Rapport n$^{\circ}$1 MT12

Alexandre BALLET et Simon LAURENT

Printemps 2016

Table des matières

Chapitre 1

Série de Fourier

1. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$

   (a) Coefficients de Fourier

   Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 1.273240$	$b(6) = -0.000000$
$b(2) = 0.000000$	$b(7) = 0.181891$
$b(3) = 0.424413$	$b(8) = 0.000000$
$b(4) = 0.000000$	$b(9) = 0.141471$
$b(5) = 0.254648$	$b(10) = 0.000000$

   (b) Série de Fourier

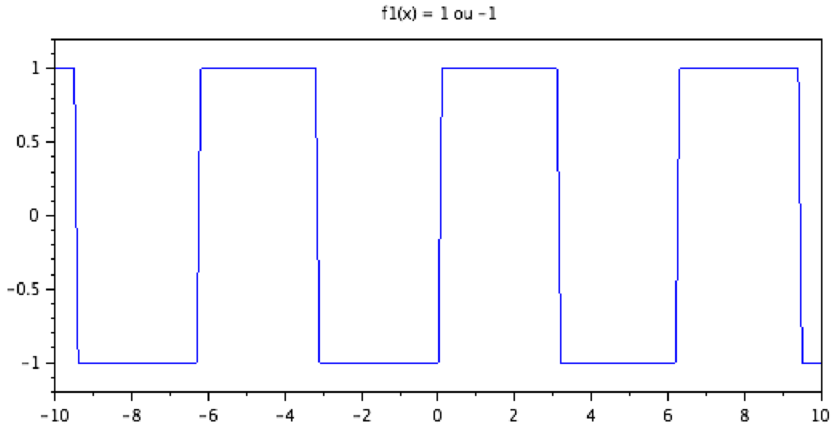

FIGURE 1.1 – Courbe de la fonction f.

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

(d) Richesse fréquentielle du signal

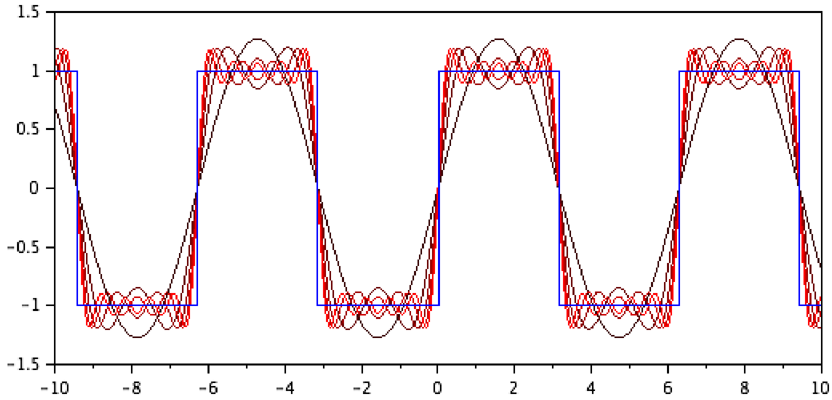

FIGURE 1.2 – Courbe de la fonction f.

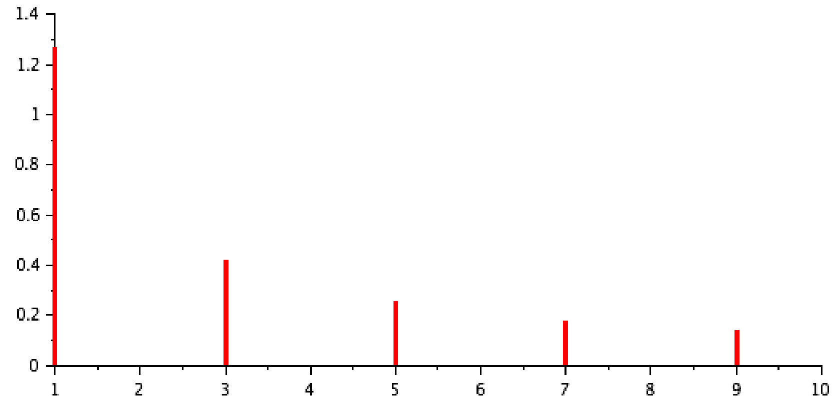

FIGURE 1.3 – Richesse du signal f.

2. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = x, x \in [0, \pi]$

   (a) Coefficients de Fourier

      Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 2.000000$

$b(2) = -1.000000$

$b(3) = 0.666667$

$b(4) = -0.500000$

$b(5) = 0.400000$

$b(6) = -0.333333$

$b(7) = 0.285714$

$b(8) = -0.250000$

$b(9) = 0.222222$

$b(10) = -0.200000$

(b) Série de Fourier

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

(d) Richesse fréquentielle du signal

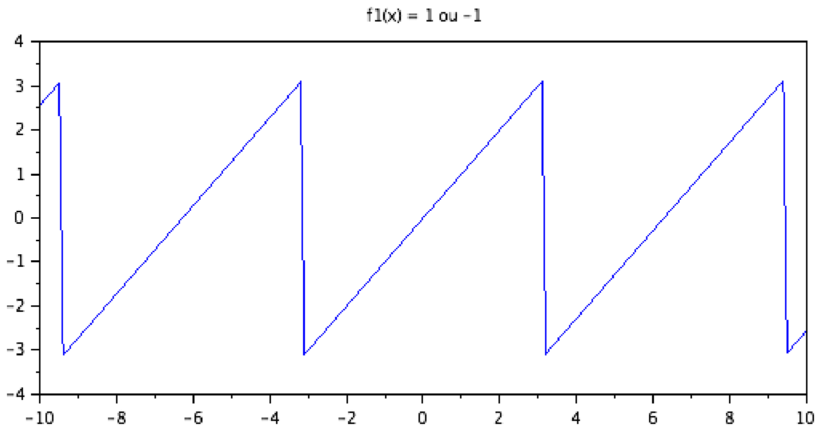

FIGURE 1.4 – Courbe de la fonction f.

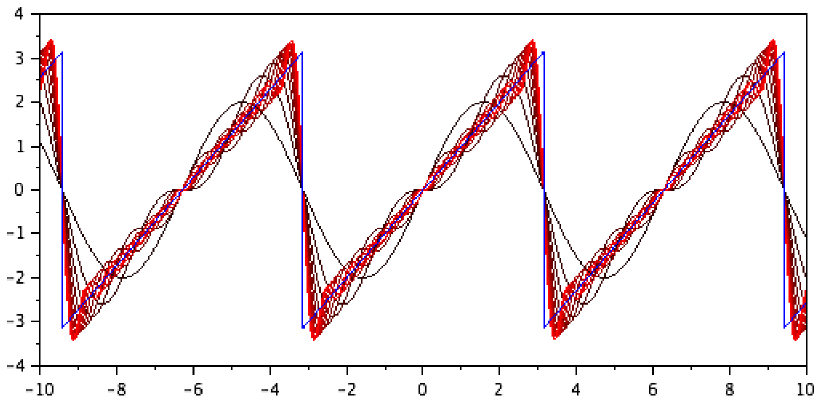

FIGURE 1.5 – Courbe de la fonction f.

3. f est 2π périodique, paire et vaut $f(x) = x, x \in [0, \pi]$

   (a) Coefficients de Fourier

   Les $b(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $a(i)$:

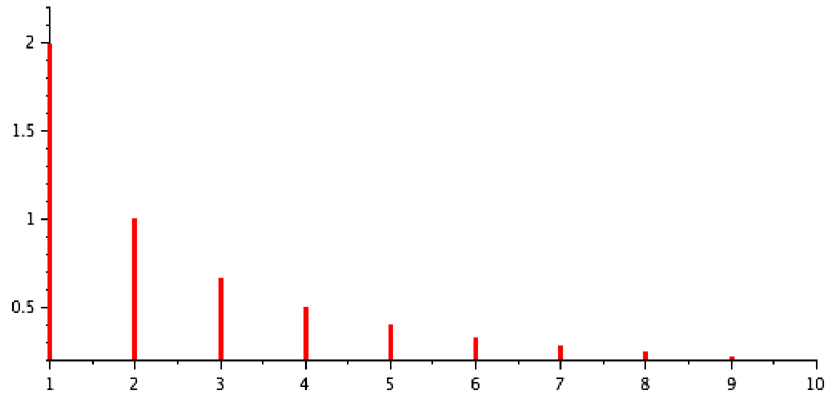

FIGURE 1.6 – Richesse du signal f.

$a(1) = 1.273240$

$a(2) = 0.000000$

$a(3) = 0.141471$

$a(4) = 0.000000$

$a(5) = 0.050930$

$a(6) = -0.000000$

$a(7) = 0.025984$

$a(8) = 0.000000$

$a(9) = 0.015719$

$a(10) = 0.000000$

avec $a(0) = 3.141593$

(b) Série de Fourier

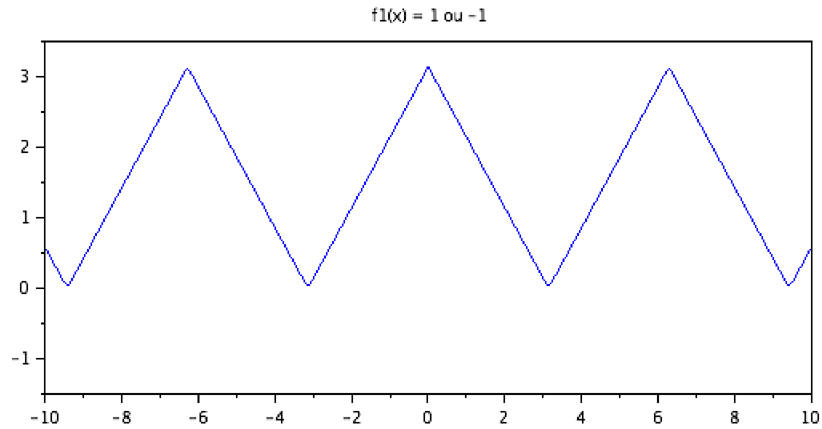

FIGURE 1.7 – Courbe de la fonction f.

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

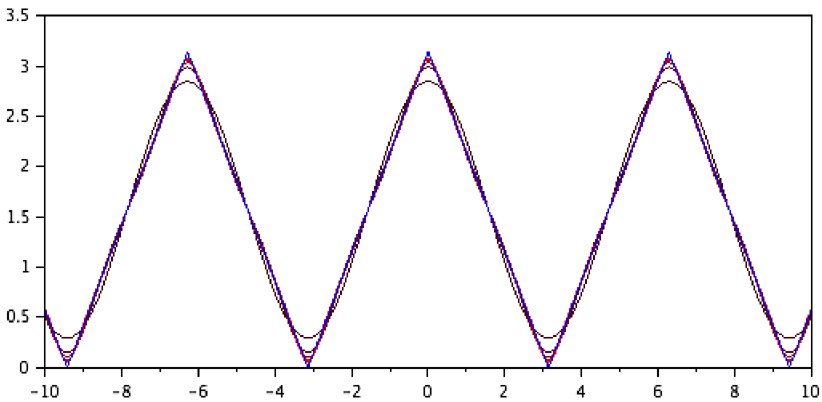

FIGURE 1.8 – Courbe de la fonction f.

(d) Richesse fréquentielle du signal

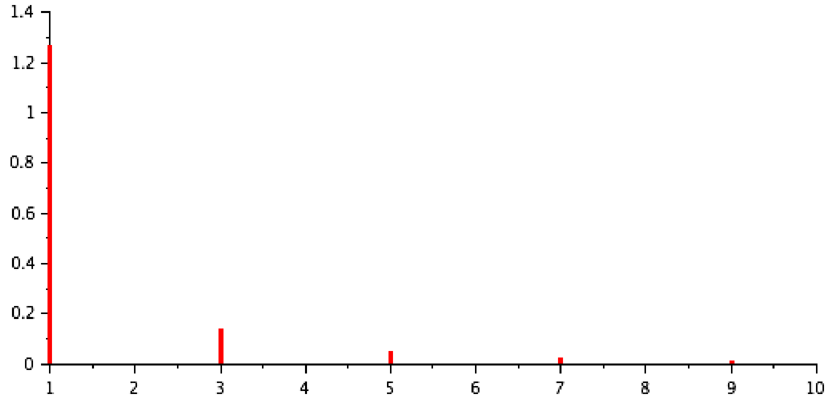

FIGURE 1.9 – Richesse du signal f.

4. f est 2π périodique, paire et vaut $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $b(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $a(i)$:

$a(1) = -4.000000$	$a(6) = 0.111111$
$a(2) = 1.000000$	$a(7) = -0.081633$
$a(3) = -0.444444$	$a(8) = 0.062500$
$a(4) = 0.250000$	$a(9) = -0.049383$
$a(5) = -0.160000$	$a(10) = 0.040000$

avec $a(0) = 6.579736$

(b) Série de Fourier

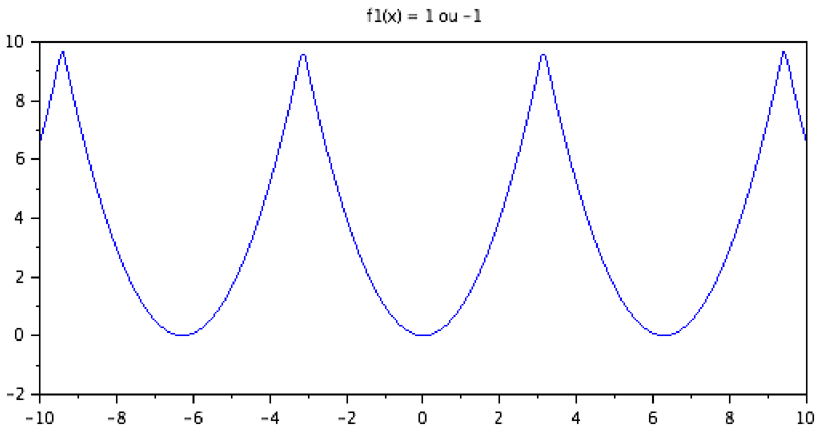

FIGURE 1.10 – Courbe de la fonction f.

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

(d) Richesse fréquentielle du signal

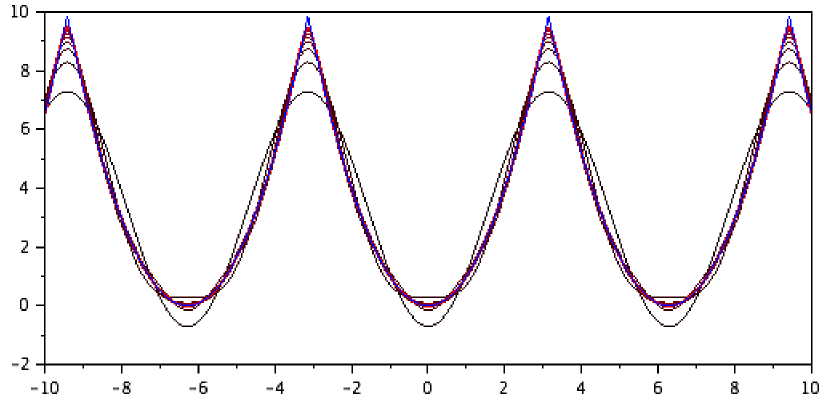

FIGURE 1.11 – Courbe de la fonction f.

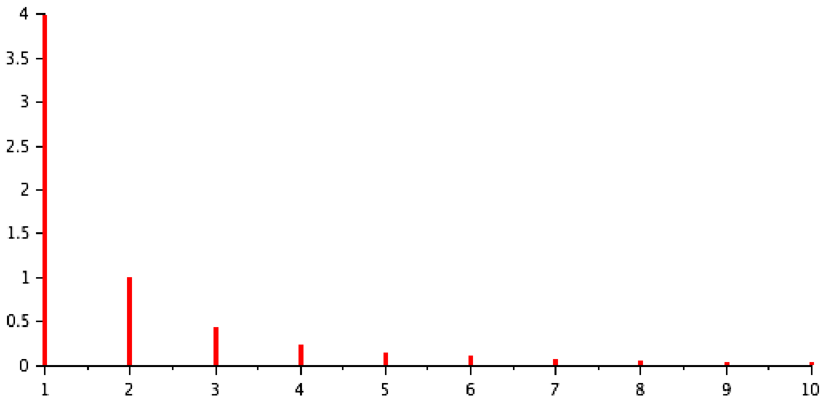

FIGURE 1.12 – Richesse du signal f.

5. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = x(\pi + |x|), x \in [-\pi, \pi]$

   (a) Coefficients de Fourier

   Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 2.546479$	$b(6) = 0.000000$
$b(2) = 0.000000$	$b(7) = 0.007424$
$b(3) = 0.094314$	$b(8) = -0.000000$
$b(4) = -0.000000$	$b(9) = 0.003493$
$b(5) = 0.020372$	$b(10) = -0.000000$

(b) Série de Fourier

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

(d) Richesse fréquentielle du signal

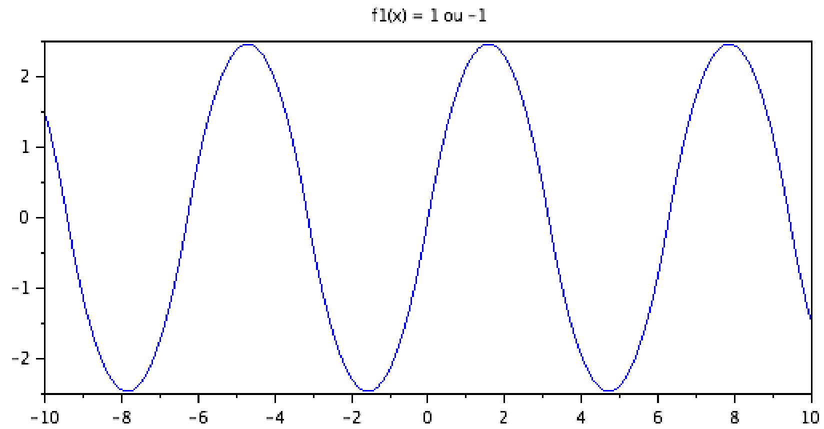

FIGURE 1.13 – Courbe de la fonction f.

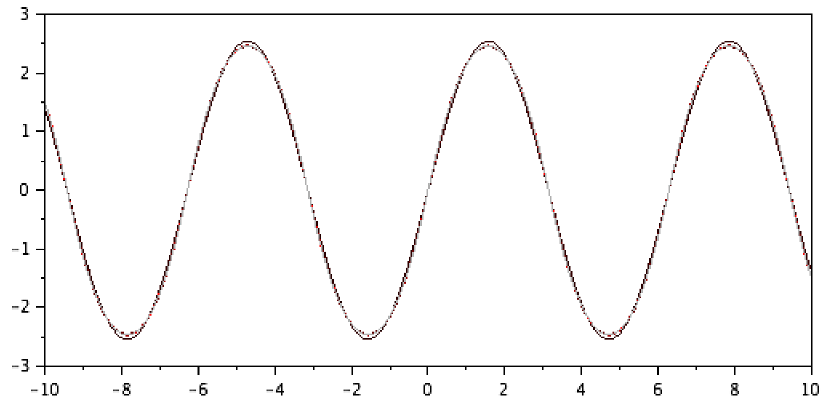

FIGURE 1.14 – Courbe de la fonction f.

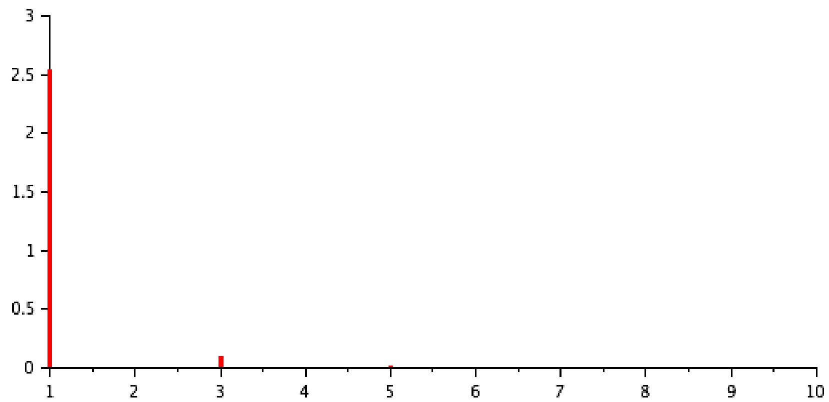

FIGURE 1.15 – Richesse du signal f.

Chapitre 2

Étude de fonctions

1.

$$f(x) = (sin\,x)^{1/3}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi;\pi)$. Elle est composée d'une fonction sinus, ce qui la rend impaire. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt{0} = 0$. Elle est donc continue.

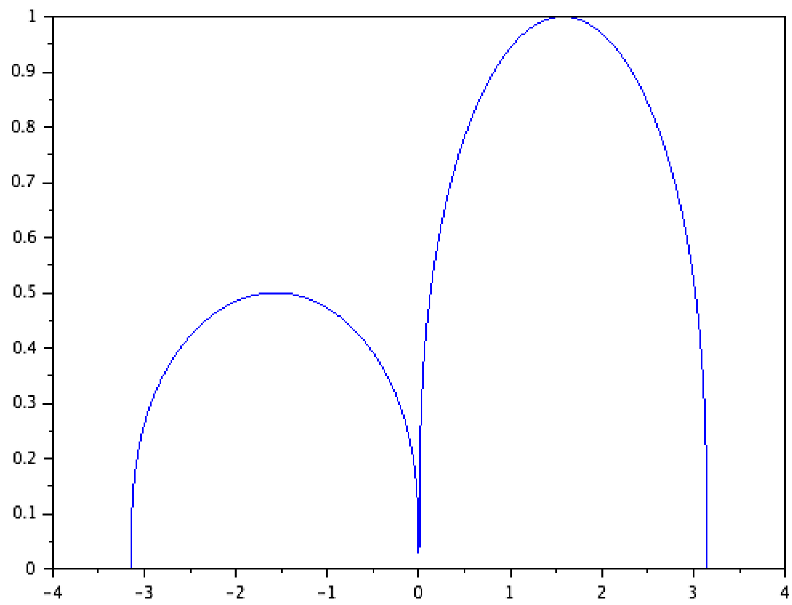

FIGURE 2.1 – Courbe de la fonction f.

Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{3}cosx(sin\,x)^{-2/3}$$

Elle admet une asymptote verticale en 0 et n'est donc pas continue. La fonction f est continue mais non dérivable sur $(-\pi; \pi)$.

2.

$$f(x) = (sin\, x)^{4/3}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi;\pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt[3]{0} = 0$. Elle est donc continue.

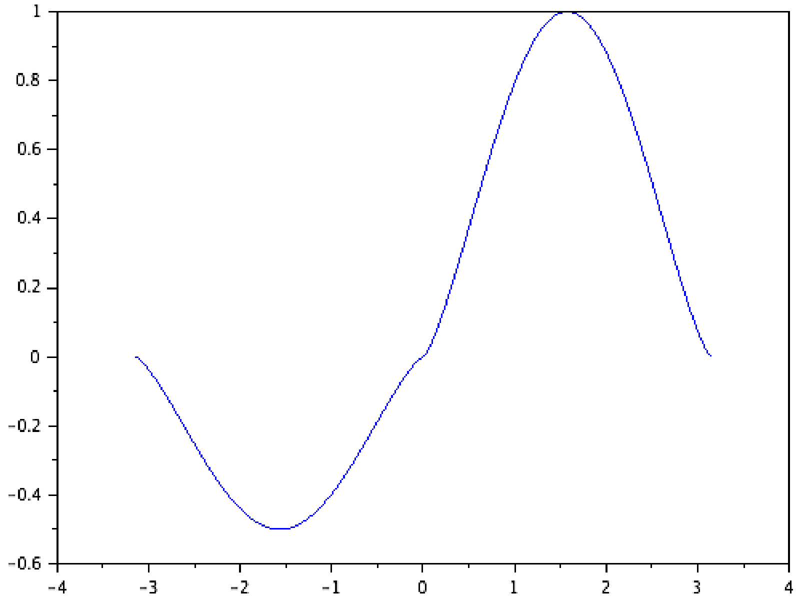

FIGURE 2.2 – Courbe de la fonction f.

Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{4}{3} cos\, x (sin\, x)^{1/3}$$

Elle n'admet pas d'asymptote et est donc continue. La fonction f est continue et dérivable, donc régulière.

3.

$$f(x) = \begin{cases} cos\, x & , si \quad x > 0 \\ -cos\, x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi ; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^{+}) = 1$ et $f(0^{-}) = -1$. Elle n'est donc pas continue en 0.

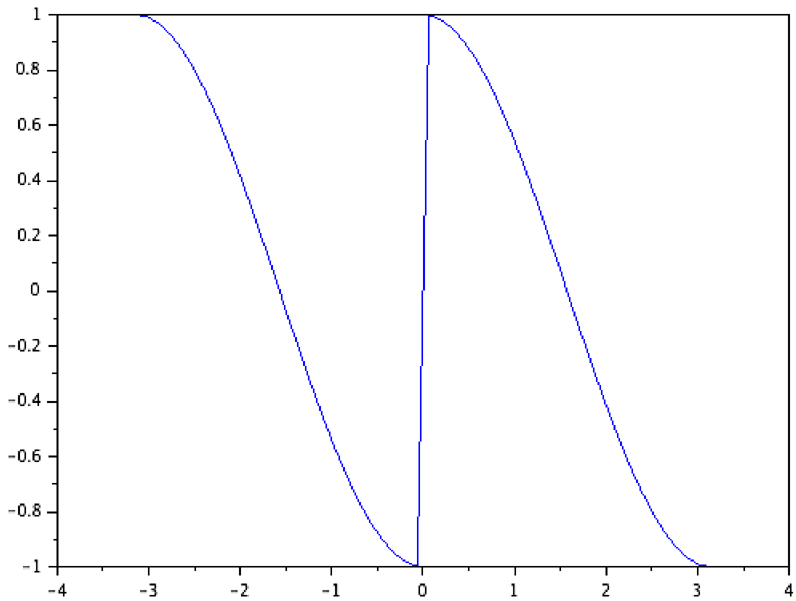

FIGURE 2.3 – Courbe de la fonction f.

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} -sin\, x & , si \quad x > 0 \\ sin\, x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

4.

$$f(x) = \begin{cases} sin\, x & , si \quad x > 0 \\ -sin\, 2x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = 0$. Elle est donc continue.

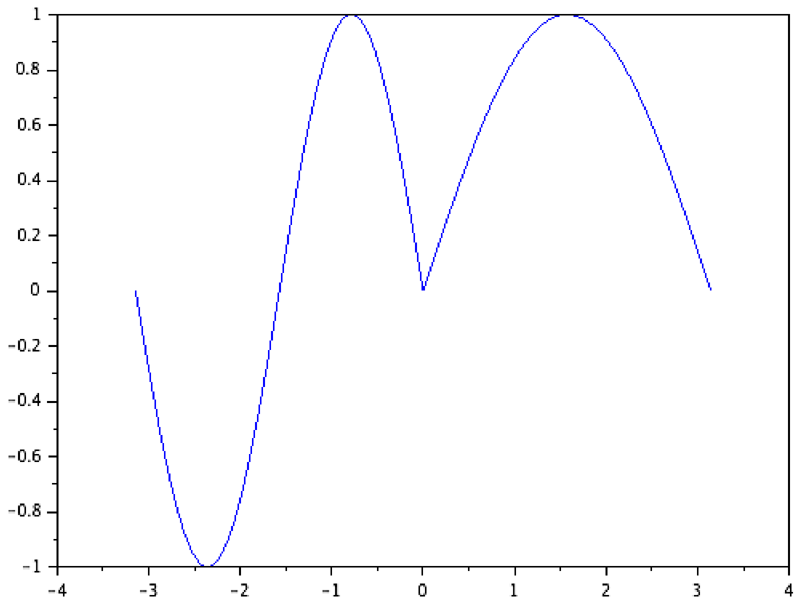

Figure 2.4 – Courbe de la fonction f.

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} cos\, x & , si \quad x > 0 \\ -2cos\, 2x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

5.

$$f(x) = \begin{cases} (sin\,x)^{1/5} & ,si \quad x < \pi/2 \\ -cos\,x & ,si \quad x \geq \pi/2 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi;\pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt{0} = 0$ et $f(\pi/2) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2 \\ x>\pi/2}} f(x)$. Elle est continue en 0 mais pas en $\pi/2$, elle est donc continue par morceaux.

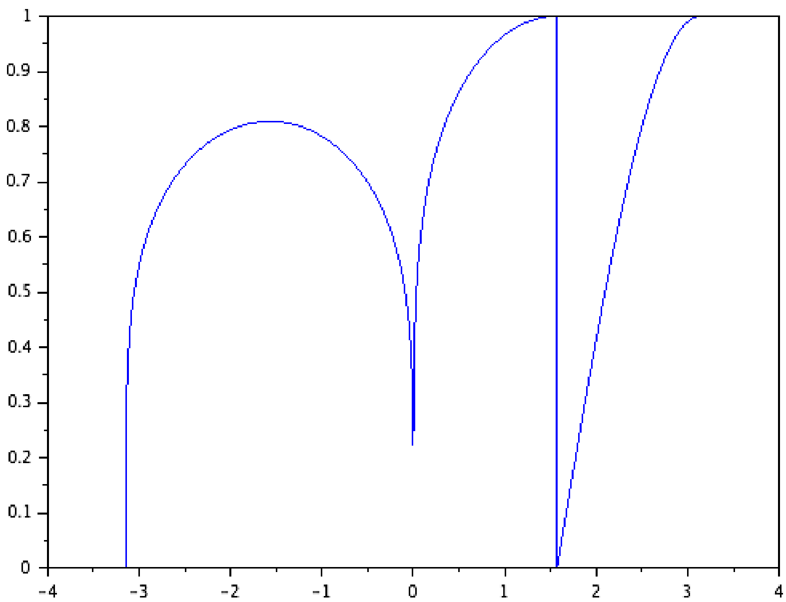

FIGURE 2.5 – Courbe de la fonction f.

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}cos\,x\,(sin\,x)^{1/5} & ,si \quad x < \pi/2 \\ sin\,x & ,si \quad x \geq \pi/2 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux et dérivable par morceaux, donc réguliére par morceaux.

Chapitre 3

Phénomène de Gibbs

3.1 Démonstration

Soit f la fonction 2π-périodique et impaire telle que $f(x) = 1$ sur $[0;\pi]$.

Nous allons montrer que

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sin(2k-1)}{2k-1}$$

Nous savons que $S_{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n sinnx$, car f est impaire.

Or,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)sinnx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)sinnx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} sinnx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sinnx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sinnx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sinnx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} sinnx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-cosnx}{k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{cosn\pi}{n} + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{cosn\pi}{n} + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
S_{f(x)} &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-cosn\pi}{n}sinnx \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}sinnx \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n\,pair}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}sinnx + \frac{2}{\pi}\sum_{n\,impair}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}sinnx \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n\,impair}^{\infty}\frac{sinnx}{n} \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2k-1)x}{2k-1} \qquad , \text{ où } n = 2k-1\ ,\ k \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

3.2 Approximations de Fourier

1. Approximation pour n = 2

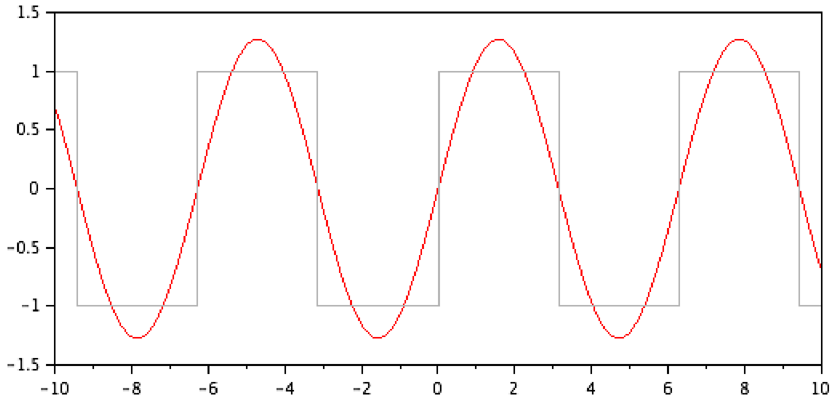

FIGURE 3.1 – Courbe de la fonction f pour n = 2.

2. Approximation pour n = 5

3. Approximation pour n = 10

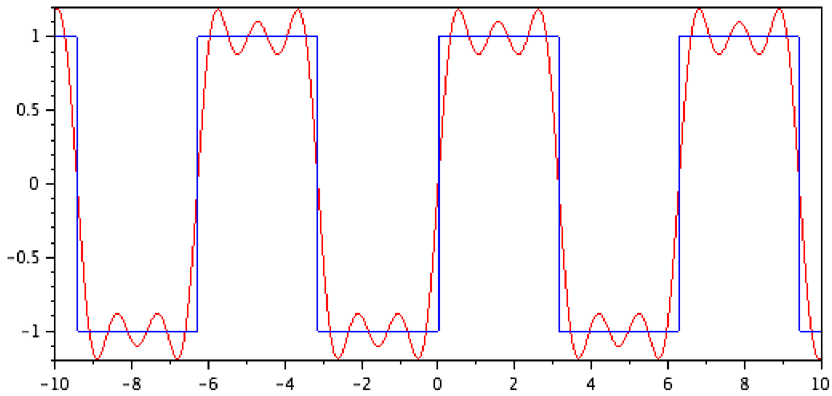

FIGURE 3.2 – Courbe de la fonction f pour n = 5.

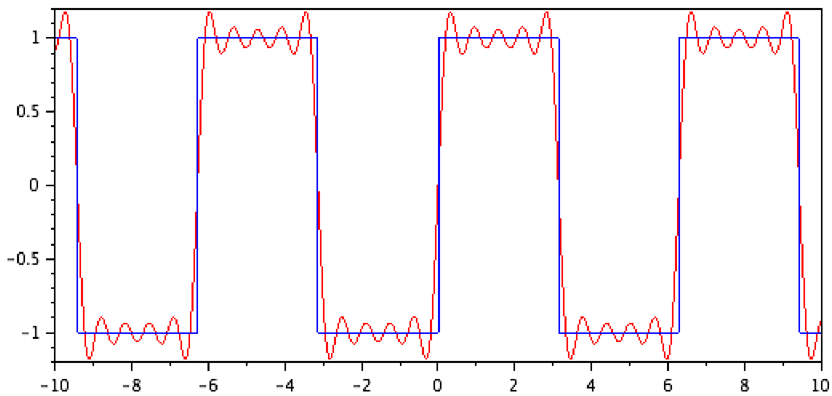

FIGURE 3.3 – Courbe de la fonction f pour n = 10.

4. Approximation pour n = 20

5. Approximation pour n = 60

On remarque donc qu'au voisinage d'une discontinuité une bosse apparait. Or quand n augmente cette dernière subsiste de part et d'autre de d'une discontinuité. Plaçons nous

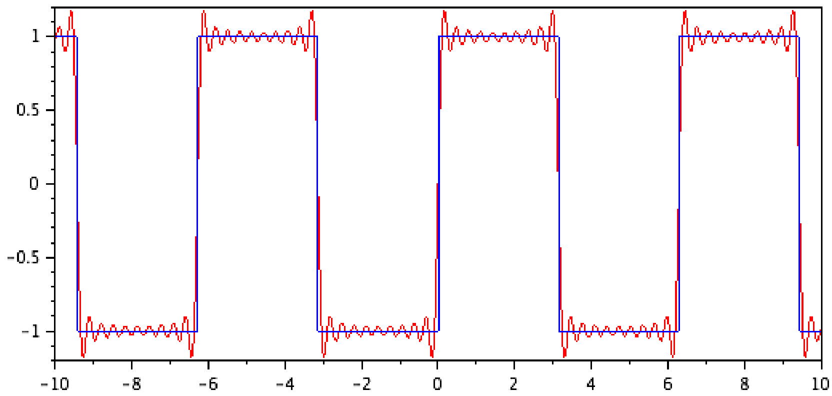

FIGURE 3.4 – Courbe de la fonction f pour n = 20.

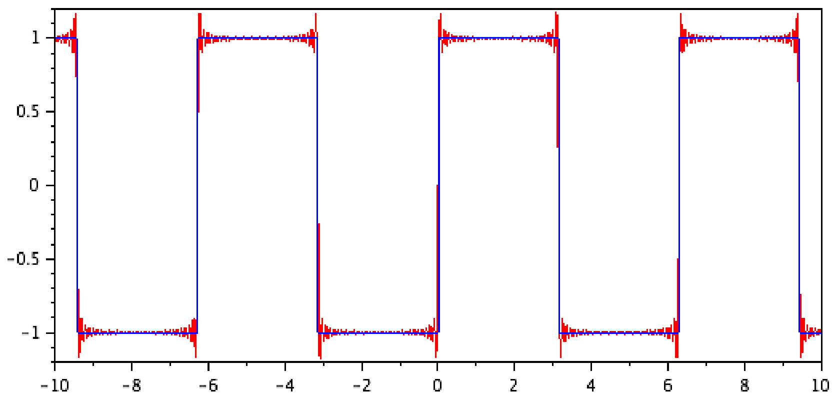

FIGURE 3.5 – Courbe de la fonction f pour n = 60.

alors droite du point de discontinuité 0 par exemple. On note que lorsque n augment, le point ou il y a un pic s'approche de 0 mais la hauteur reste constante. Nous allons essayer d'expliquer ce phénomène dans la partie suivante.

3.3 Explication du phénomène

3.3.1 Contexte

Soit f la fonction 2π-périodique et impaire telle que $f(x) = 1$ sur $[0; \pi]$.

On note que la fonction présente une discontinuité en tout point multiple de pi. La limite droite et la limite gauche en ces points vaut +1 et -1. De plus en dehors de ces points la fonctions est continue. Nous avons donc une fonction continue par morceau et sa dérivé l'est également. Ainsi on peut dire que f est C^1 par morceaux

3.3.2 Analyse Mathématique

Application du Théorème de Dirichel

Comme f impaire on a donc :

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(2k-1)x}{2k-1} \qquad , \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Pour une fonction C1 par morceaux, le théorème de dirichlet nous indique quel est la limite de ces sommes partielles. Si on considère un point de continuité de la fonction, ces sommes partielles vont converger vers f(x). Ainsi au point de discontinuité ($x = 0$), la limite de ces sommes partielles va être la demi somme limite à droite, limite à gauche de la valeur de la fonction en le point considéreré. Nanmoins ici la demi somme vaut 0 :

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(2k-1)x}{2k-1}|_{x=0} = \frac{1}{2}[+1 + (-1)] = 0$$

En particulier, sur un tel point la limite ne vaut pas la valeur du signal $f(0) = 1$ alors que la demi somme vaut 0

On s'intéresse par la suite au comportement au voisinage du point

Comportement au voisinage d'un point de discontinuité

Étudions la somme partielle $S_p(x)$:

Calculons donc sa dérivée afin d'établir son tableaux de variations.

Comme $\frac{d}{dt} sin((2k-1)x) = (2k-1)cos((2k-1)x)$ on déduit que

$$\frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} cos((2k-1)x)$$

Ensuite on pose :

— $cos((2k-1)x) = Re[\exp(i(2k-1)x)]$

— $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On déduit l'expression suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{2}{\pi} \frac{sin(2kx)}{sin(x)} \text{ pour } t \neq 0 \\ \frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{4}{\pi} \text{ par calcul direct} \end{cases}$$

Par intégration on doit obtenir une expression explicite de $S_p(x)$. Or comme somme de sinus elle s'annule en $x = 0$ on prend donc cette primitive qui s'annule en 0 :

$$S_p(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{sin(2pu)}{sin(u)} \, \mathrm{d}u$$

Afin d'étudier la fonction $S_p(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{sin(2pu)}{sin(u)} \, \mathrm{d}u$ on dresse son tableau de variation.

Cherchons les valeurs qui annulent cette dérivé.

Soit $x \in [0, \pi]$ tels que $S_p^{'}(x) = \frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{2}{\pi} \frac{sin(2pu)}{sin(u)} = 0$. On obtient les zéros de la dérivé suivants :

$$\left\{ sin(2px) = 0 \iff 2pt = 0 \text{ modulo } \pi \right.$$

Donc pour $x \in]0, \pi[\mathrm{S}_p'(x) = 0 \iff x \in \{\frac{\pi}{2p}, \frac{2\pi}{2p}, ..., \frac{(2p-1)\pi}{2p}\}$

D'où la racine la plus proche à droite de $x = 0$ est $x_1 = \frac{\pi}{2p}$. On va par la suite étudier les variations de $S_p(x)$ au voisinage de ce point :

x	0		$\frac{\pi}{2p}$		$\frac{2\pi}{2p}$
$S_p'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0
$S_p(x)$	0	$\nearrow$	$m_{1,p}$	$\searrow$	$m_{2,p}$

Ce qui correspond à la courbe 3.2

Valeur et amplitude de la bosse de Gibbs

Valeur du maximal local :

$$m_{1,p} = S_p(\frac{\pi}{2p}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \frac{sin(2pu)}{sin(u)} \, \mathrm{d}u$$

On effectue le changement de variable suivant : $v = 2pu$, ce qui donne :

$$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{sin(v)}{sin(\frac{v}{2p})} \frac{dv}{2p}$$

Après transformation on obtient :

$$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{sinv}{v} \frac{1}{\frac{sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}} \frac{dv}{}$$

Par ailleurs on sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{p \to +\infty} \frac{v}{2p} \to 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \frac{sinh}{h} = 1 \end{cases}$$

On cherche donc la limite suivante :

$$\lim_{p\to+\infty} m_{1,p} = \frac{2}{\pi}\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{sinv}{v}\frac{1}{\frac{sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}}\frac{dv}{}$$

On fait rentrer la limite l'intrieur de l'intgrale car f est C^1 :

$$\frac{2}{\pi}\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{sinv}{v}\frac{1}{\frac{sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}}\frac{dv}{} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\lim_{p\to+\infty}\left[\frac{sinv}{v}\frac{1}{\frac{sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}}\right]\frac{dv}{}$$

D'aprs les points **????** on a le rsultat suivant :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\lim_{p\to+\infty}\left[\frac{sinv}{v}\frac{1}{\frac{sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}}\right]\frac{dv}{} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{sinv}{v}dv$$

Conclusion

A partir de ce point nous pouvons calculer numriquement le rsultat suivant :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{sinv}{v}dv = 1.18 = 1 + 0.18$$

La bosse dpasse donc toujours la valeur 1 de la fonction au voisinage de 0 d'une quantit incompressible 0.18. L'amplitude de la bosse est donc toujours suprieur de 0.18. pour notre fonction.

La gnralisation de notre fonction (non abord ici) montre que la bosse de Gibbs une hauteur proportionnelle une amplitude du saut de discontinuit. Avec un coefficient de proportionnalit qui est universel. Il est appel le coefficient de Wilbraham Gibbs est vaut 9% du saut.

Chapitre 4

Application des série de Fourier

4.1 La corde pincée

4.2 La corde frappée

Chapitre 5

Equation de la chaleur

Chapitre 6

Compléments

6.1 Finance

6.2 Informatique

Comme le disait Jean de la Fontaine dans sa fable :

> Rien de sert de courir, il faut partir à point.