

Matematica

Simone Balducci

1 Probabilità e statistica

1.1 Probabilità

Si consideri una certa operazione, quale l'estrazione di una carta da un mazzo o il lancio di un dado. Ci sono tanti possibili risultati per queste operazioni. L'insieme di tutti i risultati possibili forma lo *spazio campionario* Ω , mentre uno di questi possibili risultati prende il nome di evento, e rappresenta quindi un sottoinsieme dello spazio campionario.

La probabilità associata a un evento è data da

$$p(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

dove $|E|$ indica il numero di casi possibili che rientrano nella descrizione dell'evento e $|\Omega|$ sono tutti i casi possibili.

Ad esempio, nel caso dell'estrazione della carta da un mazzo di 52 carte, l'evento "Esce una carta con il numero 4" è verificato in 4 casi dei 52 possibili (un caso per ogni seme). Ne risulta che questo evento ha probabilità

$$p(E) = \frac{4}{52} = 1/13$$

1.1.1 Probabilità condizionata e dipendenza

Il concetto di probabilità condizionata è di fondamentale importanza per la sua utilità pratica e perché permette di introdurre in maniera intuitiva il concetto di eventi indipendenti.

Si definisce la probabilità condizionata dell'evento A noto l'evento B come:

$$p(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Il significato di questa probabilit  e' quello di indicare la probabilit  che un evento, l'evento A , avvenga sapendo che l'evento B e' avvenuto. In sostanza, calcolando questa probabilit  noi supponiamo di avere un'informazione in piu', e spesso questa modifica la probabilit  a priori che A avvenga.

Un esempio molto semplice di questo concetto e' il seguente:
Supponiamo di avere un classico mazzo di carte da 52. L'evento A e' l'evento "viene pescato il 2 di cuori", mentre l'evento B e' "viene pescata una carta di cuori" e consideriamo anche l'evento C , che dice "viene pescata una carta di picche".

A questo punto possiamo calcolare le probabilit  condizionate.

Il fatto che gli eventi B o C avvengano, va a cambiare la probabilit  che A avvenga. Infatti, la probabilit  che A avvenga, a priori, e' $1/52$. Tuttavia, se sappiamo che B si e' verificato, la probabilit  di pescare il 2 di cuori diventa molto piu' alta, ovvero

$$p(A|B) = \frac{1}{13}$$

questo perche' sapere che e' stata una pescata una carta di cuori, va a diminuire il numero di carte che e' possibile pescare.

Similmente, se consideriamo verificato l'evento C , abbiamo di nuovo che la probabilit  che A si verifichi cambia. In particolare tale probabilit  diventa nulla, perche' non si puo' pescare il 2 di cuori se si pesca una carta di picche, quindi

$$p(A|C) = 0$$

Si puo' ora introdurre il fondamentale concetto di eventi indipendenti.

Intuitivamente, due eventi sono indipendenti se il fatto che uno avvenga o no non va a modificare la probabilit  che l'altro avvenga.

Matematicamente, si dice che la probabilit  condizionata dell'evento e' uguale alla probabilit  a priori:

$$p(A|B) = p(A)$$

Un primo esempio molto semplice e' il seguente: Sapendo che Simone Balducci ha gli occhi verdi (evento B), qual e' la probabilit  che oggi piova (evento A)? Chiaramente l'evento B non influenza in alcun modo l'evento A . Un altro esempio, che a volte puo' risultare fuorviante, riguarda il lancio di una moneta. Supponiamo di lanciare una moneta 2 volte: Sapendo che nel primo lancio esce testa, qual e' la probabilit  che esca testa anche al secondo

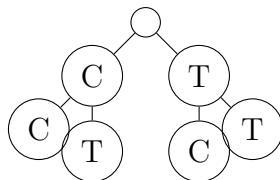
lancio? Questa probabilit  e' sempre $1/2$, quindi i due eventi sono indipendenti. Intuitivamente, e' chiaro che il risultato del lancio di una moneta non dipende dai risultati precedenti. Qualcuno potrebbe essere fuorviato dal fatto che ottenere lo stesso risultato (ad esempio testa) a ogni lancio e' qualcosa di improbabile, dopo un certo numero di lanci. Questo e' vero, ma in questo caso si parla di probabilit  dell'intersezione di eventi, non della probabilit  del singolo evento.

Se due eventi sono indipendenti, la probabilit  dell'intersezione (ovvero la probabilit  che avvengano entrambi contemporaneamente) e' data semplicemente dal prodotto dei due

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

Quindi, tornando al caso del lancio di una moneta, se lanciamo la moneta due volte e ci chiediamo la probabilit  che esca testa due volte di fila, questa e' data semplicemente dal prodotto delle due probabilit , quindi $1/4$.

Per l'esempio precedente, dei lanci di moneta successivi, si puo' usare uno strumento molto potente, che e' quello dei diagrammi ad albero.



Questo grafo e' formato da 4 rami, e ogni ramo rappresenta un possibile esito dei due lanci di moneta. Per quanto detto in precedenza, ognuno dei 4 rami e' equiprobabile, quindi la probabilit  di ognuno di essi e' $1/4$.

1.1.2 Probabilit  dell'unione

La probabilit  dell'unione di due eventi puo' essere compresa semplicemente immaginando gli insiemi. Immaginiamo due insiemi come due ovali su un piano, A e B . La probabilit  dell'unione dei due eventi rappresenta la probabilit  che avvenga uno dei due, quindi intuitivamente le probabilit  vanno sommate.

Infatti, se consideriamo l'estrazione di una carta, se l'evento A e' "esce una carta cuori" e l'evento B e' "esce una carta quadri", se consideriamo l'unione

dei due eventi vuol dire che siamo contento sia che esca una carta cuori che una quadri, quindi siamo passati da un quarto delle carte del mazzo a metà', raddoppiando la probabilità

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Tuttavia, il discorso non finisce qui. Infatti, immaginiamo che i due non siano disgiunti, e quindi che tra i due ci sia dell'overlap. In questo caso, sommando i due eventi staremmo considerando la zona in comune due volte. Per questo motivo, bisogna rimuovere la probabilità dell'intersezione dei due eventi. E questo ci dà la formula finale e completa:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Facciamo un esempio.

Consideriamo il lancio di un dado. Prendiamo come evento A l'evento "esce un numero pari" e come evento B "esce un numero maggiore o uguale a 3". I due eventi quindi si possono scrivere come

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Si vede che ci sono dei numeri la cui uscita soddisferebbe entrambi gli eventi, ovvero si ha intersezione tra i due eventi. In particolare l'evento intersezione è

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

Quindi, la probabilità che avvenga A oppure B è

$$p(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

e questo valore non deve sorprendere, perché vediamo chiaramente che con qualunque valore, a parte 1, si ha che uno dei due eventi è soddisfatto.

È importante stressare un'ultima volta l'importanza di togliere la probabilità dell'intersezione, perché è molto comune dimenticare quel termine.

Se noi sommassimo semplicemente le probabilità dei due eventi, sarebbe come dire "ok quindi vincerò questo gioco se uscirà 2, 3, 4, 5, 6, 4 o 6, quindi ci sono 7 casi possibili che mi farebbero vincere". Ma questo chiaramente non ha senso, perché due di quei casi sono stati contati due volte. Addirittura, se non togliessimo l'intersezione, la probabilità dell'unione verrebbe maggiore di 1, che è chiaramente impossibile.

1.1.3 Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes riguarda la probabilit  condizionate e risponde a una domanda. Se io so una probabilit  condizionate, come trovo l'inversa? Ovvero, se so quanto   probabile che avvenga A noto l'evento B , come faccio a sapere quanto   probabile che la causa dell'evento A , la cui realizzazione   nota, sia stata proprio l'evento B ?

Facciamo un esempio molto semplice. Io sono un datore di lavoro, e il mio dipendente   arrivato in ritardo, perch  dice di aver trovato traffico. Io so che se c'  traffico, la probabilit  che il dipendente arrivi in ritardo   molto alta. Tuttavia ci sono altri motivi per cui sarebbe potuto essere arrivare in ritardo (magari   in botta), quindi mi chiedo, qual   la probabilit  che il ritardo sia avvenuto proprio a causa del traffico?

La formula di questo teorema pu  essere ricavata molto semplicemente considerando le formule delle due probabilit  condizionate

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Si vede che in queste due formule c'  un termine in comune. Possiamo quindi girare le due formule e uguagliarle

$$p(A|B)p(B) = p(A \cap B) = p(B|A)p(A)$$

A questo punto quindi, supponendo che la probabilit  a cui siamo interessati sia $p(B|A)$, si ottiene molto semplicemente la formula

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$$

che   proprio la formula del teorema di Bayes.

Facciamo un esempio numerico per mettere alla prova questa formula: Supponiamo di avere il nostro solito (e ormai amato) mazzo di carte. L'evento A   "ho pescato il 3 di quadri" mentre l'evento B   "ho pescato una carta dal seme rosso".

In questo caso   molto semplice calcolare la probabilit  $p(B|A)$, perch  se

so di aver pescato una carta di quadri, so automaticamente di aver pescato una carta dal seme rosso, quindi questa probabilit  e' unitaria. La probabilit  $p(A)$ e' uguale a $1/52$ e $p(B)$ e' uguale a $1/2$ (per motivi che ormai penso siano ovvi). Possiamo quindi usare il teorema di Bayes per calcolare la probabilit  di pescare il 3 di quadri, sapendo di aver pescato una carta dal seme rosso:

$$p(A|B) = \frac{1 \times 1/52}{1/2} = \frac{1}{26}$$

Questo risultato e' intuitivamente corretto, perche' il fatto di aver pescato una carta dal seme rosso dimezza il numero di carte possibili (la il 3 di quadri rimane tra queste) quindi la probabilit  di pescare la carta desiderata raddoppia.

1.2 Statistica

1.3 Combinatoria

La combinatoria consiste nel calcolo di tutti i possibili risultato di operazioni quali lanci di dadi o estrazioni di numeri.

Si distinguono intanto i concetti di disposizioni, permutazioni e combinazioni:

- Le disposizioni sono sequenze ordinate di oggetti (lettere, numeri o altro). Si parla di disposizione quando si ha un numero N di oggetti da dividere in un numero k di posti, con $k < N$, e l'ordine di estrazione e' importante. Un esempio di disposizione puo' essere il sorteggio di 4 cifre per determinare un codice numerico o una password.
- Le permutazioni sono disposizioni in cui $k = N$, quindi in cui tutti i numeri devono venir estratti. Un esempio e' quello del calcolo degli anagrammi di una parola. L'ordine delle lettere in una parola e' ovviamente importante, quindi ogni permutazione indica un anagramma diverso, ma tutte le lettere devono essere presenti nella sequenza perche' questa sia un anagramma di tale parola.
- Le combinazioni sono estrazioni non ordinate di elementi. Quindi a differenza delle disposizioni e delle permutazioni, l'ordine di uscita degli elementi non e' importante. Prendendo ad esempio il caso degli anagrammi di una parola, tutti gli anagrammi sono formati combinando le stesse lettere, quindi rappresentano la stessa combinazione (anche se

sono diverse permutazioni). Un esempio di combinazione e' l'estrazione di alunni da interrogare da parte di un professore, perche' allo studente non interessa se viene chiamato per primo o per ultimo, gli tocca comunque essere interrogato.

Dopo aver definito permutazioni, disposizioni e combinazioni e' fondamentale saperle calcolare nei vari casi.

Per il calcolo delle disposizioni e' utile un esempio.

Esempio

Vogliamo calcolare quante sequenze di 5 lettere dell'alfabeto e' possibile avere. Prendiamo l'alfabeto inglese, quindi 26 lettere.

Per la prima lettera possiamo avere una qualunque delle 26 lettere, quindi le possibilita' per la sua scelta sono 26. Per ognuna di queste 26 possibili prime lettere, le lettere che possono prendere il secondo posto sono, di nuovo, 26. Quindi le disposizioni possibili di 2 lettere sono $26 \times 26 = 676$. Si estende lo stesso discorso e si ottiene che per 5 lettere le disposizioni possibili sono $26^5 = 11881376$.

Quindi in un caso come questo si ha

$$D_{N,k} = N^k$$

Un caso diverso si avrebbe se una lettera scelta in precedenza non potesse essere scelta in seguito. Ad esempio, estraendo i numeri nel gioco della tombola, un numero gia' pescato non puo' essere ripescato, quindi a ogni estrazione diminuisce il numero di numeri estraibili.

Nel caso della sequenza di 5 lettere quindi, il numero di disposizioni *senza ripetizione* e'

$$D_{N,k} = N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)$$

Passiamo ora alle permutazioni. Come detto in precedenza, nelle permutazioni si ha che $k = N$. Quindi il numero di permutazioni con ripetizione e'

$$P_N + N^N$$

mentre il numero di permutazioni senza ripetizione e'

$$P_N = N!$$

Ci sono infine le combinazioni. Queste si calcolano mediante il coefficiente binomiale, che e' definito come

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

La combinazione senza ripetizione di N elementi per k posti e'

$$C_{N,k} = \binom{N}{k}$$

La combinazione con ripetizione invece e' data dalla formula

$$C_{N,k} = \binom{N+k-1}{k}$$