

Rapport n° 1 MT12

Alexandre BALLET et Simon LAURENT

Printemps 2016

Table des matières

1	Série de Fourier	2
1.1	Historique	2
1.1.1	Biographie	2
1.1.2	Vulgarisation	3
1.2	Étude de fonctions	4
2	Étude de fonctions	14
3	Phénomène de Gibbs	19
3.1	Historique	19
3.2	Démonstration	19
3.3	Approximations de Fourier	20
3.4	Explication du phénomène	23
3.4.1	Contexte	23
3.4.2	Analyse Mathématique	23
4	Application des série de Fourier	27
4.1	La corde pincée	27
4.2	La corde frappée	27
5	Equation de la chaleur	28
6	Compléments	29
6.1	Finance	29
6.2	Informatique	29

1 Série de Fourier

1.1 Historique

1.1.1 Biographie

Jean-Baptiste Fourier (qu'on connaît aussi sous le nom de Joseph Fourier) est né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris.

En 1794, il est de la première promotion de l'École Normale Supérieure, où ses professeurs ont pour nom Lagrange, Laplace et Monge. Élève le plus brillant, il profite de cet excellent entourage pour s'investir beaucoup dans la recherche mathématique. En 1797, il remplace Lagrange à la chaire d'analyse et de mécanique de l'École Polytechnique, bien qu'il n'ait pas encore à son actif de découverte majeure.

En 1798, il rejoint les expéditions napoléoniennes en Égypte, où de nombreux chercheurs français mènent d'ambitieuses recherches. Quand Fourier regagne la France en 1801, Napoléon n'a pas oublié ses excellents états de service, et le nomme préfet de l'Isère. Il fut un excellent préfet, qui mena à bien plusieurs projets d'importance, dont la construction d'une route menant de Lyon à Turin.

C'est à Grenoble que Fourier réalise l'essentiel de ses travaux les plus importants. Son obsession est le problème de la chaleur, c'est-à-dire l'étude de l'évolution de la température d'un corps au cours du temps. De 1802 à 1807, il trouve l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides, puis trouve une méthode pour la résoudre, ce qui est maintenant l'analyse de Fourier.

En 1812 Fourier est primé par l'Institut pour son mémoire

En 1817, il est élu à l'Académie des sciences réhabilitée.

En 1822, il devient secrétaire de la section mathématique. À ce poste, il aidera beaucoup de jeunes mathématiciens prometteurs, dont Dirichlet, Sturm ou Ostrogradsky.

1.1.2 Vulgarisation

L'analyse de Fourier consiste en l'étude des vibrations élémentaires des signaux. Supposons que l'on souhaite analyser un signal quelconque, une quantité qui varie à mesure que le temps passe : par exemple, le son est fait de légères variations de pression atmosphérique. Au lieu de s'intéresser directement aux variations complexes de ce signal, Joseph Fourier eut l'idée de le décomposer en une combinaison de signaux élémentaires, dont chacun varie de manière très simple et répétitive : les sinusoides (et leurs frères jumeaux, les cosinusoides). Chaque sinusoides est caractérisée par l'amplitude et la fréquence de ses variations. Dans la décomposition de Fourier, les amplitudes nous renseignent sur l'importance relative des fréquences correspondantes dans le signal étudié.

Ainsi les sons qui nous entourent sont faits de la superposition d'une multitude de fréquences. La vibration à 440 battements par seconde est un *la*, qui sera perçu avec d'autant plus de puissance que son amplitude est forte. À 880 battements par seconde, on entendra un *la* de l'octave au-dessus. Si l'on multiplie la fréquence par 3, on passera à la quinte, c'est-à-dire au mi, et ainsi de suite. Mais en pratique les sons ne sont jamais purs, ils sont toujours faits de la concomitance de très nombreuses fréquences qui en déterminent le timbre.

Et l'analyse de Fourier sert tout : à analyser les sons et à les graver sur un CD, mais aussi à analyser les images et à les transmettre par Internet, ou à analyser les variations du niveau de la mer et à prédire les marées... Son grand-père mathématique (comme disait Lord Kelvin), enseigné dans tous les pays du monde, est utilisé chaque jour par des milliards d'humains qui ne s'en rendent même pas compte.



Joseph Fourier

1.2 Étude de fonctions

1. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 1.273240$	$b(6) = -0.000000$
$b(2) = 0.000000$	$b(7) = 0.181891$
$b(3) = 0.424413$	$b(8) = 0.000000$
$b(4) = 0.000000$	$b(9) = 0.141471$
$b(5) = 0.254648$	$b(10) = 0.000000$

(b) Série de Fourier

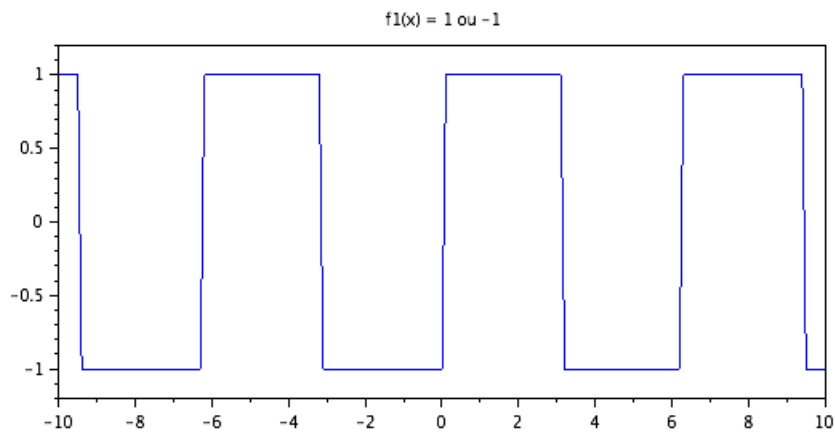


FIGURE 1.1 – Courbe de la fonction f .

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

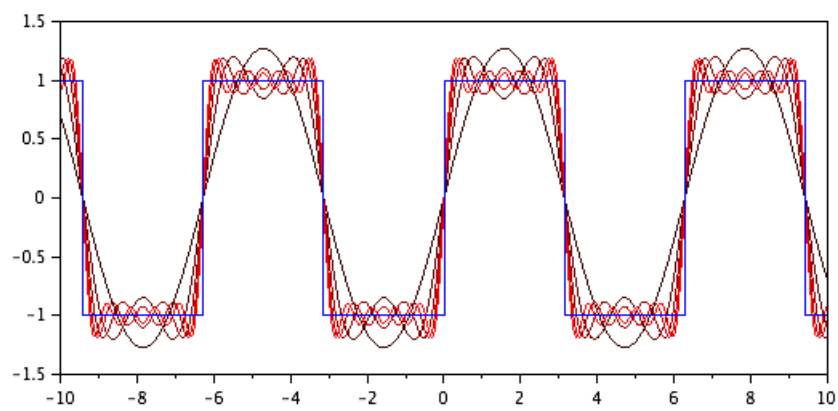


FIGURE 1.2 – Courbe de la fonction f .

(d) Richesse fréquentielle du signal

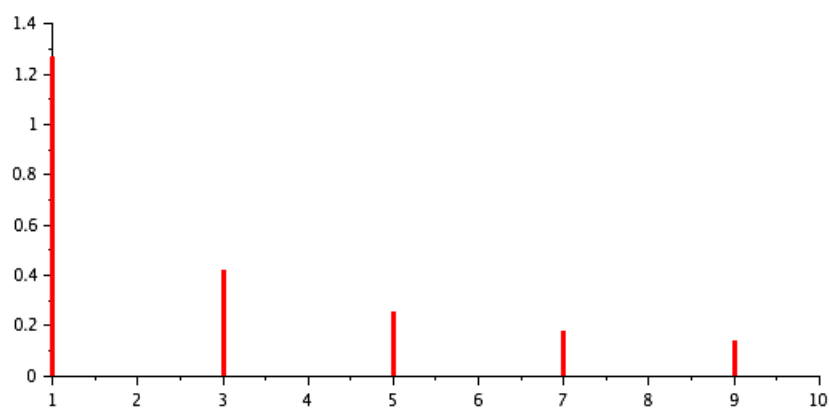


FIGURE 1.3 – Richesse du signal f .

2. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = x, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 2.000000$	$b(6) = -0.333333$
$b(2) = -1.000000$	$b(7) = 0.285714$
$b(3) = 0.666667$	$b(8) = -0.250000$
$b(4) = -0.500000$	$b(9) = 0.222222$
$b(5) = 0.400000$	$b(10) = -0.200000$

(b) Série de Fourier

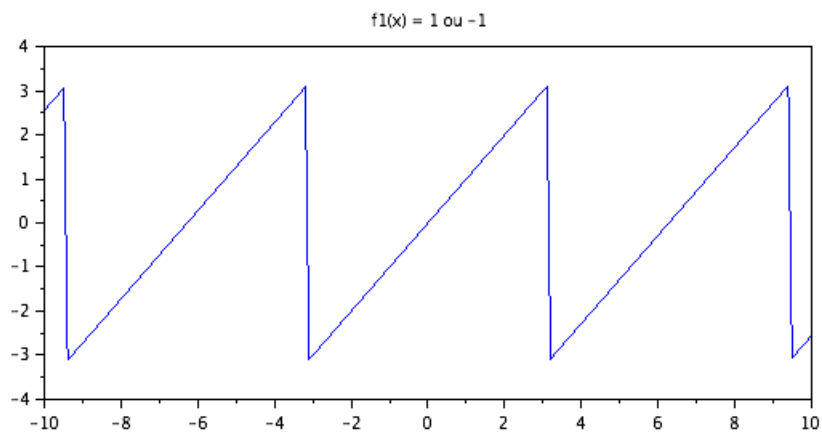


FIGURE 1.4 – Courbe de la fonction f .

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

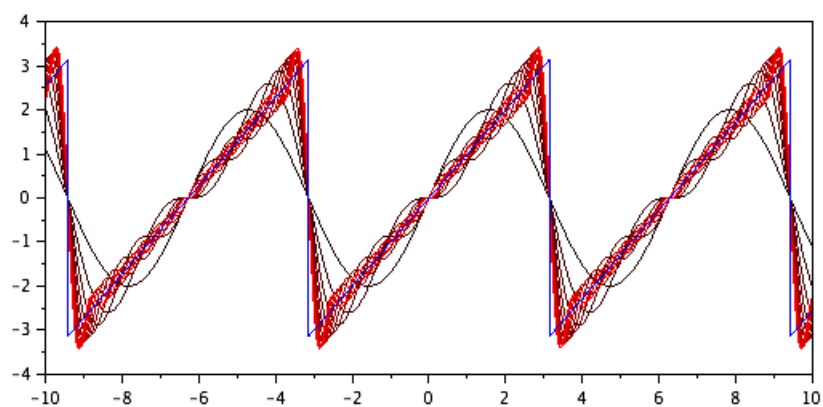


FIGURE 1.5 – Courbe de la fonction f .

(d) Richesse fréquentielle du signal

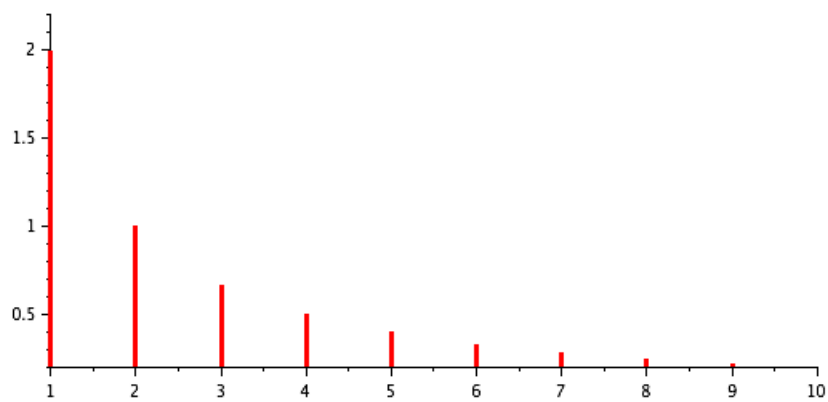


FIGURE 1.6 – Richesse du signal f .

3. f est 2π périodique, paire et vaut $f(x) = x, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $b(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $a(i)$:

$a(1) = 1.273240$	$a(6) = -0.000000$
$a(2) = 0.000000$	$a(7) = 0.025984$
$a(3) = 0.141471$	$a(8) = 0.000000$
$a(4) = 0.000000$	$a(9) = 0.015719$
$a(5) = 0.050930$	$a(10) = 0.000000$
avec $a(0) = 3.141593$	

(b) Série de Fourier

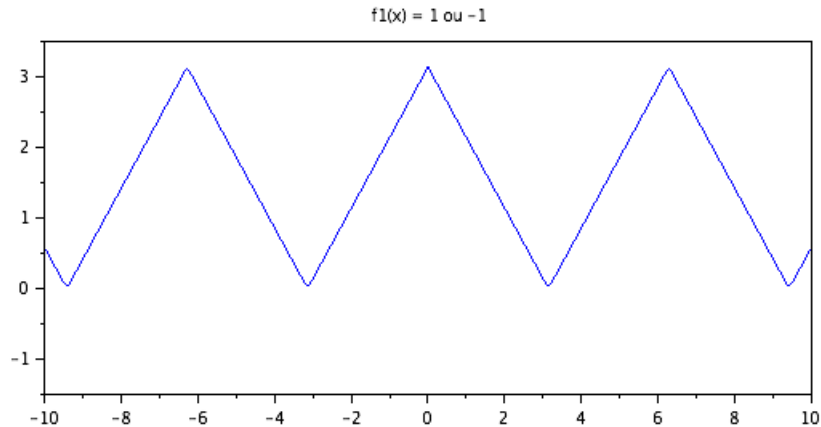


FIGURE 1.7 – Courbe de la fonction f .

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

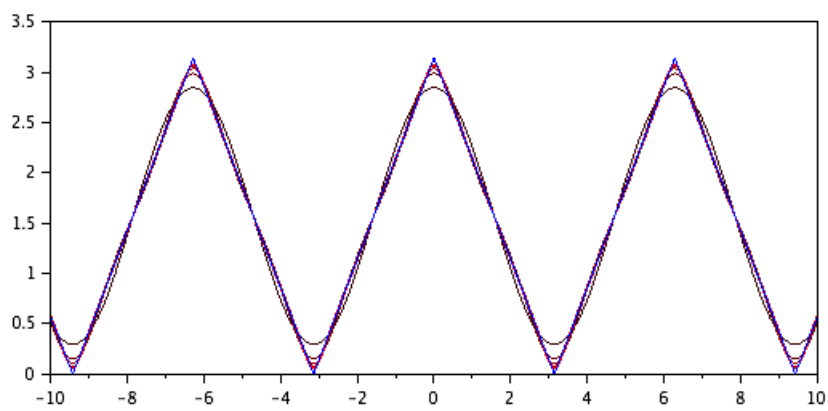


FIGURE 1.8 – Courbe de la fonction f .

(d) Richesse fréquentielle du signal

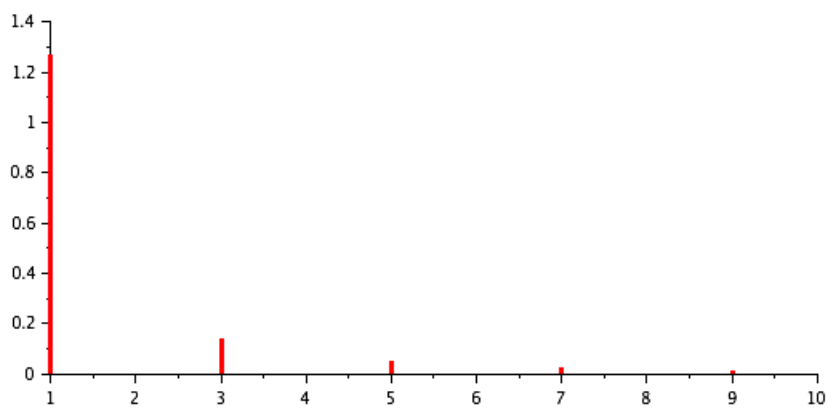


FIGURE 1.9 – Richesse du signal f .

4. f est 2π périodique, paire et vaut $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $b(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $a(i)$:

$a(1) = -4.000000$	$a(6) = 0.111111$
$a(2) = 1.000000$	$a(7) = -0.081633$
$a(3) = -0.444444$	$a(8) = 0.062500$
$a(4) = 0.250000$	$a(9) = -0.049383$
$a(5) = -0.160000$	$a(10) = 0.040000$
avec $a(0) = 6.579736$	

(b) Série de Fourier

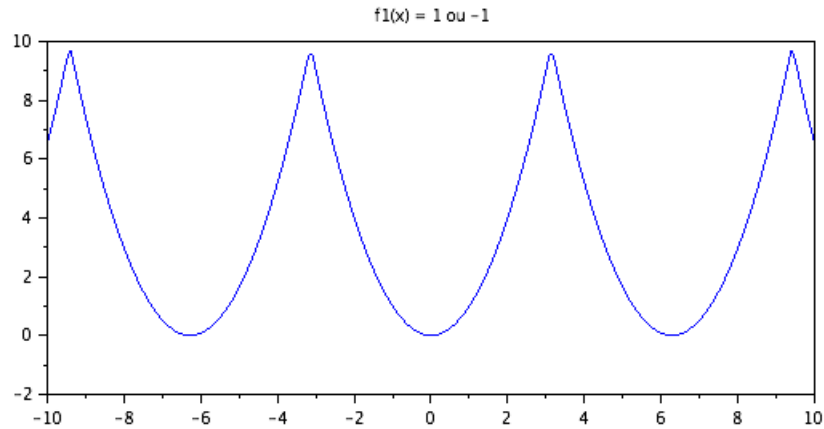


FIGURE 1.10 – Courbe de la fonction f .

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

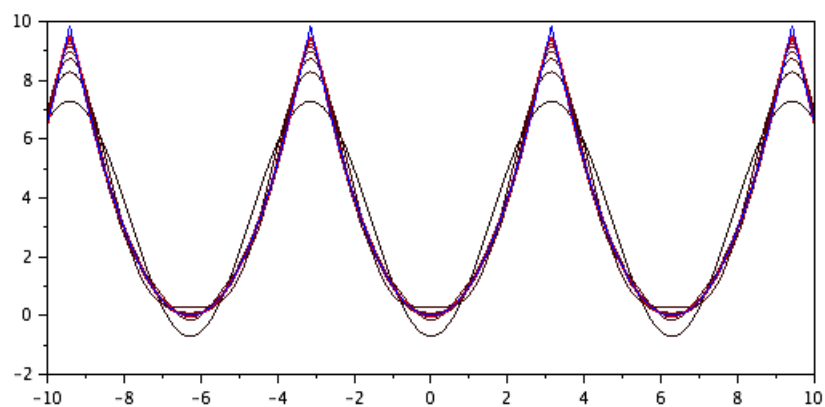


FIGURE 1.11 – Courbe de la fonction f .

(d) Richesse fréquentielle du signal

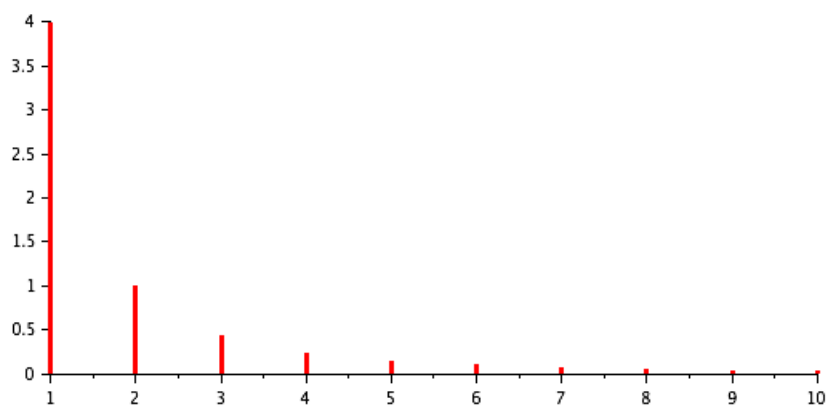


FIGURE 1.12 – Richesse du signal f .

5. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = x(\pi + |x|), x \in [-\pi, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 2.546479$	$b(6) = 0.000000$
$b(2) = 0.000000$	$b(7) = 0.007424$
$b(3) = 0.094314$	$b(8) = -0.000000$
$b(4) = -0.000000$	$b(9) = 0.003493$
$b(5) = 0.020372$	$b(10) = -0.000000$

(b) Série de Fourier

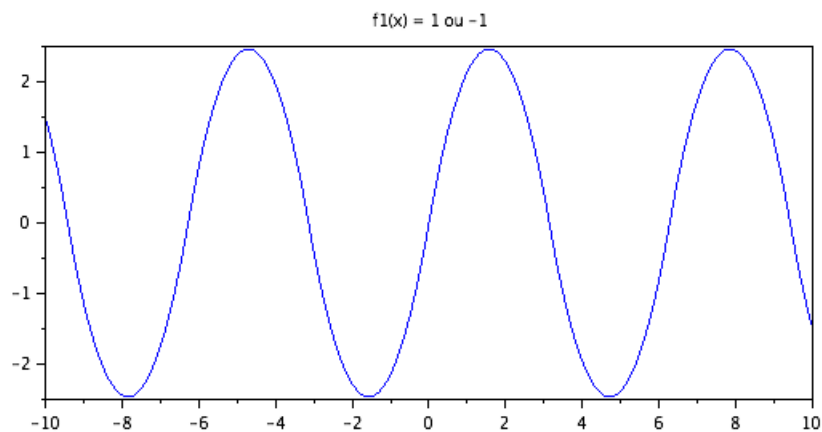


FIGURE 1.13 – Courbe de la fonction f .

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

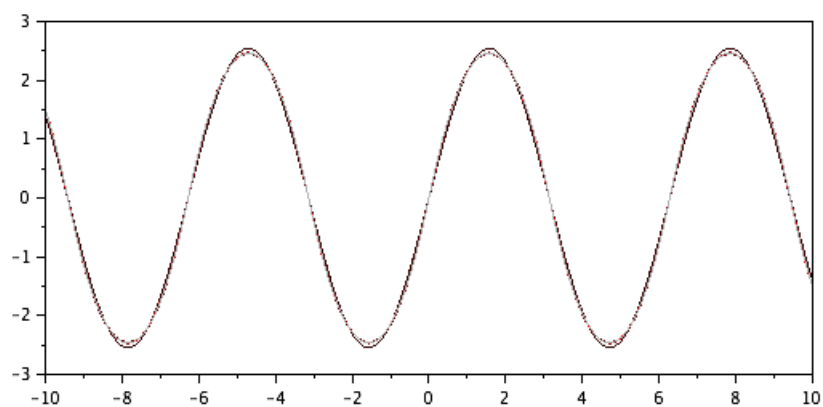


FIGURE 1.14 – Courbe de la fonction f .

(d) Richesse fréquentielle du signal

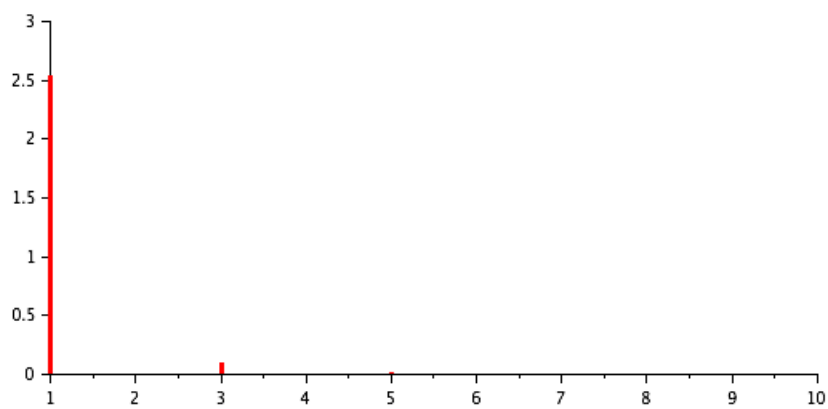


FIGURE 1.15 – Richesse du signal f .

2 Étude de fonctions

1.

$$f(x) = (\sin x)^{1/3}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle est composée d'une fonction sinus, ce qui la rend impaire. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt[3]{0} = 0$. Elle est donc continue.

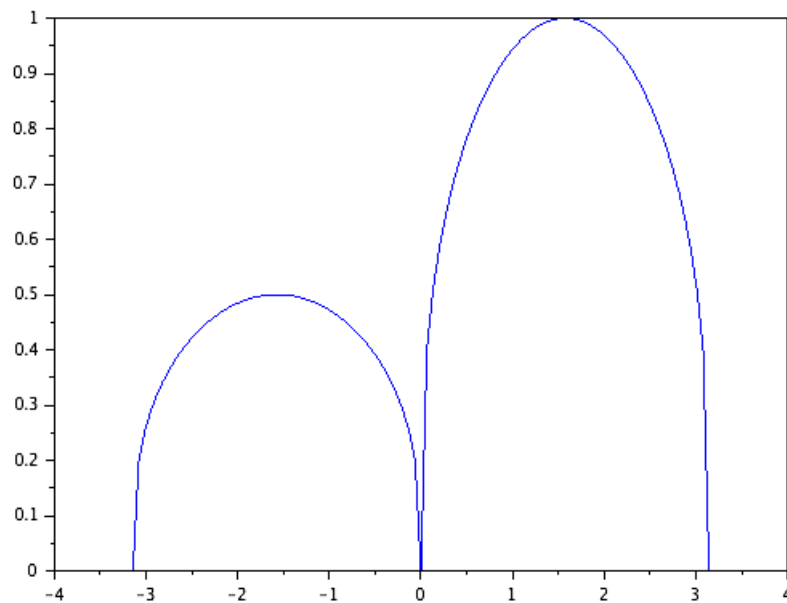


FIGURE 2.1 – Courbe de la fonction f .

Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cos x (\sin x)^{-2/3}$$

Elle admet une asymptote verticale en 0 et n'est donc pas continue. La fonction f est continue mais non dérivable sur $(-\pi; \pi)$.

2.

$$f(x) = (\sin x)^{4/3}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt[3]{0} = 0$. Elle est donc continue.

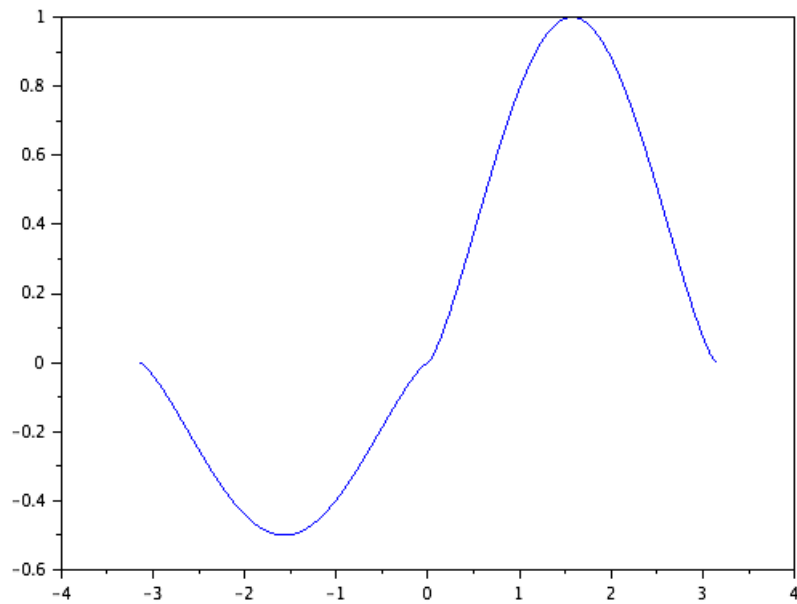


FIGURE 2.2 – Courbe de la fonction f .

Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{4}{3} \cos x (\sin x)^{1/3}$$

Elle n'admet pas d'asymptote et est donc continue. La fonction f est continue et dérivable, donc régulière.

3.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , si \quad x > 0 \\ -\cos x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = 1$ et $f(0^-) = -1$. Elle n'est donc pas continue en 0.

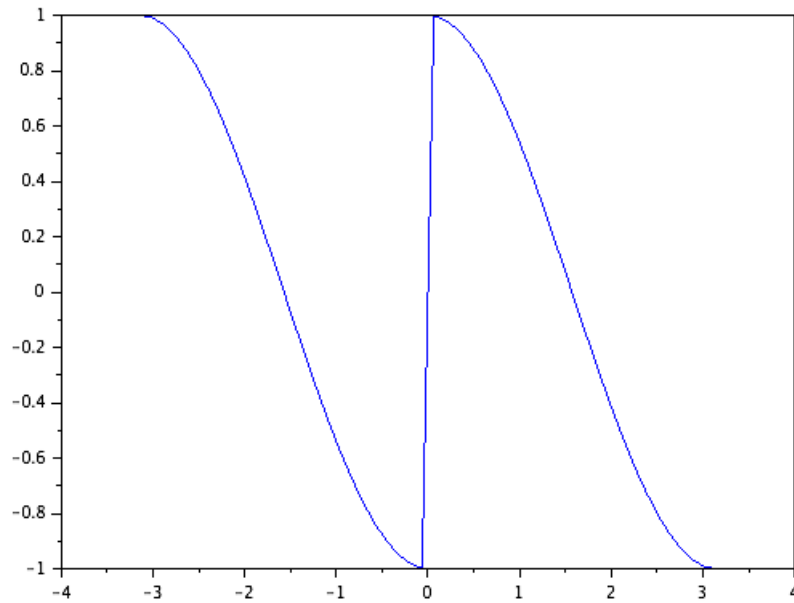


FIGURE 2.3 – Courbe de la fonction f .

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & , si \quad x > 0 \\ \sin x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

4.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , si \quad x > 0 \\ -\sin 2x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = 0$. Elle est donc continue.

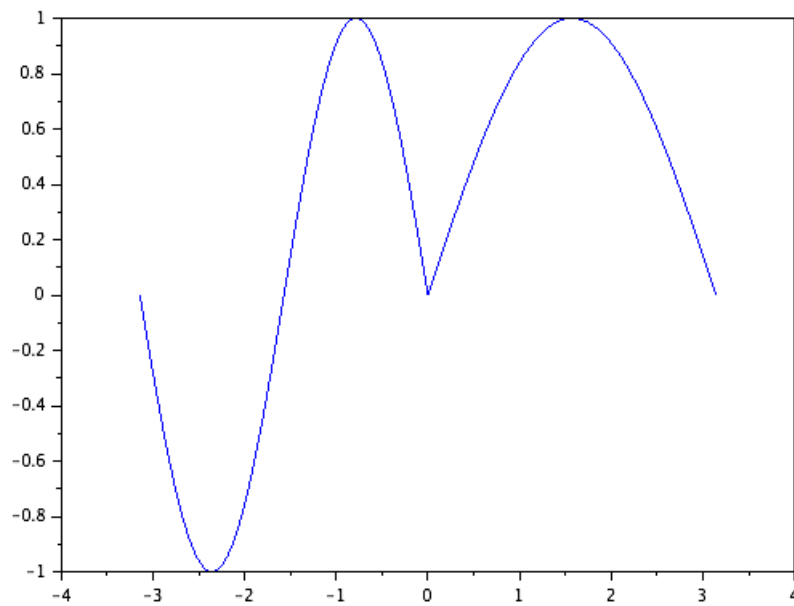


FIGURE 2.4 – Courbe de la fonction f .

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & , si \quad x > 0 \\ -2\cos 2x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

5.

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{1/5}, & \text{si } x < \pi/2 \\ -\cos x & , \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt[5]{0} = 0$ et $f(\pi/2) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} f(x) = 1$. Elle est continue en 0 mais pas en $\pi/2$, elle est donc continue par morceaux.

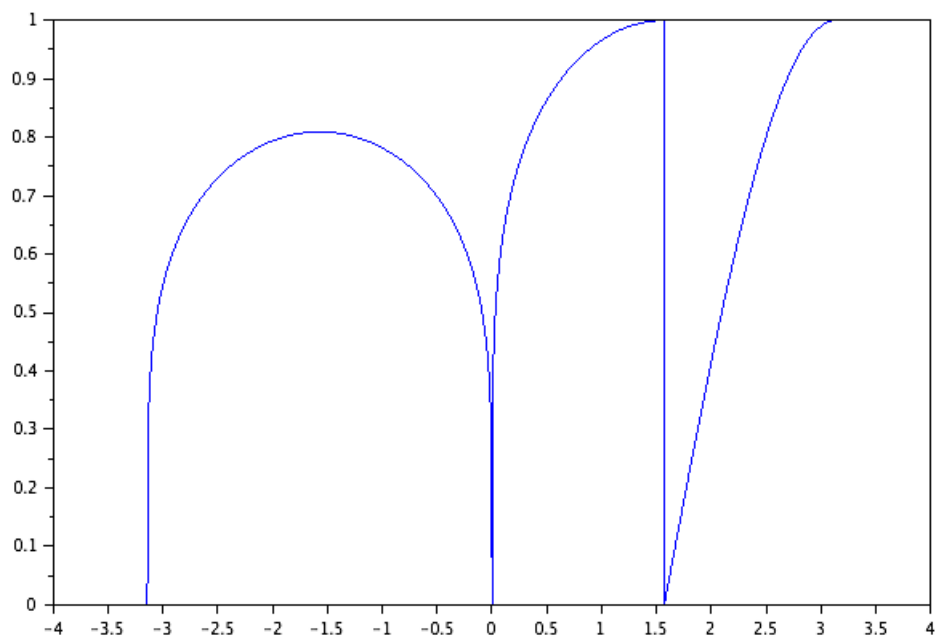


FIGURE 2.5 – Courbe de la fonction f .

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} \cos x (\sin x)^{1/5} & , \text{si } x < \pi/2 \\ \sin x & , \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

3 Phénomène de Gibbs

3.1 Historique

3.2 Démonstration

Soit f la fonction 2π -périodique et impaire telle que $f(x) = 1$ sur $[0; \pi]$.

Nous allons montrer que

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)}{2k-1}$$

Nous savons que $S_{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx$, car f est impaire.

Or,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 S_{f(x)} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} \sin nx \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ pair}} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx + \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin nx}{n} \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad , \text{ où } n = 2k-1, k \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

3.3 Approximations de Fourier

1. Approximation pour $n = 2$

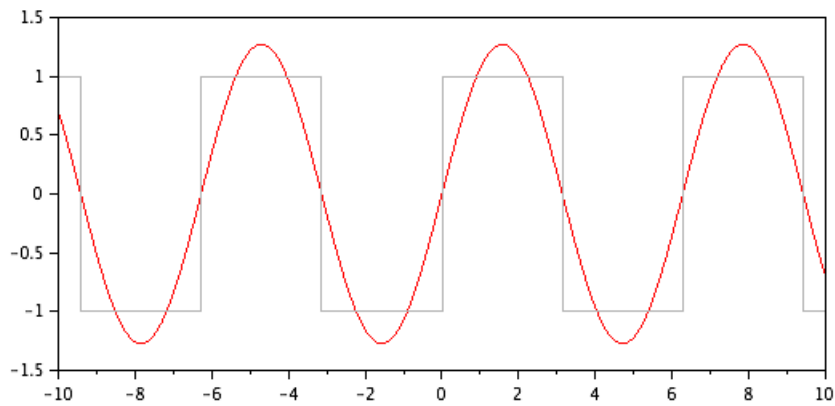


FIGURE 3.1 – Courbe de la fonction f pour $n = 2$.

2. Approximation pour $n = 5$

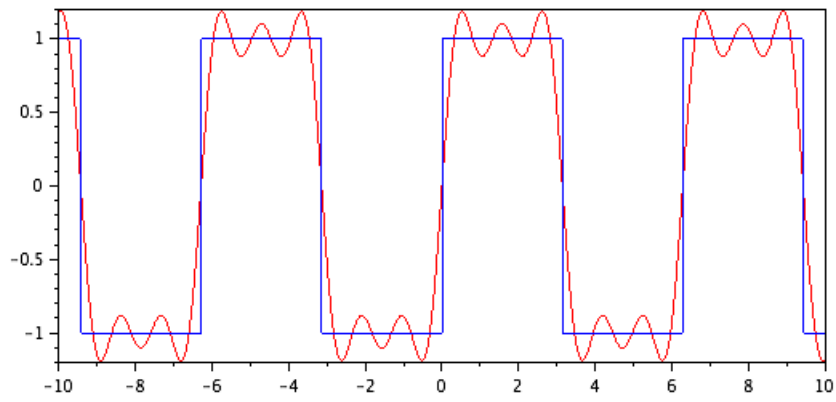


FIGURE 3.2 – Courbe de la fonction f pour $n = 5$.

3. Approximation pour $n = 10$

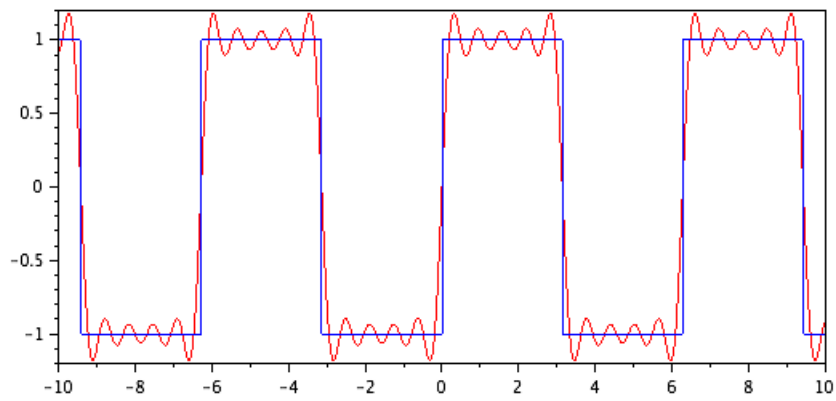


FIGURE 3.3 – Courbe de la fonction f pour $n = 10$.

4. Approximation pour $n = 20$

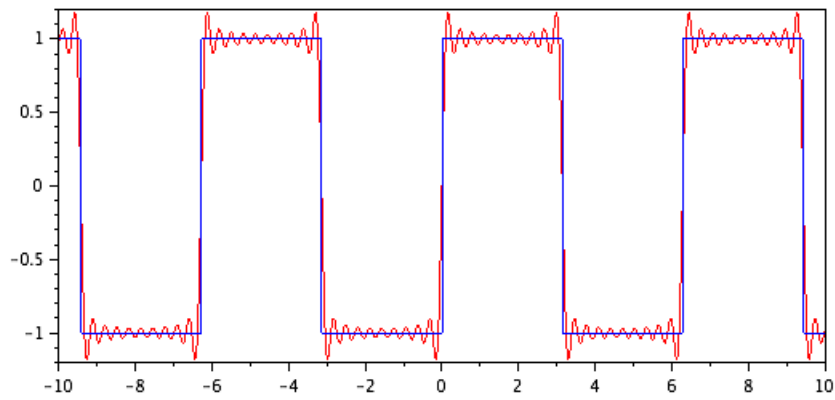


FIGURE 3.4 – Courbe de la fonction f pour $n = 20$.

5. Approximation pour $n = 60$

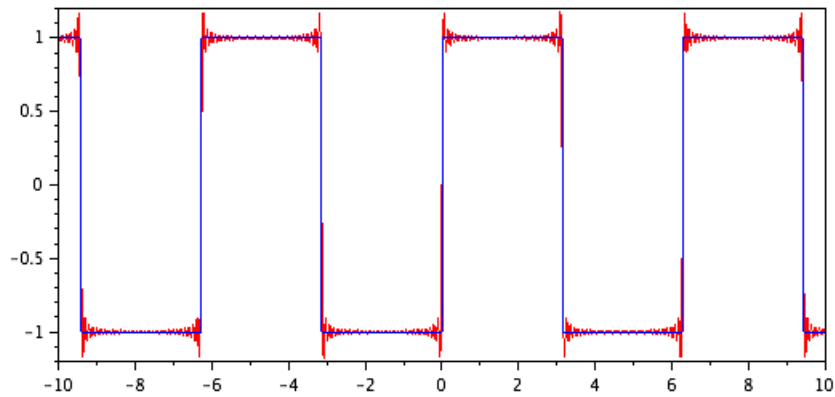


FIGURE 3.5 – Courbe de la fonction f pour $n = 60$.

On remarque donc qu'au voisinage d'une discontinuité une bosse apparaît. Or quand n augmente cette dernière subsiste de part et d'autre d'une discontinuité. Plaçons nous alors à droite du point de discontinuité 0 par exemple. On note que lorsque n augmente, le point en lequel il y a un pic s'approche de 0, mais la hauteur reste constante. Nous allons essayer d'expliquer ce phénomène dans la partie suivante.

3.4 Explication du phénomène

3.4.1 Contexte

Soit f la fonction 2π -périodique et impaire telle que $f(x) = 1$ sur $[0; \pi]$.

On note que la fonction présente une discontinuité en tout point multiple de π . La limite à droite et la limite à gauche en ces points vaut $+1$ et -1 . De plus en dehors de ces points la fonction est continue. Nous avons donc une fonction continue par morceau et sa dérivée l'est également. Ainsi on peut dire que f est C^1 par morceaux

3.4.2 Analyse Mathématique

Application du Théorème de Dirichlet

Comme f est impaire on a donc :

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad , \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Pour une fonction C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet nous indique quel est la limite de ces sommes partielles. Si l'on considère un point de continuité de la fonction, ces sommes partielles vont converger vers $f(x)$. Ainsi au point de discontinuité ($x = 0$), la limite de ces sommes partielles va être la demi-somme entre la limite à droite et la limite à gauche de la valeur de la fonction au point considéré. Ici, la demi-somme vaut 0 :

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}[+1 + (-1)] = 0$$

En particulier, sur un tel point la limite ne vaut pas la valeur du signal $f(0) = 1$, alors que la demi-somme vaut 0

On s'intéresse par la suite au comportement au voisinage du point de discontinuité.

Comportement au voisinage d'un point de discontinuité

Étudions la somme partielle $S_p(x)$:

Calculons sa dérivée afin d'établir son tableaux de variations.

Comme $\frac{d}{dt} \sin((2k-1)x) = (2k-1)\cos((2k-1)x)$ on déduit que

$$\frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos((2k-1)x)$$

Ensuite on pose :

$$\cos((2k-1)x) = \operatorname{Re}[e^{i(2k-1)x}] \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On déduit l'expression suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2kx)}{\sin(x)} & , \text{ pour } t \neq 0 \\ \frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{4}{\pi} & , \text{ par calcul direct} \end{cases}$$

Par intégration on doit obtenir une expression explicite de $S_p(x)$. Or comme somme de sinus elle s'annule en $x = 0$ on prend donc cette primitive qui s'annule en 0 :

$$S_p(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2pu)}{\sin(u)} du$$

Afin d'étudier la fonction $S_p(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2pu)}{\sin(u)} du$ on dresse son tableau de variation.

Cherchons les valeurs qui annulent cette dérivé.

Soit $x \in [0, \pi]$ tels que $S'_p(x) = \frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2px)}{\sin(x)} = 0$. On obtient les zéros de la dérivé suivants :

$$\sin(2px) = 0 \iff 2px = 0[\pi]$$

Donc pour $x \in]0, \pi[$

$$S'_p(x) = 0 \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{2p}, \frac{2\pi}{2p}, \dots, \frac{(2p-1)\pi}{2p} \right\}$$

D'où la racine la plus proche à droite de $x = 0$ est $x_1 = \frac{\pi}{2p}$. On va par la suite étudier les variations de $S_p(x)$ au voisinage de ce point :

x	0		$\frac{\pi}{2p}$	$\frac{2\pi}{2p}$		
$S'_p(x)$			+	0	-	
$S_p(x)$			<div> $m_{1,p}$ </div> <div> $0 \nearrow \qquad \searrow m_{2,p}$ </div>			

Ce qui correspond à la courbe 3.2

Valeur et amplitude de la bosse de Gibbs

Valeur du maximal local :

$$m_{1,p} = S_p\left(\frac{\pi}{2p}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \frac{\sin(2pu)}{\sin(u)} du$$

On effectue le changement de variable suivant : $v = 2pu$, ce qui donne :

$$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(v)}{\sin\left(\frac{v}{2p}\right)} \frac{dv}{2p}$$

Après transformation on obtient :

$$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{v}{2p}\right)}{\frac{v}{2p}}} dv$$

Par ailleurs on sait que :

$$\begin{cases} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{v}{2p} \rightarrow 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} = 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

On cherche donc la limite suivante :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}} dv$$

On fait rentrer la limite à l'intérieur de l'intégrale car f est C^1 :

$$\frac{2}{\pi} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}} dv = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}} \right] dv$$

D'après le point (3.1) on a le résultat suivant :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}} \right] dv = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} dv$$

Conclusion

A partir de ce point nous pouvons calculer numériquement le résultat suivant :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} dv = 1.18 = 1 + 0.18$$

La bosse dépasse donc toujours la valeur 1 de la fonction au voisinage de 0 d'une quantité incompressible 0.18. L'amplitude de la bosse est donc toujours supérieur à 0.18 pour notre fonction.

La généralisation de notre fonction (non abordé ici) montre que la bosse de Gibbs a une hauteur proportionnelle à une amplitude du saut de discontinuité. Ce coefficient de proportionnalité universel est appelé coefficient de Wilbraham Gibbs est vaut 9% du saut.

4 Application des série de Fourier

4.1 La corde pincée

4.2 La corde frappée

5 Equation de la chaleur

6 Compléments

6.1 Finance

6.2 Informatique

Comme le disait Jean de la Fontaine dans sa fable :

Rien de sert de courir, il faut partir à point.