MT11 : Chapitre 11 et 12
Systèmes linéaires, matrices, déterminants

Automne 2015

Table des matières

Chapitre 1

Systèmes Linéaires

1.1 Notions à propos des systèmes linéaires

Un système linéaire est un ensemble d'équations qui ont la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{array}\right.$$

Les a représentent des coefficients se trouvant dans $\mathbb{R}$, c'est à dire des chiffres réels. De la même manière, les b sont aussi des chiffres donnés se trouvant dans $\mathbb{R}$. n et m représentent respectivement la *ligne* et la *colonne*. Enfin, x représente les inconnues que l'on cherche à trouver.

Au niveau des solutions, un système linéaire aura *généralement* 3 cas possibles :
- Pas de solutions - par exemple si on se retrouve avec une inconnue qui prend 2 valeurs distinctes en même temps ;
- Une solution unique ;
- Une infinité de solutions, qui dépendent d'un certain nombre de paramètres fixés ;

Enfin, il existe une définition assez pratique pour la résolution de systèmes :

Définition 1 *Deux systèmes sont équivalents si ils admettent le même ensemble de solutions.*

Cela veut dire qu'on va pouvoir utiliser la méthode de *Gauss* pour résoudre les systèmes ; méthode qui sera développée en **??**.

1.1.1 Systèmes à 2 inconnues

Un système linéaire à 2 inconnues est tout simplement un système composée de 2 équations à... 2 inconnues. Ici, il est possible de passer par une méthode de combinaison pour résoudre le système. Par exemple, dans le système linéaire à 2 inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right.$$

On a le couple de solutions :
bla bla bla

1.1.2 Systèmes linéaires homogènes

Un système linéaire homogène est un système dans lequel tous les *seconds membres* sont égaux à 0, comme dans le système linéaire général homogène suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

Dans un système linéaire homogène, on a ici que 2 possibilités face aux solutions :

- Il existe une solution unique : la solution triviale 0 ;
- Il existe une infinité de solutions ;

De plus, dans le cas où (E) et (E_0) sont deux systèmes dont (E_0) est un système homogène, si jamais on a une solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour (E), il est possible de trouver une autre solution $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ pour (E) si $(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \ldots, x'_n - x_n)$ est solution de (E_0).

1.2 Résolution de systèmes linéaires : Gauss

La méthode de *Gauss* se base sur les 3 règles suivantes :

- Permutation d'équation ;
- Multiplication d'équation par un réel non nul ;
- Ajout d'une équation à une autre ;

Définition 2 *Transformer un système linéaire (E) à l'aide des règles de Gauss donne un nouveau système (E') équivalent au système (E). Ces deux systèmes ont les mêmes solutions.*

1.2.1 Méthode

La méthode de *Gauss* consiste donc principalement à permuter, ajouter/soustraire les équations du systèmes entre elles ou encore à les multiplier par un réel non nul.
Le but est d'abord d'effectuer une *descente*, en enlevant le plus d'inconnues possibles, puis de *remonter* avec les inconnues fraichement trouvées.

Chapitre 2

Matrices

2.1 Notions générales

Une matrice est juste un tableau de nombres.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

Une écriture réduite d'une matrice A de taille n lignes et m colonnes est la suivante : $A \in \mathbb{M}_{nm}$.
Une matrice ayant le même nombre de lignes que de colonnes est une matrice *carrée*.

2.2 Calcul matriciel

Il est possible d'effectuer un certain nombre d'opérations sur une matrice ou entre matrices.

2.2.1 Somme de deux matrices

Pour faire la somme de deux matrices, il faut que ces deux matrices aient **la même taille**.
Ensuite, il suffit simplement d'ajouter les coefficients entre eux. Par exemple, la somme des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

donnera

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Quant aux propriétés de la somme, elle est **commutative et associative**.

2.2.2 Multiplication d'une matrice par un réel

Là aussi cette opération s'effectue sans encombres. Il suffit de multiplier chaque coefficient de la matrice par le réel en question.

2.2.3 Produit de matrices

Cette opération est plus compliquée que les deux autres.
Les conditions pour l'effectuer sont de vérifier la compatibilité entre les deux matrices. En effet, il faut que le **nombre de colonnes** de la première matrice soit égal au **nombre de lignes** de la deuxième matrice.
L'ordre est donc important ! Prenons par exemple la matrice $A \in M_{13}$ et $B \in M_{32}$. Si $A * B$ est possible, $B * A$ ne l'est pas.
Quant au calcul des coefficients en lui même, il s'agit de faire la somme des multiplications de chaque coefficient de la ligne n de la 1ère matrice par le coefficient de la colonne m de la 2ème matrice.

2.2.4 Tranposée d'une matrice

Il s'agit de passer les lignes en colonnes d'une matrice. . . en respectant l'ordre ! Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

deviendra

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.3 Inversion d'une matrice

On parle ici de matrices dites *carrées*, c'est à dire des matrices qui ont autant de lignes que de colonnes.
L'inverse d'une matrice carrée A correspond à une matrice A^{-1} telle que $A * A^{-1} = I_d$, avec I_d étant la matrice identité de la même taille que A.

2.3.1 Calcul pratique de l'inverse

Soit A une matrice de taille n, m, X et B deux matrices colonnes de taille n. Pour calculer l'inverse, il faut résoudre un système linéaire tel que $A * X = B$. En résolvant ce système, on obtient les coefficients de la matrice A^{-1}.

2.4 Noyau et image d'une matrice

Définition 3 *Le noyau d'une matrice A est l'ensemble des solutions X tel que pour tout $X \in \mathbb{R}$, $AX = 0$.*

Définition 4 *L'image d'une matrice, est l'ensemble des solutions B tel que pour toute matrice colonne de taille n, il existe au moins une solution pour $A * X = B$.*

2.4.1 Calcul pratique

Pour ces deux cas, il suffit de résoudre un système linéaire.
Pour le noyau, il faut résoudre le système linéaire $AX = 0$, tandis que pour l'image, il faut résoudre un système linéaire $AX = B$, avec B étant un vecteur colonne de taille n pour une matrice A de n lignes, m colonnes.

Chapitre 3

Bases et sous-espaces vectoriels

3.1 Sous-espace vectoriel

Un sous-espace vectoriel est un ensemble qui respecte deux propriétés :
- La stabilité de l'addition ;
- La stabilité de la multiplication ;

Stabilité de l'addition

Soit F un ensemble, et B, B' deux éléments $\in F$.
F est stable par l'addition si on a $B + B' \in F$.

Stabilité de la multiplication

Soit λ un réel $\in \mathbb{R}$.
F est stable par la multiplication si on a, pour $X \in F$, $\lambda X \in F$.

3.2 Histoire de famille

3.2.1 Famille génératrice

Une famille génératrice $v_1, v_2, \ldots, v_p$ d'un sous-espace vectoriel F est un ensemble de coefficients pour lequel n'importe quel vecteur de F s'exprime à partir d'une combinsaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

3.2.2 Famille libre, liée

Une famille *libre* est une famille pour laquelle l'équation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 + v_2 + \ldots\ \lambda_n + v_n = 0$ implique nécessairement que les coefficients réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ soient égaux à 0. Une famille non libre est dite *liée*.
Pour savoir si une famille est libre, il suffit de prendre une combinaison linéaire et de résoudre le système égal à 0.

3.3 Bases

Définition 5 *Une base B est une famille génératrice et libre d'un espace vectoriel F.*
Le nombre d'éléments dans la base B est noté dim F et est commun à toutes les bases de F.

Il existe une base spéciale, la *base canonique*, qu'on note $\mathbb{B}$. La base canonique est une famille composée de vecteurs $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$, pour $1 \leq i \leq m$, avec e_i étant un vecteur de $\mathbb{R}^m$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i-ème qui vaut 1.

Chapitre 4

Applications linéaires

4.1 1

4.2 2

Chapitre 5

Déterminants, valeurs propres