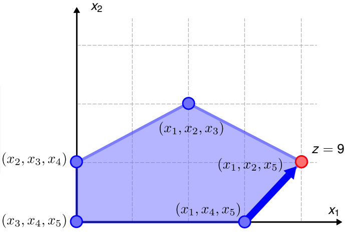
Définition - Pivotage

Mettre les contraintes sous forme canonique par rapport à une nouvelle base
Éliminer x_e des contraintes et de l'objectif

Exemple - x_2 entre en base et x_4 sort

- $x_4 = 3 - 3x_2 + x_3 \geq 0$
- $x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \quad (1)$

Changement de base



Définition - Pivotage

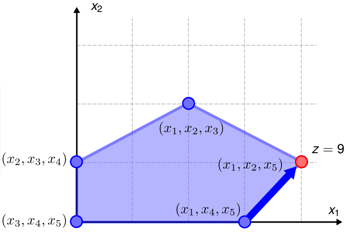
Mettre les contraintes sous forme canonique par rapport à une nouvelle base

Éliminer x_e des contraintes et de l'objectif

Exemple - x_2 entre en base et x_4 sort

- $x_4 = 3 - 3x_2 + x_3 \geq 0$
- $x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \quad (1)$
- On remplace x_2 par (1) dans l'expression des variables de base x_1 et x_5 et de l'objectif :
  - $x_1 = 4 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$
  - $x_5 = 4 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$
  - $z = 9 - x_3 - x_4$

Changement de base



Définition - **Pivotage**

Mettre les contraintes sous forme canonique par rapport à une nouvelle base

Éliminer x_e des contraintes et de l'objectif

Exemple - x_2 entre en base et x_4 sort

- $x_4 = 3 - 3x_2 + x_3 \geq 0$
- $x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \quad (1)$
- On remplace x_2 par (1) dans l'expression des variables de base x_1 et x_5 et de l'objectif :
  - $x_1 = 4 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$
  - $x_5 = 4 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$
  - $z = 9 - x_3 - x_4$
- Nouvelle solution de base : $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_5 = 4$, $z = 9$ et $x_3 = x_4 = 0$
- Cette solution est optimale

  Les variables hors base ont des coefficients négatifs dans z

Formules de changement de base (données à titre indicatif)

Notations

- e : variable entrante
- s : variable sortante
- $\wedge$: termes de la nouvelle base
  Passage de B à la base adjacente $\widehat{B}$

Remarques

- Formules obtenues par simple calcul
- Il n'est pas demandé de les connaître
- Les calculs se font par la méthode des tableaux

Pivotage

Formules de changement de base

- $i \in B \backslash \{s\}$:
  - $\widehat{\overline{a}}_{ij} = \overline{a}_{ij} - \frac{\overline{a}_{ie}\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{se}}$ $(j \in N \backslash \{e\})$
  - $\widehat{\overline{a}}_{is} = -\frac{\overline{a}_{ie}}{\overline{a}_{se}}$ $(j = s)$
  - $\widehat{\overline{b}}_i = \overline{b}_i - \frac{\overline{a}_{ie}}{\overline{a}_{se}}\overline{b}_s$
- $i = e$:
  - $\widehat{\overline{a}}_{ej} = \frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{se}}$ $(j \in N \backslash \{e\})$
  - $\widehat{\overline{a}}_{es} = \frac{1}{\overline{a}_{se}}$ $(j = s)$
  - $\widehat{\overline{b}}_e = \frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}}$
- $j \in N \backslash \{e\}$: $\widehat{\Delta}_j = \Delta_j - \Delta_e \frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{se}}$
- $j = s$:
  - $\widehat{\Delta}_s = -\frac{\Delta_e}{\overline{a}_{se}}$
  - $\widehat{\overline{z}} = \overline{z} + \Delta_e \frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}}$

Sommaire

Construction du tableau

Construction du **tableau initial** associé à un PL sous forme standard

$$
\begin{array}{ll}
\max & cx \\
\text{s.c.} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

	x	z	(RHS)
(C_1) ⋮ (C_m)	A	0	b
(Obj)	c	1	–

Remarque : la colonne z peut être omise

Construction du tableau

Construction du **tableau initial** associé à un PL sous forme standard

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

	x	z	(RHS)
(C_1) $\vdots$ (C_m)	A	0	b
(Obj)	c	1	–

Remarque : la colonne z peut être omise

Exemple

$$\begin{array}{llllllll} \max & 2\ x_1 & +1\ x_2 & & & & & \\ \text{s.c.} & 1\ x_1 & -1\ x_2 & +1\ x_3 & & & = & 3 \quad (C_1) \\ & 1\ x_1 & +2\ x_2 & & +1\ x_4 & & = & 6 \quad (C_2) \\ & -1\ x_1 & +2\ x_2 & & & +1\ x_5 & = & 2 \quad (C_3) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	(RHS)

Construction du tableau

Construction du **tableau initial** associé à un PL sous forme standard

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

	x	z	(RHS)
(C_1) ⋮ (C_m)	A	0	b
(Obj)	c	1	–

Remarque : la colonne z peut être omise

Exemple

$$\begin{array}{lrrrrrcll} \max & 2\,x_1 & +1\,x_2 & & & & & & \\ \text{s.c.} & 1\,x_1 & -1\,x_2 & +1\,x_3 & & & = & 3 & (C_1) \\ & 1\,x_1 & +2\,x_2 & & +1\,x_4 & & = & 6 & (C_2) \\ & -1\,x_1 & +2\,x_2 & & & +1\,x_5 & = & 2 & (C_3) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 & \end{array}$$

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	(RHS)
(C_1)	1	−1	+1				3

Construction du tableau

Construction du **tableau initial** associé à un PL sous forme standard

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

	x	z	(RHS)
(C_1) ⋮ (C_m)	A	0	b
(Obj)	c	1	–

Remarque : la colonne z peut être omise

Exemple

$$\begin{array}{lrrrrrcll} \max & 2\,x_1 & +1\,x_2 & & & & & & \\ \text{s.c.} & 1\,x_1 & -1\,x_2 & +1\,x_3 & & & = & 3 & (C_1) \\ & 1\,x_1 & +2\,x_2 & & +1\,x_4 & & = & 6 & (C_2) \\ & -1\,x_1 & +2\,x_2 & & & +1\,x_5 & = & 2 & (C_3) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 & \end{array}$$

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	(RHS)
(C_1)	1	-1	$+1$				3
(C_2)	1	$+2$		$+1$			6

Construction du tableau

Construction du **tableau initial** associé à un PL sous forme standard

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

	x	z	(RHS)
(C_1) ⋮ (C_m)	A	0	b
(Obj)	c	1	–

Remarque : la colonne z peut être omise

Exemple

$$\begin{array}{lccccccl} \max & 2\,x_1 & +1\,x_2 & & & & & \\ \text{s.c.} & 1\,x_1 & -1\,x_2 & +1\,x_3 & & & = 3 & (C_1) \\ & 1\,x_1 & +2\,x_2 & & +1\,x_4 & & = 6 & (C_2) \\ & -1\,x_1 & +2\,x_2 & & & +1\,x_5 & = 2 & (C_3) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 & \end{array}$$

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	(RHS)
(C_1)	1	−1	+1				3
(C_2)	1	+2		+1			6
(C_3)	−1	+2			+1		2

Construction du tableau

Construction du **tableau initial** associé à un PL sous forme standard

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

	x	z	(RHS)
(C_1) ⋮ (C_m)	A	0	b
(Obj)	c	1	–

Remarque : la colonne z peut être omise

Exemple

$$\begin{array}{llllllll} \max & 2x_1 & +1x_2 & & & & & \\ \text{s.c.} & 1x_1 & -1x_2 & +1x_3 & & & = 3 & (C_1) \\ & 1x_1 & +2x_2 & & +1x_4 & & = 6 & (C_2) \\ & -1x_1 & +2x_2 & & & +1x_5 & = 2 & (C_3) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 & \end{array}$$

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	(RHS)
(C_1)	1	−1	+1				3
(C_2)	1	+2		+1			6
(C_3)	−1	+2			+1		2
(Obj)	2	1				1	–

Forme canonique

Définition - Forme canonique d'un PL pour une base B

PL dont les vecteurs colonnes associés à z et aux variables de B forment la matrice identité
À des permutations de colonnes près

- Cette forme permet de trouver facilement la solution associée à une base

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	(RHS)
(C_1)	1	-1	1				3
(C_2)	1	2		1			6
(C_3)	-1	2			1		2
(Obj)	2	1				1	–

Exemple - Tableau sous forme canonique

	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{z}$	(RHS)
(C_1)	1	-1	1				3
(C_2)	0	3	-1	1			3
(C_3)	0	1	1		1		5
(Obj)	0	3	-2			1	-6

Comment mettre le tableau sous forme canonique ?

Combiner linéairement les contraintes

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	(RHS)
(C_1)	1	-1	1			3
(C_2)	1	2		1		6
(C_3)	-1	2			1	2
(Obj)	2	1				$-$

Comment mettre le tableau sous forme canonique ?

Combiner linéairement les contraintes

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	(RHS)
(C_1)	1	-1	1			3
(C_2)	1	2		1		6
(C_3)	-1	2			1	2
(Obj)	2	1				$-$

Exemple - Tableau sous forme canonique

	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	(RHS)
(C_1)	$\mathbf{1}$	-1	1			3
$(C_2)-(\mathbf{C_1})$	0	3	-1	$\mathbf{1}$		3
$(C_3)+(\mathbf{C_1})$	0	1	1		$\mathbf{1}$	5
$(Obj)-\mathbf{2}(\mathbf{C_1})$	0	3	-2			-6

Comment mettre le tableau sous forme canonique ?

Combiner linéairement les contraintes

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	(RHS)
(C_1)	1	-1	1			3
(C_2)	1	2		1		6
(C_3)	-1	2			1	2
(Obj)	2	1				$-$

Exemple - Tableau sous forme canonique

	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	(RHS)
(C_1)	$\mathbf{1}$	-1	1			3
$(C_2)-(\mathbf{C_1})$	0	3	-1	$\mathbf{1}$		3
$(C_3)+(\mathbf{C_1})$	0	1	1		$\mathbf{1}$	5
$(Obj)-\mathbf{2}(\mathbf{C_1})$	0	3	-2			-6

Propriétés

Mettre sous forme canonique fait apparaître

- $B^{-1}b$ dans la colonne (RHS)
- les coûts réduits dans la ligne (Obj) $\Rightarrow$ **variable sortante**

Comment mettre le tableau sous forme canonique ?

Combiner linéairement les contraintes

Exemple - Tableau initial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	(RHS)
(C_1)	1	-1	1			3
(C_2)	1	2		1		6
(C_3)	-1	2			1	2
(Obj)	2	1				$-$

Exemple - Tableau sous forme canonique

	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	(RHS)
(C_1)	$\mathbf{1}$	-1	1			3
$(C_2)-(\mathbf{C_1})$	0	3	-1	$\mathbf{1}$		3
$(C_3)+(\mathbf{C_1})$	0	1	1		$\mathbf{1}$	5
$(Obj)-\mathbf{2}(\mathbf{C_1})$	0	3	-2			-6

Propriétés

Mettre sous forme canonique fait apparaître

- $B^{-1}b$ dans la colonne (RHS)
- les coûts réduits dans la ligne (Obj) $\Rightarrow$ **variable sortante**

Remarque

L'opposé de la valeur de la solution de base réalisable apparaît en bas à droite
-6 dans l'exemple

Quiz !

Question 13

Comment trouver la variable de base sortante ?

Utiliser le **ratio test**

Pour chaque contrainte i, calculer $\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ie}}$

- $(B^{-1}b)_i$: colonne (RHS)
- $(B^{-1}N)_{ie}$: colonne x_e

La variable sortante est celle fournissant le plus petit ratio strictement positif

Ou un ratio nul si $(B^{-1}N)_{ie} \geq 0$ (dans ce cas pas d'augmentation)

Exemple - Tableau sous forme canonique ($x_e = x_2$)

		$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	(RHS)		
$\mathbf{x_1}$	(C_1)	1	-1	1			3	$\Rightarrow$	$\frac{3}{-1}$
$\mathbf{x_4}$	(C_2)		3	-1	1		3	$\Rightarrow$	$\frac{3}{3}$
$\mathbf{x_5}$	(C_3)		1	1		1	5	$\Rightarrow$	$\frac{5}{1}$
	(Obj)		3	-2			-6		

donc x_4 est la variable sortante

Quiz !

Question 14

Fin de la première itération du simplexe

Fin de la première itération du simplexe

On recommence tant qu'il y a des coût réduits positifs

Fin de la première itération du simplexe

On recommence tant qu'il y a des coût réduits positifs

Exemple - Tableau sous forme canonique 2

		$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	x_3	x_4	$\mathbf{x_5}$	(RHS)
$\mathbf{x_1}$	$(C_1) + (C_2)$	1		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		4
$\mathbf{x_2}$	$(C_2)/3$		1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		1
$\mathbf{x_5}$	$(C_3) - 3(C_2)$			$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	4
	(Obj)			-1	-1		-9

- Tous les coûts réduits sont négatifs, fin de l'algorithme
- Solution optimale $(x_1, x_2) = (4, 1)$ de valeur $z = 9$

Changement de base

Remarque

Dantzig a proposé 2 critères pour déterminer

1. La variable qui entre dans la base
   Plus grand $\Delta_j > 0$
2. La variable qui sort de la base
   Plus petit rapport > 0

QCM

- A. Seul le critère 1 est impératif
- B. Seul le critère 2 est impératif
- C. Les deux sont impératifs

. . . .

. . . .

. . . .

Choix d'une base réalisable initiale

Il n'est pas toujours facile de déterminer une base initiale

Méthodes possibles

- Prendre les variables d'écart (si possible)
  Valeur nulle de la fonction économique
- Introduire 1 variable artificielle par contrainte avec
  - un coefficient 1 dans la contrainte
  - un très grand coût dans l'objectif

  Elles sortiront de la base au cours des m premières itérations et seront supprimées du problème
  Méthode du « big M »

Exemple - Base formée des variables d'écart

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	(RHS)
(C_1)	1	-1	**1**				3
(C_2)	1	2		**1**			6
(C_3)	-1	2			**1**		2
(Obj)	2	1				**1**	$-$

Solution associée :

- $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 3,\ x_4 = 6,\ x_5 = 2$

Remarque

À la première itération :

- x_1 entre en base
- x_3 sort de la base

et on retrouve la base initiale utilisée précédemment

QCM

x_e doit entrer en base et tous les rapports $\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ie}}$ sont < 0.
Que peut-on en déduire ?

1. Le système n'a pas de solution
2. Le système a une solution infinie
3. On est à l'optimum

....

....

....

....

Exemple - Programme non borné

$$\begin{array}{lrrl} \min z = & -5x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.c.} & -x_1 & +3x_2 & \leq 3 \\ & -x_1 & +2x_2 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- $x_1 \to +\infty \Rightarrow z \to -\infty$

Algorithme du simplexe (cas de la maximisation)

Données : PL sous forme standard

$B \leftarrow$ Déterminer une base initiale*

Mettre le PL sous forme canonique pour B

tant que il existe des coûts réduits > 0 **faire**

  $v_e \leftarrow$ variable entrant dans la base `// Utiliser les coûts réduits`**

  $v_s \leftarrow$ variable sortant de la base `// Utiliser le ratio test`***

  $B \leftarrow (B \backslash v_s) \cup v_e$

  Mettre le PL sous forme canonique pour B

fin

Minimisation : remplacer >0 par <0, adapter la sélection des variables entrantes et sortantes

* : Si l'origine n'est pas réalisable, peut nécessiter une phase préliminaire appellée simplexe phase 1

** : Plusieurs règles possibles

*** :

- Si plusieurs variables candidates ont le même ratio, la base suivante sera dégénérée
- Si tous les ratios sont négatifs $\rightarrow$ problème non borné

Le simplexe est efficace en pratique mais... **NON POLYNOMIAL**

Aspects non abordés dans ce cours

- Risque de cyclage s'il y a dégénerescence
  Cas d'une variable de base nulle
- Difficulté pour trouver une base initiale
- ...

Algorithmes de résolution de PL

- Méthode de Gauss-Jordan (opérations de pivotage)
- Algorithme du simplexe (Dantzig, 1947)
- Algorithme dual du simplexe
- Variations du simplexe
- Algorithme de Khachiyan (1979)
  Polynomial !
- Méthodes de point intérieur
- Karmarkar (1984)
- ...

Ce problème est polynomial, "simple" à résoudre

Logiciels permettant de résoudre des PL

- CPLEX
- XPRESS
- COIN-OR
- ...

Permettent de traiter des instances ayant des centaines de milliers de variables et contraintes

Voire des millions si la matrice est creuse

Sommaire

Dualité

Exemple de problème

Un investisseur veut se constituer un portefeuille d'actions contenant au moins

- 25 actions A
- 60 actions B
- 15 actions C

Il se fournit auprès de deux courtiers vendant chacun un pack d'action.
La constitution ainsi que le prix unitaire de ces deux packs sont donnés ci-dessous :

Action	Pack 1	Pack 2
A	20	5
B	30	20
C	5	10
coût	6	9

Objectif

Trouver comment constituer le portefeuille de l'investisseur pour un coût minimal

Dualité

Données

Action	Pack 1	Pack 2	Quantité min
A	20	5	25
B	30	20	60
C	5	10	15
Coût	6	9	-

Modèle

Nombre de pack 1 achetés

Nombre de packs 2 achetés

$$
\begin{array}{lrrl}
\min z = & 6x_1 & +9x_2 & \\
\text{s.c.} & 20x_1 & +5x_2 & \geq 25 \\
 & 30x_1 & +20x_2 & \geq 60 \\
 & 5x_1 & +10x_2 & \geq 15 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Dualité

Données

Action	Pack 1	Pack 2	Quantité min
A	20	5	25
B	30	20	60
C	5	10	15
coût	6	9	-

Un 3ème courtier souhaite vendre des actions A, B et C **séparément**

Il doit fixer les prix unitaires u_A, u_B et u_C des actions
Pour être concurrentiel avec :

- le courtier 1 il faut : $20u_A + 30u_B + 5u_C \leq 6$
- le courtier 2 il faut : $5u_A + 20u_B + 10u_C \leq 9$

Il cherche également à maximiser ses gains

$$\max \; 25u_A + 60u_B + 15u_C$$

Dualité - Exemple

Problème PRIMAL

Problème de l'investisseur se fournissant auprès des courtiers 1 et 2 :

$$\begin{array}{rrrl}
\min & 6x_1 & +9x_2 & \\
\text{s.c.} & 20x_1 & +5x_2 & \geq 25 \\
 & 30x_1 & +20x_2 & \geq 60 \\
 & 5x_1 & +10x_2 & \geq 15 \\
 & x_1\,, & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Objectif : Minimiser le coût du portefeuille

Problème DUAL

Problème du concurrent des courtiers 1 et 2 :

$$\begin{array}{rrrrl}
\max & 25u_A & +60u_B & +15u_C & \\
\text{s.c.} & 20u_A & +30u_B & +5u_C & \leq 6 \\
 & 5u_A & +20u_B & +10u_C & \leq 9 \\
 & u_A, & u_B, & u_C & \geq 0
\end{array}$$

Objectif : Trouver le prix des actions qui maximise son profit

Dualité

Problème **PRIMAL** (P)

$$\begin{aligned} \min\ z = cx \\ \text{s.c.} \qquad Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Problème **DUAL** (D)

$$\begin{aligned} \max\ v = ub \\ \text{s.c.} \qquad uA \leq c \\ u \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple de primal

$$\begin{array}{lrrl} \min & 6x_1 & +9x_2 & \\ \text{s.c.} & 20x_1 & +5x_2 & \geq 25 \\ & 30x_1 & +20x_2 & \geq 60 \\ & 5x_1 & +10x_2 & \geq 15 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Exemple de dual

$$\begin{array}{lrrrl} \max & 25u_A & +60u_B & +15u_C & \\ \text{s.c.} & 20u_A & +30u_B & +5u_C & \leq 6 \\ & 5u_A & +20u_B & +10u_C & \leq 9 \\ & u_A, & u_B, & u_C & \geq 0 \end{array}$$

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ c^T = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ c^T = & \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 60 \\ 600 \end{array}} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$c^T = \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 60 \\ 600 \end{array}} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ c^T = & \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 60 \\ 600 \end{array}} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$c^T = \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 60 \\ 600 \end{array}} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ c^T = & \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 60 \\ 600 \end{array}} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$c^T = \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 60 \\ 600 \end{array}} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{c} \\ \\ c^T = \\ \\ (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 6 \\ 60 \\ 600 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ = b \\ \\ \end{array}$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

Représentation matricielle d'un PL

$$
\begin{array}{cccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(C_1) \rightarrow \\
(C_2) \rightarrow \\
(C_3) \rightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\
100 & 200 & 300 & 400 & 500
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
6 \\ 60 \\ 600
\end{pmatrix} = b
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & (C_A) & & & & \\
 & \downarrow & & & & \\
c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
u_A \rightarrow \\
u_B \rightarrow \\
u_C \rightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\
100 & 200 & 300 & 400 & 500
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
6 \\ 60 \\ 600
\end{pmatrix} = b
$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ c^T = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} (C_A) & (C_B) & & & \\ \downarrow & \downarrow & & & \end{array} \\ c^T = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

Représentation matricielle d'un PL

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b
$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} (C_A) & (C_B) & (C_C) & (C_D) & (C_E) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b
$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ c^T = \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 60 \\ 600 \end{array}} = b$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (C_A) & (C_B) & (C_C) & (C_D) & (C_E) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ c^T = \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 60 \\ 600 \end{array}} = b$$

$$c^T = \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

$$A = \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 60 \\ 600 \end{array}} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$\begin{array}{cccccc} & (C_A) & (C_B) & (C_C) & (C_D) & (C_E) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

$$b^T = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 600 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ c^T = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} (C_A) & (C_B) & (C_C) & (C_D) & (C_E) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ c^T = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

$$b^T = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 600 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 60 & 600 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$\begin{array}{ccccc} (C_A) & (C_B) & (C_C) & (C_D) & (C_E) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

$$b^T = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 600 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$

$$\begin{array}{c} u_A \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 60 & 600 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

$$\begin{array}{cccccc} & (C_A) & (C_B) & (C_C) & (C_D) & (C_E) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

$$b^T = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 600 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$

$$\begin{array}{ccc} u_A & u_B & u_C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 60 & 600 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle d’un PL

$$\begin{array}{rccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d’une contrainte
- 1 colonne : coefficients d’une variable

$$\begin{array}{rccccc} & (C_A) & (C_B) & (C_C) & (C_D) & (C_E) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d’une variable
- 1 colonne : coefficients d’une contrainte

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

$$b^T = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 600 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$

$$\begin{array}{rccc} & u_A & u_B & u_C \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 6 & 60 & 600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (C_A) \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle d'un PL

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} (C_1) \rightarrow \\ (C_2) \rightarrow \\ (C_3) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Primal

- 1 ligne : coefficients d'une contrainte
- 1 colonne : coefficients d'une variable

$$\begin{array}{cccccc} & (C_A) & (C_B) & (C_C) & (C_D) & (C_E) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c^T = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} u_A \rightarrow \\ u_B \rightarrow \\ u_C \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

Dual

- 1 ligne : coefficients d'une variable
- 1 colonne : coefficients d'une contrainte

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 600 \end{pmatrix} = b$$

$$b^T = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 600 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} u_A & u_B & u_C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 60 & 600 \end{array}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \quad \begin{array}{c} (C_A) \rightarrow \\ (C_B) \rightarrow \\ (C_C) \rightarrow \\ (C_D) \rightarrow \\ (C_E) \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 200 \\ 3 & 30 & 300 \\ 4 & 40 & 400 \\ 5 & 50 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Passage du primal au dual

Règles de passage du primal au dual

Primal		**Dual**	
Objectif	max	min	Objectif
Contrainte	$\leq$	≥ 0	Variable
	$\geq$	≤ 0	
	$=$	$\in \mathbb{R}$	
Variable	≥ 0	$\geq$	Contrainte
	≤ 0	$\leq$	
	$\mathbb{R}$	$=$	

Passage du primal au dual

Règles de passage du primal au dual

Primal		Dual	
Objectif	max	min	Objectif
Contrainte	$\leq$	≥ 0	Variable
	$\geq$	≤ 0	
	$=$	$\in \mathbb{R}$	
Variable	≥ 0	$\geq$	Contrainte
	≤ 0	$\leq$	
	$\mathbb{R}$	$=$	

Exemple (cas où le primal maximise l'objectif)

Primal	Dual
$x_1 + 2x_2 \leq 0$ (C_1)	$u_1 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 \geq 0$ (C_2)	$u_2 \leq 0$
$x_1 + 2x_2 = 0$ (C_3)	$u_3 \in \mathbb{R}$
$x_4 \geq 0$	$\ldots \geq c_4$
$x_5 \leq 0$	$\ldots \leq c_5$
$x_6 \in \mathbb{R}$	$\ldots = c_6$

Passage du primal au dual

Règles de passage du primal au dual

Dual		Primal	
Objectif	max	min	Objectif
Contrainte	$\leq$	≥ 0	Variable
	$\geq$	≤ 0	
	$=$	$\in \mathbb{R}$	
Variable	≥ 0	$\geq$	Contrainte
	≤ 0	$\leq$	
	$\mathbb{R}$	$=$	

Exemple (cas où le primal maximise l'objectif)

Primal	Dual
$x_1 + 2x_2 \leq 0 \ (C_1)$	$u_1 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 \geq 0 \ (C_2)$	$u_2 \leq 0$
$x_1 + 2x_2 = 0 \ (C_3)$	$u_3 \in \mathbb{R}$
$x_4 \geq 0$	$\ldots \geq c_4$
$x_5 \leq 0$	$\ldots \leq c_5$
$x_6 \in \mathbb{R}$	$\ldots = c_6$

Dualité faible

Théorème - Dualité faible

Pour toute solution réalisable

- x du problème primal ; et
- u du problème dual,

on a

$$\underbrace{\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}_{\text{valeur de l'objectif du problème primal pour } x} \leq \underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^{m} b_i u_i}_{\text{valeur de l'objectif du problème dual pour } y}$$

Preuve

....

....

....

....

Dualité

Exemple de primal

$$
\begin{array}{lrrl}
\min\ z = & 6x_1 & +9x_2 & \\
\text{s.c.} & 20x_1 & +5x_2 & \geq 25 \\
 & 30x_1 & +20x_2 & \geq 60 \\
 & 5x_1 & +10x_2 & \geq 15 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Exemple de dual

$$
\begin{array}{lrrrl}
\max\ v = & 25u_A & +60u_B & +15u_C & \\
\text{s.c.} & 20u_A & +30u_B & +5u_C & \leq 6 \\
 & 5u_A & +20u_B & +10u_C & \leq 9 \\
 & u_A, & u_B, & u_C & \geq 0
\end{array}
$$

Illustration du théorème de la dualité faible

- Une solution du primal $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, z = \frac{39}{2}$
- Une solution du dual $u_A = \frac{1}{5}, u_B = \frac{1}{30}, u_C = \frac{1}{5}, v = 10$

On a bien $z \geq v$

Solutions optimales

- Une solution du primal $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{4}, z = \frac{63}{4}$
- Une solution du dual $u_A = 0, u_B = \frac{3}{40}, u_C = \frac{3}{4}, v = \frac{63}{4}$

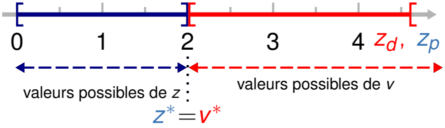
$\mathbf{z = v} \Rightarrow$ les deux solutions sont optimales !

Dualité forte

Théorème - Dualité forte

Si le primal a une solution optimale x^* alors le dual a une solution optimale u^* telle que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i^*$$



Pas de “saut de dualité”

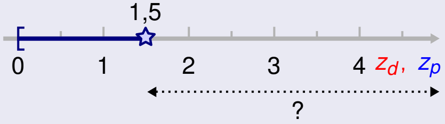
Remarque

Si l’un des 2 problèmes a un optimum non fini, alors l’autre problème n’a pas de solution réalisable

Utilité de la dualité

Utilité de la dualité faible 1/2

Une solution u du problème dual fournit une borne sur la solution optimale du primal

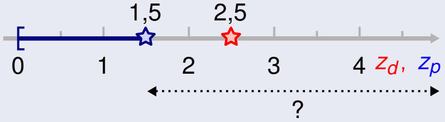


Permet d'évaluer la qualité d'une solution du primal

Utilité de la dualité

Utilité de la dualité faible 1/2

Une solution u du problème dual fournit une borne sur la solution optimale du primal

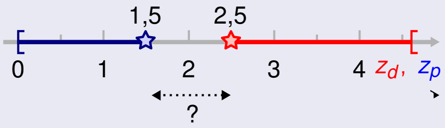


Permet d'évaluer la qualité d'une solution du primal

Utilité de la dualité

Utilité de la dualité faible 1/2

Une solution u du problème dual fournit une borne sur la solution optimale du primal

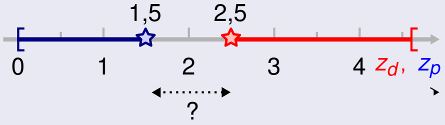


Permet d'évaluer la qualité d'une solution du primal

Utilité de la dualité

Utilité de la dualité faible 1/2

Une solution u du problème dual fournit une borne sur la solution optimale du primal



Permet d'évaluer la qualité d'une solution du primal

Utilité de la dualité faible 2/2

Le dual peut être beaucoup plus simple à résoudre que le primal

Utilité de la dualité

Utilité de la dualité forte

Si on a une paire (x^*, u^*) de solutions du primal et du dual, on peut facilement vérifier :

- la réalisabilité de x^* pour le primal ;
- la réalisabilité de u^* pour le dual ;
- l'égalité des deux objectifs.

$\Rightarrow$ Test d'optimalité

Relations Primal / Dual

Résumé des cas possibles

		Dual		
		borné	irréalisable	non-borné
	borné	possible	x	x
Primal	irréalisable	x	possible	possible
	non-borné	x	possible	x

Théorème des écarts complémentaires

Problème primal

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.c.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Problème dual

$$\begin{array}{ll} \max & ub \\ \text{s.c.} & uA \leq c \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Théorème des écarts complémentaires

Soient

- x une solution réalisable de (P)
- u une solution réalisable de (D)

x et u sont optimales si et seulement si

$$u(Ax - b) = 0 \text{ et } (c - uA)x = 0$$

Corollaire

A l'optimum, toute contrainte C vérifie :

- soit C est saturée
- soit la variable duale associée est nulle

Résumé des notions abordées dans ce chapitre

PL

- Outil de modélisation et de résolution de nombreux problèmes réels

Simplexe

- Très utilisé pour la résolution de problèmes
- Améliore successivement la solution en passant d'une base réalisable à une autre jusqu'à trouver une solution optimale
- Rapide et pratique mais non polynomial !
- Il existe des alternatives de complexité polynomiale
  Exemple : méthodes de point intérieur

Dualité

- Un PL peut être vu comme une paire (Primal, Dual)
- Ils sont liés par les théorèmes de dualité faible, forte et les écarts complémentaires