

# Mémoire de stage de fin de Master

## *Modélisation de la mémoire de court-terme et processus de Markov neuronaux en temps discret*

cover.png

### Abstract

Ce rapport présente une modélisation mathématique du processus de mémoire de court-terme, en s'appuyant sur la théorie des chaînes de Markov. Nous étudions un modèle de neurones spiking en temps discret, où les neurones sont activés par des stimuli et peuvent se désactiver après un certain temps. Nous analysons les propriétés de ce processus, notamment sa convergence vers un état stationnaire et son comportement en champ moyen. Enfin, nous discutons des implications de ces résultats pour la compréhension des mécanismes neuronaux sous-jacents à la mémoire.

### Rédigé par

Simon Buré



simon.bure@etu-upsaclay.fr

### Sous la supervision de

Prof. Eva Löcherbach



Eva.Locherbach@univ-paris1.fr

### Terminé le

09-07-2025

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de mémoire, Prof. Eva Löcherbach, pour son encadrement, ses conseils avisés et sa disponibilité tout au long de ce travail. Son expertise et son soutien ont été essentiels à la réalisation de ce mémoire.

## Table des matières

1. Introduction .....	4
1.1. Intérêts .....	4
1.2. Objectifs .....	4
2. Modélisation .....	4
2.1. Définition du système .....	4
2.2. Modélisation des sauts du système .....	4
2.2.1. Spike .....	4
2.2.2. Désactivation .....	5
3. Étude de la chaîne de Markov associée .....	5
3.1. Espace des états dans lequel évolue la chaîne .....	5
3.2. Transitions de la chaîne de Markov .....	5
3.3. Mesure empirique .....	6
3.4. Espace absorbant .....	7
3.4.1. États absorbants .....	7
3.4.2. États presque-absorbants .....	7
3.4.3. Définition de l'espace absorbant .....	7
3.5. Irréductibilité .....	8
3.5.1. États transitoires et espace transitoire .....	8
4. Limite en champ moyen du processus .....	10
4.1. Processus limites .....	11
4.2. Existence des processus limites .....	12
4.3. Convergence vers les processus limites .....	12
4.3.1. Majoration de $\delta_{t+1}^{i,N}$ .....	13
4.3.2. Majoration de $d_{t+1}^{i,N}$ .....	15
4.4. Mesure invariante .....	20
4.4.1. Cas où $v < K^\gamma \gamma^*$ .....	20
4.4.2. Cas où $v = K^\gamma \gamma^*$ .....	21
4.4.3. Équilibres de la mesure stationnaire .....	21
5. Conclusion .....	24
6. Références .....	24
Références .....	24
7. Appendice .....	24
8. Modèle en temps continu et équation différentielle stochastique associée .....	24

# 1. Introduction

## 1.1. Intérêts

## 1.2. Objectifs

[1], [2], [3]

# 2. Modélisation

## 2.1. Définition du système

Nous définissons l'état du système de neurones par le processus stochastique suivant

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^N \end{pmatrix}$$

où

$$X_t^i = (V_t^i, A_t^i).$$

Chaque neurone  $i$  est donc représenté par un couple  $(V_t^i, A_t^i)$  où :

- La variable aléatoire  $V_t^i$  représente le *potentiel de membrane* ou *voltage*, au temps  $t$ , avec  $V_t^i \in \{0, 1, \dots, \theta\}$ .
- La variable aléatoire  $A_t^i$  représente l'état d'*activation* de la synapse du neurone au temps  $t$ , avec  $A_t^i \in \{0, 1\}$ .

Notons  $\mathcal{F}_t$  la filtration associée au processus global.

Notre modélisation se fait en temps discret. Pour un  $T \in \mathbb{N}$  tel que  $T > 0$ , nous définissons :

$$t \in \{0, 1, \dots, T\}.$$

## 2.2. Modélisation des sauts du système

En plus des deux variables aléatoires  $V_t^i$  et  $A_t^i$ , nous avons besoin d'une variable aléatoire auxiliaire par neurone, que nous noterons  $U_t^i$ . Tous les  $U_t^i$  sont distribuées *uniformément* sur  $[0, 1]$ , qui nous permettra de simuler les processus de spike et de désactivation des neurones. Nous avons donc

$$\forall t, \forall i, U_t^i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Unif}(0, 1).$$

Commençons par définir les potentiels d'action, ou « spikes » du système.

### 2.2.1. Spike

Un neurone d'indice  $i$  est en capacité d'émettre un spike au temps  $t + 1$  si et seulement si son potentiel de membrane  $V_t^i = \theta$ .

Un neurone capable de « spiker », spike avec probabilité  $\beta$  indépendamment de l'état du système et des autres variables aléatoires. Après l'émission d'un potentiel d'action, le potentiel de membrane du neurone est **remis à zéro**.

Pour formaliser ces informations, nous allons introduire la fonction  $\phi$ , qui, à un voltage  $v$  donné, associera la **probabilité de spiker** :

$$\phi : \begin{cases} v \in \{0, 1, \dots, \theta\} \longrightarrow [0, 1] \\ \phi(v) = \beta \mathbf{1}_{v=\theta} \end{cases}.$$

Ainsi en utilisant  $\phi$  et la variable auxiliaire uniforme  $U_t^i$  définie plus haut, le neurone  $i$  effectuera un spike au temps  $t + 1$  si et seulement si

$$U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i).$$

Nous appellerons l'*indicateur de spike* le terme  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}}$  et à l'inverse *indicateur d'absence de spike* le terme  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}}$ .

Nous pouvons donc résumer la dynamique du potentiel de membrane du neurone  $i$  à travers le temps par l'équation suivante :

$$V_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} \left( V_t^i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N A_t^j \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} \right).$$

### 2.2.2. Désactivation

La dynamique d'activation des neurones par deux événements : le **spike** et la **désactivation**. Lorsque le neurone  $i$  émet un spike au temps  $t + 1$ , il devient **systématiquement activé**, c'est-à-dire que  $A_{t+1}^i = 1$ .

Par contre, lorsqu'il n'émet pas de spike, il peut se **désactiver** au temps  $t + 1$  avec une certaine probabilité  $\lambda$  ou bien conserver sa variable aléatoire d'activation. S'il se désactive, alors systématiquement,  $A_{t+1}^i = 0$ .

En définissant comme cela la dynamique de la variable d'activation, le neurone  $i$  se désactivera au temps  $t + 1$  si et seulement si

$$\beta \leq U_{t+1}^i \leq \beta + \lambda.$$

Nous appellerons l'*indicateur de désactivation* le terme  $\mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}$ . Nous voyons que nous devons par contre émettre l'hypothèse que

$$\beta + \lambda < 1.$$

La dynamique temporelle de la variable d'activation du neurone  $i$  suit donc l'équation suivante :

$$A_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} + \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} A_t^i (1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}).$$

## 3. Étude de la chaîne de Markov associée

### 3.1. Espace des états dans lequel évolue la chaîne

Chaque neurone peut prendre des valeurs dans l'espace  $\{0, 1, \dots, \theta\} \times \{0, 1\}$ . Le nombre d'état possible est ainsi  $2(\theta + 1)$ . Pour un système à  $N$  neurones évoluant dans l'espace  $\mathcal{X} = (\{0, 1, \dots, \theta\} \times \{0, 1\})^N$ , le nombre d'états est donc  $|\mathcal{X}| = 2(\theta + 1)N$ .

### 3.2. Transitions de la chaîne de Markov

Soit  $x \in \mathcal{X}$  un état possible du système de neurones. Nous notons

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \text{ avec } x_i = (v_i, a_i).$$

Nous avons bien sûr  $x_i \in \{0, 1, \dots, \theta\} \times \{0, 1\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ .

Depuis cet état  $x$ , nous définissons trois transitions élémentaires possibles, vers un état  $y \in \mathcal{X}$  :

- **Spike inefficace menant à l'activation d'un neurone** : notons  $i$  l'indice du neurone effectuant le spike. La transition suivante survient avec probabilité  $\beta$  :

$$\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ (v_2, a_2) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (\theta, 0) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ (v_2, a_2) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (0, 1) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix}.$$

- **Désactivation d'un neurone** : ici aussi,  $i$  est l'indice  $i$  du neurone se désactivant. Le système subit la transition suivante avec probabilité  $\lambda$ ,

$$\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (v_i, 1) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (v_i, 0) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix}.$$

- **Spike efficace** : ici encore, nous notons  $i$  l'indice du neurone effectuant le spike. La transition survient avec probabilité  $\beta$ , et s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \vdots \\ (\theta, 1) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ([v_1 + 1] \wedge \theta, a_1) \\ \vdots \\ (0, 1) \\ \vdots \\ ([v_N + 1] \wedge \theta, a_N) \end{pmatrix}.$$

Ces trois transitions élémentaires sont **mutuellement exclusives**, c'est-à-dire que, dans un même intervalle de temps (entre  $t$  et  $t + 1$ ), un neurone d'indice  $i$  ne peut pas se désactiver puis faire une spike inefficace (ou bien effectuer un spike efficace puis se désactiver). Par contre, les  $N$  neurones du système dans son ensemble peuvent tout à fait tous, ou en partie, subir une transition de façon indépendante. Par exemple, pour un système contenant  $N = 10$  neurones dans les bonnes configuration, nous pourrions tout à fait avoir 3 spikes efficaces, 0 spike inefficace, et 5 désactivations pendant le même intervalle temporel.

### 3.3. Mesure empirique

La mesure empirique associée à une chaîne de Markov permet de représenter d'une nouvelle façon notre système de neurones. Cette représentation se focalise sur les *couches* de potentiel de membrane plutôt que sur les neurones individuels (total de  $\theta + 1$  couches).

En langage classique, notre mesure empirique permet de compter le nombre de neurones présent à une couche  $v$  et dans un état d'activation  $a$  quelconques.

Dans le cas présent, la mesure empirique est elle-même une chaîne de Markov définie en plus sur un espace d'états plus petit. L'explication sera donnée un peu plus tard. **TO-DO : Expliquer pourquoi la mesure empirique est aussi une chaîne de Markov**

Soit  $x$  un état arbitraire de notre chaîne de Markov  $X_t$  à  $N$  neurones. En notant  $x_{v,a}^N$ , la mesure empirique du système, nous écrivons la définition suivante, pour tout  $v \in \{0, 1, \dots, \theta\}$  et tout  $a \in \{0, 1\}$  :

$$x_{v,a}^N = \sum_{i=1}^N \delta_{(V_t^i, A_t^i)}(v, a). \quad (1)$$

Introduisons également la notation suivante  $x_{v,\cdot}^N$ , qui nous sera utile pour compter le nombre de neurones possédant un potentiel de membrane  $v$ , toute variable d'activation confondue. Elle se définit par

$$x_{v,\cdot}^N = \sum_{i=1}^N \delta_{(V_t^i, A_t^i)}(v, 0) + \delta_{(V_t^i, A_t^i)}(v, 1). \quad (2)$$

Pour compter le nombre d'états possibles, il suffit de se référer au problème canonique de combinatoire : le nombre de façon de séparer un nombre  $n$  de  $\star$  par un nombre  $m$  de  $|$ . Cela donne

$$|\mathcal{X}| = \binom{N - 2\theta + 1}{2\theta + 1}.$$

**TO-DO : Donner exemple avec 5 étoiles et 2 barres ?**

### 3.4. Espace absorbant

#### 3.4.1. États absorbants

Le système n'émettra plus aucun saut lorsque :

- aucun neurone ne se trouve dans un état permettant un spike,
- tous les neurones sont désactivés.

Un état absorbant  $\alpha$  se définit donc de la façon suivante :

$$\alpha = \begin{pmatrix} (v_1, 0) \\ (v_2, 0) \\ \vdots \\ (v_N, 0) \end{pmatrix}, \quad \forall v_i < \theta.$$

#### 3.4.2. États presque-absorbants

Autour de ces états absorbants existent aussi des états qui mènent nécessairement vers un état absorbant après quelques pas de temps. Nous les appellerons les états *presque-absorbants*.

C'est le cas par exemple des systèmes où aucun neurone n'est en capacité de spiker où tous les potentiels de membrane sont inférieurs à  $\theta$ . En temps fini, les neurones vont se désactiver un à un jusqu'à atteindre l'état absorbant.

Un autre exemple est celui du système ayant deux neurones actifs dans la couche  $\theta$ , mais dont le reste des neurones se trouvent éparpillés dans les couches inférieures à  $\theta - 2$ . Après les deux spikes, le système se retrouve dans l'état précédent, où aucun neurone ne peut émettre de spike.

#### 3.4.3. Définition de l'espace absorbant

Nous notons  $\mathcal{A}$ , l'**espace rassemblant les états absorbants et presque-absorbants**.

$\mathcal{A}$  désigne les états à partir desquels le système est déjà absorbé ou finira nécessairement par l'être en un temps fini. Autrement dit, ce sont des configurations où l'activité neuronale est insuffisante pour maintenir une dynamique soutenue : la chaîne de Markov évolue alors inévitablement vers un état stable et inactif.

Pour chaque couche  $k$  du système de neurones, nous allons définir un sous-ensemble  $\mathcal{A}_k$  et définir  $\mathcal{A}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\theta} \mathcal{A}_k.$$

Chaque sous-ensemble  $\mathcal{A}_k$  impose une contrainte sur le nombre de neurones actifs dans les couches  $l \leq k$ , de façon à ce que le système ne puisse pas se maintenir dans le temps et finisse nécessairement par tomber dans un état réellement absorbant.

Définissons à présent les  $\mathcal{A}_k$ .  $\forall k \leq \theta$  :

$$\mathcal{A}_k = \left\{ X \in \mathcal{X} : \sum_{l=k}^{\theta} \mu(l, 1) \leq \theta - k \right\}.$$

Pour  $k = 0$ , nous avons le cas particulier suivant :

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ X \in \mathcal{X} : \mu(\theta, 0) + \sum_{l=0}^{\theta} \mu(l, 1) < \theta \right\}.$$

Ce que nous voulons pour représenter un groupe de neurones impliqué dans une tâche de mémorisation à court terme, c'est qu'ils puissent conjointement soutenir une activité neuronale sur un temps arbitrairement long. L'interruption de cette activité, traduirait une perturbation de cette mémorisation, et donc un oubli de l'information d'intérêt.

Nous allons petit à petit définir ce que « soutenir une activité neuronale sur un temps arbitrairement long » signifie en termes mathématiques.

Tout d'abord, cela signifie que la chaîne de Markov représentant notre système de neurones, ne doit pas être absorbée sur la fenêtre temporelle  $\llbracket 0, T \rrbracket$  sur laquelle nous l'étudions. Ensuite, cela veut dire que sur  $\llbracket 0, T \rrbracket$ ,  $X_t$  doit être capable d'émettre en continu des potentiels d'action :

Pour modéliser la fonction de mémoire court-terme, nous étudierons notre chaîne de Markov neuronale sur l'espace complémentaire  $\mathcal{A}^c$ , où elle pourra effectivement connaître une activité de spikes indéfiniment. Mais cela n'est pas suffisant

## TO-DO : TERMINER L'INTERPRÉTATION MÉMORIELLE & PLACER AU BON ENDROIT

Étudions maintenant l'irréductibilité de la chaîne de Markov sur cet espace .

### 3.5. Irréductibilité

#### 3.5.1. États transitoires et espace transitoire

Certains états du système de neurones ne font pas partie de  $\mathcal{A}^c$  mais ne sont pourtant pas atteignables à partir d'autres états non-absorbants. Nous appellerons les états de ce types les états *transitoires*. Le seul moyen pour notre système de se trouver dans un état transitoire, c'est de commencer dans cet état via les conditions initiales.

Pour illustrer notre propos, prenons l'état ne contenant aucun neurone dans la couche 0 et tous les neurones activés dans la couche  $\theta$ , c'est-à-dire  $x$  tel que  $x_{0,\cdot} = 0$  et  $x_{\theta,1} = N$ . Comme il possède tous ses neurones capables de spiker, c'est bien un état qui n'est pas absorbant. Il est pourtant transitoire car après son premier spike, et pour toujours après, il y aura toujours un neurone dans la couche 0, par définition des spikes.

Autre exemple : l'état tel que  $x_{\theta,1} = N - 1$  et  $x_{0,1} = 1$  est aussi transitoire. En fait, **tout état** qui possède plus de  $N - \theta$  neurones dans une de ses couches **est transitoire**. Cela est dû au fait qu'il n'est possible de rassembler au maximum que  $N - \theta$  neurones dans la couche  $\theta$ . À cause des  $\theta + 1$  couches, il faut un nombre de spikes égal à  $\theta$  pour amener tous les neurones dans la couche  $\theta$ . Cependant, les  $\theta$  spikes qui viennent d'être effectués entraînent la dispersion de  $\theta$  neurones dans les couches inférieures (de 0 à  $\theta - 1$ ).

Nous définissons donc l'**ensemble des états transitoires** comme suit :



$$\mathcal{T} = \{x \in \mathcal{X} : x_{0,\cdot} = 0\} \cup \{x \in \mathcal{X} : x_{v,\cdot} > N - \theta, \forall v = 0, \dots, \theta\}.$$

Pour prouver l'irréductibilité de la chaîne de Markov, nous nous placerons donc sur l'**ensemble des états irréductibles**  $\mathcal{X}_{\text{irr}} = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{T}^c$ .

**Théorème 3.1** (Irréductibilité chaîne de Markov conditionnellement à la non-absorption):  
Conditionnellement à sa présence sur  $\mathcal{X}_{\text{irr}}$ , la chaîne de Markov  $X_t = (V_t^i, A_t^i)$  est **irréductible**.

*Preuve:* Pour la lisibilité de cette preuve, nous commençons par noter :

- $O_e^k$  : l'opération de  $k$  spikes efficaces,
- $O_i^k$  : l'opération de  $k$  sauts inefficaces,
- $O_d^{k,v}$  : l'opération de désactivation de  $k$  neurones à la couche  $v$ .

Pour un état  $x \in \mathcal{X}_{\text{irr}}$ , ces opérations peuvent advenir avec une probabilité positive puisque l'espace  $\mathcal{X}_{\text{irr}}$  peut supporter un nombre  $k$  arbitraire de spikes.

Ainsi la notation  $O_e^k(x)$  désigne l'opération de  $k$  spikes efficaces depuis l'état  $x$ . Ces  $k$  spikes peuvent advenir tous en un seul pas de temps, si l'état  $x$  le permet (i.e. s'il possède au moins  $k$  neurones en couche  $\theta$ ). Mais ils peuvent être également effectué dans un ordre quelconque. Lorsque la distinction est nécessaire, cela sera précisé.

Soit  $x, y \in \mathcal{X}_{\text{irr}}$ . Notons  $m = x_{\cdot,0}$ , le nombre de neurones désactivés de l'état  $x$ . Nous allons montrer que nous pouvons toujours atteindre en un nombre fini d'opérations, un état  $x'''$  où tous les neurones sont activés (soit  $x'''_{\cdot,1} = N$ ) et avec  $N - \theta$  neurones à la couche  $\theta$  ( $x'''_{\theta,1} = N - \theta$ ) ainsi qu'un neurone par couche inférieure ( $x'''_{v,1} = 1, \forall v = 0, 1, \dots, \theta - 1$ ). Cela se produit comme suit :

$$\begin{aligned} x' &= O_e^\theta(x), \\ x'' &= O_i^m(x') \text{ où } m \text{ est le nombre de neurones désactivés,} \\ x''' &= \underbrace{O_e^1 \circ O_e^1 \dots \circ O_e^1}_{\theta \text{ fois}}(x''). \end{aligned}$$

D'où  $x'''$  tel que  $x'''_{\theta,1} = N - \theta$  et  $x'''_{v,1} = 1, \forall v = 0, 1, \dots, \theta - 1$ .

À partir de cet état  $x'''$ , montrons que nous pouvons atteindre l'état  $y$  en un nombre fini d'opérations. Cet état  $y \in \mathcal{X}_{\text{irr}}$  se définit de façon très générale par son nombre de neurones dans chaque couche.

Ainsi,  $\forall v \in \mathcal{V}$  :

$$y = \begin{pmatrix} (y_{\theta,0}^N, y_{\theta,0}^N) \\ \vdots \\ (y_{v,0}^N, y_{v,0}^N) \\ \vdots \\ (y_{0,0}^N, y_{0,0}^N) \end{pmatrix}$$

Nous allons prouver cela en définissant une suite  $y^l$  qui permet, depuis  $x'''$ , d'atteindre l'état  $y$  avec une probabilité positive. La suite se définit de la façon suivante : pour obtenir  $y^{l+1}$  à partir de  $y^l$ , on désactive à la couche  $\theta y_{\theta-l,\cdot}^N - 1$  neurones (soit le nombre total de neurones à la couche

$\theta - l$  moins un) puis on fait **ce même nombre de spikes inefficaces**. Ces deux opérations permettent de récupérer  $y_{\theta-l, \cdot}^N - 1$  neurones en couche  $(0, 1)$ . Nous construisons de cette façon progressivement l'état  $y$  en amenant l'exacte quantité de neurones qu'il possède à chaque couche à la bonne couche finale. Cela commence par ailleurs pour l'étape  $l = 0$  par amener  $y_{\theta, \cdot}^N$  en  $(0, 1)$ . Enfin, on fait **un spike efficace** pour monter les  $y_{\theta-l, \cdot}^N$  neurones à la couche supérieure. Formellement, cela donne initialement :

$$y^0 = O_i^{y_{\theta, \cdot}^N} \circ O_d^{y_{\theta, \cdot}^N, \theta}(x'''),$$

ainsi que plus généralement :

$$\forall l \in \{0, \dots, \theta - 1\}, y^{l+1} = O_e^1 \circ O_i^{y_{\theta-l, \cdot}^N, -1} \circ O_d^{y_{\theta-l, \cdot}^N, -1, \theta}(y^l).$$

Enfin, nous désactivons le bon nombre de neurones dans toutes les couches pour arriver à  $y$  :

$$y = O_{d,v}^{y_{v,0}}(y^\theta), \quad \forall v = 0, \dots, \theta.$$

Ce qui conclut la preuve. □

#### 4. Limite en champ moyen du processus

L'hypothèse de champ moyen que nous allons faire dans cette partie consiste à considérer un grand nombre de neurones  $N$  et à les considérer comme étant tous **identiques**, c'est-à-dire indiscernables et avec les mêmes valeurs pour conditions initiales :

$$\forall (v, a) \in \{0, 1, \dots, \theta\} \times \{0, 1\},$$

$$X_0^N = \begin{pmatrix} (v, a) \\ (v, a) \\ \vdots \\ (v, a) \end{pmatrix}.$$

Comme les neurones sont indiscernables, nous pouvons les compter simplement et au lieu d'écrire  $\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N$ , écrire directement  $\sum_{j=1}^N$ .

Avec le modèle utilisé dans les parties précédentes, lorsque nous ferons tendre  $N$  vers l'infini, la somme  $\sum_{j=1}^N A_t^{i,N} \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}}$  explosera. Pour conserver l'intégrité du modèle, nous allons ajouter un facteur  $\frac{1}{N}$  pour normaliser cette somme.

Conséquemment à l'ajout de ce terme, l'espace de  $V_t^{i,N}$  se voit altéré. De  $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, \theta\}$ , discret et incrémenté de 1, il deviendra incrémenté de  $\frac{1}{N}$ , soit  $\mathcal{V}^N = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1, \dots, \theta\}$ .  $N$  allant à l'infini, l'espace  $\mathcal{V}^N$  deviendra **continu**.

Ainsi l'équation de la dynamique du potentiel de membrane,

$$V_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} \left( V_t^i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N A_t^j \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} \right).$$

s'écrit désormais

$$V_{t+1}^{i,N} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} \left( V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} \right)$$

### 4.1. Processus limites

Nous allons noter  $\bar{V}_t^i$  et  $\bar{A}_t^i$  les valeurs des **processus limites** de potentiel de membrane et d'activation pour le neurone  $i$  au temps  $t$ . Remarquons de suite que les processus  $V_t^{i,N}$  et  $\bar{V}_t^i$  partagent tous les deux la même variable  $U_t^i$ .

La dynamique du processus limite de l'activation de la synapse du neurone  $i$  reste définie de façon similaire que la dynamique du processus fini :

$$\bar{A}_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} + \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i (1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}).$$

Cependant, la variable aléatoire  $\bar{V}_t^i$  se voit modifiée plus profondément par l'hypothèse de champ moyen. En effet, le champ moyen suppose l'existence d'une certaine « loi des grands nombres » stipulant que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right].$$

Ainsi la dynamique du processus limite du potentiel de membrane s'écrit :

$$\bar{V}_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} \left( \bar{V}_t^i + \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right] \right).$$

La variable aléatoire  $V_t^{i,N}$  avait été définie comme à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, \theta\} \subset \mathbb{N}$ . Or nous voyons désormais que  $\bar{V}_t^i$  ne respecte plus cette définition, notamment car  $\mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right]$  est un **nombre réel** et dépendant du temps  $t$ .

Supposons que

$$\gamma_t = \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right]. \quad (3)$$

Intuitivement, cela signifie qu'à chaque pas de temps, le potentiel de membrane limite  $\bar{V}_t^i$  augmente d'une quantité fixée  $\gamma_t$ , inconnue et dépendante du temps.

Cependant, comme nous travaillons sur une fenêtre temporelle fixée  $\llbracket 0, T \rrbracket$ , les valeurs de  $\gamma_t$  sont fixées, et au nombre de  $T + 1$ . Elles peuvent s'écrire, par exemple,

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_T.$$

Parmi ces  $T + 1$  valeurs, notons  $\gamma^*$  la plus petite :

$$\gamma^* = \inf \{ \gamma_t, \forall t \in \llbracket 0, T \rrbracket \},$$

et  $t^*$  le temps où  $\gamma_t = \gamma^*$ .

Ceci permet de fixer les valeurs prises par la variable aléatoire  $\bar{V}_t^i$  sur la fenêtre temporelle  $\llbracket 0, T \rrbracket$ . Notons d'ailleurs  $\bar{\mathcal{V}}_T$ , l'espace de ces valeurs.

Le potentiel limite  $\bar{V}_t^i$  se comporte de la même façon que le potentiel fini. Comme lui, il sera en capacité d'émettre un potentiel d'action après avoir dépassé le potentiel seuil  $\theta$ .

Notons  $K^\gamma$ , la valeur maximale, qui dépendra des  $\gamma_t$ , que peut prendre le potentiel de membrane limite.  $K^\gamma$  correspond au nombre minimal de pas nécessaires à  $\bar{V}_t^i$  pour dépasser  $\theta$ .  $K^\gamma$  est donc un **entier positif**, défini de la façon suivante :

$$K^\gamma = \left\lceil \frac{\theta}{\gamma^*} \right\rceil.$$

## 4.2. Existence des processus limites

Comme les deux processus limites  $(\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i)$  prennent leurs valeurs dans des espaces discrets et finis, ils sont tous les deux bien définis. L'existence des processus ne pose ainsi aucun problème, et nous pouvons écrire le théorème suivant :

**Théorème 4.1** (Existence des processus limites): Pour tout  $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$ , il existe un unique processus  $(\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i)$  avec un  $\gamma_t$  associé.

**Théorème 4.2** (Propagation du chaos avec  $\varphi$  modifiée): Étant donné l'existence du processus limite donné dans le Théorème 4.1 et son  $\gamma_t$  associé, et une nouvelle fonction  $\varphi^*$ , prise lipschitz, et approchant  $\varphi$ , nous avons

$$\mathbb{E}|V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i| + \mathbb{E}|A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i| \leq C_T \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}.$$

$C_T$  est ici une constante qui fait intervenir les  $\gamma_t$  et donc qui dépend de la fenêtre temporelle  $\llbracket 0, T \rrbracket$ .

**Corollaire 4.3** (Convergence des processus finis vers les processus limites):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}|V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i| + \mathbb{E}|A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i| = 0,$$

ce qui revient à dire que, pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ , et pour un  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ , avec  $T$  nombre entier positif :

$$(V_t^{i,N}, A_t^{i,N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i).$$

**TO-DO : À développer et à terminer**

## 4.3. Convergence vers les processus limites

**TO-DO : À mettre à jour puisque la preuve s'est effondrée** Nous allons démontrer que les processus finis convergent vers les processus limites. Les processus de voltage et d'activation doivent tous deux converger vers leurs processus limites respectifs.

Ainsi, si nous définissons la **distance entre les processus de potentiel de membrane**

$$d_t^{i,N} = \mathbb{E}|V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i|,$$

ainsi que **distance entre les processus d'activation**

$$\delta_t^{i,N} = \mathbb{E}|A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i|,$$

nous pouvons écrire la **distance globale** entre le processus de neurone et sa limite comme

$$D_t^{i,N} = d_t^{i,N} + \delta_t^{i,N}. \quad (4)$$

Étant donné Théorème 4.2,

**Théorème 4.4** (Convergence des processus finis vers les processus limites): Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ , et pour un  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ , avec  $T$  nombre entier positif,

$$(V_t^{i,N}, A_t^{i,N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i),$$

ce qui revient à dire que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_t^{i,N} \rightarrow 0.$$

*Preuve:* Pour prouver le Corollaire 4.3, nous allons consiste à trouver une majoration de  $D_{t+1}^{i,N}$  par une fonction de  $N$  qui puisse disparaître lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

La trame de la preuve est la suivante :

1. Trouver des majorations de  $\delta_{t+1}^{i,N}$  et  $d_{t+1}^{i,N}$  qui utilisent  $D_t^{i,N}$ .
2. Utiliser ces majorations pour trouver une majoration de  $D_{t+1}^{i,N}$  en fonction de  $D_t^{i,N}$  et d'une fonction de  $N$  qui pourra disparaître lorsque  $N$  deviendra grand.
3. Montrer par récurrence que  $D_{t+1}^{i,N}$  est bornée par une fonction de  $N$  qui tend vers zéro lorsque  $N$  tend vers l'infini.

#### 4.3.1. Majoration de $\delta_{t+1}^{i,N}$

**TO-DO : Afficher correctement l'équation** Commençons par majorer  $\delta_{t+1}^{i,N}$ . De la définition, il vient :

$$\begin{aligned} \delta_{t+1}^{i,N} &= \mathbb{E} |A_{t+1}^{i,N} - \bar{A}_{t+1}^i|, \\ &= \mathbb{E} \left| \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \right. \\ &\quad \left. + A_t^{i,N} \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} (1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}) - \bar{A}_t^i \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} (1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}) \right|, \\ &= \mathbb{E}[e] \text{ pour simplifier l'écriture pour la suite.} \end{aligned}$$

Remarquons que les trois événements suivants sont disjoints :

- L'événement **2** = {processus fini et limite spikent simultanément en  $t + 1$ } peut s'écrire formellement :

$$\mathbf{2} = \{0 < U_{t+1}^i < \beta\} \cap \{V_t^{i,N} = \bar{V}_t^i = \theta\}. \quad (5)$$

- L'événement **1** = {processus fini ou (exclusif) limite spike en  $t + 1$ } =  $\{0 < U_{t+1}^i < \beta\} \cap \{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}$ .
- L'événement **0** = {aucun processus ne spike au temps  $t + 1$ } =  $\{U_{t+1}^i > \beta\} \cup \{V_t^{i,N} < \theta \text{ et } \bar{V}_t^i < \theta\}$ .

Nous pouvons donc écrire

$$\delta_{t+1}^{i,N} = \mathbb{P}(\mathbf{2})\mathbb{E}[e|\mathbf{2}] + \mathbb{P}(\mathbf{1})\mathbb{E}[e|\mathbf{1}] + \mathbb{P}(\mathbf{0})\mathbb{E}[e|\mathbf{0}]. \quad (6)$$

- Si **2** est vérifié, alors seules les indicatrices de spike valent un, et les autres sont nulles, soit  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 1$  et donc forcément  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 0$ . Dans ce cas, très simplement,

$$\mathbb{E}[e|2] = \mathbb{E}[1 - 1] = 0.$$

- Si 1 est vérifié, nous avons alors  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} \neq \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}}$  où l'une des deux indicatrices de spike vaut un, et l'autre zéro.

Le fait que l'une des deux indicatrices de spike vale un, implique nécessaire que  $0 < U_{t+1}^i < \beta$ . Comme les événements de saut et de désactivation sont mutuellement exclusifs nous avons également dans ce cas là  $\mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}} = 0$ .

Nous avons donc deux possibilités, selon lequel des processus spikent :

$$\mathbb{E}[e|1] = \begin{cases} \mathbb{E}[1 - A_t^{i,N}] & \text{si le processus limite spike} \\ \mathbb{E}[1 - \bar{A}_t^i] & \text{si le processus normal spike} \end{cases},$$

$$\leq 1.$$

- Si 0 est vérifié, alors seulent  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 1$  dans  $\mathbb{E}[e|0]$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e|0] &= \mathbb{E}\left|A_t^{i,N} \left(1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right) - \bar{A}_t^i \left(1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right)\right|, \\ &\leq \mathbb{E}\left|A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i\right| + \mathbb{E}\left|(A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i) \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right|, \\ &\leq \delta_t^{i,N} + \mathbb{E}\left|(A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i) \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right|. \end{aligned}$$

Rappelons-nous que la variable auxiliaire uniforme  $U_t^i$  est distribuée uniformément sur  $[0, 1]$  de façon indépendante du reste des variables aléatoires. Ainsi, nous pouvons continuer de simplifier comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e|0] &\leq \delta_t^{i,N} + \mathbb{E}\left|A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i\right| \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right], \\ &\leq \delta_t^{i,N} + \delta_t^{i,N} \mathbb{P}(\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda), \\ &\leq (1 + \lambda) \delta_t^{i,N}. \end{aligned}$$

En reprenant Équation 6, nous aboutissons à :

$$\delta_{t+1}^{i,N} \leq \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(0)(1 + \lambda) \delta_t^{i,N}. \quad (7)$$

### TO-DO : Adapter la preuve en supposant phi lipschitz

La probabilité  $\mathbb{P}(1)$  peut s'écrire :

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}\left(\{0 < U_{t+1}^i < \beta\} \cap \{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}\right) = \beta \mathbb{P}\left(\{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}\right). \quad (8)$$

Remarquons la proposition suivante, qui nous permet d'introduire  $d_t^{i,N}$  dans la majoration de  $\mathbb{P}(1)$ .

#### Proposition 4.5:

$$\mathbb{P}\left(\{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}\right) \leq C^N d_t^{i,N}.$$

$$\text{où } C^N = \frac{1}{\min\left(\frac{1}{N}, \left|\theta - \sum_{t=L}^{L+K+\frac{1}{\beta}} \gamma_t\right|\right)}$$

*Preuve:* Commençons par réécrire  $\mathbb{P}(\{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\})$  :

$$\mathbb{P}(\{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}}].$$

Remarquons ensuite que l'événement  $\{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}$  implique que les potentiels de membrane des processus fini et limite sont différents, c'est-à-dire que  $V_t^{i,N} \neq \bar{V}_t^i$ .

Par construction,  $V_t^{i,N}$  et  $\bar{V}_t^i$  ne peuvent prendre que des valeurs discrètes comprises entre zéro et  $\theta$ . Il en découle que la distance entre les deux potentiels de membrane est nécessairement supérieure ou égale à 1, soit  $|V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i| \geq 1$ .

Ainsi, nous avons :

$$|V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i| \geq \mathbf{1}_{\{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}},$$

$$\text{et donc } \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V_t^{i,N} < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}}] \leq \mathbb{E}[|V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i|] = d_t^{i,N}.$$

□

Si nous appliquons la Proposition 4.5 à Équation 8, nous obtenons :

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}) \leq \beta d_t^{i,N}. \quad (9)$$

Introduisons dans Équation 7 et il vient :

$$\delta_{t+1}^{i,N} \leq \beta d_t^{i,N} + \mathbb{P}(\mathbf{0})(1 + \lambda)\delta_t^{i,N}. \quad (10)$$

Concernant  $\mathbb{P}(\mathbf{0})$ , nous pouvons tout simplement la majorer par 1. Nous obtenons finalement :

$$\delta_{t+1}^{i,N} \leq \beta d_t^{i,N} + (1 + \lambda)\delta_t^{i,N}.$$

Soit, en posant  $c = \max(\beta, (1 + \lambda))$  :

$$\begin{aligned} \delta_{t+1}^{i,N} &\leq \max(\beta, 1 + \lambda)(d_t^{i,N} + \delta_t^{i,N}), \\ &\leq c D_t^{i,N}. \end{aligned}$$

Grâce à cette dernière ligne, nous avons désormais la première pièce du puzzle. Si nous réécrivons Équation 4, nous pouvons dire que :

$$D_{t+1}^{i,N} \leq d_{t+1}^{i,N} + c D_t^{i,N}. \quad (11)$$

#### 4.3.2. Majoration de $d_{t+1}^{i,N}$

À présent, nous allons nous attaquer à la majoration de  $d_{t+1}^{i,N}$ . De la définition, il vient :

$$\begin{aligned} d_{t+1}^{i,N} &= \mathbb{E}[|V_{t+1}^{i,N} - \bar{V}_{t+1}^i|], \\ &= \mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} \left( V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} \right) - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} \left( \bar{V}_t^i + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i] \right)}_{= f \text{ pour simplifier l'écriture par la suite}}\right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons ici aussi utiliser les trois événements disjoints **2**, **1** et **0** définis précédemment pour écrire :

$$d_{t+1}^{i,N} = \mathbb{P}(\mathbf{2})\mathbb{E}[f|\mathbf{2}] + \mathbb{P}(\mathbf{1})\mathbb{E}[f|\mathbf{1}] + \mathbb{P}(\mathbf{0})\mathbb{E}[f|\mathbf{0}]. \quad (12)$$

- Si l'événement **2** est vérifié, alors les indicatrices d'absence de spike sont nulles, c'est-à-dire  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 0$ , ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{2}] = 0.$$

- Si l'événement **1** est vérifié, alors seule une des indicatrices d'absence de spike est nulle, soit  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = 0$  ou  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 0$ .  
Il reste donc dans  $\mathbb{E}[f|\mathbf{1}]$  :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{1}] = \begin{cases} \mathbb{E}\left[V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N}\right] & \text{si le processus limite spike} \\ \mathbb{E}\left[\bar{V}_t^i + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i\right]\right] & \text{si le processus fini spike} \end{cases}.$$

Dans tous les cas, nous pouvons majorer par  $\theta$  car  $V_t^{i,N}$  est borné par  $\theta$ .

**TO-DO Vériidique ?**

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{1}] \leq \theta \text{ par construction.}$$

- Si l'événement **0** est vérifié, alors les indicatrices d'absence de spike valent toutes deux un, c'est-à-dire  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 1$ . Cela nous permet d'écrire :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] = \mathbb{E}\left[V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \left(\bar{V}_t^i + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i\right]\right)\right].$$

Cette quantité sera majorée plus loin, car son développement est un peu plus long.

En reprenant Équation 12, et en utilisant Équation 9 et  $\mathbb{P}(\mathbf{0}) \leq 1$ , nous obtenons :

$$d_{t+1}^{i,N} \leq \beta \theta d_t^{i,N} + \mathbb{E}[f|\mathbf{0}]. \quad (13)$$

Maintenant, nous allons développer  $\mathbb{E}[f|\mathbf{0}]$ . Ajoutons et retirons  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j$  :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] = \mathbb{E}\left[V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \left(\bar{V}_t^i + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i\right]\right) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right]$$

Posons

$$\bar{M}_t^i = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i\right] \right),$$

nous avons alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f|\mathbf{0}] &= \mathbb{E}\left[V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j + \frac{1}{N} \bar{M}_t^i\right], \\ &\leq \mathbb{E}\left[V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i\right] + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right| + \frac{1}{N} \mathbb{E}|\bar{M}_t^i|. \end{aligned} \quad (14)$$

Pour majorer cette quantité, énonçons tout d'abord la proposition suivante :



**Proposition 4.6:**

$$\mathbb{E}|\overline{M}_t^i| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

*Preuve:* Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |\overline{M}_t^i| &= \sqrt{|\overline{M}_t^i|^2}, \\ \Rightarrow \mathbb{E}|\overline{M}_t^i| &= \mathbb{E}\left[\sqrt{|\overline{M}_t^i|^2}\right], \\ \Rightarrow \mathbb{E}|\overline{M}_t^i| &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right]} \text{ par Jensen concave.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right] \Big)^2 \Big], \\ &\left(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right]\right)^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} \left(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^k \leq \phi(\overline{V}_t^k)\}} \overline{A}_t^k - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^k \leq \phi(\overline{V}_t^k)\}} \overline{A}_t^k\right]\right) \left(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right]\right) \\ &\left(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right]\right)^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} \mathbb{E}\left[\left(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^k \leq \phi(\overline{V}_t^k)\}} \overline{A}_t^k - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^k \leq \phi(\overline{V}_t^k)\}} \overline{A}_t^k\right]\right) \left(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right]\right)\right] \\ &\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right] + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} \text{Cov}\left(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^k \leq \phi(\overline{V}_t^k)\}} \overline{A}_t^k, \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right). \end{aligned}$$

Or, comme nous travaillons dans le cadre champ moyen, les neurones sont des copies indépendantes les uns des autres. Ainsi  $\text{Cov}\left(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^k \leq \phi(\overline{V}_t^k)\}} \overline{A}_t^k, \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right) = 0$  et

$$\mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right] = \sum_{j=1}^N \text{Var}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right] = N \text{Var}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right].$$

Comme  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j \in \{0, 1\}$ , alors  $0 \leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right] \leq 1$ , ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right] \left(1 - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)\}} \overline{A}_t^j\right]\right) \leq \frac{1}{4}, \\ \Rightarrow \mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right] &\leq \frac{N}{4}, \\ \Rightarrow \sqrt{\mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right]} &\leq \sqrt{\frac{N}{4}}, \\ \text{d'où } \mathbb{E}|\overline{M}_t^i| &\leq \frac{\sqrt{N}}{2}. \end{aligned}$$

□

On reprend Équation 14, avec la Proposition 4.6, pour écrire :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] \leq d_t^{i,N} + \mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} A_t^{i,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i\right| + \frac{1}{2\sqrt{N}}. \quad (15)$$

Pour conclure la majoration de  $\mathbb{E}[f|\mathbf{0}]$ , il reste uniquement à majorer le terme  $\mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right|$ .

**Proposition 4.7:**

$$\mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right| \leq \beta(\delta_t^{j,N} + d_t^{j,N}).$$

*Preuve:* Commençons par réécrire  $\mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right|$  en utilisant les trois événements **2**, **1** et **0** mais cette fois appliqués au neurone  $j$ .

Pour alléger l'écriture, notons également  $g = \left|A_t^{j,N} \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} - \bar{A}_t^j \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}}\right|$

Écrivons grâce à ces événements :

$$\mathbb{P}(\mathbf{2})\mathbb{E}[g|\mathbf{2}] + \mathbb{P}(\mathbf{1})\mathbb{E}[g|\mathbf{1}] + \mathbb{P}(\mathbf{0})\mathbb{E}[g|\mathbf{0}] \quad (16)$$

- Si l'événement **2** est vérifié, alors les indicatrices de spike valent toutes les deux un ( $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} = 1$ ), ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}[g|\mathbf{2}] = \mathbb{E}|A_t^{j,N} - \bar{A}_t^j| = \delta_t^{j,N}.$$

- Si l'événement **1** est vérifié, alors une des indicatrices de spike vaut zéro et l'autre un. Il reste donc dans  $\mathbb{E}[g|\mathbf{1}]$  :

$$\mathbb{E}[g|\mathbf{1}] = \begin{cases} \mathbb{E}|A_t^{j,N}| \\ \mathbb{E}|\bar{A}_t^j| \end{cases} \leq 1 \text{ dans tous les cas.}$$

- Si l'événement **0** est vérifié, alors les indicatrices de spike valent toutes les deux zéro, aboutissant à :

$$\mathbb{E}[g|\mathbf{0}] = 0.$$

Reprenons à présent Équation 16 :

$$\mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right| = \mathbb{P}(\mathbf{2})\delta_t^{j,N} + \mathbb{P}(\mathbf{1}). \quad (17)$$

Pour borner  $\mathbb{P}(\mathbf{2})$ , repartons de sa définition Équation 5 et utilisons le fait que la variable  $U_t^i$  est indépendante de toutes les autres variables aléatoires.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{2}) &= \mathbb{P}(0 < U_{t+1}^i < \beta) \mathbb{P}(V_t^{i,N} = \bar{V}_t^i = \theta), \\ &= \beta \mathbb{P}(V_t^{i,N} = \bar{V}_t^i = \theta). \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{P}(\mathbf{2}) \leq \beta. \quad (18)$$

En utilisant Équation 9 pour majorer  $\mathbb{P}(1)$ , et Équation 18 pour borner  $\mathbb{P}(2)$ , nous transformons Équation 17 en :

$$\mathbb{E} \left| \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j \right| \leq \beta(\delta_t^{j,N} + d_t^{i,N}), \quad (19)$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

Enfin, en reprenant Équation 15 avec les éléments précédents et Proposition 4.7, nous avons :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] \leq d_t^{i,N} + \beta(\delta_t^{i,N} + d_t^{i,N}) + \frac{1}{2\sqrt{N}}. \quad (20)$$

Ultimement, pour écrire la majoration définitive de  $d_{t+1}^{i,N}$ , nous pouvons repartir de Équation 13 et utiliser Équation 20 pour écrire :

$$\begin{aligned} d_{t+1}^{i,N} &\leq \beta\theta d_t^{i,N} + \left( d_t^{i,N} + \beta(\delta_t^{i,N} + d_t^{i,N}) + \frac{1}{2\sqrt{N}} \right), \\ d_{t+1}^{i,N} &\leq (\beta\theta + (1 + \beta))d_t^{i,N} + \beta\delta_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Nous pouvons écrire que

$$d_{t+1}^{i,N} \leq c' D_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}, \quad (22)$$

où  $c' = \beta\theta + 1 + \beta$ .

Si nous combinons la première pièce Équation 11 avec la seconde pièce du puzzle Équation 22, nous obtenons enfin,

$$\begin{aligned} D_{t+1}^{i,N} &\leq c' D_t^{i,N} + c D_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}, \\ &\leq C D_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

avec  $C$  la constante suivante :  $C = \max(c', c)$ .

Rappelons-nous que les processus sont initialisés de la même façon, ce qui signifie que  $D_0^{i,N} = 0$ .

Ainsi, en  $t = 1$  :

$$D_1^{i,N} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

Poursuivant l'itération, nous avons :

$$\begin{aligned} D_2^{i,N} &\leq C D_1^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}} = (C + 1) \frac{1}{2\sqrt{N}} \text{ puis,} \\ D_3^{i,N} &\leq C D_2^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}} \leq C(C + 1) \frac{1}{2\sqrt{N}} + \frac{1}{2\sqrt{N}} = (C^2 + C + 1) \frac{1}{2\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Ce qui nous fait aboutir à :

$$D_t^{i,N} \leq \left( \sum_{k=0}^{t-1} C^k \right) \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

Or puisque  $C$  est une combinaison finie d'opérations sur des paramètres finis de notre modèle, et que nous nous sommes placés sur une fenêtre temporelle finie, soit  $t \in [0, T]$ , pour tout  $T \in \mathbb{N}$  avec  $T > 0$ .

Ainsi un polynôme en  $C$  de degré  $t - 1$  est nécessairement fini, c'est-à-dire  $\sum_{k=0}^{t-1} C^k < \infty$ , impliquant finalement que,

$$D_t^{i,N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Ce qui parachève la preuve du Corollaire 4.3 ! □

#### 4.4. Mesure invariante

L'objectif de cette section est de calculer la mesure invariante, ou stationnaire, associée à la chaîne de Markov limite  $\bar{X}_t = (\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i)$  étudiée dans la partie précédente.

Pour la chaîne de Markov  $X_t = (V_t^i, A_t^i)$ , l'état  $(0, 1)$  est un **état de régénération**, pour lequel la chaîne perd tout lien avec le passé.

Introduisons maintenant  $T_{(0,1)}$ , le temps, **aléatoire**, que met  $X_t$  pour arriver à l'état  $(0, 1)$  en partant de celui-ci. Formellement :

$$T_{(0,1)} = \inf\{t > 0 : X_t = (0, 1) \text{ sachant que } X_0 = (0, 1)\}.$$

Pour calculer  $\mathbb{E}_{(0,1)}[T_{(0,1)}]$ , il suffit de remarquer que la chaîne  $X_t$ , pour retourner en  $(0, 1)$  en partant de  $(0, 1)$  va nécessairement d'abord effectuer  $K^\gamma$  sauts successifs, de taille  $\gamma^*$  chacun. Ensuite, elle devra attendre un temps aléatoire avant d'émettre un potentiel d'action. Ce temps aléatoire suit une loi géométrique de paramètre  $\beta$ .

Alors,

$$\mathbb{E}_{(0,1)}[T_{(0,1)}] = K^\gamma + \frac{1}{\beta}. \quad (23)$$

Cela nous permet de définir la **mesure stationnaire** de notre processus limite de la façon suivante. Prenons  $v \in \{0, 1, \dots, \theta\}$  et  $a \in \{0, 1\}$  :

$$\pi^{K^\gamma}((v, a)) = \frac{1}{\mathbb{E}_{(0,1)}[T_{(0,1)}]} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,a)\}} \right]. \quad (24)$$

##### TO-DO : Justifier définition mesure stationnaire

La variable aléatoire  $\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}}$  représente le **temps passé** dans l'état  $(v, 1)$  par la chaîne.

Son calcul, et celui de  $\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}} \right]$  va dépendre des valeurs prises par  $v$ .

##### 4.4.1. Cas où $v < K^\gamma \gamma^*$

Dans le cas présent,  $\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}}$  vaut exactement un si le neurone ne subit aucune désactivation avant la couche  $v$ , ce qui arrive avec probabilité  $(1 - \lambda)^v$ . S'il se désactive avant  $v$ , alors  $\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}}$  est nulle.

Ainsi, pour  $v < K^\gamma \gamma^*$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}} \right] = (1-\lambda)^v. \quad (25)$$

De façon similaire, pour  $a = 0$ ,  $\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,0)\}}$  vaut un si le neurone subit une désactivation avant la couche  $v$ , ce qui arrive avec probabilité  $1 - (1-\lambda)^v$ . Sinon, le temps passé dans l'état  $(v, 0)$  est nul. D'où,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,0)\}} \right] = 1 - (1-\lambda)^v. \quad (26)$$

Finalelement, nous avons

$$\forall v < K\gamma, \pi^{K\gamma}((v, 1)) = \frac{(1-\lambda)^v}{K\gamma + \frac{1}{\beta}},$$

ainsi que

$$\pi^{K\gamma}((v, 0)) = \frac{1 - (1-\lambda)^v}{K\gamma + \frac{1}{\beta}}.$$

#### 4.4.2. Cas où $v = K\gamma\gamma^*$

Ici, le neurone peut, avec probabilité positive, passer un temps plus long qu'un pas de temps dans l'état  $(K\gamma, 1)$ . Le neurone quittera l'état  $(K\gamma, 1)$  lors de l'émission d'un spike, ou après une désactivation. Si nous notons  $T_\beta$  le temps aléatoire avant l'émission d'un spike et  $T_\lambda$ , le temps aléatoire avant la désactivation du neurone, nous pouvons alors écrire que :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(K\gamma,1)\}} \right] = \mathbb{E}[\min(T_\beta, T_\lambda)].$$

Comme  $T_\beta$  suit une loi géométrique de paramètre  $\beta$  et  $T_\lambda$  suit une loi géométrique de paramètre  $\lambda$ , nous avons :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(K\gamma,1)\}} \right] = \frac{1}{\beta + \lambda}. \quad (27)$$

Avec Équation 23 et Équation 27, nous aboutissons donc à la mesure stationnaire suivante pour l'état  $(K\gamma, 1)$  :

$$\pi^{K\gamma}((K\gamma, 1)) = \frac{1}{(K\gamma + \frac{1}{\beta})(\beta + \lambda)}. \quad (28)$$

Enfin, pour l'état  $(K\gamma, 0)$ , étant donné que  $\pi$  est une mesure de probabilité, nous pouvons écrire :

$$\pi^{K\gamma}((K\gamma, 0)) = 1 - \left( \sum_{a=0}^1 \sum_{v=0}^{(K-1)\gamma} \pi^{K\gamma}((v, a)) + \pi^{K\gamma}((K\gamma, 1)) \right).$$

#### 4.4.3. Équilibres de la mesure stationnaire

Trouver les équilibres de la mesure stationnaire revient à (...) **TO-DO : Justifier l'étude des équilibres avec la mémoire**

Nous cherchons donc les points tel que

$$\pi^{K^\gamma}((v, a)) = \gamma.$$

Développons en se rappelant de Équation 3 :

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_{t^*}^i \right] = \mathbb{E} \left[ \phi(\bar{V}_{t^*}^i) \bar{A}_{t^*}^i \right], \\ &= \sum_{a=0}^1 \sum_{k=0}^{K^\gamma} \phi(k\gamma) \cdot a \cdot \pi^{K^\gamma}((k\gamma, a)). \end{aligned}$$

Or, comme  $\phi(v)$  est nulle tant que  $v < \theta$ , tous les termes, sauf celui où  $k = K^\gamma$  vont s'annuler, laissant ainsi :

$$\gamma = \phi(K^\gamma \gamma) \pi^{K^\gamma}((K^\gamma \gamma, 1)),$$

soit, avec Équation 28 :

$$\gamma = \beta \frac{1}{\left(K^\gamma + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}.$$

Ainsi trouver les points d'équilibre de la mesure stationnaire revient à résoudre l'équation suivante :

$$f(\gamma) = \gamma - \frac{\beta}{\left(\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)} = 0. \quad (29)$$

À cause de la fonction partie entière, cette équation n'est pas triviale à résoudre.

Premièrement, pour  $\gamma \rightarrow 0$ , l'Équation 29 admet une solution, triviale, correspondant à l'absorption du système en zéro.

Cependant, nous sommes à la recherche d'équilibres non nuls, qui pourraient correspondre à (...). **TODO : Interpréter solution des équilibres**

Grâce à Fig. 1, et à Équation 29, nous pouvons voir que  $f$  est une fonction **croissante** et **continue par morceau**. Pour annuler  $f$ , nous allons chercher des valeurs de  $\gamma$ , où  $f < 0$ . Puis,  $\gamma$  augmentant, la croissance linéaire de  $f$  la fera nécessairement croiser l'axe des abscisses.

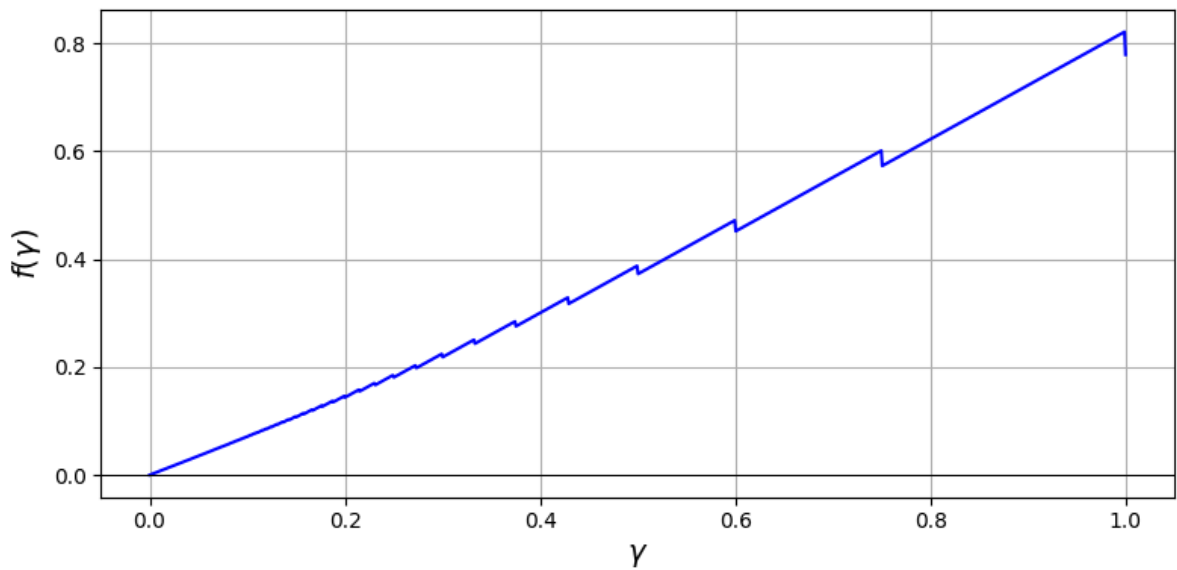


Fig. 1. – Représentation de  $f$  pour  $\gamma$  compris entre 0 et 1, avec  $\theta = 3$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\lambda = 0.09$ .

**Proposition 4.8:** Si

$$\theta < \frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)},$$

alors il existe au moins une solution pour Équation 29.

*Preuve:* Supposons que  $\gamma > \theta$ . Ceci implique que  $\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil = 1$ . Ainsi, pour tout  $\gamma > \theta$ , le nombre  $\frac{\beta}{\left(\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$  devient une **constante**, égale à  $\frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$ . Ce qui veut dire que tant que  $\gamma$  se trouve dans l'intervalle  $[\theta, 1]$ , la fonction  $f$  est **continue**.

Et donc si jamais l'équilibre  $\frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$  se trouve aussi dans  $[\theta, 1]$ , alors il sera nécessairement atteint, puisque la fonction est continue sur ce même intervalle. D'où la condition suffisante suivante :

$$\theta < \frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)},$$

concluant la preuve. Le tout est illustré

□

**Remarque 4.9** ( $f$  peut admettre d'autres équilibres grâce aux sauts de  $\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil$ ): Si jamais  $\theta > \frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$ , un ou plusieurs équilibres peuvent tout de même exister, grâce aux sauts de la fonction  $\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil$ . Ceci est illustré grâce à la Fig. 3.

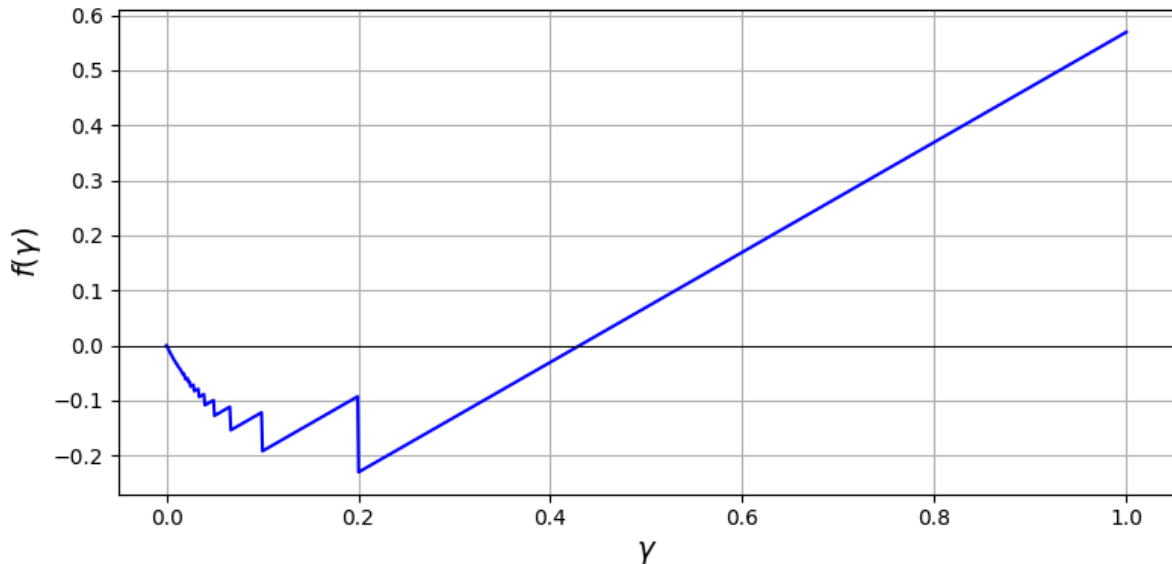


Fig. 2. – Représentation de  $f$  pour  $\gamma$  compris entre 0 et 1. Ici  $\theta = 0.2$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\lambda = 0.09$ . Pour cette combinaison de paramètres, le point d'équilibre est  $\gamma = \frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)} = 0.430622009569378$ . Nous avons donc bien  $\theta < \frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$ , et  $f$  coupe proprement l'axe des abscisses en  $\frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$ .

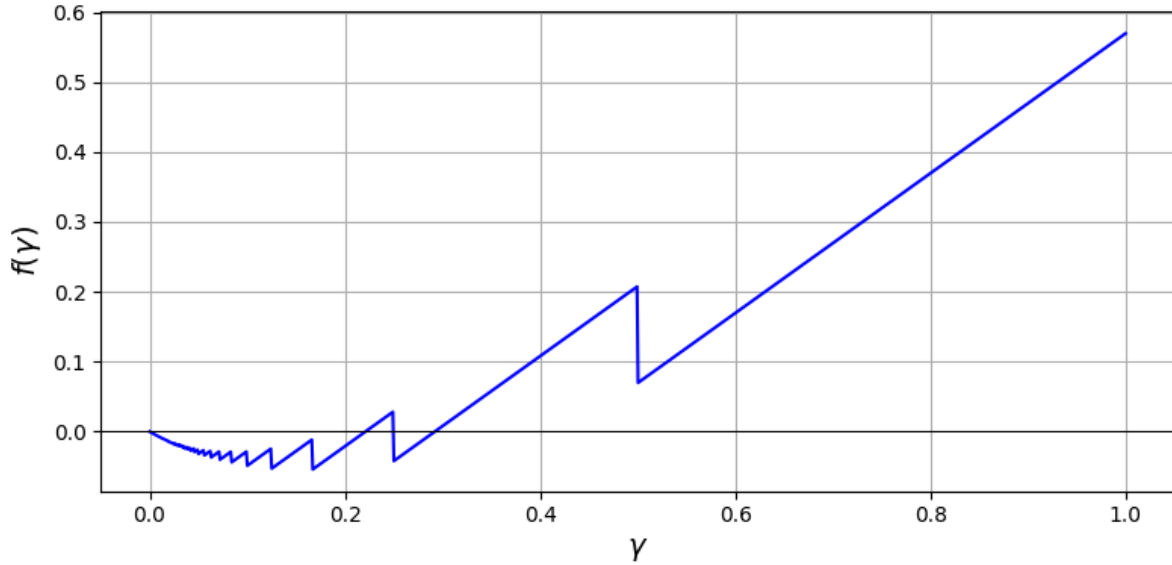


Fig. 3. – Illustration de la présence de plusieurs équilibres. Ici  $\theta = 0.5$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\lambda = 0.09$ , donnant  $\theta > \frac{\beta}{(1+\frac{1}{\beta})(\beta+\lambda)}$ . Pourtant,  $f(\gamma)$  s'annule deux fois dans l'intervalle  $(0, \theta]$ .

## 5. Conclusion

## 6. Références

### Références

- [1] M. André et C. Pouzat, « A Quasi-Stationary Approach to Metastability in a System of Spiking Neurons with Synaptic Plasticity », *Mathematical Neuroscience and Applications*, p. 7668, janv. 2025, doi: 10.46298/mna.7668.
- [2] P. Brémaud, *Discrete Probability Models and Methods: Probability on Graphs and Trees, Markov Chains and Random Fields, Entropy and Coding*, vol. 78. in *Probability Theory and Stochastic Modelling*, vol. 78. Cham: Springer International Publishing, 2017. doi: 10.1007/978-3-319-43476-6.
- [3] J. N. Darroch et E. Seneta, « On Quasi-Stationary Distributions in Absorbing Discrete-Time Finite Markov Chains », *Journal of Applied Probability*, vol. 2, n° 1, p. 88-100, juin 1965, doi: 10.2307/3211876.

## 7. Appendice

## 8. Modèle en temps continu et équation différentielle stochastique associée

$$\begin{aligned}
 dX_t^i &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{z \leq \beta} \Delta_a(X_t^i) \pi^i(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\beta \leq z \leq \beta + \lambda} F_{t-}^i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \pi^i(dt, dz) \\
 &\quad + \sum_{j \neq i} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{z \leq \beta} F_{t-}^j \mathbf{1}_{U_{t-}^j = \theta} \Delta_{\text{ex}}(X_{t-}^i) \pi^j(dt, dz).
 \end{aligned}$$

Avec les sauts associés à un spike du neurone lui-même, dit **autonome** :



$$\Delta_a(x) = \mathbf{1}_{u=\theta} \left[ \begin{pmatrix} -u \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{1}_{f=0} + \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix} f \right], \text{ pour tout } x = \begin{pmatrix} u \\ f \end{pmatrix},$$

et les sauts déclenchés par un autre neurone **extérieur** :

$$\Delta_{\text{ex}}(x) = \begin{pmatrix} u + 1 \wedge \theta \\ f \end{pmatrix}, \text{ pour tout } x = \begin{pmatrix} u \\ f \end{pmatrix}.$$

$\pi^i$  mesures de Poisson.

$$\begin{aligned} |Y_{t+1}^j - \bar{Y}_{t+1}| &= \left| A_t^j \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(V_r^j)} - \bar{A}_t^j \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_r^j)} \right| \\ &= \left| \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(V_r^j)} - \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_r^j)} \right| \\ &= \mathbf{1}_{\phi(V_r^j) \wedge \phi(\bar{V}_r^j) \leq U_{t+1}^j \leq \phi(V_r^j) \vee \phi(\bar{V}_r^j)}. \end{aligned}$$