

CM5 - Complexité des problèmes

Cours RO202

Zacharie ALES
(zacharie.ales@ensta-paristech.fr)

Adapté de cours de Marie-Christine Costa, Alain Faye et Sourour Elloumi

Créé le 21/01/2018
Modifié le 21/01/2020 (v3)



Difficulté d'un problème

Un tout petit peu de combinatoire

Durée d'exécution d'un algorithme

Taille des données d'entrée n Supposons 1 étape = $1 \mu s$

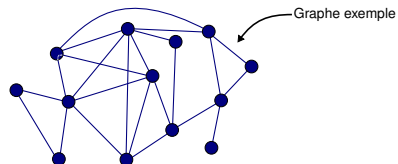
	Nombre d'étapes élémentaires				
n	$\log(n)$	n	n^2	2^n	$n!$
10	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	4
25	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-4}$	30	$2 \cdot 10^{19}$
50	$2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$	10^9	$3 \cdot 10^{58}$
En secondes		 ("efficace")	 ("non efficace")

Complexité

- **Problème "facile"**
Peut se résoudre de façon exacte par un algorithme polynomial
- **Problème "difficile"**
Seuls algorithmes connus pour les résoudre de façon exacte sont "exponentiels"

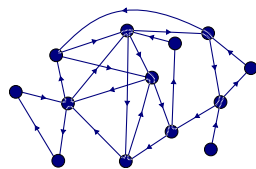
2/ 12

Difficulté d'un problème



Définition : Chaîne eulérienne

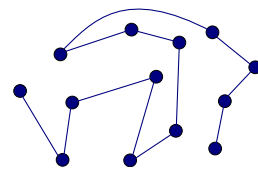
Chaîne passant exactement
.....



Exemple de chaîne eulérienne

Définition : Chaîne hamiltonienne

Chaîne passant exactement
.....



Exemple de chaîne hamiltonienne

Trouver une chaîne eulérienne

Problème **"facile"**

Trouver une chaîne hamiltonienne

Problème **"difficile"**

3/ 12

Difficulté d'un problème

Comment reconnaître la difficulté d'un problème ?

Théorie de la complexité

Attention : ce cours n'en donne qu'une idée intuitive

Définition - Problème de décision

Définition intuitive - Problème de décision P de classe NP

Si vous savez que P a pour réponse oui, il est facile d'en convaincre quelqu'un d'autre
Mais trouver que la réponse est oui peut rester difficile

Exemple

Si on connaît un cycle hamiltonien, il est facile de convaincre quelqu'un qu'il en existe un
Mais trouver un cycle hamiltonien peut être difficile



4/ 12

Définition intuitive - Classe P ou problèmes "faciles" (polynomiaux)

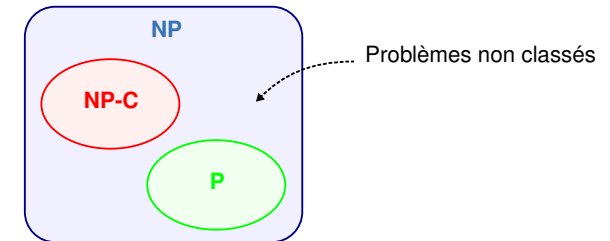
Problèmes de NP qu'on peut résoudre par un algorithme polynomial en fonction de la taille de l'instance

Définition - Problème "difficile"

Problèmes pour lesquels, les seules méthodes de résolution connues exigent un temps de calcul exponentiel en fonction de la taille de l'instance

Définition - Classe NP-Complet

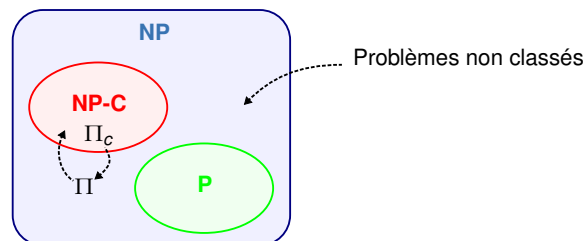
Un problème de NP est NP-complet si "savoir le résoudre efficacement" implique "savoir résoudre efficacement TOUS les problèmes de NP"

**Comment montrer qu'un problème est polynomial ?**

- ① Trouver un algorithme pour le résoudre
- ② Prouver que cet algorithme s'exécute en un temps qui augmente de façon polynomiale en fonction de la taille de l'instance traitée

Comment montrer qu'un problème Π est NP-complet

- ① Choisir un problème Π_c déjà connu pour être NP-complet
- ② Montrer que Π_c peut se "transformer" en Π
 - Donc, si on savait résoudre (facilement) Π , on saurait résoudre Π_c
 - Or, on ne sait pas résoudre Π_c , il sera donc au moins aussi difficile de résoudre Π

**Remarques**

- Les problèmes NP-complets sont classés de façon incrémentale
La classe d'un nouveau problème est déduite de celle d'un ancien problème
- Il existe donc un "premier" problème NP-complet

Le problème SAT ("satisfiabilité" d'une expression)

Problème de décision SAT

Fonction booléenne ↴

Existe-t-il une affectation des variables telle que f soit vraie ?

Exemple

$$f(x) = (x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4) + (x_2 + \bar{x}_3 + x_4)(x_1 + x_3 + \bar{x}_4)$$

- une solution : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\dots\dots\dots)$

- Stephen Cook a classé le problème SAT comme NP-complet
- SAT est le premier problème NP-complet connu



Millennium Problems

Yang-Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

Navier-Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

Hodge Conjecture

The answer to this conjecture determines how much of the topology of the solution set of a system of algebraic equations can be defined in terms of further algebraic equations. The Hodge conjecture is known in certain special cases, e.g., when the solution set has dimension less than four. But in dimension four it is unknown.

Qui veut gagner 1 000 000 \$?

Il "suffit" de démontrer que

- $P \neq NP$ ou
- $P = NP$

Remarque

Pour prouver que $P = NP$ il faudrait résoudre un problème NP-complet avec un algorithme polynomial

Cela montrerait que l'ensemble des problèmes NP-complets sont polynomiaux

Approche d'un problème de RO

