

Rapport de MT12 : Techniques mathématiques de l'ingénieur
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

Printemps 2016

Alexandre BALLET et Simon LAURENT

Sujet du rapport :
Séries de Fourier

Département des étudiants :
Génie Informatique

Professeur :
M. Djalil KATEB

Table des matières

1	Série de Fourier	6
1.1	Historique	6
1.1.1	Biographie	6
1.1.2	Vulgarisation	7
1.2	Étude de fonctions	9
2	Étude de fonctions	19
3	Phénomène de Gibbs	24
3.1	Historique	24
3.2	Biographies	25
3.2.1	Henry Wilbraham	25
3.2.2	Albert Michelson	25
3.2.3	Josiah Willard Gibbs	25
3.2.4	Maxime Bôcher	27
3.2.5	Oliver Heaviside	28
3.3	Démonstration	29
3.4	Approximations de Fourier	30
3.5	Explication du phénomène	32
3.5.1	Contexte	32
3.5.2	Analyse Mathématique	32
4	Application des série de Fourier	36
4.1	La corde pincée (la guitare)	36
4.2	La corde frappée (le piano)	43
5	Equation de la chaleur	45
5.1	Calcul de la série de Fourier	45
5.2	Implémentation de la propagation de la chaleur	49
5.3	Cas de la barre radioactive	51

Table des figures

1.1	Courbe de la fonction $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$.	9
1.2	Dix premières approximations de $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$.	10
1.3	Richesse du signal $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$.	10
1.4	Courbe de la fonction impaire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.	11
1.5	Dix premières approximations de la fonction impaire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.	12
1.6	Richesse du signal de la fonction impaire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.	12
1.7	Courbe de la fonction paire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.	13
1.8	Courbe de la fonction paire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.	14
1.9	Richesse du signal de la fonction paire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.	14
1.10	Courbe de la fonction $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$.	15
1.11	Dix premières approximations de la fonction $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$.	16
1.12	Richesse du signal $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$.	16
1.13	Courbe de la fonction $f(x) = x(\pi + x), x \in [-\pi, \pi]$.	17
1.14	Dix premières approximations de la fonction $f(x) = x(\pi + x), x \in [-\pi, \pi]$.	18
1.15	Richesse du signal $f(x) = x(\pi + x), x \in [-\pi, \pi]$.	18
2.1	Courbe de la fonction $f(x) = (\sin x)^{1/3}$.	19
2.2	Courbe de la fonction $f(x) = (\sin x)^{4/3}$.	20
21		
22		
23		
3.1	Courbe de la fonction f pour $n = 2$.	30
3.2	Courbe de la fonction f pour $n = 5$.	30
3.3	Courbe de la fonction f pour $n = 10$.	31
3.4	Courbe de la fonction f pour $n = 20$.	31
3.5	Courbe de la fonction f pour $n = 60$.	32
4.1	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°1	39
4.2	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°2	39
4.3	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°3	39

4.4	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°1	44
4.5	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°2	44
4.6	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°3	44
4.7	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°4	44
4.8	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°5	44
5.1	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0$	50
5.2	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0.05$	50
5.3	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0.5$	50
5.4	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 1$	50
5.5	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 2$	51
5.6	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0$	54
5.7	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0.5$	54
5.8	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 1$	54
5.9	Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 4$	54

Chapitre 1

Série de Fourier

1.1 Historique

1.1.1 Biographie

Jean-Baptiste Fourier (qu'on connaît aussi sous le nom de Joseph Fourier) est né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris.

En 1794, il est de la première promotion de l'École Normale Supérieure, où ses professeurs ont pour nom Lagrange, Laplace et Monge. Élève le plus brillant, il profite de cet excellent entourage pour s'investir beaucoup dans la recherche mathématique. En 1797, il remplace Lagrange à la chaire d'analyse et de mécanique de l'École Polytechnique, bien qu'il n'ait pas encore à son actif de découverte majeure.

En 1798, il rejoint les expéditions napoléoniennes en Égypte, où de nombreux chercheurs français mènent d'ambitieuses recherches. Quand Fourier regagne la France en 1801, Napoléon n'a pas oublié ses excellents états de service, et le nomme préfet de l'Isère. Il fut un excellent préfet, qui mena à bien plusieurs projets d'importance, dont la construction d'une route menant de Lyon à Turin.

C'est à Grenoble que Fourier réalise l'essentiel de ses travaux les plus importants. Son obsession est le problème de la chaleur, c'est-à-dire l'étude de l'évolution de la température d'un corps au cours du temps. De 1802 à 1807, il trouve l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides, puis trouve une méthode pour la résoudre, ce qui est maintenant l'analyse de Fourier.

En 1812 Fourier est primé par l'Institut pour son mémoire

En 1817, il est élu à l'Académie des sciences réhabilitée.

En 1822, il devient secrétaire de la section mathématique. A ce poste, il aidera beaucoup de jeunes mathématiciens prometteurs, dont Dirichlet, Sturm ou Ostrogradsky.

1.1.2 Vulgarisation

L'analyse de Fourier consiste en l'étude des vibrations élémentaires des signaux. Supposons que l'on souhaite analyser un signal quelconque, une quantité qui varie à mesure que le temps passe : par exemple, le son est fait de légères variations de pression atmosphérique. Au lieu de s'intéresser directement aux variations complexes de ce signal, Joseph Fourier eut l'idée de le décomposer en une combinaison de signaux élémentaires, dont chacun varie de manière très simple et répétitive : les sinusoïdes (et leurs frères jumeaux, les cosinusoïdes). Chaque sinusoïde est caractérisée par l'amplitude et la fréquence de ses variations. Dans la décomposition de Fourier, les amplitudes nous renseignent sur l'importance relative des fréquences correspondantes dans le signal étudié.

Ainsi les sons qui nous entourent sont faits de la superposition d'une multitude de fréquences. La vibration à 440 battements par seconde est un *la*, qui sera perçu avec d'autant plus de puissance que son amplitude est forte. À 880 battements par seconde, on entendra un *la* de l'octave au-dessus. Si l'on multiplie la fréquence par 3, on passera à la quinte, c'est-à-dire au mi, et ainsi de suite. Mais en pratique les sons ne sont jamais purs, ils sont toujours faits de la concomitance de très nombreuses fréquences qui en déterminent le timbre.

Et l'analyse de Fourier sert à tout : à analyser les sons et à les graver sur un CD, mais aussi à analyser les images et à les transmettre par Internet, ou à analyser les variations du niveau de la mer et à prédire les marées... Son "grand poème mathématique" (comme disait Lord Kelvin), enseigné dans tous les pays du monde, est utilisé chaque jour par des milliards d'humains qui ne s'en rendent même pas compte.



Joseph Fourier

*

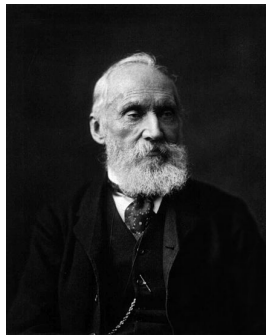
William Thomson, mieux connu sous le nom de lord Kelvin, (Belfast, 26 juin 1824 - Largs, 17 décembre 1907), est un physicien britannique d'origine irlandaise reconnu pour ses travaux en thermodynamique.

Une des innovations de Kelvin est l'introduction d'un « zéro absolu » correspondant à l'absence absolue d'agitation thermique et de pression d'un gaz. Il a laissé son nom à l'échelle de température, dite «thermodynamique», mesurée en kelvins.

Ses mémoires contribueront beaucoup à l'épuration de la théorie des vortex, dont sortira, comme un joyau, l'analyse vectorielle de Gibbs (1839-1903) : les vecteurs sont si familiers de nos jours que cela est un peu occulté. Atomiste, il eut une vision originale de la théorie des atomes à base de nœuds, vortex et quaternions, théorie remarquable, mais sans issue. Il a aussi construit un des premiers calculateurs analogiques, un prédicteur de marées mécanique appliquant les principes de l'analyse harmonique. Il est également l'inventeur d'un mécanisme simple et bon marché de production d'électricité statique par influence, nommé le Replenisher

Il a été distingué pour être titulaire des décorations ou prix scientifiques, ou membre des conseils ou sociétés savantes qui suivent :

- titulaire de l'ordre du Mérite (Royaume-Uni), de l'ordre royal de Victoria,*
- membre du Conseil privé du Royaume-Uni,*
- membre de la Royal Society, qu'il préside de 1890 à 1895,*
- lauréat de la Royal Medal en 1856, de la médaille Copley en 1883,*
- membre de la Royal Society of Edinburgh (FRSE).*



Lord Kelvin

*

1.2 Étude de fonctions

1. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 1.273240$	$b(6) = -0.000000$
$b(2) = 0.000000$	$b(7) = 0.181891$
$b(3) = 0.424413$	$b(8) = 0.000000$
$b(4) = 0.000000$	$b(9) = 0.141471$
$b(5) = 0.254648$	$b(10) = 0.000000$

(b) Série de Fourier

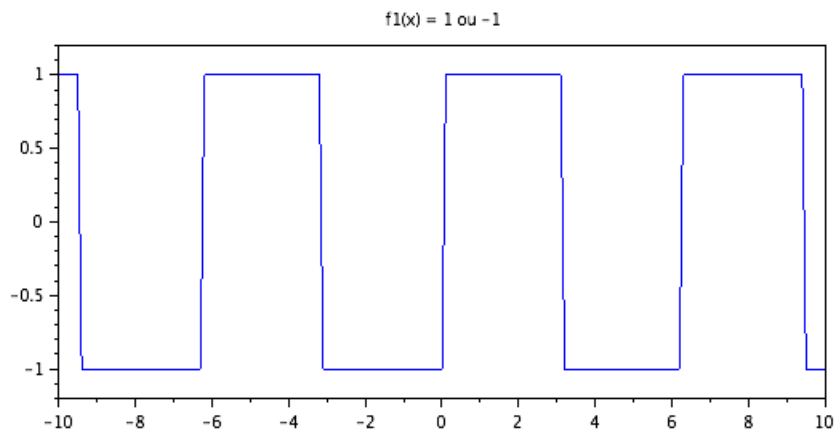


FIGURE 1.1 – Courbe de la fonction $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$.

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

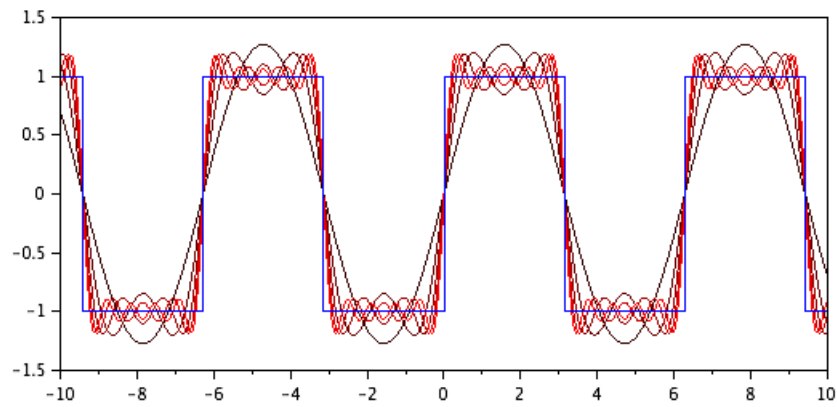


FIGURE 1.2 – Dix premières approximations de $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$.

(d) Richesse fréquentielle du signal

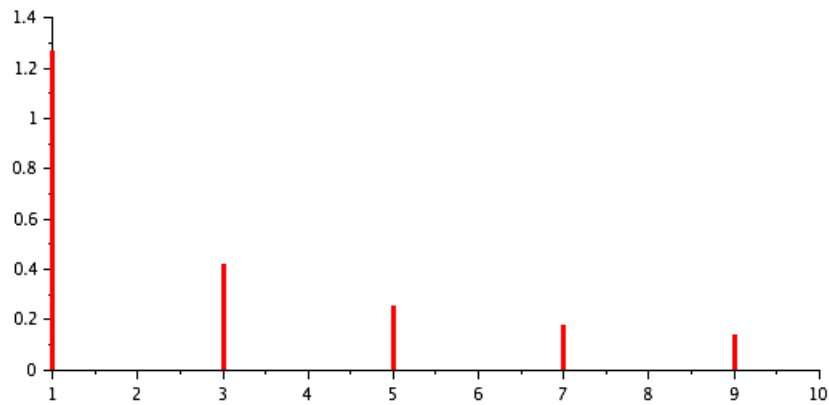


FIGURE 1.3 – Richesse du signal $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$.

On remarque ici que la série de fourier converge lentement vers la fonction $f(x)$. En effet les dix premières approximations restent moyennes. De plus on voit l'apparition d'un phénomène aux bornes de la fonction : Le phénomène de Gibbs. Il se représente par des « bosses » au niveau des bornes.

2. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = x, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 2.000000$	$b(6) = -0.333333$
$b(2) = -1.000000$	$b(7) = 0.285714$
$b(3) = 0.666667$	$b(8) = -0.250000$
$b(4) = -0.500000$	$b(9) = 0.222222$
$b(5) = 0.400000$	$b(10) = -0.200000$

(b) Série de Fourier

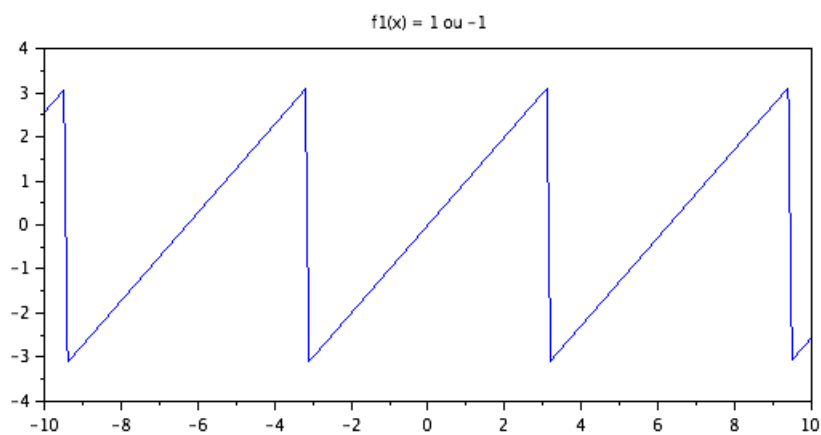


FIGURE 1.4 – Courbe de la fonction impaire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

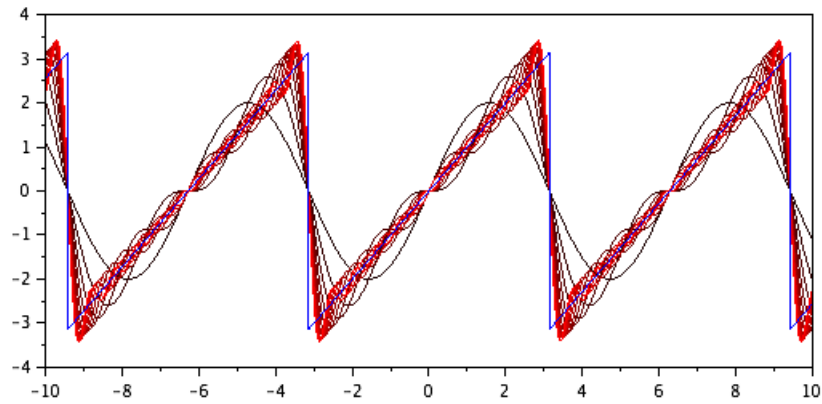


FIGURE 1.5 – Dix premières approximations de la fonction impaire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.

(d) Richesse fréquentielle du signal

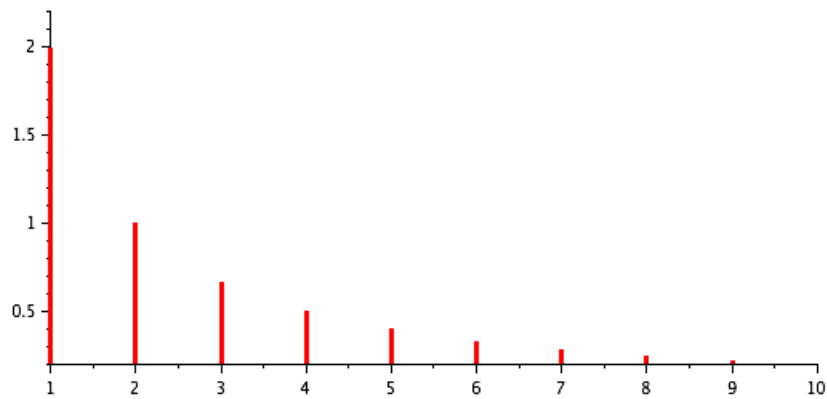


FIGURE 1.6 – Richesse du signal de la fonction impaire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.

Pour cette fonction la série de fourier converge lentement vers la fonction $f(x)$. En effet les dix premières approximations restent médiocres. De plus on voit l'apparition du phénomène de gibbs aux bornes

3. f est 2π périodique, paire et vaut $f(x) = x, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $b(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $a(i)$:

$a(1) = 1.273240$	$a(6) = -0.000000$
$a(2) = 0.000000$	$a(7) = 0.025984$
$a(3) = 0.141471$	$a(8) = 0.000000$
$a(4) = 0.000000$	$a(9) = 0.015719$
$a(5) = 0.050930$	$a(10) = 0.000000$
avec $a(0) = 3.141593$	

(b) Série de Fourier

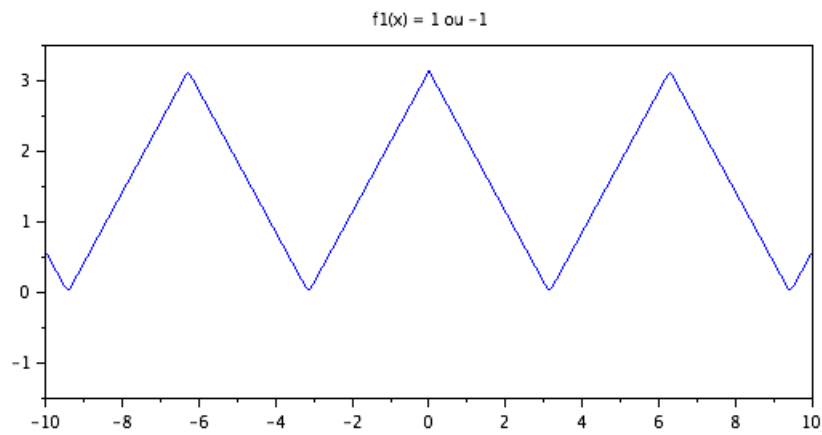


FIGURE 1.7 – Courbe de la fonction paire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

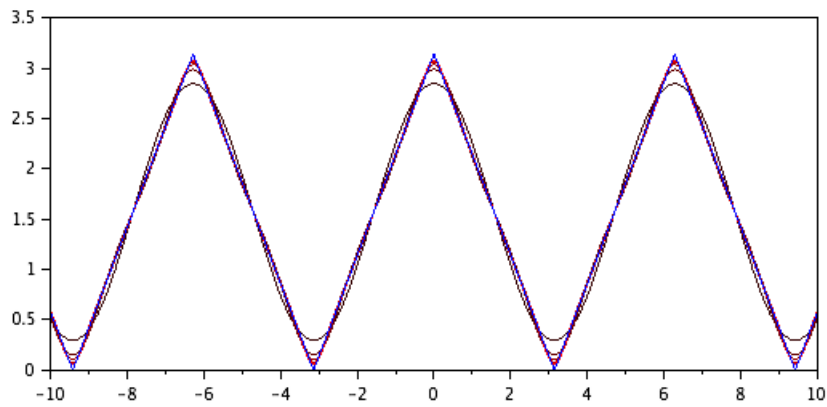


FIGURE 1.8 – Courbe de la fonction paire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.

(d) Richesse fréquentielle du signal

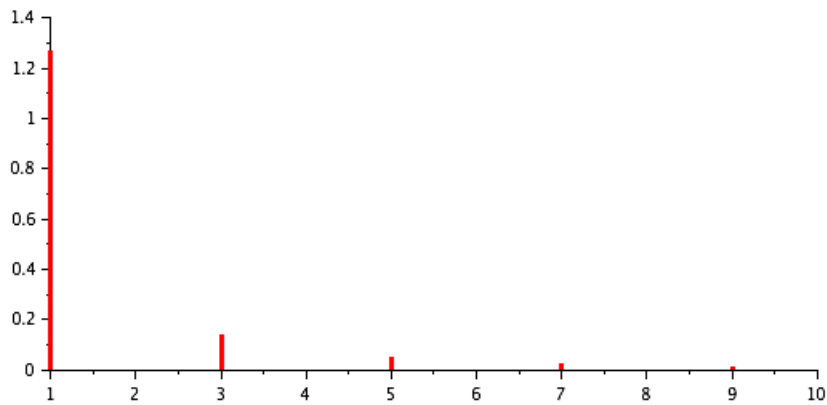


FIGURE 1.9 – Richesse du signal de la fonction paire $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.

Les approximations de la fonction ci dessus sont bonnes ainsi que la convergence. En effet, nous n'avons pas pas de phénomènes de gibus du à l'absence de saut dans la fonction.

4. f est 2π périodique, paire et vaut $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $b(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $a(i)$:

$a(1) = -4.000000$	$a(6) = 0.111111$
$a(2) = 1.000000$	$a(7) = -0.081633$
$a(3) = -0.444444$	$a(8) = 0.062500$
$a(4) = 0.250000$	$a(9) = -0.049383$
$a(5) = -0.160000$	$a(10) = 0.040000$
avec $a(0) = 6.579736$	

(b) Série de Fourier

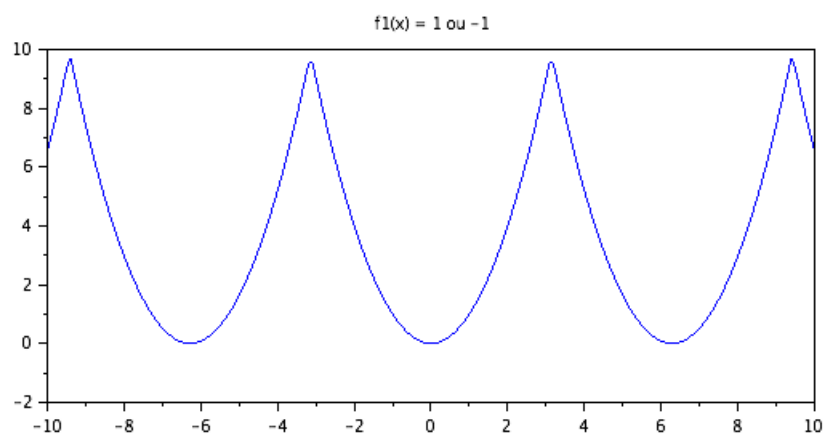


FIGURE 1.10 – Courbe de la fonction $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$.

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

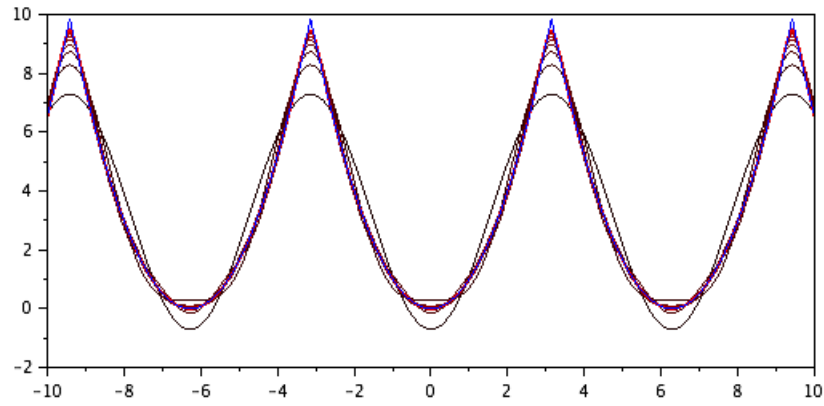


FIGURE 1.11 – Dix premières approximations de la fonction $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$.

(d) Richesse fréquentielle du signal

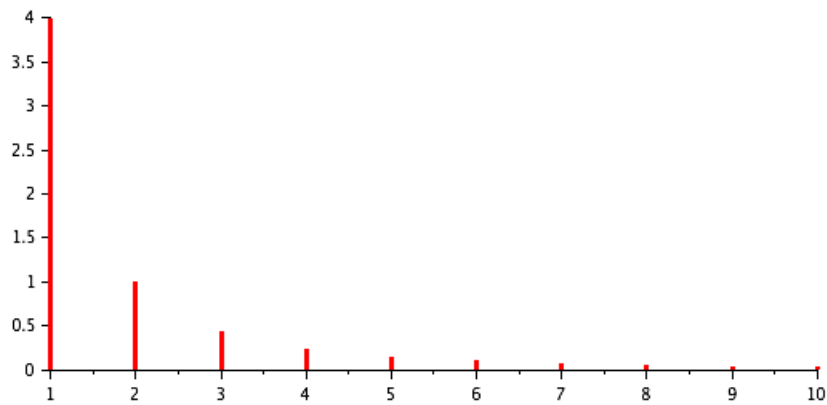


FIGURE 1.12 – Richesse du signal $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$.

Les approximations de la fonction ci dessus sont bonnes ainsi que la convergence. En effet, nous n'avons pas pas de phénomènes de gibus du à l'absence de saut dans la fonction.

5. f est 2π périodique, impaire et vaut $f(x) = x(\pi + |x|), x \in [-\pi, \pi]$

(a) Coefficients de Fourier

Les $a(i)$ étant nuls. On obtient ainsi les coefficients suivants pour les $b(i)$:

$b(1) = 2.546479$	$b(6) = 0.000000$
$b(2) = 0.000000$	$b(7) = 0.007424$
$b(3) = 0.094314$	$b(8) = -0.000000$
$b(4) = -0.000000$	$b(9) = 0.003493$
$b(5) = 0.020372$	$b(10) = -0.000000$

(b) Série de Fourier

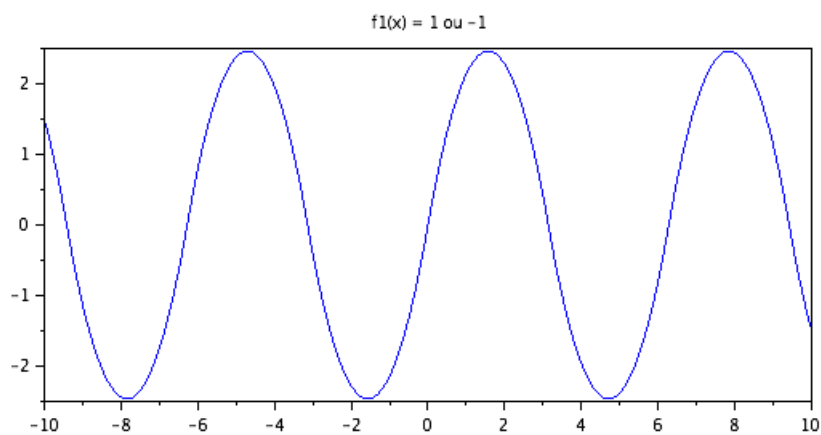


FIGURE 1.13 – Courbe de la fonction $f(x) = x(\pi + |x|), x \in [-\pi, \pi]$.

(c) Graphe original et ses dix premières approximations

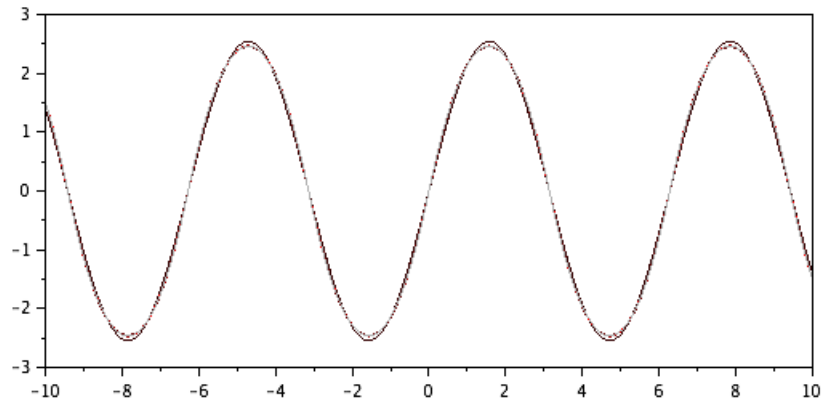


FIGURE 1.14 – Dix premières approximations de la fonction $f(x) = x(\pi + |x|)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

(d) Richesse fréquentielle du signal

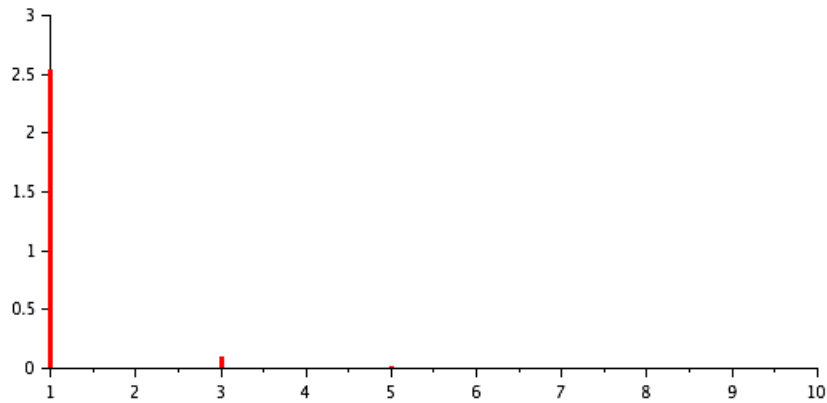


FIGURE 1.15 – Richesse du signal $f(x) = x(\pi + |x|)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Nous avons pour cette dernière fonction, dix approximations parfaites. Ceci est dû à la régularité de la fonction.

Chapitre 2

Étude de fonctions

1.

$$f(x) = (\sin x)^{1/3}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle est composée d'une fonction sinus, ce qui la rend impaire. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt[3]{0} = 0$. Elle est donc continue. Sa dérivée est

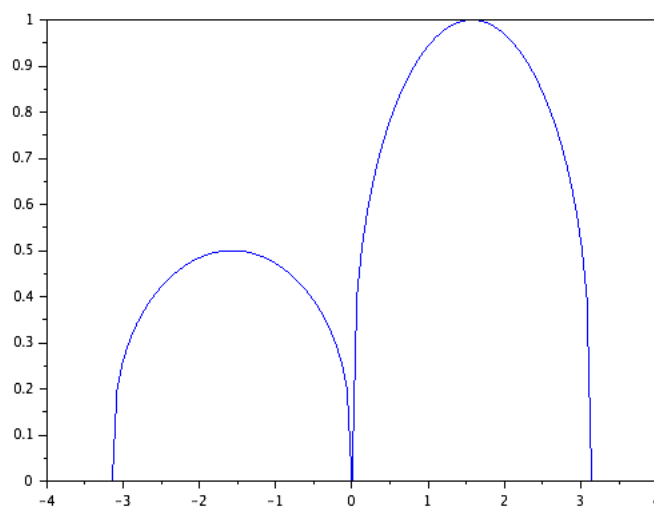


FIGURE 2.1 – Courbe de la fonction $f(x) = (\sin x)^{1/3}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cos x (\sin x)^{-2/3}$$

Elle admet une asymptote verticale en 0 et n'est donc pas continue. La fonction f est continue mais non dérivable sur $(-\pi; \pi)$.

2.

$$f(x) = (\sin x)^{4/3}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt[3]{0} = 0$. Elle est donc continue.

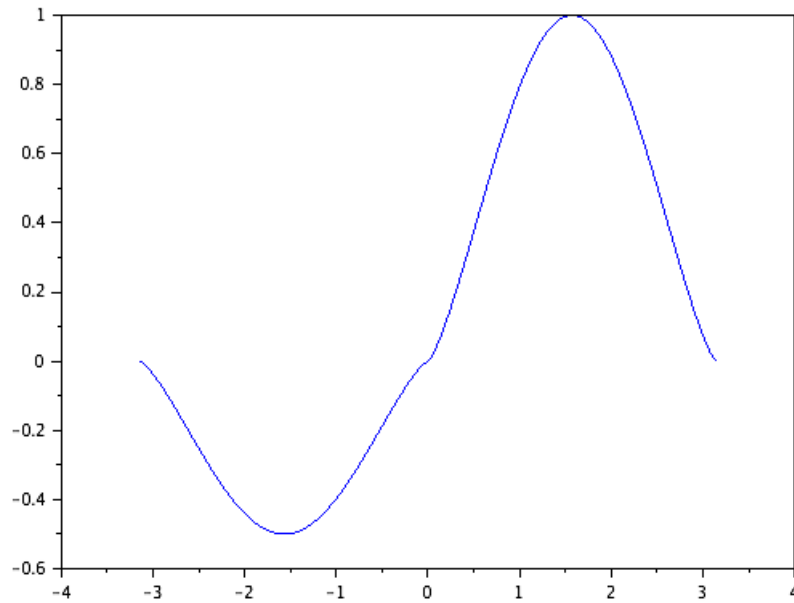


FIGURE 2.2 – Courbe de la fonction $f(x) = (\sin x)^{4/3}$.

Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{4}{3} \cos x (\sin x)^{1/3}$$

Elle n'admet pas d'asymptote et est donc continue. La fonction f est continue et dérivable, donc régulière.

3.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , si \quad x > 0 \\ -\cos x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = 1$ et $f(0^-) = -1$. Elle n'est donc pas continue en 0.

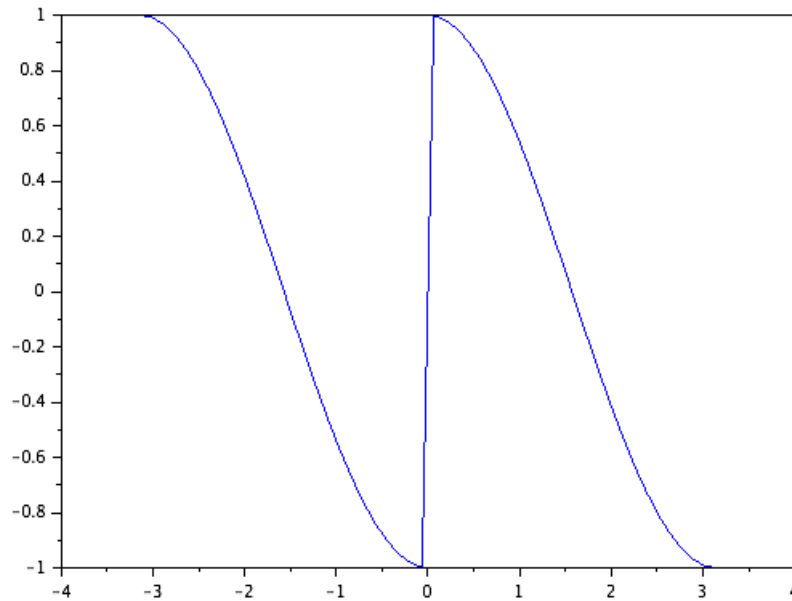


FIGURE 2.3 – Courbe de la fonction $f(x) = \begin{cases} \cos x & , si \quad x > 0 \\ -\cos x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$.

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & , si \quad x > 0 \\ \sin x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

4.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , si \quad x > 0 \\ -\sin 2x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = 0$. Elle est donc continue.

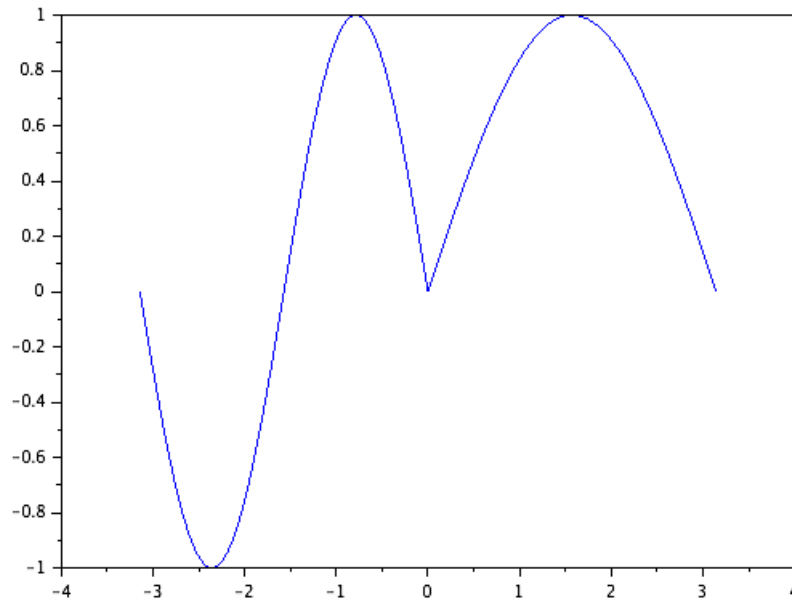


FIGURE 2.4 – Courbe de la fonction $f(x) = \begin{cases} \sin x & , si \quad x > 0 \\ -\sin 2x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$.

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & , si \quad x > 0 \\ -2\cos 2x & , si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

5.

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{1/5}, & \text{si } x < \pi/2 \\ -\cos x, & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi; \pi)$. Elle n'admet aucune valeur interdite et on a $f(0^+) = f(0^-) = \sqrt[5]{0} = 0$ et $f(\pi/2) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} f(x) = 1$. Elle est continue en 0 mais pas en $\pi/2$, elle est donc continue par morceaux.

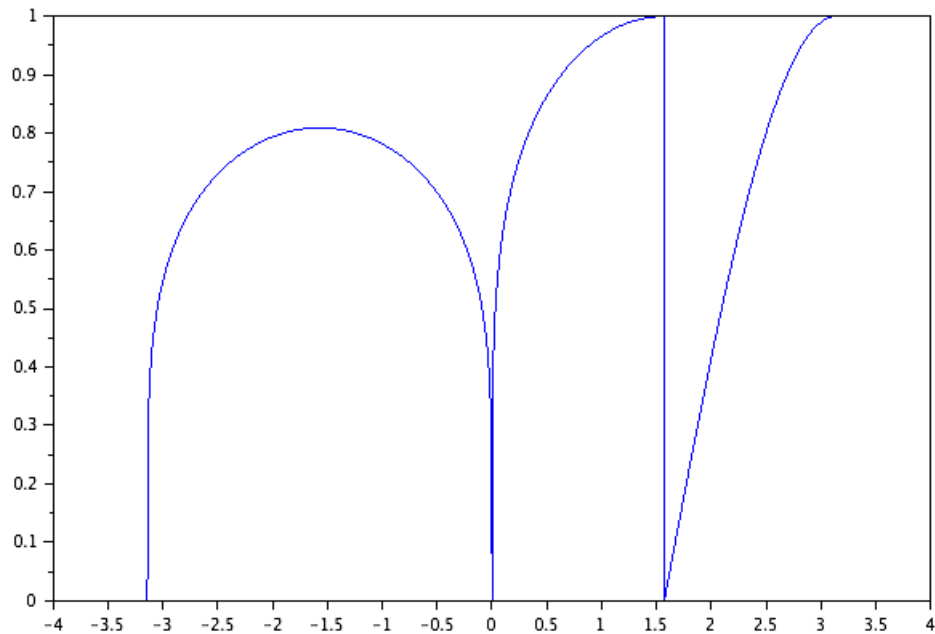


FIGURE 2.5 – Courbe de la fonction $f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{1/5}, & \text{si } x < \pi/2 \\ -\cos x, & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$.

Elle est dérivable par morceaux et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} \cos x (\sin x)^{1/5}, & \text{si } x < \pi/2 \\ \sin x, & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux et dérivable par morceaux, donc régulière par morceaux.

Chapitre 3

Phénomène de Gibbs

3.1 Historique

Lors de l'étude des séries de Fourier et des transformées de Fourier, il apparaît parfois une déformation du signal, connue sous le nom de phénomène de Gibbs. Ce phénomène est un effet de bord qui se produit à proximité d'une discontinuité, lors de l'analyse d'une fonction dérivable par morceaux. Le phénomène fut mis pour la première fois en évidence en 1848 par Henry Wilbraham, mais cette découverte ne connut guère d'écho.

En 1898, Albert Michelson développa un système mécanique capable de calculer et sommer la série de Fourier d'un signal donné en entrée. Il observa alors un effet d'amplification des discontinuités, qui persistait malgré l'augmentation du nombre de coefficients calculés.

Alors que Michelson soupçonnait un défaut dans la fabrication de son engin, Josiah Willard Gibbs montra que le phénomène était d'origine mathématique et se produisait dans des conditions très générales. En 1906, Maxime Bôcher donna la première interprétation satisfaisante du phénomène auquel il donna le nom de phénomène de Gibbs.

Le phénomène de Gibbs est, en quelque sorte, un « défaut d'approximation » pour une fonction continue de classe C^1 par morceaux.

3.2 Biographies

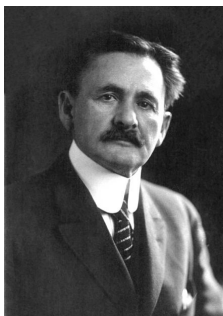
3.2.1 Henry Wilbraham

Henry Wilbraham (25 Juillet 1825 - 13 Février 1883) était un Mathématicien anglais. Enfant de bonne famille, il étudia à Harrow School avant d'être admis au Trinity College à Cambridge à l'âge de 16 ans. Il reçut son master en 1846 et son doctorat en 1849. Ainsi à 22 ans il publia son premier papier sur le phénomène de Gibbs. Il est connu pour avoir découvert et expliqué le phénomène de Gibbs environ 50 ans avant J. Willard Gibbs. Cependant Gibbs et Maxime Bôcher comme beaucoup d'autres personnes n'étaient pas au courant des travaux de Wilbraham sur le phénomène de Gibbs.

Il n'existe aucune photo à ce jour de Mr Henry Wilbraham.

3.2.2 Albert Michelson

Albert Abraham Michelson (19 Décembre 1852 - 9 Mai 1931) était un physicien américain connu pour ses travaux sur les mesures de la vitesse de la lumière. Il fut le premier américain à recevoir un prix nobel en science (physique) en 1907. En 1898, Albert Michelson développa un système mécanique capable de calculer et sommer la série de Fourier d'un signal donné en entrée. Il observa alors un effet d'amplification des discontinuités, qui persistait malgré l'augmentation du nombre de coefficients calculés. Ce fut la première visualisation du phénomène de Gibbs.



Albert Michelson

3.2.3 Josiah Willard Gibbs

Physicien américain (New Haven, Connecticut, 1839-New Haven, Connecticut, 1903). Dans un ouvrage fondamental, l'Équilibre des substances hétérogènes (1876-1878), Gibbs étendit la thermodynamique à la chimie et fonda la physico-chimie. Il améliora sur plusieurs points les travaux des créateurs de la mécanique statistique, Maxwell et surtout Boltzmann ; il confirma la réalité des processus microscopiques qu'impliquait cette science nouvelle. En mathématique pure, il est aussi un des fondateurs (avec Oliver Heaviside) de l'analyse vectorielle.

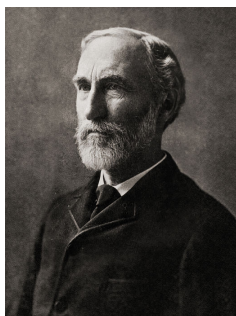
Gibbs descend d'une longue lignée d'universitaires américains depuis le xvii^e siècle. Du côté paternel, il est descendant de Samuel Willard, président de l'Université Harvard de 1701 à 1707. Un de ses ancêtres est le Rév. Jonathan Dickinson, premier président du Collège de New Jersey (devenu l'Université de Princeton en 1896). Son prénom Josiah dérive de son ancêtre Josiah Willard, secrétaire de la Province de la baie du Massachusetts au XVII^e siècle.

Gibbs étudie à l'Université Yale et gradue en 1858 gagnant des prix d'excellence en mathématiques et en Latin. Il continue des études supérieures toujours à Yale, et en 1863 il devient le premier étudiant américain à obtenir un doctorat en ingénierie, avec une thèse sur la conception optimale des engrenages. Après son doctorat, Gibbs devient tuteur à Yale pour trois années, enseignant le latin pendant deux années et la physique (dite philosophie naturelle à l'époque) pendant la troisième année.

Il étudie ensuite pendant trois années à Paris, Berlin et Heidelberg de 1866 à 1869. À l'Université de Heidelberg, il apprend les travaux scientifiques de Gustav Kirchhoff et Hermann von Helmholtz, y compris leur recherches dans la thermodynamique. Après son retour de l'Europe en 1871, il est nommé professeur de physique mathématique à Yale, premier professeur dans cette matière aux États-Unis. Il passe le reste de sa carrière à Yale.

En mathématique de 1880 à 1884 et parallèlement à Oliver Heaviside, il développe l'analyse vectorielle en séparant la partie réelle et la partie vectorielle du produit de deux quaternions purs, ceci dans le seul but d'une utilisation en physique. Au cours de ce travail, Gibbs introduit la notion de tenseur dyadique ainsi que les notations du produit scalaire et du produit vectoriel de deux vecteurs qui sont encore employées. Gibbs écrit un premier ouvrage sur l'analyse vectorielle à l'usage de ses étudiants et, devant le succès obtenu, étaye le sujet dans une série de cours qui seront rassemblés et publiés en 1901 par son élève Edwin Bidwell Wilson.

Gibbs applique ses méthodes vectorielles aussi à la détermination des orbites des planètes et des comètes. Il propose en plus la notion des triades mutuellement réciproques des vecteurs, notion d'une grande importance éventuelle dans la cristallographie. Dans un autre domaine mathématique, il redécouvre le phénomène de Gibbs dans la théorie des séries de Fourier.



Josiah Willard Gibbs

3.2.4 Maxime Bôcher

Maxime Bôcher (28 août 1867 – 12 septembre 1918) est un mathématicien américain, auteur de plus de 100 articles sur les équations différentielles, les séries et l'algèbre. Il est également l'auteur de manuels comme sa Trigonométrie et sa Géométrie analytique. Le théorème de Bôcher, l'équation de Bôcher et le Bôcher Memorial Prize rappellent son œuvre.

Bôcher est né à Boston (Massachusetts) de Caroline Little et d'un professeur de langues vivantes au Massachusetts Institute of Technology, Ferdinand Bôcher (1832–1902), qui obtint le poste de professeur de français à Harvard en 1872. Son grand-père Ferdinand-Jules Bôcher était un homme d'affaires de Caen.

Bôcher reçut une excellente éducation de ses parents. Diplômé de la Cambridge Rindge and Latin School au Massachusetts (1883), il obtint son premier diplôme de l'université Harvard en 1888. Dans cette dernière université, il suivit les cours les plus variés, depuis les mathématiques au latin, en passant par la chimie, la philosophie, la zoologie, la géographie, la géologie, la météorologie, l'art roman et la musique.

Bôcher obtint de nombreuses bourses, qui lui permirent de poursuivre ses études en Europe. Göttingen était alors le haut-lieu des mathématiques, et Bôcher put y suivre les conférences de Felix Klein, Schönflies, Schwarz, Schur et Voigt. Il soutint sa thèse de doctorat en 1891 Sur les développements en série appliqués à la théorie du potentiel, sujet qui lui avait été proposé par Klein. Ce travail fut primé par l'université allemande.

Il repartit aux États-Unis avec sa famille et fut recruté comme maître de conférences par l'université Harvard. En 1894, grâce à sa production académique, il était promu professeur-assistant, et devint professeur titulaire de mathématiques en 1904. Il fut élu président de l'American Mathematical Society de 1908 à 1910.

Le théorème de Bôcher énonce que les racines simples de la dérivée $r'(z)$ d'une fonction rationnelle non-constante $r(z)$, qui ne sont pas des racines multiples de $r(z)$, sont les positions d'équilibre dans le potentiel newtonien créé par des particules de masse positive, situées aux zéros de $r(z)$ et des particules de masse négative, placées aux pôles de $r(z)$, de masses numériquement égales à leurs multiplicités respectives.



Maxime Bôcher

3.2.5 Oliver Heaviside

Oliver Heaviside (18 mai 1850 - 3 février 1925) est un physicien britannique autodidacte. Il a formulé à nouveau et simplifié les équations de Maxwell sous leur forme actuelle utilisée en calcul vectoriel.

Bien qu'il eût de bons résultats scolaires, il quitta l'école à l'âge de seize ans et devint opérateur de télégraphe. Cependant il a continué à étudier et, en 1872, alors qu'il travaillait comme chef opérateur à Newcastle-upon-Tyne, il commença à publier ses résultats de recherche en électricité.

Entre 1880 et 1887, il développa le calcul opérationnel, une méthode pour résoudre des équations différentielles en les transformant en des équations algébriques ordinaires ce qui lui valut beaucoup de critiques lorsqu'il l'introduisit pour la première fois, du fait d'un manque de rigueur dans l'utilisation de la dérivation.

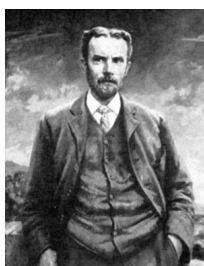
En 1887, il suggéra que des bobines d'induction devraient être ajoutées au câble du téléphone transatlantique afin de corriger la distorsion dont il souffrait. Pour des raisons politiques, cela n'a pas été fait.

En 1902, il prédit l'existence de couches conductrices pour les ondes radio qui leur permettent de suivre la courbure de la Terre. Ces couches, situées dans l'ionosphère, sont appelées couches de Kennelly-Heaviside, du nom de Arthur Kennelly, physicien américain qui eut la même intuition que lui. Elles ont finalement été détectées en 1925 par Edward Appleton.

Il a développé aussi la fonction de Heaviside (aussi appelée échelon ou marche), utilisée communément dans l'étude de systèmes en automatique et il a étudié la propagation des courants électriques dans les conducteurs (théorie des lignes de transmission et équations des télégraphistes).

Des années plus tard son comportement devint très excentrique.

En 1922, il fut le premier récipiendaire de la médaille Faraday. Le Prix Michael Faraday est un prix remis par la Royal Society of London pour « l'excellence dans la vulgarisation scientifique auprès du public britannique ».



Oliver Heaviside

3.3 Démonstration

Soit f la fonction 2π -périodique et impaire telle que $f(x) = 1$ sur $[0; \pi]$.

Nous allons montrer que

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)}{2k-1}$$

Nous savons que $S_{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx$, car f est impaire.

Or,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} S_{f(x)} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} \sin nx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ pair}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx + \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad , \text{ où } n = 2k-1, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.4 Approximations de Fourier

1. Approximation pour $n = 2$

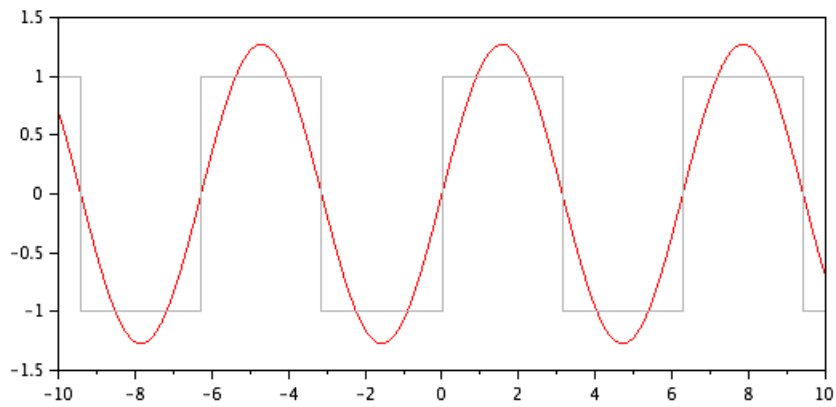


FIGURE 3.1 – Courbe de la fonction f pour $n = 2$.

2. Approximation pour $n = 5$

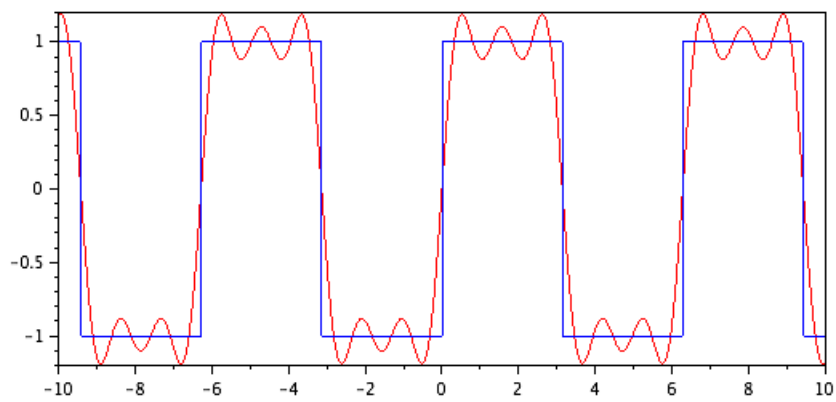


FIGURE 3.2 – Courbe de la fonction f pour $n = 5$.

3. Approximation pour $n = 10$

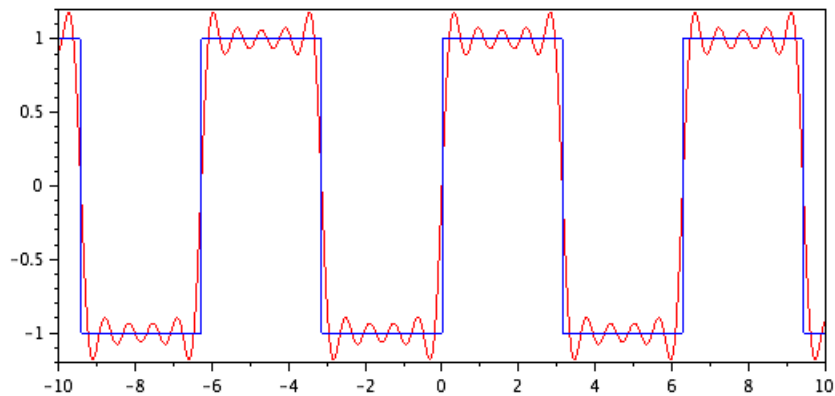


FIGURE 3.3 – Courbe de la fonction f pour $n = 10$.

4. Approximation pour $n = 20$

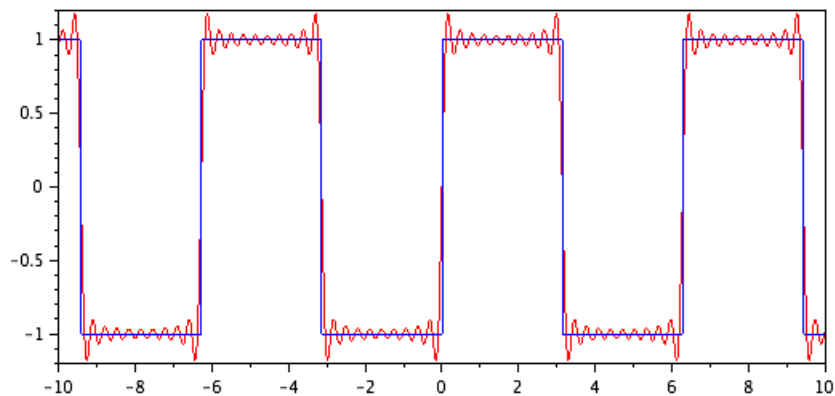


FIGURE 3.4 – Courbe de la fonction f pour $n = 20$.

5. Approximation pour $n = 60$

On remarque donc qu'au voisinage d'une discontinuité une bosse apparaît. Or quand n augmente cette dernière subsiste de part et d'autre d'une discontinuité. Plaçons nous alors à droite du point de discontinuité 0 par exemple. On note que lorsque n augmente, le point en lequel il y a un pic s'approche de 0, mais la hauteur reste constante. Nous allons essayer d'expliquer ce phénomène dans la partie suivante.

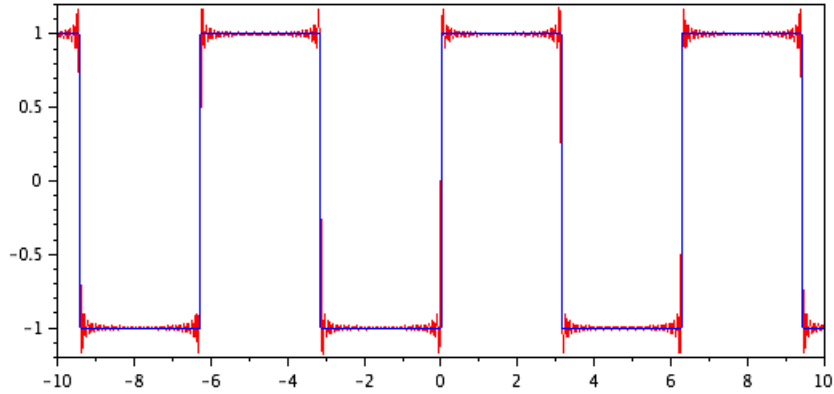


FIGURE 3.5 – Courbe de la fonction f pour $n = 60$.

3.5 Explication du phénomène

3.5.1 Contexte

Soit f la fonction 2π -périodique et impaire telle que $f(x) = 1$ sur $[0; \pi]$.

On note que la fonction présente une discontinuité en tout point multiple de π . La limite à droite et la limite à gauche en ces points vaut $+1$ et -1 . De plus en dehors de ces points la fonction est continue. Nous avons donc une fonction continue par morceaux et sa dérivée l'est également. Ainsi on peut dire que f est C^1 par morceaux

3.5.2 Analyse Mathématique

Application du Théorème de Dirichlet

Comme f est impaire on a donc :

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad , \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Pour une fonction C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet nous indique quel est la limite de ces sommes partielles. Si l'on considère un point de continuité de la fonction, ces sommes partielles vont converger vers $f(x)$. Ainsi au point de discontinuité ($x = 0$), la limite de ces sommes partielles va être la demi-somme entre la limite à droite et la limite à gauche de la valeur de la fonction au point considéré. Ici, la demi-somme vaut 0 :

$$S_{f(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}[+1 + (-1)] = 0$$

En particulier, sur un tel point la limite ne vaut pas la valeur du signal $f(0) = 1$, alors que la demi-somme vaut 0

On s'intéresse par la suite au comportement au voisinage du point de discontinuité.

Comportement au voisinage d'un point de discontinuité

Étudions la somme partielle $S_p(x)$:

Calculons sa dérivée afin d'établir son tableaux de variations.

Comme $\frac{d}{dt} \sin((2k-1)x) = (2k-1)\cos((2k-1)x)$ on déduit que

$$\frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos((2k-1)x)$$

Ensuite on pose :

$$\cos((2k-1)x) = \operatorname{Re}[e^{i(2k-1)x}] \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On déduit l'expression suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2kx)}{\sin(x)} & , \text{ pour } t \neq 0 \\ \frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{4}{\pi} & , \text{ par calcul direct} \end{cases}$$

Par intégration on doit obtenir une expression explicite de $S_p(x)$. Or comme somme de sinus elle s'annule en $x = 0$ on prend donc cette primitive qui s'annule en 0 :

$$S_p(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2pu)}{\sin(u)} du$$

Afin d'étudier la fonction $S_p(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2pu)}{\sin(u)} du$ on dresse son tableau de variation.

Cherchons les valeurs qui annulent cette dérivé.

Soit $x \in [0, \pi]$ tels que $S'_p(x) = \frac{d}{dt} S_p(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2px)}{\sin(x)} = 0$. On obtient les zéros de la dérivé suivants :

$$\sin(2px) = 0 \iff 2px = 0[\pi]$$

Donc pour $x \in]0, \pi[$

$$S'_p(x) = 0 \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{2p}, \frac{2\pi}{2p}, \dots, \frac{(2p-1)\pi}{2p} \right\}$$

D'où la racine la plus proche à droite de $x = 0$ est $x_1 = \frac{\pi}{2p}$. On va par la suite étudier les variations de $S_p(x)$ au voisinage de ce point :

x	0	$\frac{\pi}{2p}$	$\frac{2\pi}{2p}$
$S'_p(x)$		+	-
$S_p(x)$	0	$m_{1,p}$	$m_{2,p}$

Ce qui correspond à la courbe 3.2

Valeur et amplitude de la bosse de Gibbs

Valeur du maximal local :

$$m_{1,p} = S_p\left(\frac{\pi}{2p}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \frac{\sin(2pu)}{\sin(u)} du$$

On effectue le changement de variable suivant : $v = 2pu$, ce qui donne :

$$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(v)}{\sin\left(\frac{v}{2p}\right)} \frac{dv}{2p}$$

Après transformation on obtient :

$$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{v}{2p}\right)}{\frac{v}{2p}}} dv$$

Par ailleurs on sait que :

$$\begin{cases} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{v}{2p} \rightarrow 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} = 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

On cherche donc la limite suivante :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}} dv$$

On fait rentrer la limite à l'intérieur de l'intégrale car f est C^1 :

$$\frac{2}{\pi} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}} dv = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}} \right] dv$$

D'après le point (3.1) on a le résultat suivant :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin v}{v} \frac{1}{\frac{\sin(\frac{v}{2p})}{\frac{v}{2p}}} \right] dv = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} dv$$

Conclusion

A partir de ce point nous pouvons calculer numériquement le résultat suivant :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} dv = 1.18 = 1 + 0.18$$

La bosse dépasse donc toujours la valeur 1 de la fonction au voisinage de 0 d'une quantité incompressible 0.18. L'amplitude de la bosse est donc toujours supérieur à 0.18 pour notre fonction.

La généralisation de notre fonction (non abordé ici) montre que la bosse de Gibbs a une hauteur proportionnelle à une amplitude du saut de discontinuité. Ce coefficient de proportionnalité universel est appelé coefficient de Wilbraham Gibbs est vaut 9% du saut.

Chapitre 4

Application des série de Fourier

4.1 La corde pincée (la guitare)

1. Procédure Scilab

```
1  _L = 0.65 //Donnees en m
   _A = 0.15
   _H = 0.01
   _MLIN = 4 // masse lineique en kg/m
   _TENSION = 11 //Correspond a la 6e corde
6
   _H = 0.01
   _A = 0.10
   _L = 0.32
   _MLIN = 1
11  _TENSION = 417.28

   x = 0:0.001:_L
   t = 0:5*1D-5:0.01

16  c = abs(_TENSION/_MLIN)

   function [y] = F(x)
       x = pmodulo(x, _L)
       y = zeros(x)
21   for i=1:length(x)
       if x(i) <= _A then
           y(i) = _H * (x(i)/_A)
```

```

elseif x(i) > _A then
    y(i) = _H * (_L-x(i)) / (_L-_A)
26     end
    end
endfunction

31 function [y] = integF(n)
    w_n = n*pi/_L
    y = (sin(w_n*_A) - _A* w_n *cos(w_n*_A))/(w_n) / (_A)
    y = y + (-1)^n
    y = y + cos(w_n*_A) + (-1)^(n+1)
36     y = y * (2*_H/(w_n*( _L-_A)))
endfunction

function [y,y_1,y_2,y_3] = u(x,t)
41     y = 0
    N = 25
    for k = 1:N
        b = integF(k)
        y_k = sin(k*pi*x/_L) * b * cos(k*2*pi*c*t/_L)
46     y = y + y_k
    end
endfunction

clf
51 disp("param")

isoview(0,_L,-_H,-_H)
paramfplot2d(u,x,t)

```

2. Montrer que les conditions initiales et aux limites sont satisfaites avec :

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right)$$

(a) On montre trivialement, que les conditions aux limites sont satisfaites : $u(0, t) = u(L, t) = 0$. En effet, si $x = 0$ on obtient :

$$\underbrace{u_n(0, t) = \sin(0) \left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{L} \right)}_{=0}$$

De même pour $x = L$ on obtient :

$$\underbrace{u_n(L, t) = \sin(n\pi) \left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{L} \right)}_{=0}$$

(b) On montre également la satisfaction des conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \forall x \in [0, L]; \end{cases}$$

$$\text{où } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\text{et } g(x) = \frac{\pi c}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

En effet si $t = 0$ alors les B_n disparaissent et il ne reste que les A_n car $\cos(0) = 1$ d'où $u(x, 0) = f(x), \forall x \in [0, L]$.

Il apparait également que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi c}{L} \left(-A_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right)$$

Donc pris en $t = 0$, on obtient :

$$\frac{\pi c}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

3. Application SciLab

Les graphiques ci dessous sont issus d'une animation de la fonction $paramfplot2d(u, x, t)$ au cours d'un temps relatif croissant

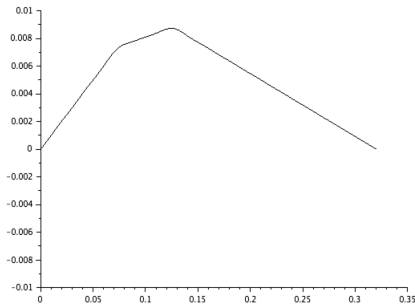


FIGURE 4.1 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°1

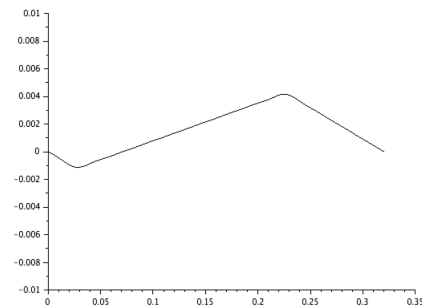


FIGURE 4.2 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°2

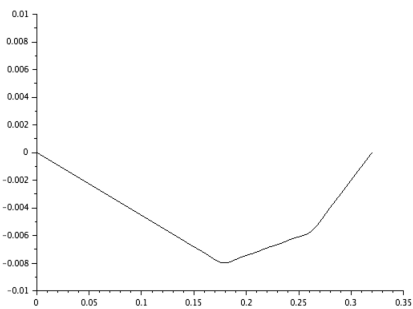
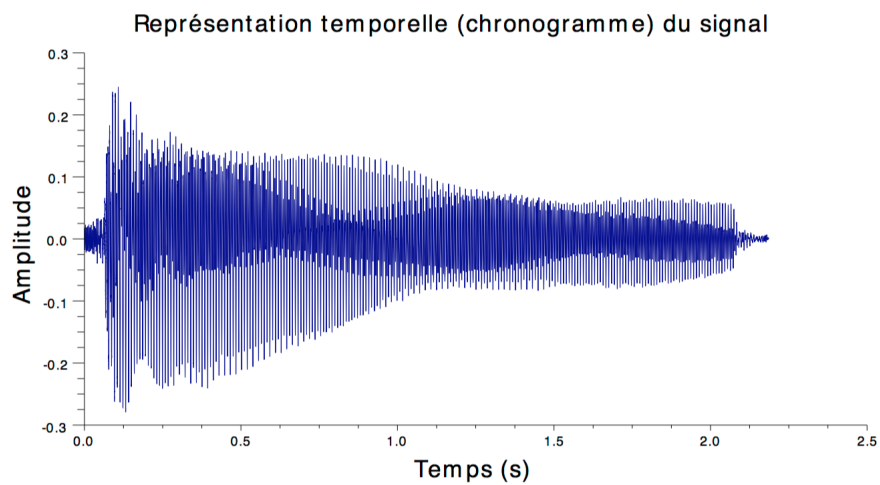


FIGURE 4.3 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°3

4. Chronogramme et analyse fréquentielle du son

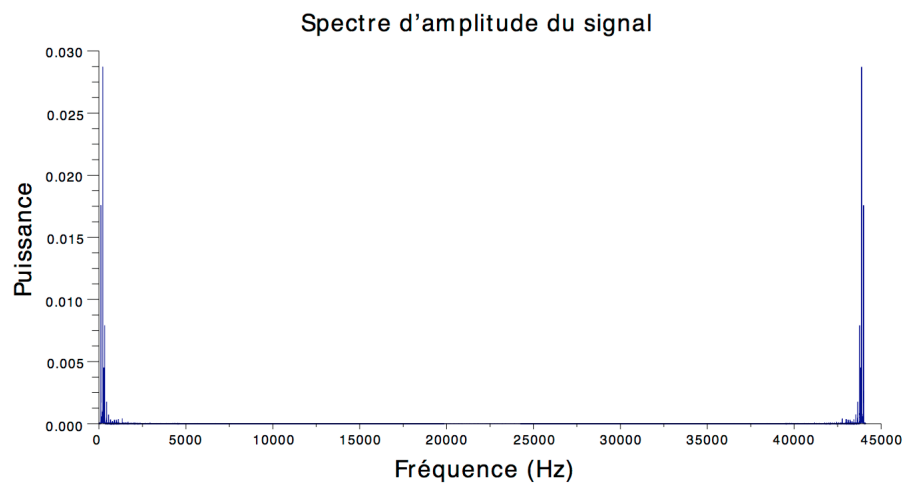
Afin de bien illustrer le son d'une guitare, nous importons un fichier .wav et le traitons de façons à le « voir »

```
1 [son,fe] = wavread("noteguitare.wav");  
L=length(son); N=[1:L]; F=N*fe/L; T=N/fe;  
scf(0);  
clf();  
a=gcf();  
6 a.figure_size=[800,500];  
plot2d(T,son ,9);  
a=gca();  
a.title.text="Représentation temporelle (chronogramme) du signal "  
;  
11 a.title.font_size=4; a.x_label.text="Temps (s) "; a.x_label.font_size=4; a.  
y_label.text="Amplitude"; a.y_label.font_size=4;
```



L'étude à proprement parler du son consiste à en faire l'analyse fréquentielle, dont la première étape est d'obtenir le spectre du signal sonore. Pour ce faire, nous récupérons le module de la transformée de Fourier du signal. Le spectre est représenté dans le domaine des fréquences et c'est une combinaison de fonctions de Dirac. Nous observons très clairement une symétrie, qui est une des propriétés de la transformée de Fourier. L'observation plus précise de ce spectre (en zoomant notamment sur sa partie "intéressante") permet de déterminer les différentes harmoniques et la fréquence fondamentale.

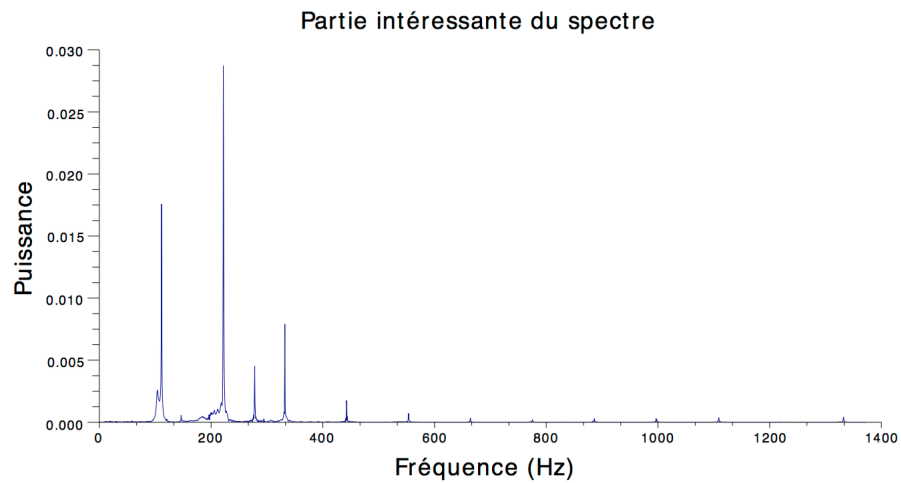
```
[tfd,spectre,tfd_r,tfd_i] = analyse(son);
scf(1);
clf();
4 a=gcf();
a.figure_size=[800,500];
plot2d(F,spectre ,9);
a=gca();
a.title.text="Spectre d'amplitude du signal";
9 a.title.font_size=4;
a.x_label.text="Frequence (Hz) ";
a.x_label.font_size=4;
a.y_label.text="Puissance ";
a.y_label.font_size=4;
```



```

scf(2);
2 clf();
a=gcf();
a.figure_size=[800,500];
plot2d(F(1:3000),spectre(1:3000),9); 6 a=gca();
Spectre d'amplitude du signal
7 a.title.text="Partie intéressante du spectre"; 8 a.title.font_size=4;
a.x_label.text="Fréquence (Hz)";
a.x_label.font_size=4;
a.y_label.text="Puissance"; 12 a.y_label.font_size=4;

```



4.2 La corde frappée (le piano)

1. Procedure Scilab

```
| _L = 65
| _A = 30
| _H = 0.01
| k= 5000
5 | _MLIN = 4
| _TENSION = 11
|
| c = abs(_TENSION/_MLIN)
|
10 | function y=u1(x,t)
|     N=25
|     y=0
|     for i=1:N
|         y=y+sin(i*%pi*x/_L).*((2/c*i*%pi)*k*sin(%pi*_A/_L))*sin(i*%pi*c*t/_L)
15 |     end
|
|     endfunction
|
| x = 0:0.1:_L
20 | t = 0:0.01:50
| paramfplot2d(u1,x,t)
```

2. Harmoniques

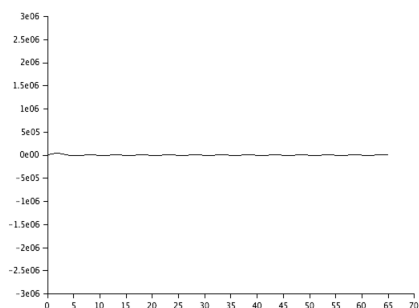


FIGURE 4.4 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°1

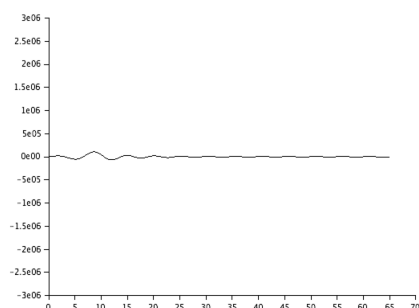


FIGURE 4.5 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°2

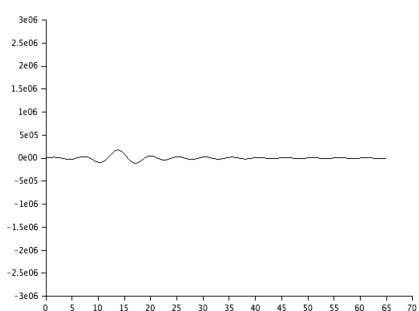


FIGURE 4.6 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°3

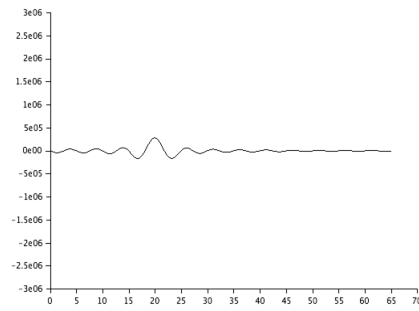


FIGURE 4.7 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°4

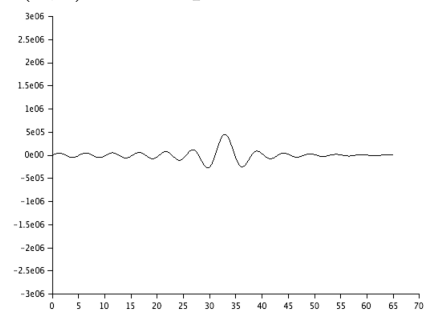


FIGURE 4.8 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps relatif n°5

Chapitre 5

Equation de la chaleur

5.1 Calcul de la série de Fourier

Nous sommes en présence d'une barre de longueur L , d'épaisseur négligeable et de conductivité κ . Nous faisons de plus l'hypothèse que la chaleur ne peut quitter la barre que par ses extrémités. La température à ses extrémités est nulle. La température $u(x, t)$ en point x de la barre et à l'instant t est modélisée par l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t); \quad (5.1)$$

avec les conditions

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (5.2)$$

Avec la méthode des variables séparées, on va chercher une solution $u(x, t)$ telle que :

$$u_n(x, t) = U_n(x)V_n(t) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t}(U_n(x)V_n(t)) &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}(U_n(x)V_n(t)) \\ U_n(x)V'_n(t) &= \kappa V_n(t)U''_n(x) \\ \frac{U''_n(x)}{U_n(x)} &= \frac{V'_n(t)}{\kappa V_n(t)} = \lambda, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où on a,

$$\begin{cases} U_n''(x) &= \lambda U_n(x) \\ V_n'(t) &= \kappa \lambda V_n(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_n''(x) - \lambda U_n(x) &= 0 \\ V_n'(t) - \kappa \lambda V_n(t) &= 0 \end{cases}$$

Nous avons alors trois cas possibles : $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ et $\lambda = 0$. Nous écartons le cas $\lambda \geq 0$ car il n'admet pas de solution trigonométrique. En effet,

$$U(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{-rx}, \quad r = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$$

Pour $\lambda > 0$, si on tient compte de la condition $u(0, t) = u(L, t) = 0$:

$$\begin{cases} U(0) &= 0 \\ U(L) &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 e^{rL} + C_2 e^{-rL} &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 &= C_2 \\ C_1 &= 0, \text{ si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Nous avons $U = 0$, ce qui est physiquement à rejeter.

Pour ce qui est de $\lambda = 0$,

$$U''(x) = 0 \text{ nous donne } U(x) = ax + b$$

et avec la condition $u(0) = u(L) = 0$:

$$\begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$$

D'où $U(x) = 0$ et $u(x, t) = 0$, ce qui est également à rejeter. Pour la suite, nous avons alors $\lambda < 0$ et nous posons $\lambda = -\mu^2$.

D'où

$$\begin{cases} U'' + \mu^2 U &= 0 \\ V + \kappa \mu^2 V &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(x) &= C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x) \\ V(t) &= C e^{-\kappa \mu^2 t} \end{cases}$$

D'après les conditions aux extrémités :

$$\begin{cases} C_1 &= 0 \\ C_2 \sin \mu L &= 0 \Rightarrow \mu L = n\pi \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{L}, \text{ avec } n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'après l'équation (5.3), on a :

$$u_n(x, t) = C_n e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{L^2} t} (D_n \cos(\frac{n\pi}{L} x) + E_n \sin(\frac{n\pi}{L} x)) \quad (5.4)$$

Or, $u_n(x, t)$ est une fonction 2L-périodique impaire :

$$u_n(x, t) = C_n e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{L^2} t} E_n \sin(\frac{n\pi}{L} x) \quad (5.5)$$

On note $b_n = C_n E_n$ et on a donc une solution de la forme :

$$u_n(x, t) = b_n e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin(\frac{n\pi}{L} x) \quad (5.6)$$

D'après le principe de superposition, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ est aussi une solution.

Donc

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin(\frac{n\pi}{L} x) \quad (5.7)$$

est une solution de l'équation (5.1). On a alors

$$u(x, t) = F(x)G(t) \quad (5.8)$$

où

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

Calcul de b_n : On a $u(x, 0) = f(x)$, on remplace dans (5.7) :

$$f(x) = \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.9)$$

Les (b_n) sont les coefficients de Fourier de f^* la fonction $2L$ -périodique impaire telle que $f^* = f$ sur $[0, L]$.

On a alors :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(x) \sin(n\omega x) dx, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (5.10)$$

Ici, $T = 2L$:

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L f^*(x) \sin(n\omega x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (5.11)$$

5.2 Implémentation de la propagation de la chaleur

Nous prenons comme exemple une barre d'épaisseur négligeable de longueur $L = \pi$, dont les extrémités sont isolées, soumise à une température $T_{init} = 0^\circ C$, et ayant une conductivité $\kappa = 1$. On plonge la barre dans un bain dont la température est de $T_{bain} = 100^\circ C$. On a $f(x) = 100$. Calculons b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 100 \sin(nx) dx \\ &= \frac{200}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx \\ &= -\frac{200}{n\pi} [\cos(nx)]_0^\pi \\ &= -\frac{200}{n\pi} [\cos(nx)]_0^\pi \\ &= \frac{200}{n\pi} (1 - (-1)^n) \\ &= \begin{cases} \frac{400}{\pi(2p-1)} & , \quad n = 2p - 1 \\ 0 & , \quad n = 2p, \text{ avec } p \in \mathbf{N} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$u(x, t) = \frac{400}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-(2p-1)^2 t}}{2p-1} \sin((2p-1)x) \quad (5.12)$$

Nous implémentons alors une procédure Scilab pour représenter la propagation de la chaleur dans la barre en fonction du temps.

```
x=linspace(0,%pi,50); //on definit l'ensemble de definition de la fonction
nb_termes = 50 //nombre de termes de la somme a calculer
nb_secondes = 60 //temps de l'etude du phenomene
4 i_lim = nb_secondes/0.1 //conversion du temps en nombre de boucle (1 boucle
    = 0.1 seconde)
t=0
for i = 0:i_lim //boucle temporelle
    somme=0
    for p = 1:nb_termes //boucle afin de calculer la somme sur nb_termes
        termes
9         somme=somme+(((exp(-((2*p-1)^2)*t))/(2*p-1))*sin((2*p-1)*x))
    end //fin de la boucle somme
    u=(400/%pi)*somme //calcul de u(x,t)
    clf() //suppression de l'ancienne courbe dans la fenetre
    square(0,0,%pi,100) //definition des axes
14 plot2d(x,u) //affichage de la courbe
    t = t+0.01 //incrementation du temps
    sleep(100) //pause de 0.1 seconde
```

```
|end //fin de la boucle temporelle
```

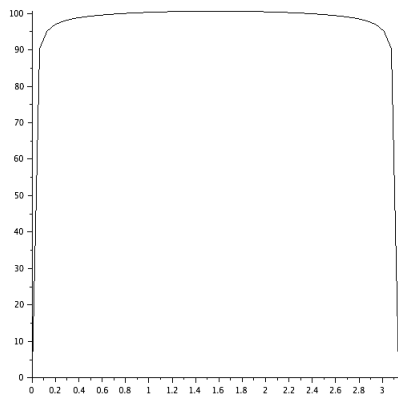


FIGURE 5.1 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0$

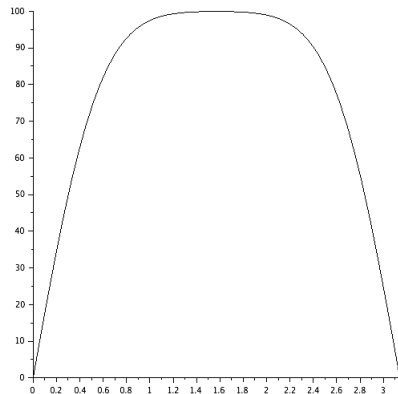


FIGURE 5.2 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0.05$

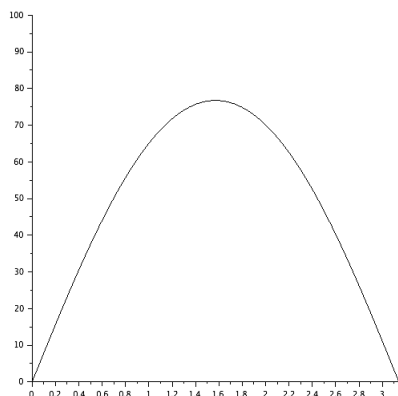


FIGURE 5.3 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0.5$

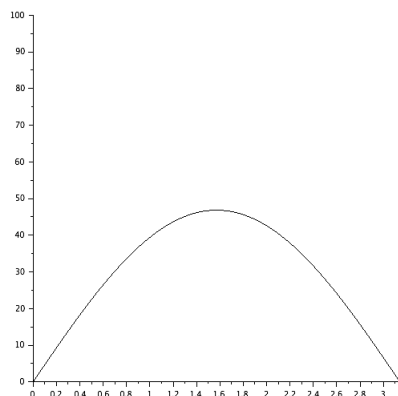


FIGURE 5.4 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 1$

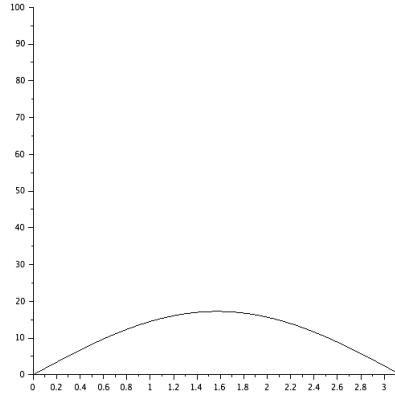


FIGURE 5.5 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 2$

5.3 Cas de la barre radioactive

Nous considérons le cas où la barre est radioactive et produit de la chaleur à taux constant R .

Nous cherchons alors une solution à l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + R; \quad (5.13)$$

Il suffit de poser

$$u(x, t) = u_0(x) + v(x, t); \quad (5.14)$$

avec

$$u_0''(x) = -\frac{R}{\kappa}; \quad (5.15)$$

Si $u(x, t)$ est une solution de l'équation (5.13), alors $v(x, t)$ est une solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t); \quad (5.16)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} v(x, 0) &= -u_0(x) \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0 \end{cases}$$

Calcul de $u_0(x)$:

$$\begin{aligned} u_0''(x) &= -\frac{R}{\kappa} \\ u_0'(x) &= -\frac{R}{\kappa}x + C_1 \\ u_0(x) &= -\frac{R}{2\kappa}x^2 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

Or, on a $u_0(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

De plus, $u_0(L) = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{R}{2\kappa}L^2 + C_1L &= 0 \\ L(-\frac{RL}{2\kappa} + C_1) &= 0 \\ C &= \frac{RL}{2\kappa} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} u_0(x) &= -\frac{Rx^2}{2\kappa} + \frac{RL^2}{2\kappa}x \\ &= \frac{R}{2\kappa}x(L-x) \end{aligned}$$

Calcul de la série de Fourier de $u_0(x)$:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.17)$$

Calcul de b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) d\left(-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \\ &= \frac{2}{L} \underbrace{\left[-u_0(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L}_{=0} + \frac{2}{n\pi} \int_0^L u'_0(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \text{ car } u_0(0) = u_0(L) = 0 \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^L u'_0(x) d\left(\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \underbrace{\left[u'_0(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L}_{=0} - \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^L u''_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \text{ car } \sin(n\pi) = \sin(0) = 0 \\ &= \frac{2LR}{n^2\pi^2\kappa} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2LR}{n^2\pi^2\kappa} \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\ &= \frac{2LR}{n^2\pi^2\kappa} \left(-\frac{L}{n\pi}(-1)^n + \frac{L}{n\pi}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{4L^2R}{n^3\pi^3\kappa} & , \quad n = 2p - 1 \\ 0 & , \quad n = 2p, \text{ avec } p \in \mathbf{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$u_0(x) = \frac{4L^2R}{\pi^3\kappa} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.18)$$

Calcul xs $v(x, t)$: D'après le calcul de $u(x, t)$ de la barre non-radioactive, on a :

$$v(x, t) = \sum_{n \text{ impair}} b'_n e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.19)$$

Alors,

$$v(x, 0) = \sum_{n \text{ impair}} b'_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.20)$$

Or, nous avons

$$v(x, 0) = -u_0(x) = \sum_{n \text{ impair}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.21)$$

Donc

$$b'_n = -b_n = -\frac{4L^2R}{n^3\pi^3\kappa}$$

$$v(x, t) = -\frac{4L^2R}{\pi^3\kappa} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.22)$$

Donc

$$u(x, t) = \frac{4L^2R}{\pi^3\kappa} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3} (1 - e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{L^2} t}) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.23)$$

Nous représentons la propagation de la chaleur dans la barre radioactive en prenant $\kappa = 0.5$, $R = 1.3$ et $L = \pi$:

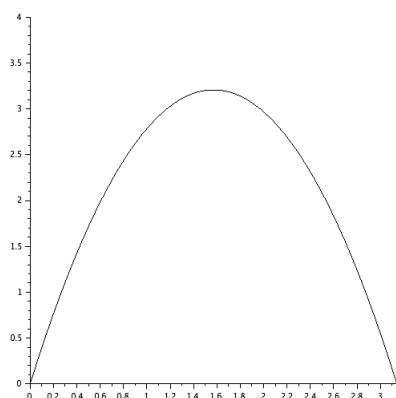


FIGURE 5.6 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0$

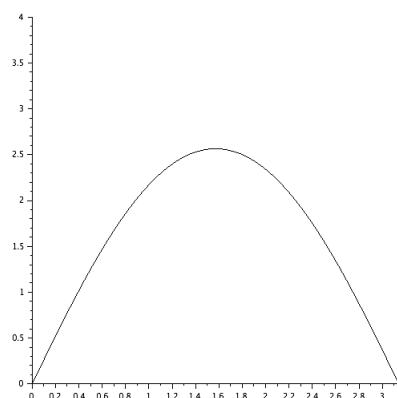


FIGURE 5.7 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 0.5$

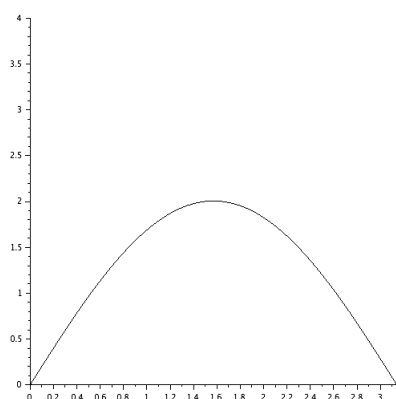


FIGURE 5.8 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 1$

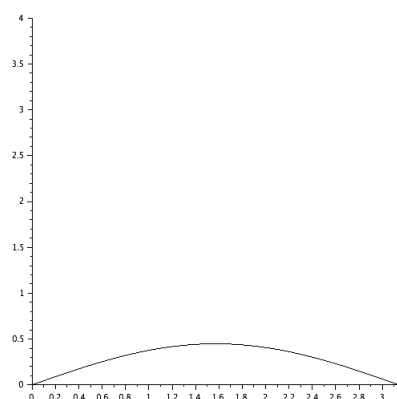


FIGURE 5.9 – Courbe de la fonction $u(x, t)$ au temps $t = 4$