

# Mémoire de stage de fin de Master

## *Modélisation de la mémoire de court-terme et processus de Markov neuronaux en temps discret*

cover.png

### Abstract

Ce rapport présente une modélisation mathématique du processus de mémoire de court-terme, en s'appuyant sur la théorie des chaînes de Markov. Nous étudions un modèle de neurones spiking en temps discret, où les neurones sont activés par des stimuli et peuvent se désactiver après un certain temps. Nous analysons les propriétés de ce processus, notamment sa convergence vers un état stationnaire et son comportement en champ moyen. Enfin, nous discutons des implications de ces résultats pour la compréhension des mécanismes neuronaux sous-jacents à la mémoire.

### Rédigé par

Simon Buré



simon.bure@etu-upsaclay.fr

### Sous la supervision de

Prof. Eva Löcherbach



Eva.Locherbach@univ-paris1.fr

### Terminé le

04-07-2025

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de mémoire, Prof. Eva Löcherbach, pour son encadrement, ses conseils avisés et sa disponibilité tout au long de ce travail. Son expertise et son soutien ont été essentiels à la réalisation de ce mémoire.

## Table des matières

|   |    |
|---|----|
| 1. Introduction .....   | 4  |
| 1.1. Intérêts .....   | 4  |
| 1.2. Objectifs .....  | 4  |
| 2. Modélisation .....   | 4  |
| 2.1. Définition du système .....  | 4  |
| 2.2. Modélisation des sauts du système .....                                      | 4  |
| 2.2.1. Spike .....  | 4  |
| 2.2.2. Désactivation .....  | 5  |
| 3. Étude de la chaîne de Markov associée .....                                    | 5  |
| 3.1. Espace des états dans lequel évolue la chaîne .....                          | 5  |
| 3.2. Transitions de la chaîne de Markov .....                                     | 5  |
| 3.3. Mesure empirique .....   | 6  |
| 3.4. Espace absorbant .....   | 7  |
| 3.4.1. États absorbants .....   | 7  |
| 3.4.2. États presque-absorbants .....   | 7  |
| 3.4.3. Définition de l'espace absorbant .....                                     | 7  |
| 3.5. Irréductibilité .....  | 8  |
| 3.5.1. États transitoires et espace transitoire .....                             | 8  |
| 3.5.2. Preuve de l'irréductibilité .....  | 9  |
| 3.6. Distribution quasi-stationnaire .....  | 10 |
| 4. Limite en champ moyen du processus .....                                       | 10 |
| 4.1. Processus limites .....  | 10 |
| 4.2. Existence des processus limites .....  | 12 |
| 4.3. Convergence vers les processus limites .....                                 | 12 |
| 4.3.1. Majoration de $\delta_{t+1}^{i,N}$ .....                                   | 13 |
| 4.3.2. Majoration de $d_{t+1}^{i,N}$ .....  | 15 |
| 4.4. Mesure invariante .....  | 19 |
| 4.5. Cas où $v < K\gamma$ .....   | 20 |
| 4.6. Cas où $v = K\gamma$ .....   | 20 |
| 5. Conclusion .....   | 21 |
| 6. Références .....   | 21 |
| Références .....  | 21 |
| 7. Appendice .....  | 21 |
| 8. Modèle en temps continu et équation différentielle stochastique associée ..... | 21 |

# 1. Introduction

## 1.1. Intérêts

## 1.2. Objectifs

[1], [2], [3]

# 2. Modélisation

## 2.1. Définition du système

Nous définissons l'état du système de neurones par le processus stochastique suivant

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^N \end{pmatrix}$$

où

$$X_t^i = (V_t^i, A_t^i).$$

Chaque neurone  $i$  est donc représenté par un couple  $(V_t^i, A_t^i)$  où :

- La variable aléatoire  $V_t^i$  représente le *potentiel de membrane* ou *voltage*, au temps  $t$ , avec  $V_t^i \in \{0, 1, \dots, \theta\}$ .
- La variable aléatoire  $A_t^i$  représente l'état d'*activation* de la synapse du neurone au temps  $t$ , avec  $A_t^i \in \{0, 1\}$ .

Notons  $\mathcal{F}_t$  la filtration associée au processus global.

Notre modélisation se fait en temps discret. Pour un  $T \in \mathbb{N}$  tel que  $T > 0$ , nous définissons :

$$t \in \{0, 1, \dots, T\}.$$

## 2.2. Modélisation des sauts du système

En plus des deux variables aléatoires  $V_t^i$  et  $A_t^i$ , nous avons besoin d'une variable aléatoire auxiliaire par neurone, que nous noterons  $U_t^i$ . Tous les  $U_t^i$  sont distribuées *uniformément* sur  $[0, 1]$ , qui nous permettra de simuler les processus de spike et de désactivation des neurones. Nous avons donc

$$\forall t, \forall i, U_t^i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Unif}(0, 1).$$

Commençons par définir les potentiels d'action, ou « spikes » du système.

### 2.2.1. Spike

Un neurone d'indice  $i$  est en capacité d'émettre un spike au temps  $t + 1$  si et seulement si son potentiel de membrane  $V_t^i = \theta$ .

Un neurone capable de « spiker », spike avec probabilité  $\beta$  indépendamment de l'état du système et des autres variables aléatoires. Après l'émission d'un potentiel d'action, le potentiel de membrane du neurone est **remis à zéro**.

Pour formaliser ces informations, nous allons introduire la fonction  $\phi$ , qui, à un voltage  $v$  donné, associera la **probabilité de spiker** :

$$\phi : \begin{cases} v \in \{0, 1, \dots, \theta\} \longrightarrow [0, 1] \\ \phi(v) = \beta \mathbf{1}_{v=\theta} \end{cases}.$$

Ainsi en utilisant  $\phi$  et la variable auxiliaire uniforme  $U_t^i$  définie plus haut, le neurone  $i$  effectuera un spike au temps  $t + 1$  si et seulement si

$$U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i).$$

Nous appellerons l'*indicateur de spike* le terme  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)}$  et à l'inverse *indicateur d'absence de spike* le terme  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)}$ .

Nous pouvons donc résumer la dynamique du potentiel de membrane du neurone  $i$  à travers le temps par l'équation suivante :

$$V_{t+1}^i = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} \left( V_t^i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N A_t^j \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)} \right).$$

### 2.2.2. Désactivation

La dynamique d'activation des neurones par deux événements : le **spike** et la **désactivation**. Lorsque le neurone  $i$  émet un spike au temps  $t + 1$ , il devient **systématiquement activé**, c'est-à-dire que  $A_{t+1}^i = 1$ .

Par contre, lorsqu'il n'émet pas de spike, il peut se **désactiver** au temps  $t + 1$  avec une certaine probabilité  $\lambda$  ou bien conserver sa variable aléatoire d'activation. S'il se désactive, alors systématiquement,  $A_{t+1}^i = 0$ .

En définissant comme cela la dynamique de la variable d'activation, le neurone  $i$  se désactivera au temps  $t + 1$  si et seulement si

$$\beta \leq U_{t+1}^i \leq \beta + \lambda.$$

Nous appellerons l'*indicateur de désactivation* le terme  $\mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda}$ . Nous voyons que nous devons par contre émettre l'hypothèse que

$$\beta + \lambda < 1.$$

La dynamique temporelle de la variable d'activation du neurone  $i$  suit donc l'équation suivante :

$$A_{t+1}^i = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)} + \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} A_t^i (1 - \mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda}).$$

## 3. Étude de la chaîne de Markov associée

### 3.1. Espace des états dans lequel évolue la chaîne

Chaque neurone peut prendre des valeurs dans l'espace  $\{0, 1, \dots, \theta\} \times \{0, 1\}$ . Le nombre d'état possible est ainsi  $2(\theta + 1)$ . Pour un système à  $N$  neurones évoluant dans l'espace  $\mathcal{X} = (\{0, 1, \dots, \theta\} \times \{0, 1\})^N$ , le nombre d'états est donc  $|\mathcal{X}| = 2(\theta + 1)N$ .

### 3.2. Transitions de la chaîne de Markov

Soit  $x \in \mathcal{X}$  un état possible du système de neurones. Nous notons

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \text{ avec } x_i = (v_i, a_i).$$

Nous avons bien sûr  $x_i \in \{0, 1, \dots, \theta\} \times \{0, 1\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ .

Depuis cet état  $x$ , nous définissons trois transitions élémentaires possibles, vers un état  $y \in \mathcal{X}$  :

- **Spike inefficace menant à l'activation d'un neurone** : notons  $i$  l'indice du neurone effectuant le spike. La transition suivante survient avec probabilité  $\beta$  :

$$\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ (v_2, a_2) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (\theta, 0) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ (v_2, a_2) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (0, 1) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix}.$$

- **Désactivation d'un neurone** : ici aussi,  $i$  est l'indice  $i$  du neurone se désactivant. Le système subit la transition suivante avec probabilité  $\lambda$ ,

$$\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (v_i, 1) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (v_i, 0) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix}.$$

- **Spike efficace** : ici encore, nous notons  $i$  l'indice du neurone effectuant le spike. La transition survient avec probabilité  $\beta$ , et s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \vdots \\ (\theta, 1) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ([v_1 + 1] \wedge \theta, a_1) \\ \vdots \\ (0, 1) \\ \vdots \\ ([v_N + 1] \wedge \theta, a_N) \end{pmatrix}.$$

Ces trois transitions élémentaires sont **mutuellement exclusives**, c'est-à-dire que, dans un même intervalle de temps (entre  $t$  et  $t + 1$ ), un neurone d'indice  $i$  ne peut pas se désactiver puis faire une spike inefficace (ou bien effectuer un spike efficace puis se désactiver). Par contre, les  $N$  neurones du système dans son ensemble peuvent tout à fait tous, ou en partie, subir une transition de façon indépendante. Par exemple, pour un système contenant  $N = 10$  neurones dans les bonnes configuration, nous pourrions tout à fait avoir 3 spikes efficaces, 0 spike inefficace, et 5 désactivations.

### 3.3. Mesure empirique

Pour représenter le système autrement, nous introduisons sa mesure empirique,

$$\mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(V_t^i, A_t^i)}.$$

Si le système se trouve dans l'état  $x$ , nous définissons la mesure de comptage du nombre de neurones dans l'état  $(v, a)$  par :

$$\begin{aligned} \forall u \in \{0, \dots, \theta\} \text{ et } f \in \{0, 1\}, \\ \mu_x(v, f) = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{v_i=v} \mathbf{1}_{a_i=f}. \end{aligned}$$

Écrit avec des mesures de Dirac :

$$\mu_x(v, a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(V_t^i, A_t^i)}(v, a).$$

$$\mu_x(v, \cdot) = \sum_{i=1}^N \delta_{(V_t^i, A_t^i)}(v, 0) + \delta_{(V_t^i, A_t^i)}(v, 1).$$

Cette représentation permet de réduire la taille de l'espace  $\mathcal{X}$  des états possibles en considérant tous les neurones comme identiques et en prenant en compte que le nombre total de neurones est fixé à  $N$ . En utilisant un peu de combinatoire, nous obtenons désormais

$$|\mathcal{X}| = \binom{N - 2\theta + 1}{2\theta + 1}.$$

(nombre de représentation possible de  $n$  étoiles avec  $m$  barres)

Pour simplifier la notation, nous noterons  $x_{v,f} = \mu_x(v, f)$  et  $x_{v,\cdot} = \mu_{x(v,\cdot)}$ . Pour parler plus simplement, nous utiliserons le terme de *couche*  $v$  pour désigner les neurones ayant un potentiel de membrane  $V_t^i = v$ , càd  $\mu_x(v, \cdot)$  ou  $x_{v,\cdot}$ .

**TO-DO : MIEUX EXPLIQUER + PRÉCISER QUE C'EST AUSSI UNE CHAÎNE DE MARKOV ET QUE L'ON VA SE CONCENTRER SUR ELLE POUR LA SUITE POUR RÉDUIRE L'ESPACE D'ÉTATS**

### 3.4. Espace absorbant

#### 3.4.1. États absorbants

Le système n'émettra plus aucun saut lorsque :

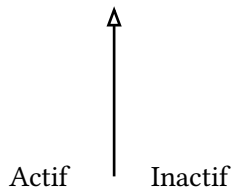
- aucun neurone ne se trouve dans un état permettant un spike,
- tous les neurones sont désactivés.

Un état absorbant  $\mathcal{a}$  se définit donc de la façon suivante :

$$\mathcal{a} = \begin{pmatrix} (v_1, 0) \\ (v_2, 0) \\ \vdots \\ (v_N, 0) \end{pmatrix}, \quad \forall v_i < \theta.$$

#### 3.4.2. États presque-absorbants

Autour de ces états absorbants existent aussi des états qui mènent presque-sûrement vers ces états absorbants en temps fini. Nous les appellerons les états *presque-absorbants*. C'est le cas par exemple des systèmes où aucun neurone n'est en capacité de spiker où tous les potentiels de membrane sont inférieurs à  $\theta$ . En temps fini, les neurones vont se désactiver un à un jusqu'à atteindre l'état absorbant. C'est aussi le cas pour un système ayant deux neurones actifs dans la couche  $\theta$ , mais dont le reste des neurones se trouvent dans des couches inférieures à  $\theta - 2$ . Après les deux spikes, le système se retrouve dans l'état précédent, où aucun neurone ne peut émettre de spike.



**TO-DO : ILLUSTRATION SYSTÈME**

#### 3.4.3. Définition de l'espace absorbant

Nous notons  $\mathcal{A}$ , l'espace rassemblant les états absorbants et presque-absorbants.

$\mathcal{A}$  désigne les états à partir desquels le système est déjà absorbé ou finira nécessairement par l'être en

un temps fini. Autrement dit, ce sont des configurations où l'activité neuronale est insuffisante pour maintenir une dynamique soutenue : la chaîne de Markov évolue alors inévitablement vers un état stable et inactif.

Pour chaque couche  $k$  du système de neurones, nous allons définir un sous-ensemble  $\mathcal{A}_k$  et définir  $\mathcal{A}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\theta} \mathcal{A}_k.$$

Chaque sous-ensemble  $\mathcal{A}_k$  impose une contrainte sur le nombre de neurones actifs dans les couches  $l \leq k$ , de façon à ce que le système ne puisse pas se maintenir dans le temps et finisse nécessairement par tomber dans un état réellement absorbant.

Définissons à présent les  $\mathcal{A}_k$ .  $\forall k \leq \theta$  :

$$\mathcal{A}_k = \left\{ X \in \mathcal{X} : \sum_{l=k}^{\theta} \mu(l, 1) \leq \theta - k \right\}.$$

Pour  $k = 0$ , nous avons le cas particulier suivant :

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ X \in \mathcal{X} : \mu(\theta, 0) + \sum_{l=0}^{\theta} \mu(l, 1) < \theta \right\}.$$

L'intuition est que, dans  $\mathcal{A}$ , le système évolue dans un régime contrôlé où les interactions neuronales ne conduisent ni à l'extinction rapide, ni à la saturation globale. Le cas particulier  $(\mathcal{A})_0$  renforce ces conditions en limitant simultanément l'activité dans la dernière couche et l'activité totale du système, assurant ainsi un comportement quasi-absorbant.

Ce que nous voulons pour représenter un groupe de neurones impliqué dans une tâche de mémorisation à court terme, c'est qu'ils puissent conjointement soutenir une activité neuronale sur un temps arbitrairement long. L'interruption de cette activité, traduirait une perturbation de cette mémorisation, et donc un oubli de l'information d'intérêt.

Nous allons petit à petit définir ce que « soutenir une activité neuronale sur un temps arbitrairement long » signifie en termes mathématiques.

Tout d'abord, cela signifie que la chaîne de Markov représentant notre système de neurones, ne doit pas être absorbée sur la fenêtre temporelle  $\llbracket 0, T \rrbracket$  sur laquelle nous l'étudions. Ensuite, cela veut dire que sur  $\llbracket 0, T \rrbracket$ ,  $X_t$  doit être capable d'émettre en continu des potentiels d'action :

Pour modéliser la fonction de mémoire court-terme, nous étudierons notre chaîne de Markov neuronale sur l'espace complémentaire  $\mathcal{A}^c$ , où elle pourra effectivement connaître une activité de spikes indéfiniment. Mais cela n'est pas suffisant

Étudions maintenant l'irréductibilité de la chaîne de Markov sur cet espace .

### 3.5. Irréductibilité

#### 3.5.1. États transitoires et espace transitoire

Certains états du système de neurones ne font pas partie de  $\mathcal{A}^c$  mais ne sont pourtant pas atteignables à partir d'autres états non-absorbants. Nous appellerons les états de ce types les états *transitoires*. Le seul moyen pour notre système de se trouver dans un état transitoire, c'est de commencer dans cet état via les conditions initiales.

Pour illustrer notre propos, prenons l'état ne contenant aucun neurone dans la couche 0 et tous les neurones activés dans la couche  $\theta$ , c'est-à-dire  $x$  tel que  $x_{0,\cdot} = 0$  et  $x_{\theta,1} = N$ . Comme il possède tous



ses neurones capables de spiker, c'est bien un état qui n'est pas absorbant. Il est pourtant transitoire car après son premier spike, et pour toujours après, il y aura toujours un neurone dans la couche 0, par définition des spikes. Autre exemple : l'état tel que  $x_{\theta,1} = N - 1$  et  $x_{0,1} = 1$  est aussi transitoire. En fait, tout état qui possède plus de  $N - \theta$  neurones dans une de ses couches est transitoire. Cela est dû au fait qu'il n'est possible de rassembler au maximum que  $N - \theta$  neurones dans la couche  $\theta$ . À cause des  $\theta + 1$  couches, il faut un nombre de spikes égal à  $\theta$  pour amener tous les neurones dans la couche  $\theta$ . Cependant, les  $\theta$  spikes qui viennent d'être effectués entraînent la dispersion de  $\theta$  neurones dans les couches inférieures (de 0 à  $\theta - 1$ ).

Nous définissons donc l'**ensemble des états transitoires** comme suit :

$$\mathcal{T} = \{x \in \mathcal{X} : x_{0,\cdot} = 0\} \cup \{x \in \mathcal{X} : x_{v,\cdot} > N - \theta, \forall v = 0, \dots, \theta\}.$$

Pour prouver l'irréductibilité de la chaîne de Markov, nous nous placerons donc sur l'**ensemble des états irréductibles**  $\mathcal{X}_{\text{irr}} = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{T}^c$ .

### 3.5.2. Preuve de l'irréductibilité

Pour la lisibilité de cette preuve, nous commençons par noter :

- $O_e^k$  : l'opération de  $k$  spikes efficaces en un seul pas de temps,
- $O_i^k$  : l'opération de  $k$  sauts inefficaces en un seul pas de temps,
- $O_{d,v}^k$  : l'opération de désactivation de  $k$  neurones à la couche  $v$ .

Ainsi la notation  $O_e^k(x)$  désigne l'opération de  $k$  spikes efficaces depuis l'état  $x$ . Pour un état  $x \in \mathcal{X}_{\text{irr}}$ , ces opérations peuvent advenir avec une probabilité positive puisque l'espace  $\mathcal{A}^c$  peut supporter un nombre  $k$  arbitraire de spikes.

Soit  $x, y \in \mathcal{X}_{\text{irr}}$ . Notons  $m = x_{\cdot,0}$ , le nombre de neurones désactivés de l'état  $x$ . Nous allons montrer que nous pouvons toujours atteindre en un nombre fini d'opérations, un état  $x'''$  où tous les neurones sont activés ( $x'''_{\cdot,1} = N$ ) et avec  $N - \theta$  neurones à la couche  $\theta$  ( $x'''_{\theta,1} = N - \theta$ ) ainsi qu'un neurone par couche inférieure ( $x'''_{v,1} = 1, \forall v = 0, 1, \dots, \theta - 1$ ). Cela se produit comme suit :

$$\begin{aligned} x' &= O_e^\theta(x), \\ x'' &= O_i^m(x') \text{ où } m \text{ est le nombre de neurones désactivés,} \\ x''' &= \underbrace{O_e^1 \circ O_e^1 \dots \circ O_e^1}_{\theta \text{ fois}}(x''). \end{aligned}$$

d'où  $x'''$  tel que  $x'''_{\theta,1} = N - \theta$  et  $x'''_{v,1} = 1, \forall v = 0, 1, \dots, \theta - 1$ .

À partir de cet état  $x'''$ , montrons que nous pouvons atteindre l'état  $y$  en un nombre fini d'opérations. Cet état  $y \in \mathcal{X}_{\text{irr}}$  se définit de façon très générale :

$$\forall v = 0, \dots, \theta, \begin{pmatrix} (y_{0,0}, y_{0,1}) \\ \vdots \\ (y_{v,0}, y_{v,1}) \\ \vdots \\ (y_{\theta,0}, y_{\theta,1}) \end{pmatrix}.$$

Nous allons prouver cela en définissant une suite  $y^l$  qui permet, depuis  $x'''$ , d'atteindre l'état  $y$  avec une probabilité positive. La suite se définit de la façon suivante : on commence par désactiver le bon nombre de neurones dans la couche  $\theta$ , puis on fait ce même nombre de spikes inefficaces et on fait un spike efficace. Formellement, cela donne :

$$y^0 = O_i^{y_{\theta,\cdot}^{-1}} \circ O_{d,\theta}^{y_{\theta,\cdot}^{-1}}(x'''),$$

et

$$\forall l \in \{0, \dots, \theta - 1\}, y^{l+1} = O_i^{y_{\theta-l,\cdot}^{-1}} \circ O_{d,\theta}^{y_{\theta-l,\cdot}^{-1}} \circ O_e^1(y^l).$$

Enfin, nous désactivons le bon nombre de neurones dans toutes les couches pour arriver à  $y$  :

$$y = O_{d,v}^{y_{v,0}}(y^\theta), \quad \forall v = 0, \dots, \theta.$$

Par construction, les états  $y^l$  sont tous bien dans  $\mathcal{X}_{\text{irr}}$ .

### 3.6. Distribution quasi-stationnaire

## 4. Limite en champ moyen du processus

L'hypothèse de champ moyen que nous allons faire dans cette partie consiste à considérer un grand nombre de neurones  $N$  et à les considérer comme étant tous **identiques**, c'est-à-dire indiscernables et initialement distribuée de façon identique :

$$X_0^{i,N} = (V_0, A_0) \quad \forall i \in 0, 1, \dots, N.$$

$V_0$  et  $A_0$  sont des variables aléatoires, à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, \theta\}$  et  $\{0, 1\}$  respectivement.

Comme les neurones sont indiscernables, nous pouvons les compter simplement et au lieu d'écrire  $\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N$ , écrire directement  $\sum_{j=1}^N$ .

Avec le modèle utilisé dans les parties précédentes, lorsque nous ferons tendre  $N$  vers l'infini, la somme  $\sum_{j=1}^N A_t^i \mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)}$  explosera. Pour conserver l'intégrité du modèle, nous allons ajouter un facteur  $\frac{1}{N}$  pour normaliser cette somme. Enfin, pour alléger l'écriture, nous noterons à partir de maintenant

$$Y_t^i = A_t^i \mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)}.$$

Ainsi l'équation de la dynamique du potentiel de membrane,

$$V_{t+1}^i = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} \left( V_t^i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N A_t^j \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)} \right).$$

s'écrit désormais

$$V_{t+1}^i = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} \left( V_t^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_t^j \right).$$

### 4.1. Processus limites

Nous allons noter  $\bar{V}_t^i$  et  $\bar{A}_t^i$  les valeurs des **processus limites** de potentiel de membrane et d'activation pour le neurone  $i$  au temps  $t$ . Pour suivre cette notation, posons également que  $\bar{Y}_t^i = \bar{A}_t^i \mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)}$ .

La dynamique du processus limite de l'activation de la synapse du neurone  $i$  reste défini de façon similaire que la dynamique du processus classique :

$$\bar{A}_{t+1}^i = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)} + \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)} \bar{A}_t^i (1 - \mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda}).$$

Cependant, la variable aléatoire  $\bar{V}_t^i$  se voit modifiée plus profondément par l'hypothèse de champ moyen. En effet, le champ moyen suppose l'existence d'une certaine « loi des grands nombres » stipulant que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \bar{Y}_t^i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{Y}_t^i].$$

Ainsi la dynamique du processus limite du potentiel de membrane s'écrit :

$$\bar{V}_{t+1}^i = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)} (\bar{V}_t^i + \mathbb{E}[Y_t^i]).$$

Faisons la remarque que les processus  $V_t^i$  et  $\bar{V}_t^i$  partagent tous les deux la même variable  $U_t^i$ .

La variable aléatoire  $V_t^i$  avait été définie comme à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, \theta\} \subset \mathbb{N}$ . Or nous voyons désormais que  $\bar{V}_t^i$  ne respecte plus cette définition, notamment car  $\mathbb{E}[\bar{Y}_t^i]$  est un **nombre réel** et dépendant du temps  $t$ .

Supposons que  $\gamma_t = \mathbb{E}[\bar{Y}_t^i]$ . Intuitivement, cela signifie qu'entre le temps  $t$  et  $t + 1$  le potentiel de membrane limite  $\bar{V}_t^i$  augmente d'une quantité fixée  $\gamma_t$ . Cette quantité est différente à chaque pas de temps.

Nous pouvons même calculer la valeur de  $\gamma_t$  :

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \mathbb{E}[\bar{A}_t^i \mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)}], \\ &= \mathbb{P}(U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)) \mathbb{E}[\bar{A}_t^i | U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)], \\ &= \phi(\bar{V}_t^i) \mathbb{E}[\bar{A}_t^i]. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire la majoration suivante :

$$\gamma_t \leq \beta. \quad (1)$$

Néanmoins, comme nous nous plaçons sur une fenêtre temporelle fixée de taille  $T$ , nous savons que  $\gamma_t$ , pour  $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$ , prendra  $T + 1$  valeurs fixées.

Nous pouvons ainsi dire qu'il existera nécessairement un réel strictement positif  $\varepsilon$  qui correspondra à la plus petite valeur prise par  $\gamma_t$  sur la fenêtre  $\llbracket 0, T \rrbracket$ .

En réutilisant [?], nous avons donc pour toute valeur de  $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$  l'encadrement suivant,

$$\varepsilon \leq \gamma_t \leq \beta. \quad (2)$$

Ainsi **TODO: Écrire l'espace des valeurs possibles de  $\bar{V}_t^i$ .**

Comme  $V_t^i$ , le potentiel limite  $\bar{V}_t^i$  sera en capacité d'émettre un potentiel d'action après avoir dépassé le potentiel seuil  $\theta$ .

Notons  $K$ , la valeur maximale que peut prendre le potentiel de membrane limite, où  $K$  correspond au nombre minimal de pas nécessaires pour dépasser  $\theta$ .  $K$  est donc un **entier positif**, défini de la façon suivante :

$$K = \left\lceil \frac{\theta}{a} \right\rceil.$$

Pour terminer, appelons  $\bar{\mathcal{V}}_T$  l'espace des valeurs possibles pour  $K$  sur un temps donné  $T$ .

## 4.2. Existence des processus limites

Comme les deux processus limites  $(\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i)$  prennent leurs valeurs dans des espaces discrets et finis, ils sont tous les deux bien définis. L'existence des processus ne pose ainsi aucun problème, et nous pouvons écrire le théorème suivant :

**Théorème 4.1** (Existence des processus limites): Pour tout  $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$ , il existe un unique processus  $(\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i)$ , associée à  $\gamma_t$ .

**Théorème 4.2** (Propagation du chaos): Étant donné l'existence du processus limite donné dans le Théorème 4.1 et son  $\gamma_t$  associé,

$$\mathbb{E}|V_t^i - \bar{V}_t^i| + \mathbb{E}|A_t^i - \bar{A}_t^i| \leq \frac{C_{T(\varepsilon)}}{\sqrt{N}}.$$

## 4.3. Convergence vers les processus limites

Nous allons démontrer que les processus classiques convergent vers les processus limites. Les processus de voltage et d'activation doivent tous deux converger vers leurs processus limites respectifs.

Ainsi, si nous définissons la **distance entre les processus de potentiel de membrane**

$$d_t^{i,N} = \mathbb{E}|V_t^i - \bar{V}_t^i|,$$

ainsi que **distance entre les processus d'activation**

$$\delta_t^{i,N} = \mathbb{E}|A_t^i - \bar{A}_t^i|,$$

nous pouvons écrire la **distance globale** entre le processus de neurone et sa limite comme

$$D_t^{i,N} = d_t^{i,N} + \delta_t^{i,N}. \quad (3)$$

**Théorème 4.3** (Convergence des processus classiques vers les processus limites): Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ , et pour un  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ , avec  $T$  nombre entier positif,

$$(V_t^i, A_t^i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i),$$

ce qui revient à dire que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_t^{i,N} \rightarrow 0.$$

*Preuve:* Pour prouver le Théorème 4.3, nous allons consiste à trouver une majoration de  $D_{t+1}^{i,N}$  par une fonction de  $N$  qui puisse disparaître lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

La trame de la preuve est la suivante :

1. Trouver des majorations de  $\delta_{t+1}^{i,N}$  et  $d_{t+1}^{i,N}$  qui utilisent  $D_t^{i,N}$ .
2. Utiliser ces majorations pour trouver une majoration de  $D_{t+1}^{i,N}$  en fonction de  $D_t^{i,N}$  et d'une fonction de  $N$  qui pourra disparaître lorsque  $N$  deviendra grand.

3. Montrer par récurrence que  $D_{t+1}^{i,N}$  est bornée par une fonction de  $N$  qui tend vers zéro lorsque  $N$  tend vers l'infini.

#### 4.3.1. Majoration de $\delta_{t+1}^{i,N}$

Commençons par majorer  $\delta_{t+1}^{i,N}$ . De la définition, il vient :

$$\begin{aligned}\delta_{t+1}^{i,N} &= \mathbb{E} \left| A_{t+1}^i - \bar{A}_{t+1}^i \right| \\ &= \mathbb{E} \left| \underbrace{\mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)} - \mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)} + A_t^i \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} (1 - \mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda}) - \bar{A}_t^i \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)} (1 - \mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda})}_{= e \text{ pour simplifier l'écriture pour les lignes suivantes}} \right|.\end{aligned}$$

Remarquons que les trois événements suivants sont disjoints :

- L'événement  $\mathbf{2} = \{\text{processus classique et limite spikent simultanément en } t+1\}$  peut s'écrire formellement :

$$\mathbf{2} = \{0 < U_{t+1}^i < \beta\} \cap \{V_t^i = \bar{V}_t^i = \theta\}. \quad (4)$$

- L'événement  $\mathbf{1} = \{\text{processus classique ou (exclusif) limite spike en } t+1\} = \{0 < U_{t+1}^i < \beta\} \cap \{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}.$
- L'événement  $\mathbf{0} = \{\text{aucun processus ne spike au temps } t+1\} = \{U_{t+1}^i > \beta\} \cup \{V_t^i < \theta \text{ et } \bar{V}_t^i < \theta\}.$

Nous pouvons donc écrire

$$\delta_{t+1}^{i,N} = \mathbb{P}(\mathbf{2})\mathbb{E}[e|\mathbf{2}] + \mathbb{P}(\mathbf{1})\mathbb{E}[e|\mathbf{1}] + \mathbb{P}(\mathbf{0})\mathbb{E}[e|\mathbf{0}]. \quad (5)$$

- Si  $\mathbf{2}$  est vérifié, alors seules les indicatrices de spike valent un, et les autres sont nulles, soit  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)} = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)} = 1$  et donc forcément  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)} = 0$ . Dans ce cas, très simplement,

$$\mathbb{E}[e|\mathbf{2}] = \mathbb{E}[1 - 1] = 0.$$

- Si  $\mathbf{1}$  est vérifié, nous avons alors  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)} \neq \mathbf{1}_{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)}$  où l'une des deux indicatrices de spike vaut un, et l'autre zéro.

Le fait que l'une des deux indicatrices de spike vale un, implique nécessaire que  $0 < U_{t+1}^i < \beta$ . Comme les événements de saut et de désactivation sont mutuellement exclusifs nous avons également dans ce cas là  $\mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda} = 0$ .

Nous avons donc deux possibilités, selon lequel des processus spikent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e|\mathbf{1}] &= \begin{cases} \mathbb{E}[1 - A_t^i] & \text{si le processus limite spike} \\ \mathbb{E}[1 - \bar{A}_t^i] & \text{si le processus normal spike} \end{cases} \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

- Si  $\mathbf{0}$  est vérifié, alors seulent  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)} = 1$  dans  $\mathbb{E}[e|\mathbf{0}]$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e|\mathbf{0}] &= \mathbb{E} \left| A_t^i (1 - \mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda}) - \bar{A}_t^i (1 - \mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda}) \right|, \\ &\leq \mathbb{E} |A_t^i - \bar{A}_t^i| + \mathbb{E} |(A_t^i - \bar{A}_t^i) \mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda}|, \\ &\leq \delta_t^{i,N} + \mathbb{E} |(A_t^i - \bar{A}_t^i) \mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda}|.\end{aligned}$$

Rappelons-nous que la variable auxiliaire uniforme  $U_t^i$  est distribuée uniformément sur  $[0, 1]$  de façon indépendante du reste des variables aléatoires. Ainsi, nous pouvons continuer de simplifier comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e|\mathbf{0}] &\leq \delta_t^{i,N} + \mathbb{E}[A_t^i - \bar{A}_t^i] \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda}], \\ &\leq \delta_t^{i,N} + \delta_t^{i,N} \mathbb{P}(\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda), \\ &\leq (1 + \lambda) \delta_t^{i,N}.\end{aligned}$$

En reprenant [?], nous aboutissons à :

$$\delta_{t+1}^{i,N} \leq \mathbb{P}(\mathbf{1}) + \mathbb{P}(\mathbf{0})(1 + \lambda) \delta_t^{i,N}. \quad (6)$$

La probabilité  $\mathbb{P}(\mathbf{1})$  peut s'écrire :

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}) = \mathbb{P}(\{0 < U_{t+1}^i < \beta\} \cap \{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}) = \beta \mathbb{P}(\{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}). \quad (7)$$

Remarquons la proposition suivante, qui nous permet d'introduire  $d_t^{i,N}$  dans la majoration de  $\mathbb{P}(\mathbf{1})$ .

**Proposition 4.4:**

$$\mathbb{P}(\{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}) \leq \frac{1}{\Delta} d_t^{i,N}.$$

*Preuve:* Commençons par réécrire  $\mathbb{P}(\{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\})$  :

$$\mathbb{P}(\{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}}].$$

Remarquons ensuite que l'événement  $\{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}$  implique que les potentiels de membrane des processus classique et limite sont différents, c'est-à-dire que  $V_t^i \neq \bar{V}_t^i$ .

Par construction,  $V_t^i$  et  $\bar{V}_t^i$  ne peuvent prendre que des valeurs discrètes comprises entre zéro et  $\theta$ . Il en découle que la distance entre les deux potentiels de membrane est nécessairement supérieure ou égale à 1, soit  $|V_t^i - \bar{V}_t^i| \geq 1$ .

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}|V_t^i - \bar{V}_t^i| &\geq \mathbf{1}_{\{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}}, \\ \text{et donc } \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V_t^i < \theta \oplus \bar{V}_t^i < \theta\}}] &\leq \mathbb{E}[|V_t^i - \bar{V}_t^i|] = d_t^{i,N}.\end{aligned}$$

□

Si nous appliquons la Proposition 4.4 à [?], nous obtenons :

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}) \leq \beta d_t^{i,N}. \quad (8)$$

Introduisons dans [?] et il vient :

$$\delta_{t+1}^{i,N} \leq \beta d_t^{i,N} + \mathbb{P}(\mathbf{0})(1 + \lambda) \delta_t^{i,N}. \quad (9)$$

Concernant  $\mathbb{P}(\mathbf{0})$ , nous pouvons tout simplement la majorer par 1. Nous obtenons finalement :

$$\delta_{t+1}^{i,N} \leq \beta d_t^{i,N} + (1 + \lambda) \delta_t^{i,N}.$$

Soit, en posant  $c = \max(\beta, (1 + \lambda))$  :

$$\begin{aligned} \delta_{t+1}^{i,N} &\leq \max(\beta, 1 + \lambda) (d_t^{i,N} + \delta_t^{i,N}), \\ &\leq c D_t^{i,N}. \end{aligned}$$

Grâce à cette dernière ligne, nous avons désormais la première pièce du puzzle. Si nous réécrivons [?], nous pouvons dire que :

$$D_{t+1}^{i,N} \leq d_{t+1}^{i,N} + c D_t^{i,N}. \quad (10)$$

#### 4.3.2. Majoration de $d_{t+1}^{i,N}$

À présent, nous allons nous attaquer à la majoration de  $d_{t+1}^{i,N}$ . De la définition, il vient :

$$\begin{aligned} d_{t+1}^{i,N} &= \mathbb{E} |V_{t+1}^i - \bar{V}_{t+1}^i|, \\ &= \mathbb{E} \left| \underbrace{\mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} \left( V_t^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_t^j \right) - \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)} (\bar{V}_t^i + \mathbb{E}[\bar{Y}_t^i])}_{= f \text{ pour simplifier l'écriture par la suite}} \right|. \end{aligned}$$

Nous pouvons ici aussi utiliser les trois événements disjoints **2**, **1** et **0** définis précédemment pour écrire :

$$d_{t+1}^{i,N} = \mathbb{P}(\mathbf{2}) \mathbb{E}[f|\mathbf{2}] + \mathbb{P}(\mathbf{1}) \mathbb{E}[f|\mathbf{1}] + \mathbb{P}(\mathbf{0}) \mathbb{E}[f|\mathbf{0}]. \quad (11)$$

- Si l'événement **2** est vérifié, alors les indicatrices d'absence de spike sont nulles, c'est-à-dire  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)} = 0$ , ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{2}] = 0.$$

- Si l'événement **1** est vérifié, alors seule une des indicatrices d'absence de spike est nulle, soit  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} = 0$  ou  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)} = 0$ .  
Il reste donc dans  $\mathbb{E}[f|\mathbf{1}]$  :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{1}] = \begin{cases} \mathbb{E} \left| V_t^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_t^j \right| & \text{si le processus limite spike} \\ \mathbb{E} |\bar{V}_t^i + \mathbb{E}[\bar{Y}_t^i]| & \text{si le processus classique spike} \end{cases}.$$

Dans tous les cas, nous pouvons majorer par  $\theta$  car  $V_t^i$  est borné par  $\theta$ .

**TO-DO Vériidique ?**

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{1}] \leq \theta \text{ par construction.}$$

- Si l'événement **0** est vérifié, alors les indicatrices d'absence de spike valent toutes deux un, c'est-à-dire  $\mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)} = \mathbf{1}_{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)} = 1$ . Cela nous permet d'écrire :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] = \mathbb{E} \left| V_t^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_t^j - (\bar{V}_t^i + \mathbb{E}[\bar{Y}_t^i]) \right|.$$

Cette quantité sera majorée plus loin, car son développement est un peu plus long.

En reprenant [?], et en utilisant [?] et  $\mathbb{P}(\mathbf{0}) \leq 1$ , nous obtenons :

$$d_{t+1}^{i,N} \leq \beta \theta d_t^{i,N} + \mathbb{E}[f|\mathbf{0}]. \quad (12)$$

Maintenant, nous allons développer  $\mathbb{E}[f|\mathbf{0}]$ . Ajoutons et retirons  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{Y}_t^j$  :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] = \mathbb{E} \left| V_t^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_t^j - (\bar{V}_t^i + \mathbb{E}[\bar{Y}_t^i]) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{Y}_t^j - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{Y}_t^j \right|,$$

Posons

$$\bar{M}_t^i = \sum_{j=1}^N (\bar{Y}_t^j - \mathbb{E}[\bar{Y}_t^j]),$$

nous avons alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f|\mathbf{0}] &= \mathbb{E} \left| V_t^i - \bar{V}_t^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_t^j - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{Y}_t^j + \frac{1}{N} \bar{M}_t^i \right|, \\ &\leq \mathbb{E}|V_t^i - \bar{V}_t^i| + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}|Y_t^j - \bar{Y}_t^j| + \frac{1}{N} \mathbb{E}|\bar{M}_t^i|. \end{aligned} \quad (13)$$

Pour majorer cette quantité, énonçons tout d'abord la proposition suivante :

**Proposition 4.5:**

$$\mathbb{E}|\bar{M}_t^i| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

*Preuve:* Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |\bar{M}_t^i| &= \sqrt{|\bar{M}_t^i|^2}, \\ \Rightarrow \mathbb{E}|\bar{M}_t^i| &= \mathbb{E} \left[ \sqrt{|\bar{M}_t^i|^2} \right], \\ \Rightarrow \mathbb{E}|\bar{M}_t^i| &\leq \sqrt{\mathbb{E}[|\bar{M}_t^i|^2]} \text{ par Jensen concave.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\bar{M}_t^i|^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=1}^N \bar{Y}_t^j - \mathbb{E}[\bar{Y}_t^j] \right)^2 \right], \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^N (\bar{Y}_t^j - \mathbb{E}[\bar{Y}_t^j])^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} (\bar{Y}_t^k - \mathbb{E}[\bar{Y}_t^k]) (\bar{Y}_t^j - \mathbb{E}[\bar{Y}_t^j]) \right], \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[(\bar{Y}_t^j - \mathbb{E}[\bar{Y}_t^j])^2] + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} \mathbb{E}[(\bar{Y}_t^k - \mathbb{E}[\bar{Y}_t^k]) (\bar{Y}_t^j - \mathbb{E}[\bar{Y}_t^j])], \\ &= \sum_{j=1}^N \text{Var}[\bar{Y}_t^j] + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} \text{Cov}(\bar{Y}_t^k, \bar{Y}_t^j). \end{aligned}$$

Or, comme nous travaillons dans le cadre champ moyen, les neurones sont des copies indépendantes les uns des autres. Ainsi  $\text{Cov}(\bar{Y}_t^k, \bar{Y}_t^j) = 0$  et



$$\mathbb{E} \left[ |\overline{M}_t^i|^2 \right] = \sum_{j=1}^N \text{Var} [\overline{Y}_t^j] = N \text{Var} [\overline{Y}_t^j].$$

Comme  $\overline{Y}_t^j \in \{0, 1\}$ , alors  $0 \leq \mathbb{E} [\overline{Y}_t^j] \leq 1$ , ce qui implique que :

$$\text{Var} [\overline{Y}_t^j] = \mathbb{E} [\overline{Y}_t^j] (1 - \mathbb{E} [\overline{Y}_t^j]) \leq \frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} \left[ |\overline{M}_t^i|^2 \right] \leq \frac{N}{4},$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mathbb{E} \left[ |\overline{M}_t^i|^2 \right]} \leq \sqrt{\frac{N}{4}},$$

$$\text{d'où } \mathbb{E} |\overline{M}_t^i| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

□

On reprend [?], avec la Proposition 4.5, pour écrire :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] \leq d_t^{i,N} + \mathbb{E} |Y_t^i - \overline{Y}_t^i| + \frac{1}{2\sqrt{N}}. \quad (14)$$

Pour conclure la majoration de  $\mathbb{E}[f|\mathbf{0}]$ , il reste uniquement à majorer le terme  $\mathbb{E} |Y_t^j - \overline{Y}_t^j|$ .

**Proposition 4.6:**

$$\mathbb{E} |Y_t^j - \overline{Y}_t^j| \leq \beta (\delta_t^{i,N} + d_t^{i,N}).$$

*Preuve:* Commençons par réécrire  $\mathbb{E} |Y_t^j - \overline{Y}_t^j|$  :

$$\mathbb{E} |Y_t^j - \overline{Y}_t^j| = \mathbb{E} \left| A_t^j \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)} - \overline{A}_t^j \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)} \right|.$$

Dans ce cas également, il est possible d'utiliser les trois événements **2**, **1** et **0** mais cette fois appliqués au neurone  $j$ .

Écrivons grâce à ces événements :

$$\mathbb{E} |Y_t^j - \overline{Y}_t^j| = \mathbb{P}(\mathbf{2}) \mathbb{E} [|Y_t^j - \overline{Y}_t^j| | \mathbf{2}] + \mathbb{P}(\mathbf{1}) \mathbb{E} [|Y_t^j - \overline{Y}_t^j| | \mathbf{1}] + \mathbb{P}(\mathbf{0}) \mathbb{E} [|Y_t^j - \overline{Y}_t^j| | \mathbf{0}]$$

- Si l'événement **2** est vérifié, alors les indicatrices de spike valent toutes les deux un ( $\mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)} = \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^j)} = 1$ ), ce qui nous donne :

$$\mathbb{E} [|Y_t^j - \overline{Y}_t^j| | \mathbf{2}] = \mathbb{E} |A_t^j - \overline{A}_t^j| = \delta_t^{j,N}.$$

- Si l'événement **1** est vérifié, alors une des indicatrices de spike vaut zéro et l'autre un. Il reste donc dans  $\mathbb{E} [|Y_t^j - \overline{Y}_t^j| | \mathbf{1}]$  :

$$\mathbb{E} [|Y_t^j - \overline{Y}_t^j| | \mathbf{1}] = \begin{cases} \mathbb{E} |A_t^j| \\ \mathbb{E} |\overline{A}_t^j| \end{cases} \leq 1 \text{ dans tous les cas.}$$

- Si l'événement **0** est vérifié, alors les indicatrices de spike valent toutes les deux zéro, aboutissant à :

$$\mathbb{E}[|Y_t^j - \bar{Y}_t^j| | \mathbf{0}] = 0.$$

Reprenons à présent [?] :

$$\mathbb{E}[|Y_t^j - \bar{Y}_t^j|] = \mathbb{P}(\mathbf{2})\delta_t^{j,N} + \mathbb{P}(\mathbf{1}). \quad (16)$$

Pour borner  $\mathbb{P}(\mathbf{2})$ , repartons de sa définition [?] et utilisons le fait que la variable  $U_t^i$  est indépendante de toutes les autres variables aléatoires.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{2}) &= \mathbb{P}(0 < U_{t+1}^i < \beta) \mathbb{P}(V_t^i = \bar{V}_t^i = \theta), \\ &= \beta \mathbb{P}(V_t^i = \bar{V}_t^i = \theta). \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{P}(\mathbf{2}) \leq \beta. \quad (17)$$

En utilisant [?] pour majorer  $\mathbb{P}(\mathbf{1})$ , et [?] pour borner  $\mathbb{P}(\mathbf{2})$ , nous transformons [?] en :

$$\mathbb{E}[|Y_t^j - \bar{Y}_t^j|] \leq \beta(\delta_t^{j,N} + d_t^{i,N}), \quad (18)$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

Enfin, en reprenant [?] avec les éléments précédents et Proposition 4.6, nous avons :

$$\mathbb{E}[f | \mathbf{0}] \leq d_t^{i,N} + \beta(\delta_t^{i,N} + d_t^{i,N}) + \frac{1}{2\sqrt{N}}. \quad (19)$$

Ultimement, pour écrire la majoration définitive de  $d_{t+1}^{i,N}$ , nous pouvons repartir de [?] et utiliser [?] pour écrire :

$$\begin{aligned} d_{t+1}^{i,N} &\leq \beta\theta d_t^{i,N} + \left( d_t^{i,N} + \beta(\delta_t^{i,N} + d_t^{i,N}) + \frac{1}{2\sqrt{N}} \right), \\ d_{t+1}^{i,N} &\leq (\beta\theta + (1 + \beta))d_t^{i,N} + \beta\delta_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Nous pouvons écrire que

$$d_{t+1}^{i,N} \leq c' D_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}, \quad (21)$$

où  $c' = \beta\theta + 1 + \beta$ .

Si nous combinons la première pièce [?] avec la seconde pièce du puzzle [?], nous obtenons enfin,

$$\begin{aligned} D_{t+1}^{i,N} &\leq c' D_t^{i,N} + c D_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}, \\ &\leq C D_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

avec  $C$  la constante suivante :  $C = \max(c', c)$ .

Rappelons-nous que les processus sont initialisés de la même façon, ce qui signifie que  $D_0^{i,N} = 0$ .

Ainsi, en  $t = 1$  :

$$D_1^{i,N} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

Poursuivant l'itération, nous avons :

$$\begin{aligned} D_2^{i,N} &\leq CD_1^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}} = (C+1)\frac{1}{2\sqrt{N}} \text{ puis,} \\ D_3^{i,N} &\leq CD_2^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}} \leq C(C+1)\frac{1}{2\sqrt{N}} + \frac{1}{2\sqrt{N}} = (C^2 + C + 1)\frac{1}{2\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Ce qui nous fait aboutir à :

$$D_t^{i,N} \leq \left( \sum_{k=0}^{t-1} C^k \right) \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

Or puisque  $C$  est une combinaison finie d'opérations sur des paramètres finis de notre modèle, et que nous nous sommes placés sur une fenêtre temporelle finie, soit  $t \in [0, T]$ , pour tout  $T \in \mathbb{N}$  avec  $T > 0$ .

Ainsi un polynôme en  $C$  de degré  $t-1$  est nécessairement fini, c'est-à-dire  $\sum_{k=0}^{t-1} C^k < \infty$ , impliquant finalement que,

$$D_t^{i,N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ce qui parachève la preuve du Théorème 4.3 ! □

#### 4.4. Mesure invariante

L'objectif de cette section est calculer la mesure invariante, ou stationnaire, associée à la chaîne de Markov limite  $\bar{X}_t = (\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i)$  étudiée dans la partie précédente.

Pour la chaîne de Markov  $X_t = (V_t^i, A_t^i)$ , l'état  $(0, 1)$  est un **état de régénération**, pour lequel la chaîne perd tout lien avec le passé.

Introduisons maintenant  $T_{(0,1)}$ , le temps, aléatoire, que met  $X_t$  pour arriver à l'état  $(0, 1)$  en partant de celui-ci. Formellement :

$$T_{(0,1)} = \inf\{t > 0 : X_t = (0, 1) \text{ sachant que } X_0 = (0, 1)\}.$$

Pour calculer  $\mathbb{E}_{(0,1)}[T_{(0,1)}]$ , il suffit de remarquer que la chaîne  $X_t$ , pour retourner en  $(0, 1)$  en partant de  $(0, 1)$  va nécessairement d'abord effectuer  $K$  sauts successifs, de taille  $\gamma$  chacun. Ensuite, elle devra attendre un temps aléatoire avant d'émettre un potentiel d'action. Ce temps aléatoire suit une loi géométrique de paramètre  $\beta$ .

Alors,

$$\mathbb{E}_{(0,1)}[T_{(0,1)}] = K + \frac{1}{\beta}. \quad (22)$$

Cela nous permet de définir la **mesure stationnaire** de notre processus limite de la façon suivante. Prenons  $v \in \{0, 1, \dots, \theta\}$  et  $a \in \{0, 1\}$  :

$$\pi(v, a) = \frac{1}{\mathbb{E}_{(0,1)}[T_{(0,1)}]} \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k = (v, a)\}} \right]. \quad (23)$$

**TO-DO : Définir d'où vient la définition de la mesure stationnaire**

La variable aléatoire  $\sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}}$  représente le **temps passé** dans l'état  $(v, 1)$  par la chaîne.

Son calcul, et celui de  $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}}\right]$  va dépendre des valeurs prises par  $v$ .

#### 4.5. Cas où $v < K\gamma$

Dans le cas présent,  $\sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}}$  vaut exactement un si le neurone ne subit aucune désactivation avant la couche  $v$ , ce qui arrive avec probabilité  $(1 - \lambda)^v$ . S'il se désactive avant  $v$ , alors  $\sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}}$  est nulle.

Ainsi, pour  $v < K\gamma$ ,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,1)\}}\right] = (1 - \lambda)^v. \quad (24)$$

De façon similaire, pour  $a = 0$ ,  $\sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,0)\}}$  vaut un si le neurone subit une désactivation avant la couche  $v$ , ce qui arrive avec probabilité  $1 - (1 - \lambda)^v$ . Sinon, le temps passé dans l'état  $(v, 0)$  est nul. D'où,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(v,0)\}}\right] = 1 - (1 - \lambda)^v. \quad (25)$$

Finalement, nous avons

$$\forall v < K\gamma, \quad \pi(v, 1) = \frac{(1 - \lambda)^v}{K + \frac{1}{\beta}},$$

ainsi que

$$\pi(v, 0) = \frac{1 - (1 - \lambda)^v}{K + \frac{1}{\beta}}.$$

#### 4.6. Cas où $v = K\gamma$

Ici, le neurone peut, avec probabilité positive, passer un temps plus long qu'un pas de temps dans l'état  $(K\gamma, 1)$ . Le neurone quittera l'état  $(K\gamma, 1)$  lors de l'émission d'un spike, ou après une désactivation. Si nous notons  $T_\beta$  le temps aléatoire avant l'émission d'un spike et  $T_\lambda$ , le temps aléatoire avant la désactivation du neurone, nous pouvons alors écrire que :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(K\gamma,1)\}}\right] = \mathbb{E}[\min(T_\beta, T_\lambda)].$$

Comme  $T_\beta$  suit une loi géométrique de paramètre  $\beta$  et  $T_\lambda$  suit une loi géométrique de paramètre  $\lambda$ , nous avons :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_k=(K\gamma,1)\}}\right] = \frac{1}{\beta + \lambda}. \quad (26)$$

Avec [?] et [?], nous aboutissons donc à la mesure stationnaire suivante pour l'état  $(K\gamma, 1)$  :

$$\pi(K\gamma, 1) = \frac{1}{\left(K + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}.$$

Pour l'état  $(K\gamma, 0)$ , étant donné que  $\pi$  est une mesure de probabilité, nous pouvons écrire :

$$\pi(K\gamma, 0) = 1 - \left( \sum_{a=0}^1 \sum_{v=0}^{(K-1)\gamma} \pi(v, a) + \pi(K\gamma, 1) \right). \quad (27)$$

## 5. Conclusion

## 6. Références

### Références

- [1] M. André et C. Pouzat, « A Quasi-Stationary Approach to Metastability in a System of Spiking Neurons with Synaptic Plasticity », *Mathematical Neuroscience and Applications*, p. 7668, janv. 2025, doi: 10.46298/mna.7668.
- [2] P. Brémaud, *Discrete Probability Models and Methods: Probability on Graphs and Trees, Markov Chains and Random Fields, Entropy and Coding*, vol. 78. in Probability Theory and Stochastic Modelling, vol. 78. Cham: Springer International Publishing, 2017. doi: 10.1007/978-3-319-43476-6.
- [3] J. N. Darroch et E. Seneta, « On Quasi-Stationary Distributions in Absorbing Discrete-Time Finite Markov Chains », *Journal of Applied Probability*, vol. 2, n° 1, p. 88-100, juin 1965, doi: 10.2307/3211876.

## 7. Appendice

## 8. Modèle en temps continu et équation différentielle stochastique associée

$$\begin{aligned} dX_t^i &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{z \leq \beta} \Delta_a(X_t^i) \pi^i(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\beta \leq z \leq \beta + \lambda} F_{t-}^i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \pi^i(dt, dz) \\ &+ \sum_{j \neq i} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{z \leq \beta} F_{t-}^j \mathbf{1}_{U_{t-}^j = \theta} \Delta_{\text{ex}}(X_{t-}^i) \pi^j(dt, dz). \end{aligned}$$

Avec les sauts associés à un spike du neurone lui-même, dit **autonome** :

$$\Delta_a(x) = \mathbf{1}_{u=\theta} \left[ \begin{pmatrix} -u \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{1}_{f=0} + \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix} f \right], \text{ pour tout } x = \begin{pmatrix} u \\ f \end{pmatrix},$$

et les sauts déclenchés par un autre neurone **extérieur** :

$$\Delta_{\text{ex}}(x) = \begin{pmatrix} u + 1 \wedge \theta \\ f \end{pmatrix}, \text{ pour tout } x = \begin{pmatrix} u \\ f \end{pmatrix}.$$

$\pi^i$  mesures de Poisson.

$$\begin{aligned} |Y_{t+1}^j - \bar{Y}_{t+1}^j| &= \left| A_t^j \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(V_r^j)} - \bar{A}_t^j \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_r^j)} \right| \\ &= \left| \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(V_r^j)} - \mathbf{1}_{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_r^j)} \right| \\ &= \mathbf{1}_{\phi(V_r^j) \wedge \phi(\bar{V}_r^j) \leq U_{t+1}^j \leq \phi(V_r^j) \vee \phi(\bar{V}_r^j)}. \end{aligned}$$