RO202 - Initiation à la Recherche Opérationnelle

Zacharie Ales, Arnaud Lazare

2018 - 2019

EXERCICES 3 - Programmation linéaire

Exercise 1

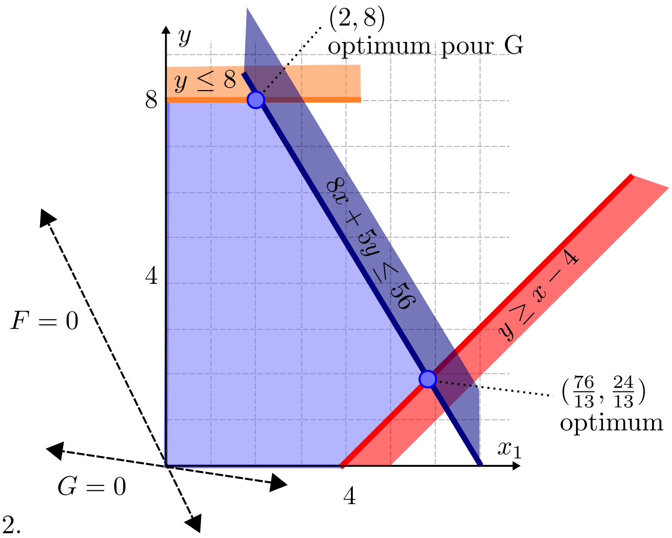
Soit le programme linéaire suivant.

$$\begin{cases} \max F = 2x + y \\ \text{s.c.} \quad y \geq x - 4 \\ y \leq 8 \\ 8x + 5y \leq 56 \\ x, \quad y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Résoudre la relaxation linéaire du programme graphiquement.
2. Même question si on remplace la fonction économique par $G = x + 6y$
3. Qu'en déduisez-vous sur l'optimalité d'une solution obtenue dans les deux cas par l'algorithme du simplexe ?
4. Ecrire le problème sous forme standard.

Answer of exercise 1

1.



2.

3. Optimum du programme pour F mais pas pour G (solution fractionnaire qui fournit une borne supérieure).

4. $$\begin{cases} \max F = 2x + y \\ \text{s.c.} \quad -x + y - x_1 = -4 \\ y + x_2 = 8 \\ 8x + 5y + x_3 = 56 \\ x, \quad y \in \mathbb{N} \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercise 2

Soit le système suivant (forme standard) :

$$
\begin{cases}
\min z(x) = 2x_1 \; -3x_2 \; +5x_3 \\
\qquad \text{s.c.} \quad x_1 \; -2x_2 \; +x_3 \; -x_4 \qquad\qquad = 4 \quad (C_1) \\
\qquad\qquad\qquad x_2 \; +3x_3 \qquad +x_5 \qquad = 6 \quad (C_2) \\
\qquad\qquad 2x_1 \qquad\quad +x_3 \; +2x_4 \qquad +x_6 = 7 \quad (C_3) \\
\qquad\qquad x_1, \qquad\quad \ldots \qquad\quad , \; x_6 \geq 0
\end{cases}
$$

et soit la solution : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 2, 0, 0, 1)$.

1. Vérifier que c'est une solution de base réalisable et calculer les coûts réduits. Quelle est sa valeur ? Est-ce une solution optimale ? Pourquoi ? (vous pourrez utiliser les tableaux à compléter figurant en fin de TD)
2. Calculer une solution optimale.

Answer of exercise 2

1. Solution de la base $\{x_1, x_3, x_6\}$ car la matrice B associée est inversible ($det(B) = 1 * (1 * 3 - +0 * 1) = 3 \neq 0$). Pour trouver les coûts réduits, on peut utiliser les tableaux en mettant sous forme canonique

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
(C_1)	1	-2	1	-1			4
(C_2)		1	3		1		6
(C_3)	2		1	2		1	7
(Obj)	2	-3	5				

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow (C_1)$	1	-2	1	-1			4
$(C_2) \leftarrow (C_2)/3$		$\frac{1}{3}$	**1**		$\frac{1}{3}$		2
$(C_3) \leftarrow (C_3) - 2(C_1)$	**0**	4	-1	4		1	-1
$(Obj) \leftarrow (Obj) - 2(C_1)$	**0**	1	3	2			-8

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS	Ratio test
$(C_1) \leftarrow (C_1)$-(C_2)	1	-$\frac{7}{3}$	**0**	-1	-$\frac{1}{3}$		2	$\Rightarrow x_5 \geq -6$
$(C_2) \leftarrow (C_2)$		$\frac{1}{3}$	1		$\frac{1}{3}$		2	$\Rightarrow x_5 \leq 6$
$(C_3) \leftarrow (C_3)$+(C_2)		$\frac{13}{3}$	**0**	4	$\frac{1}{3}$	1	1	$\Rightarrow x_5 \leq 3$
$(Obj) \leftarrow (Obj)$-3(C_2)			**0**	2	-1		-14	

Forme canonique pour $\{x_1, x_3, x_6\}$

Coût réduit de
— x_2 : 0
— x_4 : 2
— x_5 : -1
Valeur de la solution : 14
Solution non optimale car il y a des coûts réduits négatifs

2. x_5 entre en base car c'est le seul coût réduit négatif. Le ratio test indique que x_6 sort de la base. On met sous forme canonique pour $\{x_1, x_3, x_5\}$:

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow (C_1)$+(C_3)	1	2		3		1	3
$(C_2) \leftarrow (C_2) - (C_3)$		-4	1	-4		-1	1
$(C_3) \leftarrow 3(C_3)$		13		12	1	3	3
$(Obj) \leftarrow (Obj) + 3(C_3)$		13		14		3	-11

Forme canonique pour $\{x_1, x_3, x_5\}$

Tous les coûts réduits sont positifs donc l'optimum est atteint. La solution optimale est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3, 0, 1, 0, 3, 0)$ de valeur 14.

Exercise 3 Implémentation

L'objectif de cette exercice est d'implémenter la méthode `pivot()` de la classe `Tableau`.

Cette classe représente un programme linéaire sous forme normale. Elle contient, notamment, les attributs suivants :

- `int n, int m, double[][] A, double[] b, double[] c` : décrivent le tableau ;
- `int[] basis` : contient les variables actuellement en base (ou `null` si la base n'est pas encore définie) ;
- `isMinimization` : `true` si on minimise l'objectif, `false` si on maximise.

ainsi que les méthodes :

- `boolean pivot()` : effectue un pivot en utilisant la base figurant dans `basis` :
  1. met le tableau sous forme canonique ;
  2. identifie la variable entrante et la variable sortante ;
  3. retourne `true` si une nouvelle base est trouvée et `false` si l'optimum est atteint.
- `applySimplex()` : résout le problème en effectuant des pivots successifs ;
- `tableauWithSlack()` : ajoute une variable d'écart à chaque contrainte et utilise ces variables pour définir une base.

Il existe deux façons d'utiliser cette classe pour résoudre un programme linéaire à partir d'un `Tableau t` :

1. `t.applySimplex()` : à utiliser quand le programme est sous forme normale ($Ax = b$) et qu'une base est connue ;
2. `t.addSlackAndSolve()` : à utiliser quand le programme est sous la forme $Ax \leq b$.

1. Inclure à votre projet java les fichiers `Tableau.java` et `Utility.java`.
2. Compléter la méthode `pivot()` pour mettre le tableau sous forme canonique
   a) Pour chaque contrainte i, diviser les coefficients de `A[i][]` et `b[i]` par `A[i][basis[i]]` afin de faire apparaître un 1 sur la diagonal de B.
   b) Combiner linéairement les contraintes pour faire apparaître des 0 dans le reste de la matrice B.
3. Identifier la nouvelle base
   a) Identifier la variable sortante et l'afficher (pensez à prendre en compte l'attribut `isMinimization`). *Remarque* : Les calculs de réels en informatique ne sont pas toujours exacts. C'est pourquoi un réel sera considéré positif s'il est supérieur à 10^{-6} et négatif s'il est inférieur à -10^{-6}.
   b) Identifier la variable sortante et l'afficher.
4. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 1.
5. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 2 (nécessite de décommenter les trois lignes correspondantes dans la méthode `Tableau.main()`).

Answer of exercise 3

```java
public boolean pivot() {

        /* 1 - Canonical form */

        /* 1.1 - Set a 1 on the diagonal of the basis matrix */

        /* For each constraint */
        for(int constraintId = 0; constraintId < m; constraintId++) {

                /* Get the corresponding base variable */
                double baseCoefficient = A[constraintId][basis[constraintId]];

                /* For each coefficient of this constraint */
                for(int c = 0; c < n; c++)
                        A[constraintId][c] /= baseCoefficient;

                b[constraintId] /= baseCoefficient;
```

```java
		}

		if(DISPLAY_SIMPLEX_LOGS) {
			System.out.println("Tableau with ones in the diagonal of the basis matrix ");
			display();
		}

		/* 1.2 - Set 0 everywhere else in the base matrix (don't forget the objective) */

		/* For each variable in the base */
		for(int baseId = 0; baseId < m; baseId++) {

			/* For each constraint */
			for(int constraintId = 0; constraintId < m; constraintId++) {

				/* If coefficient [constraintId][baseId] must be set to 0 */
				if(constraintId != baseId) {

					double coefficient = A[constraintId][basis[baseId]];

					/* For each coefficient of this constraint */
					for(int colId = 0; colId < n; colId++)

						A[constraintId][colId] -= coefficient * A[baseId][colId];

					b[constraintId] -= coefficient * b[baseId];

				}
			}

			double objectiveCoefficient = c[basis[baseId]];

			/* For each coefficient of the objective */
			for(int colId = 0; colId < n; colId++)

				c[colId] -= objectiveCoefficient * A[baseId][colId];

			optimalObjective += objectiveCoefficient * b[baseId];

		}

		if(DISPLAY_SIMPLEX_LOGS) {
			System.out.println("Tableau in canonical form");
			display();
		}

		/* 2 - Get the new base */

		/* 2.1 - Get the variable entering the base */
		int bestEnteringVar = -1;
		double bestReducedCost = 0.0;

		for(int i = 0; i < n; i++)
			if((!isMinimization && c[i] > 1E-6 &&  c[i] > bestReducedCost)
					|| (isMinimization && c[i] < -1E-6 && c[i] < bestReducedCost )) {
				bestEnteringVar = i;
				bestReducedCost = c[i];
			}

		/* 2.2 - Get the variable leaving the base */
		if(bestEnteringVar != -1) {

			if(DISPLAY_SIMPLEX_LOGS)
				System.out.println("x" + (bestEnteringVar+1) + " enters the base.");

			int bestLeavingVar = -1;
			double bestRatio = Double.POSITIVE_INFINITY;

			for(int constraintId = 0; constraintId < m; constraintId++) {
				double ratio = b[constraintId] / A[constraintId][bestEnteringVar];

				/* If the ratio is positive and lower than the best known ratio
				 * or if the ratio is null and if the x coefficient is positive or null
```

```
                     * (in that last case, the variable cannot be increased)
                     */
                    if(ratio > 1E-6 && ratio < bestRatio
                                || Math.abs(ratio) < 1E-6
                       && A[constraintId][bestEnteringVar] > -1E-6) {
                            bestRatio = ratio;
                            bestLeavingVar = basis[constraintId];
                    }
            }

            if(DISPLAY_SIMPLEX_LOGS)
                    System.out.println("x" + (bestLeavingVar+1) + " leaves the base.");

            for(int i = 0; i < m; i++)
                    if(basis[i] == bestLeavingVar)
                            basis[i] = bestEnteringVar;

    }

    return bestEnteringVar != -1;
}
```

Exercise 4

Utiliser votre implémentation du simplexe afin de résoudre les problèmes suivants et donner leur solution optimale :

$$\begin{aligned} z = \max\ & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{tel que}\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = \max\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{tel que}\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Answer of exercise 4

Premier problème

$$\begin{aligned} z = \max\ & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{tel que}\ & 5x_1 + 3x_2 + s_1 = 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 24 \\ & x_1 + 3x_2 + s_3 = 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
(C_1)	5	3	1	0	0	0	30
(C_2)	2	3	0	1	0	0	24
(C_3)	1	3	0	0	1	0	18
(Obj)	-8	-6	0	0	0	1	0

On fait entrer x_1 en base et sortir s_1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$(C_1)/5$	1	0.6	0.2	0	0	0	6
$(C_2) - \frac{2}{5}(C_1)$	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	0	0	12
$(C_3) - \frac{1}{5}(C_1)$	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	1	0	12
$(Obj) + \frac{8}{5}(C_1)$	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	0	1	48

On fait entrer x_2 en base et sortir s_3

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$(C_1) - \frac{3}{12}(C_3)$	1	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	3
$(C_2) - \frac{9}{12}(C_3)$	0	0	-1	1	$-\frac{3}{4}$	0	3
$\frac{5}{12}(C_3)$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{12}$	0	5
$(Obj) + \frac{6}{12}(C_3)$	0	0	2	0	$\frac{1}{2}$	1	54

Solution optimale $(x_1, x_2) = (3, 5)$ et $z = 54$.

Solution : Second problème

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & x_1 + 2x_2 \\
\text{tel que } & -3x_1 + 2x_2 + s_1 = 2 \\
& -x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\
& x_1 + x_2 + s_3 = 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
(C_1)	-3	2	1	0	0	0	2
(C_2)	-1	2	0	1	0	0	4
(C_3)	1	1	0	0	1	0	5
(Obj)	-1	-2	0	0	0	1	0

On fait entrer x_2 et sortir s_1 :

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$\frac{1}{2}(C_1)$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1
$(C_2) - (C_1)$	2	0	-1	1	0	0	2
$(C_3) - \frac{1}{2}(C_1)$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	4
$(Obj) + (C_1)$	-4	0	1	0	0	1	2

On fait entrer x_1 et sortir s_2 :

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$(C_1) + \frac{3}{4}(C_2)$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}(C_2)$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
$(C_3) - \frac{5}{4}(C_2)$	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{3}{2}$
$(Obj) + 2(C_2)$	0	0	-1	2	0	1	6

On fait entrer s_1 et sortir s_3 :

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$(C_1) + \frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
$(C_2) + \frac{2}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
$\frac{4}{3}(C_3)$	0	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	2
$(Obj) + \frac{4}{3}(C_3)$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	8

Solution optimale : $(x_1, x_2) = (2, 3)$ et $z = 8$.

Exercise 5

Soit le système suivant (forme canonique) :

$$\begin{cases} \min z(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + x_2 \geq 3 \ (C_1) \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \ (C_2) \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \ (C_3) \\ x_1, \quad x_2 \geq 0 \ (C_4) \end{cases}$$

1. Ecrire le dual et les "contraintes des écarts complémentaires".
2. La solution $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?
3. La solution $x_1 = \frac{26}{9}$, $x_2 = \frac{7}{9}$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?

Answer of exercise 5

1. — Le problème dual :

$$\begin{cases} \max v(x) = 3u_1 + 5u_2 + 6u_3 \\ \text{s.c. } 2u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 2 \\ u_1 - u_2 + 4u_3 \leq 3 \\ u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0 \end{cases}$$

— Les contraintes des écarts complémentaires

$$(c - uAx) = \begin{pmatrix} 2 - 2u_1 - 2u_2 - u_3 \\ 3 - u_1 + u_2 - 4u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

$$u(Ax - b) = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 \\ 2x_1 - x_2 - 5 \\ x_1 + 4x_2 - 6 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2)$$

2. $(x_1, x_2) = (3, 1)$

— *Réalisable ?* Oui, les contraintes (C_1) à (C_4) sont vérifiées.

— *De base ?* Non. On met le PL sous forme standard :

$$\begin{cases} \min z(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_5 = 6 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On obtient la solution $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 1, 4, 0, 1)$. La solution n'est pas de base car plus de $m = 3$ variables non nulles (on aurait aussi pu tracer le polytope et constater que la solution ne correspond pas à un point extrême).

— *Optimale ?* Non. L'équation (2) donne

$$4u_1 + u_3 = 0$$

tous les termes sont positifs donc $u_1 = u_3 = 0$. Si la solution est optimale $z(x) = v(x)$ donc $2x_1 + 3x_2 = 3u_1 + 5u_2 + 6u_3$ ce qui donne $u_2 = \frac{9}{5}$. Or $(u_1, u_2, u_3) = (0, \frac{9}{5}, 0)$ ne vérifie pas (C_5).

3. $(x_1, x_2) = (\frac{26}{9}, \frac{7}{9})$

— *Réalisable ?* Oui. Les contraintes (C_1) à (C_4) sont vérifiées.

— *De base ?* Oui. On obtient $x_4 = x_5 = 0$. La matrice B associée est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. B est inversible (car $det(B) = -1(2 * 4 - (1 * -1)) = -9 \neq 0$).

— *Optimale ?* Oui. L'équation (2) donne

$$\frac{46}{9}u_1 = 0$$

donc $u_1 = 0$. L'équation (1) donne

$$\underbrace{(2 - 2u_1 - 2u_2 - u_3)}_{\geq 0}\frac{26}{9} + \underbrace{(3 - u_1 + u_2 - 4u_3)}_{\geq 0}\frac{7}{9} = 0.$$

Les deux termes sont positifs donc ils sont tous deux égaux à 0. La résolution de ce système donne $(u_1, u_2, u_3) = (0, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})$. Cette solution est réalisable pour le dual et vérifie les contraintes des écarts complémentaires. Elle est donc optimale (valeur de l'objectif $2\frac{26}{9} + 3\frac{7}{9} = 5\frac{5}{9} + 6\frac{8}{9} = \frac{73}{9}$).

Aide pour l'exercice 2

Tableau initial

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
(C_1)							
(C_2)							
(C_3)							
(Obj)							

Première étape de mise en forme canonique pour la base $\{x_1, x_3, x_6\}$

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow (C_1)$							
$(C_2) \leftarrow (C_2)/3$							
$(C_3) \leftarrow (C_3) - 2(C_1)$							
$(Obj) \leftarrow (Obj) - 2(C_1)$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							