Rapport n^{o} 1 MT12

Alexandre BALLET et Simon LAURENT

Printemps 2016

Table des matières

1 Série de Fourier **2**

2 Etude de fonctions **12**

3 Phénomène de Gibbs **18**
3.1 Démonstration 18
3.2 Approximations de Fourier 19
3.3 Explication du phénomène 19

4 Application des série de Fourier **20**
4.1 La corde pincée 20
4.2 La corde frappée 20

5 Equation de la chaleur **21**

6 Compléments **22**
6.1 Finance 22
6.2 Informatique 22

Chapitre 1

Série de Fourier

1. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$

   (a) Coefficients de Fourier

   Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 1.273240$	$b(6) = -0.000000$
$b(2) = 0.000000$	$b(7) = 0.181891$
$b(3) = 0.424413$	$b(8) = 0.000000$
$b(4) = 0.000000$	$b(9) = 0.141471$
$b(5) = 0.254648$	$b(10) = 0.000000$

   (b) Série de Fourier

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

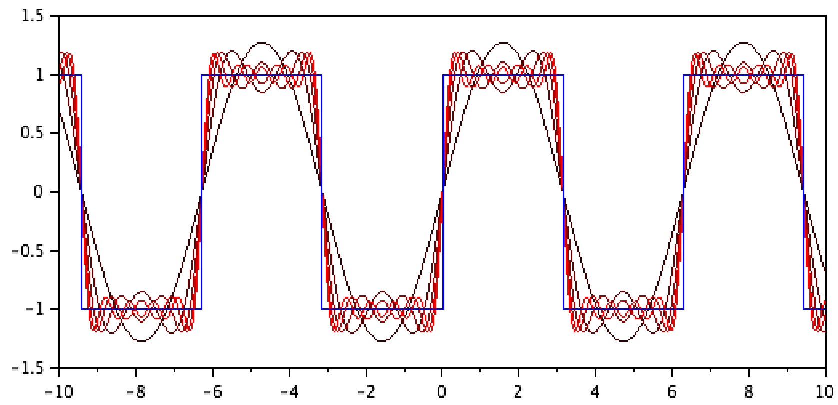

FIGURE 1.1 – Courbe de la fonction f.

(d) Richesse fréquentielle du signal

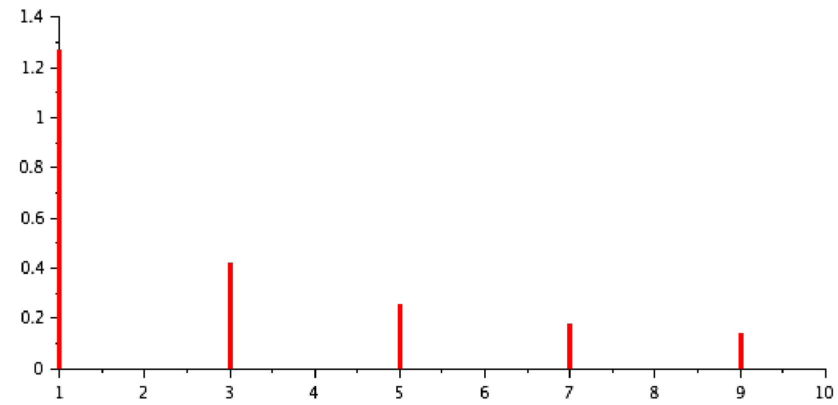

FIGURE 1.2 – Richesse du signal f.

2. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = x, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 2.000000$	$b(6) = -0.333333$
$b(2) = -1.000000$	$b(7) = 0.285714$
$b(3) = 0.666667$	$b(8) = -0.250000$
$b(4) = -0.500000$	$b(9) = 0.222222$
$b(5) = 0.400000$	$b(10) = -0.200000$

(b) Série de Fourier

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

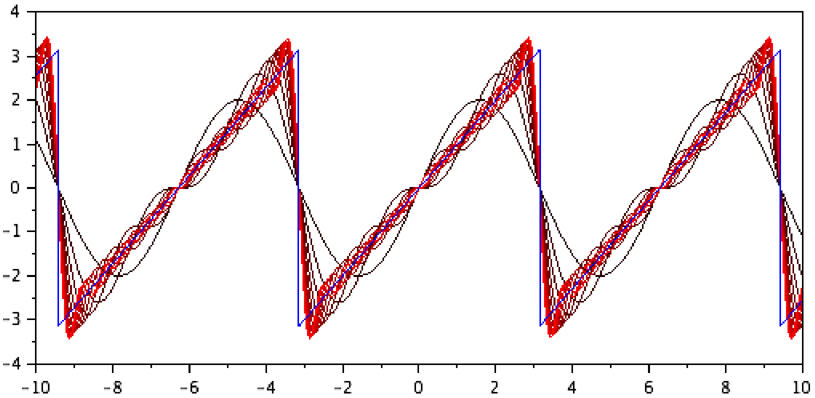

FIGURE 1.3 – Courbe de la fonction f.

(d) Richesse fréquentielle du signal

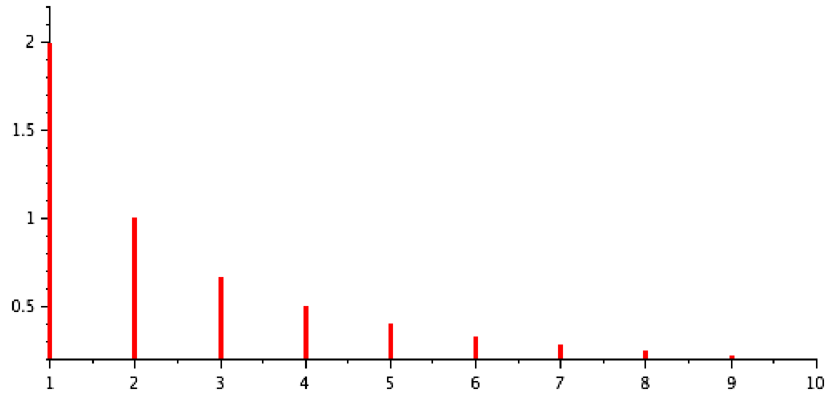

FIGURE 1.4 – Richesse du signal f.

3. f est 2π périodique, paire et vaut $f(x) = x, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $b(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $a(i)$:

$a(1) = 1.273240$	$a(6) = -0.000000$
$a(2) = 0.000000$	$a(7) = 0.025984$
$a(3) = 0.141471$	$a(8) = 0.000000$
$a(4) = 0.000000$	$a(9) = 0.015719$
$a(5) = 0.050930$	$a(10) = 0.000000$

avec $a(0) = 3.141593$

(b) Série de Fourier

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

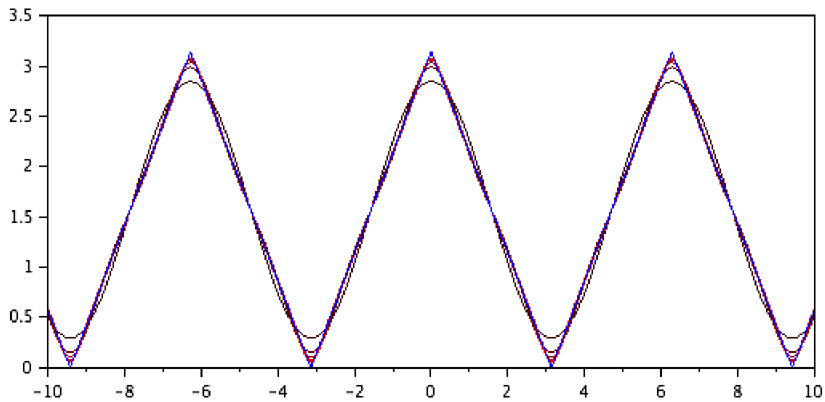

FIGURE 1.5 – Courbe de la fonction f.

(d) Richesse fréquentielle du signal

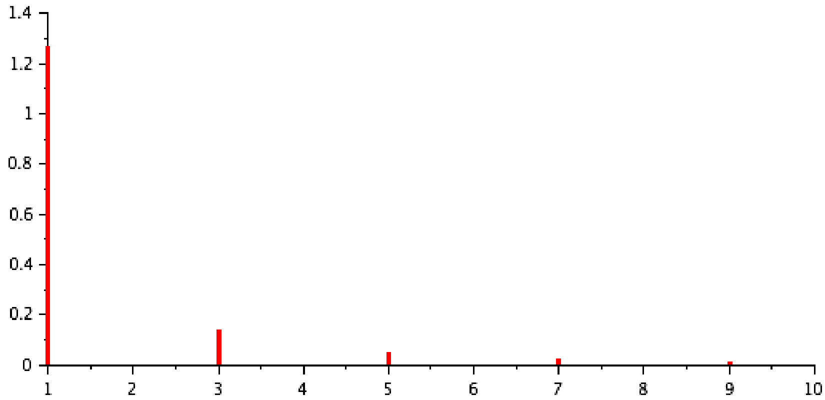

Figure 1.6 – Richesse du signal f.

4. f est 2π périodique, paire et vaut $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $b(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $a(i)$:

$a(1) = -4.000000$	$a(6) = 0.111111$
$a(2) = 1.000000$	$a(7) = -0.081633$
$a(3) = -0.444444$	$a(8) = 0.062500$
$a(4) = 0.250000$	$a(9) = -0.049383$
$a(5) = -0.160000$	$a(10) = 0.040000$

avec $a(0) = 6.579736$

(b) Série de Fourier

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

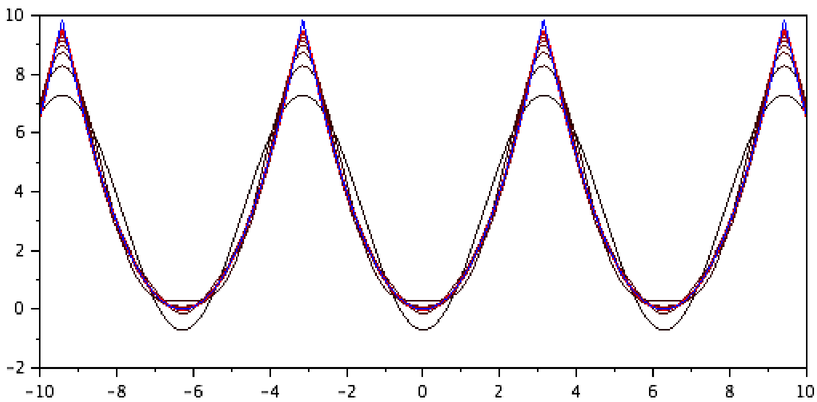

FIGURE 1.7 – Courbe de la fonction f.

(d) Richesse fréquentielle du signal

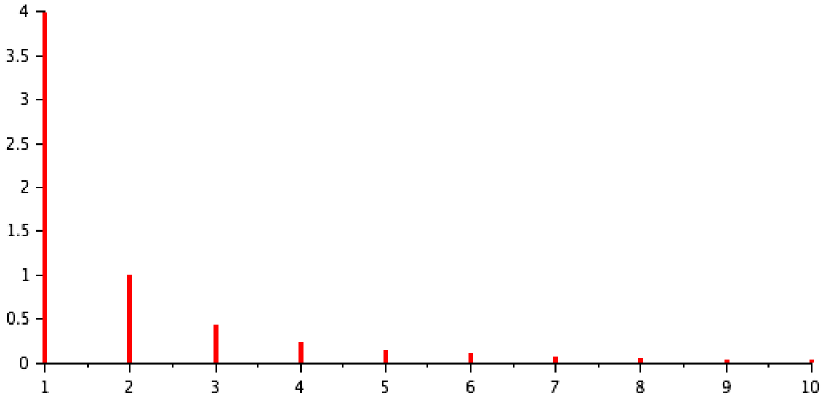

Figure 1.8 – Richesse du signal f.

5. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = x(\pi + |x|), x \in [-\pi, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 2.546479$	$b(6) = 0.000000$
$b(2) = 0.000000$	$b(7) = 0.007424$
$b(3) = 0.094314$	$b(8) = -0.000000$
$b(4) = -0.000000$	$b(9) = 0.003493$
$b(5) = 0.020372$	$b(10) = -0.000000$

(b) Série de Fourier

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

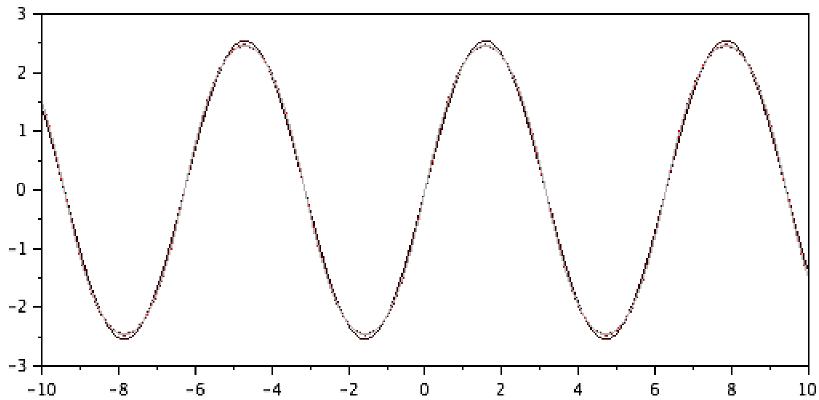

Figure 1.9 – Courbe de la fonction f.

(d) Richesse fréquentielle du signal

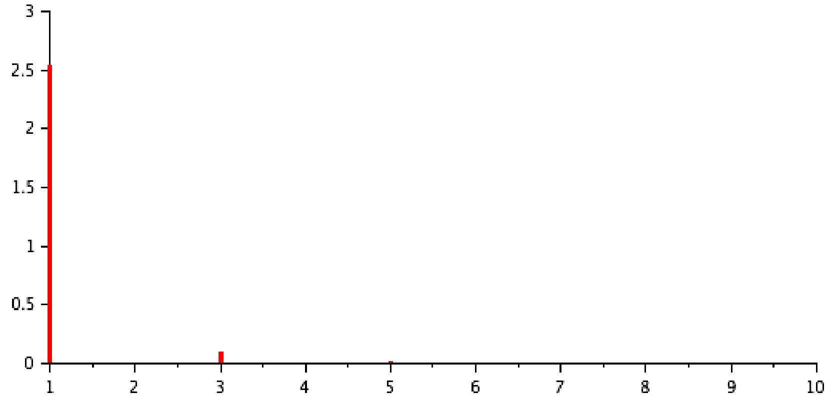

FIGURE 1.10 – Richesse du signal f.

Chapitre 2

Etude de fonctions

1.
$$f(x) = (sin\,x)^{1/3}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi;\pi)$. Elle est composée d'une fonction sinus, ce qui la rend impaire. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt{0} = 0$. Elle est donc continue.

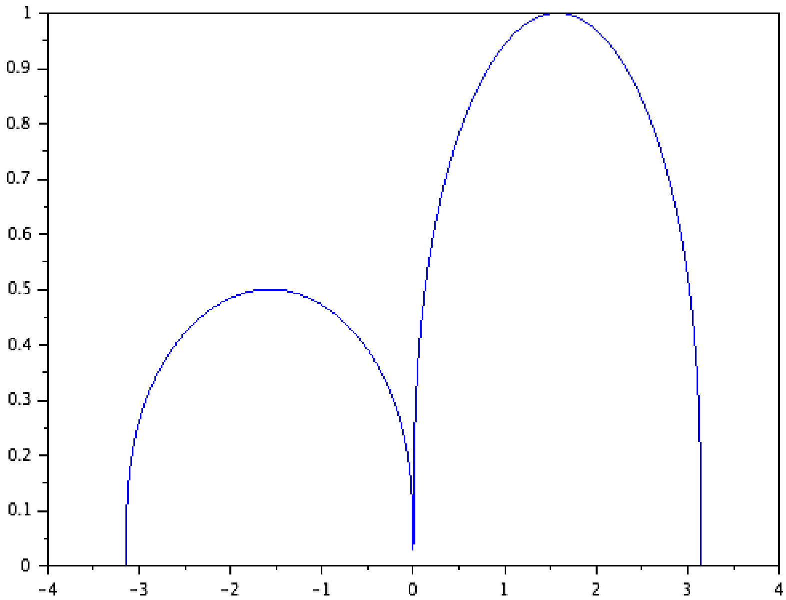

FIGURE 2.1 – Courbe de la fonction f.

Sa dérivée est
$$f'(x) = \frac{1}{3}cosx(sin\,x)^{-2/3}$$

Elle admet une asymptote verticale en 0 et n'est donc pas continue. La fonction f est continue mais non dérivable sur $(-\pi;\pi)$.

2.
$$f(x) = (sin\,x)^{4/3}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi;\pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt[3]{0} = 0$. Elle est donc continue.

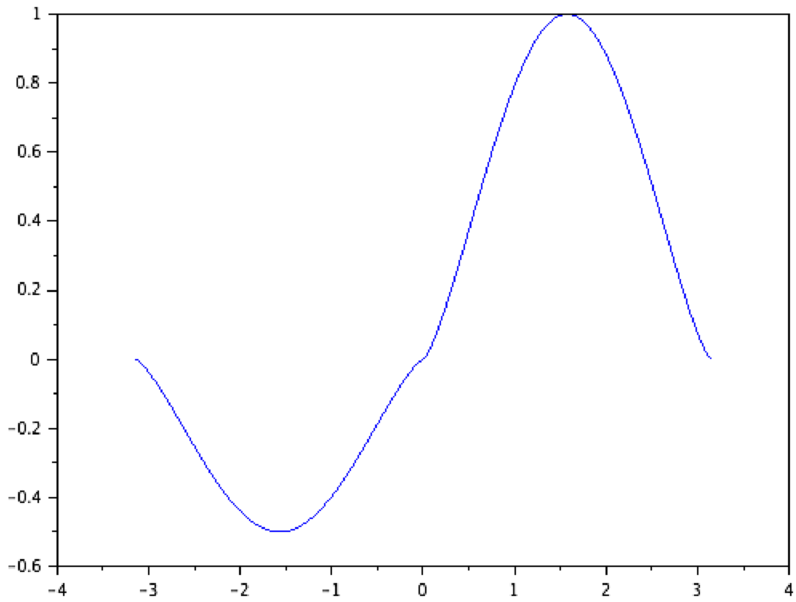

FIGURE 2.2 – Courbe de la fonction f.

Sa dérivée est
$$f'(x) = \frac{4}{3} cos\,x(sin\,x)^{1/3}$$

Elle n'admet pas d'asymptote et est donc continue. La fonction f est continue et dérivable, donc régulière.

3.

$$f(x) = \begin{cases} cos\, x & , si \quad x > 0 \\ -cos\, x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = 1$ et $f(0^-) = -1$. Elle n'est donc pas continue en 0.

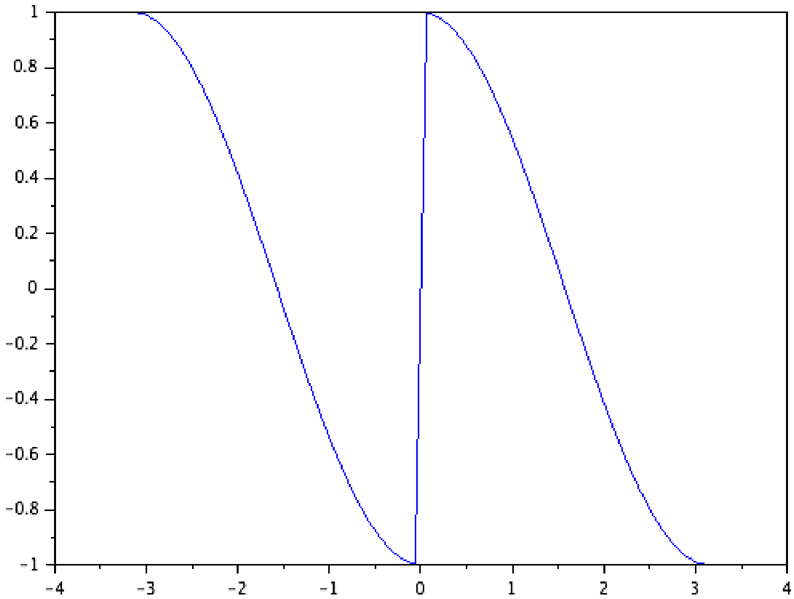

FIGURE 2.3 – Courbe de la fonction f.

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} -sin\, x & , si \quad x > 0 \\ sin\, x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

4.
$$f(x) = \begin{cases} sin\,x & , si \quad x > 0 \\ -sin\,2x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi;\pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = 0$. Elle est donc continue.

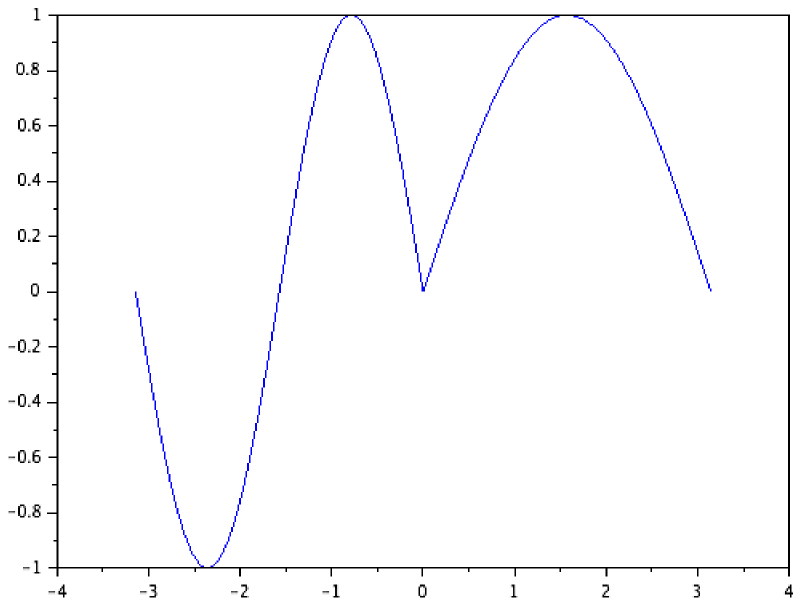

FIGURE 2.4 – Courbe de la fonction f.

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} cos\,x & , si \quad x > 0 \\ -2cos\,2x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

5.
$$f(x) = \begin{cases} (sin\,x)^{1/5} & ,si \quad x < \pi/2 \\ -cos\,x & ,si \quad x \geq \pi/2 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi;\pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt{0} = 0$ et $f(\pi/2) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2 \\ x>\pi/2}} f(x)$. Elle est continue en 0 mais pas en $\pi/2$, elle est donc continue par morceaux.

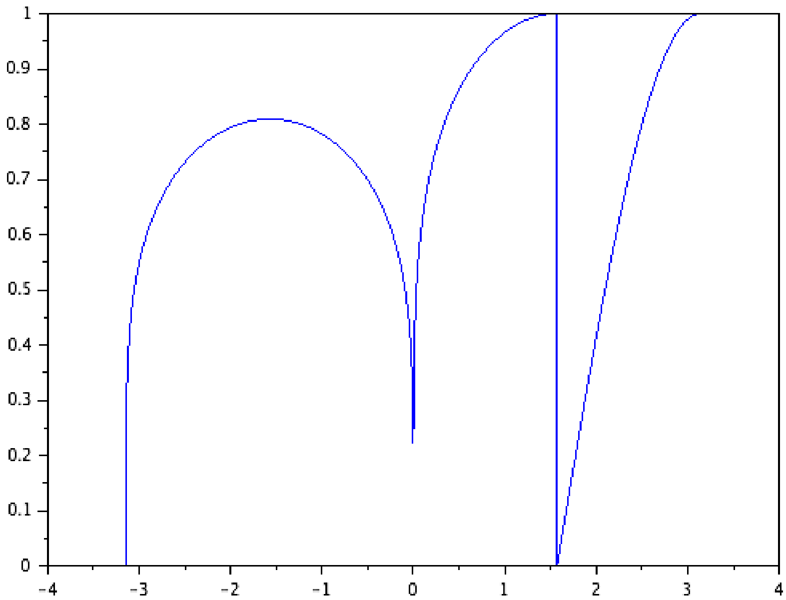

FIGURE 2.5 – Courbe de la fonction f.

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}cos\,x\,(sin\,x)^{1/5} & ,si \quad x < \pi/2 \\ sin\,x & ,si \quad x \geq \pi/2 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

Chapitre 3

Phénomène de Gibbs

3.1 Démonstration

Soit f la fonction 2π-périodique et impaire telle que $f(x) = 1$ sur $[0; \pi]$.

Nous allons montrer que

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sin(2k-1)}{2k-1}$$

Nous savons que $S_{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n sinnx$, car f est impaire.

Or,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) sinnx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) sinnx \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} sinnx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} sinnx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} sinnx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} sinnx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} sinnx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-cosnx}{k} \right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{cosn\pi}{n} + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{cosn\pi}{n} + \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
S_{f(x)} &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-cosnx}{n}sinnx \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}sinnx \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n\,pair}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}sinnx + \frac{2}{\pi}\sum_{n\,impair}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}sinnx \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n\,impair}^{\infty}\frac{sinnx}{n} \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2k-1)x}{2k-1} \qquad \text{, où } n = 2k-1 \text{ , } k \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

3.2 Approximations de Fourier

3.3 Explication du phénomène

Chapitre 4

Application des série de Fourier

4.1 La corde pincée

4.2 La corde frappée

Chapitre 5

Equation de la chaleur

Chapitre 6

Compléments

6.1 Finance

6.2 Informatique

Comme le disait Jean de la Fontaine dans sa fable :

Rien de sert de courir, il faut partir à point.