1. Introduction

2. Modélisation

2.1. Définition du système

Nous définissons l'état du système de neurones par le processus stochastique suivant

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^N \end{pmatrix}$$

où

$$X_t^i = (V_t^i, A_t^i).$$

Chaque neurone i est donc représenté par un couple (V_t^i, A_t^i) où :

- La variable aléatoire V_t^i représente le *potentiel de membrane* de sa membrane au temps t, avec $V_t^i \in \{0, ..., \theta\}$.
- La variable aléatoire A_t^i représente l'état d'*activation* de la synapse du neurone au temps t, avec $A_t^i \in \{0, 1\}$.

Notons $\mathcal{F}_t$ la filtration associée au processus global.
Notre modélisation se fait en temps discret. Pour un $T \in \mathbb{N}$, nous définissons :

$$t \in \{0, 1, 2, ..., T-1, T\}.$$

2.2. Modélisation des sauts du système

En plus des deux variables aléatoires V_t^i et A_t^i, nous avons besoin d'une variable aléatoire auxiliaire par neurone, que nous noterons U_t^i. Tous les U_t^i sont distribuées *uniformément* sur $[0, 1]$, qui nous permettra de simuler les processus de spike et de désactivation des neurones. Nous avons donc

$$\forall t, \forall i,\ U_t^i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Unif}(0, 1).$$

Commençons par définir les spikes du système.

2.2.1. Spike

Un neurone d'indice i est en capacité d'effectuer un spike au temps $t+1$ si et seulement si son potentiel de membrane $V_t^i = \theta$. Un neurone capable de « spiker », spike avec probabilité β telle que $\beta + \lambda \leq 1$, indépendamment de l'état du système et des autres variables aléatoires. Après son spike, le potentiel de membrane du neurone est remis à zéro.
Pour résumer ces informations, nous allons introduire la fonction ϕ, qui associera la probabilité de spiker à un potentiel de membrane v donné :

$$\phi : \begin{cases} v \in \{0, 1, ..., \theta\} \longrightarrow [0, 1] \\ \phi(v) = \beta \mathbf{1}_{v=\theta} \end{cases}.$$

Ainsi en utilisant ϕ et la variable auxiliaire uniforme U_t^i définie plus haut, le neurone i effectuera un spike au temps $t+1$ ssi

$$U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i).$$

2.2.2. Désactivation

Un neurone i avec un potentiel de membrane $v \in \{0, 1, ..., \theta\}$ quelconque qui se désactive au temps $t + 1$ voit sa variable d'activation $A^i_{t+1} = 0$. Pour qu'un tel événement se produise, il fallait nécessairement que ce neurone i soit activé au temps t : $A^i_t = 1$. Un neurone actif se désactive avec probabilité $\lambda \in [0, 1]$, de façon indépendante du reste du système. Les événements de spike et de désactivations sont **mutuellement exclusifs**. Le neurone i se désactive donc au temps $t + 1$ ssi

$$\beta \leq U^i_{t+1} \leq \beta + \lambda.$$

2.3. Évolution du potentiel de membrane

$$A^i_{t+1} = A^i_t + (1 - A^i_t)\mathbf{1}_{U^i_{t+1} \leq \phi(V^i_t)} - A^i_t\mathbf{1}_{\beta \leq U^i_{t+1} \leq \beta + \lambda}$$

2.4. Évolution de l'activation

$$V^i_{t+1} = \mathbf{1}_{U^i_{t+1} > \phi(V^i_t)} \left(V^i_t + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} A^j_t \mathbf{1}_{U^j_{t+1} \leq \phi\left(V^j_t\right)} \right)$$

3. Étude de la chaîne de Markov associée

4. Limite en champ moyen du processus

5. Mesure invariante