

# Mémoire de stage de fin de Master

## *Modélisation de la mémoire de court-terme et processus de Markov neuronaux en temps discret*

cover.png

### Abstract

Ce rapport présente une modélisation mathématique du processus de mémoire de court-terme, en s'appuyant sur la théorie des chaînes de Markov. Nous étudions un modèle de neurones spiking en temps discret, où les neurones sont activés par des stimuli et peuvent se désactiver après un certain temps. Nous analysons les propriétés de ce processus, notamment sa convergence vers un état stationnaire et son comportement en champ moyen. Enfin, nous discutons des implications de ces résultats pour la compréhension des mécanismes neuronaux sous-jacents à la mémoire.

### Rédigé par

Simon Buré



simon.bure@etu-upsaclay.fr

### Sous la supervision de

Prof. Eva Löcherbach



Eva.Locherbach@univ-paris1.fr

### Terminé le

13-08-2025

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de mémoire, Prof. Eva Löcherbach, pour son encadrement, ses conseils avisés et sa disponibilité tout au long de ce travail. Son expertise et son soutien ont été essentiels à la réalisation de ce mémoire.

## Table des matières

1. Introduction .....	4
1.1. Intérêts .....	4
1.2. Objectifs .....	4
2. Modélisation .....	4
2.1. Définition du système .....	4
2.2. Modélisation des sauts du système .....	4
3. Étude de la chaîne de Markov associée au modèle .....	5
3.1. Transitions de la chaîne de Markov .....	6
3.2. Espace des états dans lequel évolue la chaîne .....	7
3.3. Mesure empirique .....	7
3.4. Modéliser la mémoire de travail .....	8
3.5. Espace absorbant .....	9
3.6. Irréductibilité .....	10
4. Limite en champ moyen du processus .....	12
4.1. Spécifications techniques liées à l'hypothèse de champ moyen .....	13
4.2. Processus limites .....	14
4.3. Existence des processus limites .....	15
4.4. Convergence vers les processus limites .....	15
5. Mesure stationnaire du modèle limite .....	24
5.1. Définition et existence .....	25
5.2. État régénérant .....	26
5.3. Calcul de la mesure stationnaire .....	27
5.4. Équilibres de la mesure stationnaire .....	28
6. Conclusion .....	31
Références .....	31

# 1. Introduction

Pour comprendre comment ce système peut soutenir la mémoire de court-terme, nous allons devoir expliquer :

1. Comment les neurones peuvent maintenir une activité de spikes sur du long-terme ?
2. Quelles sont les conditions permettant à cette activité d'émerger ?

## 1.1. Intérêts

## 1.2. Objectifs

(André & Pouzat, 2025; Brémaud, 2017; Darroch & Seneta, 1965)

# 2. Modélisation

## 2.1. Définition du système

Nous définissons l'état du système de neurones par le processus stochastique suivant

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^N \end{pmatrix}$$

où

$$X_t^i = (V_t^i, A_t^i).$$

Chaque neurone  $i$  est donc représenté par un couple  $(V_t^i, A_t^i)$  où :

- La variable aléatoire  $V_t^{i,N}$  représente le *potentiel de membrane* ou *voltage*, au temps  $t$ , avec  $V_t^{i,N} \in \{0, 1, \dots, \theta\}$ .
- La variable aléatoire  $A_t^{i,N}$  représente l'état d'*activation* de la synapse du neurone au temps  $t$ , avec  $A_t^{i,N} \in \{0, 1\}$ . Elle permet de rendre compte de la plasticité synaptique à court-terme, mécanisme important dans le phénomène cognitif de la mémoire de travail.

Notons  $\mathcal{F}_t$  la filtration associée au processus global.

Notre modélisation se fait en temps discret. Pour un  $T \in \mathbb{N}$  tel que  $T > 0$ , nous définissons :

$$t \in \{0, 1, \dots, T\}.$$

## 2.2. Modélisation des sauts du système

En plus des deux variables aléatoires  $V_t^{i,N}$  et  $A_t^{i,N}$ , nous avons besoin d'une variable aléatoire auxiliaire par neurone, que nous noterons  $U_t^i$ . Tous les  $U_t^i$  sont distribuées *uniformément* sur  $[0, 1]$ , qui nous permettra de simuler les processus de spike et de désactivation des neurones. Nous avons donc

$$\forall t, \forall i, U_t^i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Unif}(0, 1).$$

Commençons par définir les potentiels d'action, ou « spikes » du système.

### 2.2.1. Spike

Un neurone d'indice  $i$  est en capacité d'émettre un spike au temps  $t + 1$  si et seulement si son potentiel de membrane  $V_t^{i,N} = \theta$ .

Un neurone capable de « spiker », spike avec probabilité  $\beta$  indépendamment de l'état du système et des autres variables aléatoires. Après l'émission d'un potentiel d'action, le potentiel de membrane du neurone est **remis à zéro**.

Pour formaliser ces informations, nous allons introduire la fonction  $\phi$ , qui, à un voltage  $v$  donné, associera la **probabilité de spiker** :

$$\phi : \begin{cases} v \in \{0, 1, \dots, \theta\} \longrightarrow [0, 1] \\ \phi(v) = \beta \mathbf{1}_{v=\theta} \end{cases}.$$

Ainsi en utilisant  $\phi$  et la variable auxiliaire uniforme  $U_t^i$  définie plus haut, le neurone  $i$  effectuera un spike au temps  $t + 1$  si et seulement si

$$U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^{i,N}).$$

Nous appellerons l'*indicateur de spike* le terme  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}}$  et à l'inverse *indicateur d'absence de spike* le terme  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}}$ .

Nous pouvons donc résumer la dynamique du potentiel de membrane du neurone  $i$  à travers le temps par l'équation suivante :

$$V_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} \left( V_t^i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N A_t^j \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} \right).$$

### 2.2.2. Désactivation

La dynamique d'activation des neurones par deux événements : le **spike** et la **désactivation**. Lorsque le neurone  $i$  émet un spike au temps  $t + 1$ , il devient **systématiquement activé**, c'est-à-dire que  $A_{t+1}^{i,N} = 1$ .

Par contre, lorsqu'il n'émet pas de spike, il peut se **désactiver** au temps  $t + 1$  avec une certaine probabilité  $\lambda$  ou bien conserver sa variable aléatoire d'activation. S'il se désactive, alors systématiquement,  $A_{t+1}^{i,N} = 0$ .

En définissant comme cela la dynamique de la variable d'activation, le neurone  $i$  se désactivera au temps  $t + 1$  si et seulement si

$$\beta \leq U_{t+1}^i \leq \beta + \lambda.$$

Nous appellerons l'*indicateur de désactivation* le terme  $\mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}$ . Nous voyons que nous devons par contre émettre l'hypothèse que

$$\beta + \lambda < 1.$$

La dynamique temporelle de la variable d'activation du neurone  $i$  suit donc l'équation suivante :

$$A_{t+1}^{i,N} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} + \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} A_t^{i,N} (1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}).$$

## 3. Étude de la chaîne de Markov associée au modèle

Nous disposons maintenant d'un modèle mathématique précis décrivant l'évolution en temps discret de notre système de neurones via des sauts représentant les potentiels d'action et les mécanismes d'activation et de désactivation des synapses. Cette formalisation nous a mené à l'utilisation d'une chaîne de Markov  $X_t = (V_t^i, A_t^i)$  pour représenter ces dynamiques, reprenant la philosophie de notre article de référence (André & Pouzat, 2025).

Cette section répondra à la première question identifiée dans Chapitre 1 en posant les fondations mathématiques nécessaires au maintien de l'activité neuronale persistente. Ces bases seront importantes pour répondre à la seconde question dans les Chapitre 4 et Chapitre 5.

Nous commencerons par poser proprement la chaîne  $X_t$  en définissant les **transitions** à sa disposition (Chapitre 3.1), ainsi que l'**espace d'états**  $\mathcal{X}$  dans lequel elle évolue. Cela nous amènera à considérer un nouveau point de vue grâce à la **mesure empirique**, pour réduire cet espace d'état et ainsi diminuer la complexité computationnelle. Ensuite, pour maintenir l'activité neuronale sur  $X_t$ , nous aurons besoin d'identifier **configurations absorbantes** (Chapitre 3.5) qu'il faudra éviter pour maintenir la mémoire de travail. Enfin, nous établirons l'**irréductibilité** (Chapitre 3.6) de la chaîne sur l'espace non-absorbant, pour assurer un système flexible ne dépendant pas des conditions initiales.

### 3.1. Transitions de la chaîne de Markov

Soit  $x \in \mathcal{X}$  un état possible du système de neurones. Nous notons

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \text{ avec } x_i = (v_i, a_i).$$

Nous avons bien sûr  $x_i \in \mathcal{V} \times \{0, 1\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ .

Depuis cet état  $x$ , nous définissons trois transitions élémentaires possibles, vers un état  $y \in \mathcal{X}$  :

- **Spike inefficace menant à l'activation d'un neurone** : notons  $i$  l'indice du neurone effectuant le spike. La transition suivante survient avec probabilité  $\beta$  :

$$\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ (v_2, a_2) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (\theta, 0) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ (v_2, a_2) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (0, 1) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix}.$$

- **Désactivation d'un neurone** : ici aussi,  $i$  est l'indice  $i$  du neurone se désactivant. Le système subit la transition suivante avec probabilité  $\lambda$ ,

$$\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (v_i, 1) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \vdots \\ (v_i, a_i) = (v_i, 0) \\ \vdots \\ (u_N, f_N) \end{pmatrix}.$$

- **Spike efficace** : ici encore, nous notons  $i$  l'indice du neurone effectuant le spike. La transition survient avec probabilité  $\beta$ , et s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \vdots \\ (\theta, 1) \\ \vdots \\ (v_N, a_N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ([v_1 + 1] \wedge \theta, a_1) \\ \vdots \\ (0, 1) \\ \vdots \\ ([v_N + 1] \wedge \theta, a_N) \end{pmatrix}.$$

Ces trois transitions élémentaires sont **mutuellement exclusives**, c'est-à-dire que, dans un même intervalle de temps (entre  $t$  et  $t + 1$ ), un neurone d'indice  $i$  ne peut pas se désactiver puis faire une spike inefficace (ou bien effectuer un spike efficace puis se désactiver). Par contre, les  $N$  neurones du système dans son ensemble peuvent tout à fait tous, ou en partie, subir une transition de façon indépendante. Par exemple, pour un système contenant  $N = 10$  neurones dans les bonnes configuration, nous pourrions

tout à fait avoir 3 spikes efficaces, 0 spike inefficace, et 5 désactivations pendant le même intervalle temporel.

### 3.2. Espace des états dans lequel évolue la chaîne

Chaque neurone peut prendre des valeurs dans l'espace  $\{0, 1, \dots, \theta\} \times \{0, 1\}$ , ce qui leur donne  $2(\theta + 1)$  états à leur disposition. Pour un système à  $N$  neurones évoluant dans l'espace  $\mathcal{X} = (\{0, 1, \dots, \theta\} \times \{0, 1\})^N$ , le nombre d'états est donc  $|\mathcal{X}| = (2(\theta + 1))^N$ .

Problème, pour un système un tant soit peu important ( $N = 30$  et  $\theta = 4$ ), le coût computationnel explose très rapidement ( $|\mathcal{X}| = (2(4 + 1))^{30} = 10^{30}$  !). C'est pourquoi nous allons désormais aborder une astuce, un changement de point de vue qui nous permettra de diminuer drastiquement la complexité.

### 3.3. Mesure empirique

Jusqu'à présent, nous avons analysé notre système en suivant individuellement chaque neurone  $i$  avec son état  $(V_t^i, A_t^i)$ . Cette approche « microscopique » fournit une description complète, mais n'est pas optimale, comme nous allons le montrer avec les deux arguments suivants.

Pour aborder la mémoire de travail, il n'est pas nécessaire de connaître précisément l'identité de chaque neurone. Les informations importantes sur la dynamique se trouvent au **niveau collectif** ou macroscopique. Ce qui nous intéresse, c'est connaître la quantité de neurones actifs ou que le nombre de neurones à chaque « marche » de l'escalier du voltage. Ce changement de point de vue entraînerait de plus une **réduction de la complexité computationnelle**, car le modèle se limiterait aux informations intéressantes.

Pour représenter ce changement de paradigme, nous allons définir la **mesure empirique** de notre système et l'utiliser à la place du modèle « micro ». Ce changement est possible grâce à un point fondamental et non-évident, qui découle directement de la construction de notre modèle : **la mesure empirique de notre chaîne de Markov est elle-même une chaîne de Markov** définie sur un espace plus petit. Cela permet de se concentrer sur les informations essentielles tout en gardant le cadre théorique agréable des chaînes de Markov.

#### 3.3.1. Définition formelle

La définition de la mesure empirique est classiquement :

$$\mu_t^N(v, a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(V_t^{i,N}, A_t^{i,N})}(v, a).$$

Cependant, nous trouvons qu'il est plus clair de travailler avec le compte direct des neurones plutôt qu'avec des proportions. Ainsi, nous allons noter  $x_{v,a}^N$  le nombre de neurones tels que  $(V_t^i, A_t^i) = (v, a)$ .

Il vient :

Pour tout  $v \in \mathcal{V}$  et tout  $a \in \{0, 1\}$

$$x_{v,a}^N = \sum_{i=1}^N \delta_{(V_t^{i,N}, A_t^{i,N})}(v, a).$$

Notre « mesure empirique »  $x_t^N$  sera la suivante :

$$x_t^N(v, a) = x_{v,a}^N.$$

Introduisons également les notations suivantes :

- $x_{v,\cdot}^N$  : pour compter le nombre de neurones ayant un potentiel de  $v$ . Nous appellerons cela la **couche**  $v$  dans la suite du mémoire,

$$x_{v,\cdot}^N = \sum_{i=1}^N \delta_{(V_t^i, A_t^i)}(v, 0) + \delta_{(V_t^i, A_t^i)}(v, 1).$$

- $x_{\cdot,a}^N$  : pour compter le nombre de neurones actifs ou inactifs,

$$x_{\cdot,a}^N = \sum_{i=1}^N \delta_{(V_t^i, A_t^i)}(V_t^{i,N}, a).$$

### 3.3.2. Propriété de Markov

De façon plus formelle, remarquons :

**Remarque 3.1** (Propriété de Markov de la mesure empirique): La représentation de la chaîne  $X_t$  à travers le nombre de neurones à chaque couche  $x_{v,a}^N$  est elle-même une chaîne de Markov.

L'argument est le suivant : comme est construit notre modèle, les neurones sont interchangeables sans que cela impacte la dynamique. La connaissance de la structure macroscopique nous fournit toutes les informations nécessaires pour prédire l'évolution future de la chaîne.

Formellement, comme vu dans Chapitre 3.1, les probabilités de transition sont entièrement déterminés par la connaissance de la mesure empirique :

$$\mathbb{P}(x_{t+1}^N | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(x_{t+1}^N | x_t^N).$$

Dans la suite du mémoire, lorsque nous invoquerons  $X_t$ , cela fera référence à cette nouvelle chaîne de Markov définie à partir du compte des neurones à chaque couche.

### 3.3.3. Taille du nouvel espace $\mathcal{X}$

Pour déterminer la taille de l'espace d'états de la mesure empirique, nous devons compter le nombre de façons de répartir  $N$  neurones parmi les  $2(\theta + 1)$  états possibles  $(v, a)$ .

Ce problème équivaut à compter le nombre de façons de placer  $N$  objets identiques et interchangeables (les étoiles ★) dans  $2(\theta + 1)$  boîtes distinctes, ce qui correspond au problème classique des « étoiles et barres ». Pour séparer  $2(\theta + 1)$  groupes, nous avons besoin de  $2(\theta + 1) - 1$  séparateurs (les barres |). Le nombre total d'arrangements de  $N$  étoiles dans  $2\theta + 1$  boîtes est donné par le coefficient binomial :

$$|\mathcal{X}| = \binom{N + 2\theta + 1}{2\theta + 1}.$$

Comparons les tailles des deux espaces (celui microscopique et celui macroscopique) pour  $N = 30$  et  $\theta = 4$ . Rappelons que l'espace du modèle version micro contient  $2(\theta + 1)^N$  états, soit  $10^{30}$ . La version macro, contient « seulement »  $\binom{N+2\theta+1}{2\theta+1} = \binom{39}{9} = 2.11 \times 10^8$ , réduisant considérablement la complexité du modèle !

## 3.4. Modéliser la mémoire de travail

Ce que nous voulons pour représenter un groupe de neurones impliqué dans une tâche de mémorisation à court terme, c'est qu'ils puissent conjointement soutenir une activité neuronale sur un temps arbitrairement long. L'interruption de cette activité, traduirait une perturbation de cette mémorisation, et donc un oubli de l'information d'intérêt.



Nous avons donc besoin que  $X_t$  soit capable d'émettre en continu des potentiels d'action sur la fenêtre temporelle d'étude  $\llbracket 0, T \rrbracket$ . Comme nous travaillons avec une chaîne de Markov, il vient assez naturellement que nous allons avoir besoin d'étudier l'**absorption** de  $X_t$ . Nous pourrions alors ensuite **conditionner** la chaîne à sa **non-absorption**, impliquant ainsi qu'elle deviendra capable de soutenir une activité persistente de sauts aussi longtemps que nécessaire.

Définissons maintenant les états et espaces absorbants.

### 3.5. Espace absorbant

#### 3.5.1. États absorbants

Le système n'émettra plus aucun saut lorsque :

- aucun neurone ne se trouve dans un état permettant un spike,
- tous les neurones sont désactivés.

Un état absorbant  $\alpha$  se définit donc de la façon suivante :

$$\alpha = \begin{pmatrix} (v_1, 0) \\ (v_2, 0) \\ \vdots \\ (v_N, 0) \end{pmatrix}, \quad \forall v_i < \theta.$$

#### 3.5.2. États presque-absorbants

Autour de ces états absorbants existent aussi des états qui mènent nécessairement vers un état absorbant après quelques pas de temps. Nous les appellerons les états *presque-absorbants*.

C'est le cas par exemple des systèmes où aucun neurone n'est en capacité de spiker où tous les potentiels de membrane sont inférieurs à  $\theta$ . En temps fini, les neurones vont se désactiver un à un jusqu'à atteindre l'état absorbant.

Un autre exemple est celui du système ayant deux neurones actifs dans la couche  $\theta$ , mais dont le reste des neurones se trouvent éparpillés dans les couches inférieures à  $\theta - 2$ . Après les deux spikes, le système se retrouve dans l'état précédent, où aucun neurone ne peut émettre de spike.

#### 3.5.3. Définition de l'espace absorbant

Nous notons  $\mathcal{A}$ , l'**espace rassemblant les états absorbants et presque-absorbants**.

$\mathcal{A}$  désigne les états à partir desquels le système est déjà absorbé ou finira nécessairement par l'être en un temps fini. Autrement dit, ce sont des configurations où l'activité neuronale est insuffisante pour maintenir une dynamique soutenue : la chaîne de Markov évolue alors inévitablement vers un état stable et inactif.

Pour chaque couche  $k$  du système de neurones, nous allons définir un sous-ensemble  $\mathcal{A}_k$  et définir  $\mathcal{A}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\theta} \mathcal{A}_k.$$

Chaque sous-ensemble  $\mathcal{A}_k$  impose une contrainte sur le nombre de neurones actifs dans les couches  $l \leq k$ , de façon à ce que le système ne puisse pas se maintenir dans le temps et finisse nécessairement par tomber dans un état réellement absorbant.

Définissons à présent les  $\mathcal{A}_k$ .  $\forall k \leq \theta$  :

$$\mathcal{A}_k = \left\{ X \in \mathcal{X} : \sum_{l=k}^{\theta} \mu(l, 1) \leq \theta - k \right\}.$$

Pour  $k = 0$ , nous avons le cas particulier suivant :

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ X \in \mathcal{X} : \mu(\theta, 0) + \sum_{l=0}^{\theta} \mu(l, 1) < \theta \right\}.$$

Nous venons de caractériser l'espace absorbant  $\mathcal{A}$  : les configurations où le système finira inévitablement par s'éteindre et perdre toute activité neuronale. Pour modéliser la mémoire de court-terme, nous nous intéressons naturellement au comportement sur l'espace complémentaire  $\mathcal{A}^c$  : où le système peut maintenir une activité de spikes indéfiniment.

Cependant, la **non-absorption ne suffit pas**. Imaginons un réseau qui, bien que capable de spiker indéfiniment, se retrouve « piégé » dans une région particulière de l'espace d'états sans pouvoir explorer d'autres configurations. Un tel système pourrait maintenir une activité neuronale, mais cette activité serait rigide, incapable de s'adapter ou de représenter différents items mémoriels. Le comportement d'un tel système serait aussi fortement dépendant des conditions initiales, faisant varier la région piège.

Nous voyons ainsi apparaître un nouveau critère pour notre modèle : la nécessité de « flexibilité » ; de pouvoir passer d'une configuration à une autre sans se « coincer » dans une sous-région de l'espace des états. Mathématiquement, cela correspond à la notion d'**irréductibilité** : tous les états communiquent entre eux et les conditions de départ n'importent pas sur le comportement à long-terme de la chaîne de Markov.

Grâce à la propriété d'irréductibilité plus le conditionnement de la chaîne  $X_t$  à la non-absorption, il serait possible d'étudier théoriquement la **distribution quasi-stationnaire** de la chaîne  $X_t$ . C'est un cadre théorique pertinent pour étudier les systèmes **métastables**, c'est-à-dire avec un équilibre (ici l'absorption) mais pouvant évoluer un temps arbitraire autour de cet équilibre avant d'y être attiré indéfiniment. Cette approche a été largement étudiée dans (André & Pouzat, 2025), et c'est pour cela qu'elle ne sera pas abordée plus en détail dans ce mémoire. Nous nous démarquons en proposant une nouvelle vision pour la mémoire de travail, à travers un modèle limite et la mesure stationnaire qui en découlera.

C'est cette propriété d'irréductibilité que nous allons maintenant établir pour  $X_t$  à partir de la structure même de notre modèle.

### 3.6. Irréductibilité

Comme nous venons de l'expliquer, l'irréductibilité est une propriété essentielle pour garantir la possibilité de  $X_t$  de visiter tous les états de l'espace  $\mathcal{A}^c$ . Cependant, du fait de la construction de notre modèle, certains états du système de neurones ne font pas partie de  $\mathcal{A}^c$  mais ne sont pourtant pas atteignables à partir d'autres états non-absorbants. C'est par exemple le cas de l'état ne contenant aucun neurone dans la couche 0 et tous les neurones activés dans la couche  $\theta$ , c'est-à-dire  $x$  tel que  $x_{0,\cdot} = 0$  et  $x_{\theta,1} = N$ . Comme il possède tous ses neurones capables de spiker, c'est bien un état qui n'est pas absorbant. Pourtant, il ne pourra jamais être visité à nouveau car après chaque spike, par définition, il y aura toujours un neurone dans la couche 0.

Nous appellerons les états de ce type les états *transitoires*, qui ne pourront être atteints autrement que via les conditions initiales du système. Détaillons tout de suite leur définition.

#### 3.6.1. États transitoires et espace transitoire

Un autre exemple d'état transitoire est le suivant :  $x_{\theta,1} = N - 1$  et  $x_{0,1} = 1$ . Plus généralement, **tout état** qui possède plus de  $N - \theta$  neurones dans une de ses couches **est transitoire**. Cela est dû au fait que notre modélisation impose l'existence de  $\theta + 1$  couches, ce qui signifie qu'au moins  $\theta$  spikes

efficaces sont nécessaires pour rassembler les neurones dans la couche  $\theta$ . Ces  $\theta$  spikes, entraînent la dispersion de  $\theta$  neurones dans les couches inférieures. Ainsi  $\theta$  neurones ne pourront jamais être rassemblés avec les autres et donc au maximum, il ne sera possible de rassembler que  $N - \theta$  neurones dans une même couche.

### TO-DO : Illustration ?

Nous définissons donc l'**ensemble des états transitoires** comme suit :

$$\mathcal{T} = \{x \in \mathcal{X} : x_{0,\cdot} = 0\} \cup \{x \in \mathcal{X} : x_{v,\cdot} > N - \theta, \forall v = 0, \dots, \theta\}.$$

Pour prouver formellement l'irréductibilité de la chaîne de Markov, nous nous placerons donc sur l'**ensemble des états irréductibles**  $\mathcal{X}_{\text{irr}} = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{T}^c$ .

**Théorème 3.2** (Irréductibilité chaîne de Markov conditionnellement à la non-absorption): La chaîne de Markov  $X_t = (V_t^i, A_t^i)$  est **irréductible** sur l'espace  $\mathcal{X}_{\text{irr}}$ .

*Preuve:* Il nous faut prouver que, pour tout état  $x \in \mathcal{X}_{\text{irr}}$ , il est possible d'atteindre n'importe quel autre état  $y \in \mathcal{X}_{\text{irr}}$  avec probabilité positive. Autrement dit, il existe un nombre fini d'opérations de spikes efficaces, de spikes inefficaces ou de désactivations qui permettent d'atteindre n'importe quel état  $y$  en partant de  $x$ . Toutes ces opérations peuvent advenir avec probabilité positive, car la chaîne  $X_t$  évolue sur l'espace  $\mathcal{X}_{\text{irr}}$  où, nous l'avons vu en Chapitre 3.6, elle est capable de soutenir indéfiniment une activité de sauts.

La preuve se présente comme suit :

1. Définition des notations utilisées pour représenter les opérations élémentaires de sauts de notre chaîne  $X_t$ .
2. Introduction d'un état de référence  $x'''$ , atteignable à partir de n'importe quel état  $x$  en quelques opérations.
3. Définition d'une suite d'états  $y^l$ , où  $y^{l+1}$  est atteignable à partir de  $y^l$  avec un nombre fini d'opérations.
4. Preuve qu'il est possible d'atteindre  $y^0$  à partir de  $x'''$ .
5. Preuve que  $y$  s'atteint grâce à la suite des  $y^l$ .

### TO-DO : Illustrer la preuve avec un dessin dans un cas simple à $N = 3$ et $\# \text{max\_potential}$

= 1 Pour la lisibilité de cette preuve, nous commençons par noter :

- $O_e^k$  : l'opération de  $k$  spikes efficaces,
- $O_i^k$  : l'opération de  $k$  sauts inefficaces,
- $O_d^{k,v}$  : l'opération de désactivation de  $k$  neurones à la couche  $v$ .

Ainsi la notation  $O_e^k(x)$  désigne l'opération de  $k$  spikes efficaces depuis l'état  $x$ . Ces  $k$  spikes peuvent advenir tous en un seul pas de temps, si l'état  $x$  le permet (i.e. s'il possède au moins  $k$  neurones en couche  $\theta$ ). Mais ils peuvent être également effectué dans un ordre quelconque. Lorsque la distinction est nécessaire, cela sera précisé.

Montrons d'abord que nous pouvons toujours atteindre en un nombre fini d'opérations, un état  $x'''$  où tous les neurones sont activés (soit  $x'''_{\cdot,1} = N$ ) et avec  $N - \theta$  neurones à la couche  $\theta$  ( $x'''_{\cdot,1} = N - \theta$ ) ainsi qu'un neurone par couche inférieure ( $x'''_{v,1} = 1, \forall v = 0, 1, \dots, \theta - 1$ ). Notons  $m = x'''_{\cdot,0}$ , le nombre de neurones désactivés de l'état  $x$ . L'état  $x'''$  s'atteint de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
x' &= O_e^\theta(x), \\
x'' &= O_i^m(x') \text{ où } m \text{ est le nombre de neurones désactivés,} \\
x''' &= \underbrace{O_e^1 \circ O_e^1 \dots \circ O_e^1}_{\theta \text{ fois}}(x'').
\end{aligned}$$

D'où  $x'''$  tel que  $x'''_{\theta,1} = N - \theta$  et  $x'''_{v,1} = 1, \forall v = 0, 1, \dots, \theta - 1$ .

À partir de cet état  $x'''$ , montrons que nous pouvons atteindre l'état  $y$  en un nombre fini d'opérations à travers une suite d'états  $y^l$ . Depuis l'état  $x'''$ , il est possible d'atteindre le premier élément de la suite  $y^0$ . Puis, à partir de chaque élément  $y^l$ , l'élément suivant  $y^{l+1}$  s'atteint avec toujours la même séquence d'opérations. La suite se poursuit jusqu'à ce que  $l = \theta - 1$ . Enfin, à partir de  $y^\theta$ , l'état quelconque d'arrivée  $y$  s'atteint également en quelques opérations de désactivation.

Cet état  $y \in \mathcal{X}_{\text{irr}}$  se définit de façon très générale par son nombre de neurones dans chaque couche. Ainsi,  $\forall v \in \mathcal{V}$  :

$$y = \begin{pmatrix} (y_{\theta,0}^N, y_{\theta,0}^N) \\ \vdots \\ (y_{v,0}^N, y_{v,0}^N) \\ \vdots \\ (y_{0,0}^N, y_{0,0}^N) \end{pmatrix}.$$

Définissons tout d'abord la suite d'états  $y^l$ . Pour obtenir  $y^{l+1}$  à partir de  $y^l$ , on désactive à la couche  $\theta$  le nombre  $y_{\theta-l,\cdot}^N - 1$  de neurones (soit le nombre total de neurones à la couche  $\theta - l$  moins un) puis on fait **ce même nombre de spikes inefficaces**. Ces deux opérations permettent de récupérer  $y_{\theta-l,\cdot}^N - 1$  neurones en couche  $(0, 1)$ .

Nous construisons de cette façon progressivement l'état  $y$  en amenant l'exacte quantité de neurones qu'il possède à chaque couche à la bonne couche finale. Cela commence par ailleurs pour l'étape  $l = 0$  par amener  $y_{\theta,\cdot}^N$  en  $(0, 1)$ .

Enfin, on fait **un spike efficace** pour monter les  $y_{\theta-l,\cdot}^N$  neurones à la couche supérieure.

Formellement, cela donne initialement :

$$y^0 = O_i^{y_{\theta,\cdot}^N} \circ O_d^{y_{\theta,\cdot}^N, \theta}(x'''),$$

ainsi que plus généralement :

$$\forall l \in \{0, \dots, \theta - 1\}, y^{l+1} = O_e^1 \circ O_i^{y_{\theta-l,\cdot}^N - 1} \circ O_d^{y_{\theta-l,\cdot}^N - 1, \theta}(y^l).$$

Enfin, nous désactivons le bon nombre de neurones dans toutes les couches pour arriver à  $y$  :

$$\forall v = 0, \dots, \theta, y = O_d^{1,v}(y^\theta).$$

Ce qui conclut la preuve. □

## 4. Limite en champ moyen du processus

Dans Chapitre 2, nous avons introduit un système fini de  $N$  neurones et expliqué ses dynamiques de base. Nous avons ensuite vu (Chapitre 3) pourquoi nous avons besoin de propriétés clés comme le conditionnement à la non-absorption et l'irréductibilité pour modéliser la mémoire de travail. Cependant, cette approche présente deux limitations, une opérationnelle et l'autre conceptuelle.

1. **Limitation computationnelle** : l'espace d'états de notre chaîne de Markov  $X_t$  croît exponentiellement avec  $N$  ( $|\mathcal{X}| = 2(\theta + 1)^N$ ), rendant l'analyse directe impraticable  $N$  augmentant.
2. **Réalisme neurobiologique** : un cortex réaliste contient des milliards de neurones, chacun interagissant potentiellement avec un très grand nombre d'autres neurones via leurs synapses. Dans ce contexte, l'influence d'un neurone particulier sur un autre diminue au profit d'une influence « moyenne » de tous les neurones voisins.

L'utilisation de l'hypothèse de champ moyen découle naturellement de ces deux considérations : considérer un **grand nombre**  $N$  de neurones identiques et remplacer l'apport individuel de chaque neurone en une interaction « moyenne », identique pour tous.

Cette hypothèse entraînera la nécessité de modifications techniques sur les équations et sur les espaces, pour pouvoir continuer à utiliser le modèle lorsque  $N$  tendra vers l'infini, et que  $X_t$  vers un modèle. Ce **modèle limite**, qu'il nous faudra définir formellement, prendra en compte seulement la masse moyenne d'une **infinité** de neurones. Nous verrons que son existence ne pose pas de problème mathématique.

Ensuite, toujours dans l'objectif de proposer un modèle rigoureux, nous réaliserons la preuve complète de la convergence du modèle fini vers le modèle limite. Nous verrons que cela nécessitera une modification de la fonction de spike  $\phi$  pour que la preuve puisse être réalisable.

Enfin, nous étudierons la mesure stationnaire qui nous permettra de décrire le comportement en temps long du modèle limite.

#### 4.1. Spécifications techniques liées à l'hypothèse de champ moyen

Sous l'hypothèse de champ moyen, les  $N$  neurones ont tous les mêmes conditions initiales suivantes : Pour tout  $(v, a) \in \mathcal{V} \times \{0, 1\}$ ,

$$X_0^N = \begin{pmatrix} (v, a) \\ (v, a) \\ \vdots \\ (v, a) \end{pmatrix}.$$

Avec le modèle fini présenté dans la Chapitre 2, lorsque nous ferons tendre  $N$  vers l'infini, la somme  $\sum_{j=1}^N A_t^{i,N} \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}}$  explosera. Pour conserver l'intégrité du modèle, nous allons ajouter un facteur  $\frac{1}{N}$  pour normaliser cette somme.

Conséquemment à l'ajout de ce terme, l'espace de  $V_t^{i,N}$  se voit altéré. De  $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, \theta\}$ , discret et incrémenté de 1, il deviendra incrémenté de  $\frac{1}{N}$ , soit  $\mathcal{V}^N = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1, \dots, \theta\}$ .  $N$  allant à l'infini, l'espace  $\mathcal{V}^N$  deviendra **continu**.

Ainsi l'équation de la dynamique du potentiel de membrane,

$$V_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} \left( V_t^i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N A_t^j \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} \right).$$

s'écrit désormais

$$V_{t+1}^{i,N} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} \left( V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} \right)$$

## 4.2. Processus limites

Nous allons noter  $\bar{V}_t^i$  et  $\bar{A}_t^i$  les valeurs des **processus limites** de potentiel de membrane et d'activation pour le neurone  $i$  au temps  $t$ . Remarquons de suite que les processus  $V_t^{i,N}$  et  $\bar{V}_t^i$  partagent tous les deux la même variable  $U_t^i$ .

La dynamique du processus limite de l'activation de la synapse du neurone  $i$  reste définie de façon similaire que la dynamique du processus fini :

$$\bar{A}_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} + \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i (1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}). \quad (1)$$

Cependant, la variable aléatoire  $\bar{V}_t^i$  se voit modifiée plus profondément par l'hypothèse de champ moyen. En effet, le champ moyen suppose l'existence d'une certaine « loi des grands nombres » stipulant que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right].$$

Ainsi la dynamique du processus limite du potentiel de membrane s'écrit :

$$\bar{V}_{t+1}^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} \left( \bar{V}_t^i + \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right] \right). \quad (2)$$

Remarquons que Équation 1 et Équation 2 décrivent toujours des **variables aléatoires** malgré le passage à la limite.

La variable aléatoire  $V_t^{i,N}$  avait été définie comme à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, \theta\} \subset \mathbb{N}$ . Or nous voyons désormais que  $\bar{V}_t^i$  ne respecte plus cette définition, notamment car  $\mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right]$  est un **nombre réel** et dépendant du temps  $t$ .

Supposons que

$$\gamma_t = \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right]. \quad (3)$$

Intuitivement, cela signifie qu'à chaque pas de temps, le potentiel de membrane limite  $\bar{V}_t^i$  augmente d'une quantité fixée  $\gamma_t$ , inconnue et dépendante du temps. Remarquons d'ailleurs que :

**Remarque 4.1** (Non-absorption de la chaîne limite): Grâce à l'ajout des contributions moyennes  $\gamma_t$  à chaque pas de temps, la chaîne limite  $\bar{X}_t$  ne peut jamais être absorbée.

Cependant, comme nous travaillons sur une fenêtre temporelle fixée  $\llbracket 0, T \rrbracket$ , les valeurs de  $\gamma_t$  sont fixées, et au nombre de  $T + 1$ . Elles peuvent s'écrire, par exemple,

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_T.$$

Parmi ces  $T + 1$  valeurs, notons  $\gamma^*$  la plus petite :

$$\gamma^* = \inf \{ \gamma_t, \forall t \in \llbracket 0, T \rrbracket \},$$

et  $t^*$  le temps où  $\gamma_t = \gamma^*$ .

Ceci permet de fixer les valeurs prises par la variable aléatoire  $\bar{V}_t^i$  sur la fenêtre temporelle  $\llbracket 0, T \rrbracket$ . Notons d'ailleurs  $\bar{\mathcal{V}}_T$ , l'espace de ces valeurs.  $\bar{\mathcal{V}}_T$  reste un espace discret, mais indescriptible car dépendant de toutes les valeurs inconnues de  $\gamma_t$ . Cela en fait un espace beaucoup plus grand que l'espace  $\mathcal{V}$  où évolue  $V_t^{i,N}$ .

Nous noterons  $\mathcal{X}$  l'espace des états de  $\bar{X}_t$ .

Le potentiel limite  $\bar{V}_t^i$  se comporte de la même façon que le potentiel fini. Comme lui, il sera en capacité d'émettre un potentiel d'action après avoir dépassé le potentiel seuil  $\theta$ .

Notons  $K$  le nombre de pas de temps minimum nécessaire à un neurone pour que son voltage parte de 0 et atteigne une valeur supérieure à  $\theta$ . La valeur de  $K$  dépendra de tous les  $\gamma_t$  et donc du temps. Mathématiquement,  $K$  est tel que :

$$K = \inf_{I \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{t=0}^I \gamma_t > \theta \right\}. \quad (4)$$

### 4.3. Existence des processus limites

Comme les deux processus limites  $(\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i)$  prennent leurs valeurs dans des espaces discrets et finis, ils sont tous les deux bien définis. L'existence des processus ne pose ainsi aucun problème, et nous pouvons écrire le théorème suivant :

**Théorème 4.2** (Existence des processus limites): Pour tout  $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$ , il existe un unique processus  $(\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i)$  avec un  $\gamma_t$  associé.

### 4.4. Convergence vers les processus limites

**Théorème 4.3** (Propagation du chaos avec une fonction de spiking modifiée): Étant donné l'existence du processus limite donné dans le Théorème 4.2 et son  $\gamma_t$  associé, et une nouvelle fonction  $\phi_*$ , prise lipschitz et de constante  $L$ , et approchant  $\phi$ , nous avons

$$\mathbb{E} |V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i| + \mathbb{E} |A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i| \leq \frac{K}{\sqrt{N}}.$$

$K$  est ici une constante définie grâce aux paramètres du modèle et de la constante de lipschitz  $L$ .

Le Théorème 4.3 possède un corollaire direct (Corollaire 4.4), formalisant la convergence des processus finis vers leur version limite.

**Corollaire 4.4** (Convergence des processus finis vers les processus limites):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} |V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i| + \mathbb{E} |A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i| = 0,$$

ce qui revient à dire que, pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ , et pour un  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ , avec  $T$  nombre entier positif :

$$(V_t^{i,N}, A_t^{i,N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i).$$

*Preuve du Théorème 4.3:* Commençons par introduire quelques notations. Appelons **distance entre les processus de potentiel de membrane**, la quantité

$$d_t^{i,N} = \mathbb{E} |V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i|,$$

ainsi que **distance entre les processus d'activation**, le nombre

$$\delta_t^{i,N} = \mathbb{E} |A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i|.$$

Enfin nous pouvons écrire la **distance globale** entre le processus de neurone et sa limite comme

$$D_t^{i,N} = d_t^{i,N} + \delta_t^{i,N}. \quad (5)$$

#### 4.4.1. Majoration de $\delta_{t+1}^{i,N}$

Commençons par majorer  $\delta_{t+1}^{i,N}$ . De la définition, il vient :

$$\begin{aligned} \delta_{t+1}^{i,N} &= \mathbb{E} |A_{t+1}^{i,N} - \bar{A}_{t+1}^i|, \\ &= \mathbb{E} \left| \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \right. \\ &\quad \left. + A_t^{i,N} \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} (1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}) - \bar{A}_t^i \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} (1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}) \right|, \\ &= \mathbb{E}[e] \text{ pour simplifier l'écriture pour la suite.} \end{aligned}$$

#### 4.4.2. Séparation en événements disjoints

Remarquons que les trois événements suivants sont disjoints :

- L'événement  $\mathbf{2} = \{\text{processus finis et limites spikent simultanément en } t+1\}$  peut s'écrire formellement :

$$\mathbf{2} = \{U_{t+1}^i < \min(\phi(V_t^{i,N}), \phi(\bar{V}_t^i))\}.$$

- L'événement  $\mathbf{1} = \{\text{processus fini ou (exclusif) limite spike en } t+1\}$  qui s'écrit formellement :

$$\{\min(\phi(V_t^{i,N}), \phi(\bar{V}_t^i)) < U_{t+1}^i < \max(\phi(V_t^{i,N}), \phi(\bar{V}_t^i))\}. \quad (6)$$

- L'événement  $\mathbf{0} = \{\text{aucun processus ne spike au temps } t+1\}$ , soit :

$$\{U_{t+1}^i > \max(\phi(V_t^{i,N}), \phi(\bar{V}_t^i))\}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\delta_{t+1}^{i,N} = \mathbb{P}(\mathbf{2})\mathbb{E}[e|\mathbf{2}] + \mathbb{P}(\mathbf{1})\mathbb{E}[e|\mathbf{1}] + \mathbb{P}(\mathbf{0})\mathbb{E}[e|\mathbf{0}]. \quad (7)$$

Observons à présent les implications de chaque événement.

- Si  $\mathbf{2}$  est vérifié, alors seules les indicatrices de spike valent un, et les autres sont nulles, soit  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 1$  et donc forcément  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 0$ . Dans ce cas, très simplement,

$$\mathbb{E}[e|\mathbf{2}] = \mathbb{E}[1 - 1] = 0.$$

- Si  $\mathbf{1}$  est vérifié, nous avons alors  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} \neq \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}}$  où l'une des deux indicatrices de spike vaut un, et l'autre zéro.

Le fait que l'une des deux indicatrices de spike vale un, implique nécessaire que  $0 < U_{t+1}^i < \beta$ . Comme les événements de saut et de désactivation sont mutuellement exclusifs nous avons également dans ce cas là  $\mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}} = 0$ .

Nous avons donc deux possibilités, selon lequel des processus spikent :



$$\mathbb{E}[e|\mathbf{1}] = \begin{cases} \mathbb{E}|1 - A_t^{i,N}| & \text{si le processus limite spike} \\ \mathbb{E}|1 - \bar{A}_t^i| & \text{si le processus normal spike} \end{cases},$$

$$\leq 1.$$

- Si  $\mathbf{0}$  est vérifié, alors seulent  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 1$  dans  $\mathbb{E}[e|\mathbf{0}]$ .  
Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e|\mathbf{0}] &= \mathbb{E}\left|A_t^{i,N}\left(1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right) - \bar{A}_t^i\left(1 - \mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right)\right|, \\ &\leq \mathbb{E}\left|A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i\right| + \mathbb{E}\left|(A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i)\mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right|, \\ &\leq \delta_t^{i,N} + \mathbb{E}\left|(A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i)\mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right|. \end{aligned}$$

Rappelons-nous que la variable auxiliaire uniforme  $U_t^i$  est distribuée uniformément sur  $[0, 1]$  de façon indépendante du reste des variables aléatoires. Ainsi, nous pouvons continuer de simplifier comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e|\mathbf{0}] &\leq \delta_t^{i,N} + \mathbb{E}\left|A_t^{i,N} - \bar{A}_t^i\right| \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda\}}\right], \\ &\leq \delta_t^{i,N} + \delta_t^{i,N} \mathbb{P}(\beta < U_{t+1}^i < \beta + \lambda), \\ &\leq (1 + \lambda)\delta_t^{i,N}. \end{aligned}$$

En reprenant Équation 7, nous aboutissons à :

$$\delta_{t+1}^{i,N} \leq \mathbb{P}(\mathbf{1}) + \mathbb{P}(\mathbf{0})(1 + \lambda)\delta_t^{i,N}. \quad (8)$$

Si nous utilisons la définition de  $\mathbb{P}(\mathbf{1})$  définie à l'Équation 6, combiné au fait que  $U_t^i$  est une variable uniforme sur  $[0, 1]$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{1}) &= \mathbb{P}\left(\left\{\min\left(\phi(V_t^{i,N}), \phi(\bar{V}_t^i)\right) < U_{t+1}^i < \max\left(\phi(V_t^{i,N}), \phi(\bar{V}_t^i)\right)\right\}\right), \\ &= \max\left(\phi(V_t^{i,N}), \phi(\bar{V}_t^i)\right) - \min\left(\phi(V_t^{i,N}), \phi(\bar{V}_t^i)\right), \\ &= \left|\phi(V_t^{i,N}) - \phi(\bar{V}_t^i)\right|. \end{aligned}$$

#### 4.4.3. La nécessité d'une fonction de spiking lipschitzienne

C'est ici que nous comprenons pourquoi il est nécessaire de modifier la définition de la fonction  $\phi$ . Si  $\phi$  était L-lipschitz, nous pourrions majorer  $|\phi(V_t^{i,N}) - \phi(\bar{V}_t^i)|$  par  $L|V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i|$ . Le problème est de trouver une fonction qui soit lipschitz mais qui puisse tout de même approcher le comportement de l'indicatrice présente dans  $\phi$ . La figure Fig. 1 montre quelques fonctions qui ont été étudiées pour approcher l'indicatrice. La fonction retenue sera finalement  $\phi_*$  une modification de la fonction tangente hyperbolique :

$$\phi_*(v) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(k(v - \theta))). \quad (9)$$

Dans Équation 9,  $k$  est un paramètre de raideur qui contrôle la vitesse de transition entre les régimes de non-spiking et de spiking.

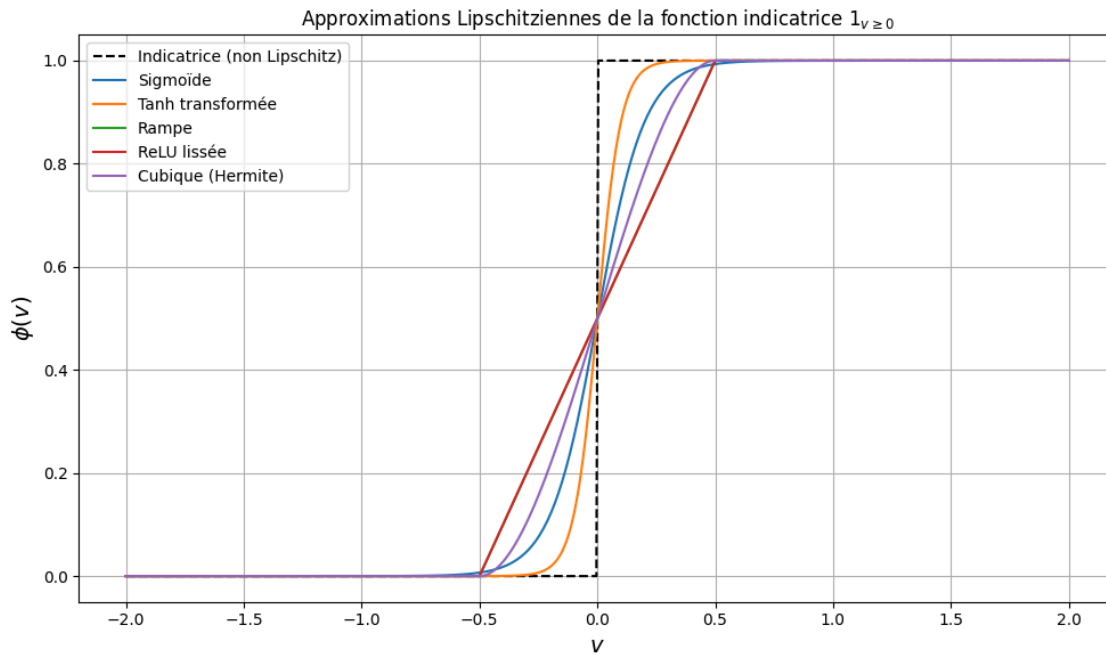


Fig. 1. – Exemples de fonction lipschitz pouvant remplacer

**Proposition 4.5** (Lipschitzianité de la fonction de spiking lissée): La fonction  $\phi_*(v) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(k(v - \theta)))$  est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz  $L = \frac{k}{2}$ .

*Preuve:* Pour démontrer la lipschitzianité de  $\phi_*$ , nous allons montrer que sa dérivée est bornée, puis appliquer le théorème des accroissements finis.

#### 4.4.4. Calcul de la dérivée

Calculons d'abord la dérivée de  $\phi_*$  :

$$\begin{aligned}\phi'_*(v) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}(1 + \tanh(k(x - \theta))) \right], \\ &= \frac{k}{2} [1 - \tanh^2(k(v - \theta))].\end{aligned}$$

#### 4.4.5. Majoration de la dérivée

Comme  $\tanh(u) \in (-1, 1)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , nous avons :

$$\tanh^2(u) \in [0, 1).$$

Par conséquent :

$$\phi'_*(v) \leq \frac{k}{2}.$$

#### 4.4.6. Application du théorème des accroissements finis

Maintenant que nous avons montré que  $\phi'_*(v) \leq \frac{k}{2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis.

Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , il existe  $\xi \in [\min(x, y), \max(x, y)]$  tel que :

$$\phi_*(x) - \phi_*(y) = \phi'_*(\xi)(x - y)$$

En prenant la valeur absolue :

$$|\phi_*(x) - \phi_*(y)| = |\phi'_*(\xi)| \cdot |x - y| \leq \frac{k}{2} \cdot |x - y|.$$

La fonction  $\phi_*(v)$  est donc lipschitzienne avec une constante de Lipschitz  $L = \frac{k}{2}$ .  $\square$

Ainsi, en appliquant Proposition 4.5 pour majorer  $\mathbb{P}(\mathbf{1})$  :

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}) \leq \frac{k}{2} \delta_t^{i,N}. \quad (10)$$

Si nous reprenons Équation 8 avec Équation 10 et en majorant  $\mathbb{P}(\mathbf{0})$  par 1, nous obtenons :

$$\delta_{t+1}^{i,N} \leq \left(1 + \frac{k}{2} + \lambda\right) \delta_t^{i,N}.$$

Grâce à cette dernière ligne, nous avons désormais la première pièce du puzzle. Si nous réécrivons Équation 5, nous pouvons dire que :

$$D_{t+1}^{i,N} \leq d_{t+1}^{i,N} + \left(1 + \frac{k}{2} + \lambda\right) \delta_t^{i,N}. \quad (11)$$

Passons à présent à la majoration de  $d_{t+1}^{i,N}$ .

#### 4.4.7. Majoration de $d_{t+1}^{i,N}$

De la définition, il vient :

$$\begin{aligned} d_{t+1}^{i,N} &= \mathbb{E} |V_{t+1}^{i,N} - \bar{V}_{t+1}^i|, \\ &= \mathbb{E} \left| \underbrace{\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} \left( V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} \right) - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} \left( \bar{V}_t^i + \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right] \right)}_{= f \text{ pour simplifier l'écriture par la suite}} \right|. \end{aligned}$$

#### 4.4.8. Séparation en événements disjoints

Nous pouvons ici aussi utiliser les trois événements disjoints **2**, **1** et **0** définis précédemment pour écrire :

$$d_{t+1}^{i,N} = \mathbb{P}(\mathbf{2}) \mathbb{E}[f|\mathbf{2}] + \mathbb{P}(\mathbf{1}) \mathbb{E}[f|\mathbf{1}] + \mathbb{P}(\mathbf{0}) \mathbb{E}[f|\mathbf{0}]. \quad (12)$$

Regardons également les effets de ces événements sur  $\mathbb{E} |V_{t+1}^{i,N} - \bar{V}_{t+1}^i|$  :

- Si l'événement **2** est vérifié, alors les indicatrices d'absence de spike sont nulles, c'est-à-dire  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 0$ , ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{2}] = 0.$$

- Si l'événement **1** est vérifié, alors seule une des indicatrices d'absence de spike est nulle, soit  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = 0$  ou  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 0$ .  
Il reste donc dans  $\mathbb{E}[f|\mathbf{1}]$  :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{1}] = \begin{cases} \mathbb{E}\left|V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N}\right| & \text{si le processus limite spike} \\ \mathbb{E}\left|\bar{V}_t^i + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i\right]\right| & \text{si le processus fini spike} \end{cases}.$$

Dans tous les cas, nous pouvons majorer par  $\theta + 1$  car  $V_t^{i,N}$  est borné par  $\theta$  et que  $\sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N}$  peut valoir au plus  $N$ . Donc

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{1}] \leq \theta + 1.$$

- Si l'événement  $\mathbf{0}$  est vérifié, alors les indicatrices d'absence de spike valent toutes deux un, c'est-à-dire  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(V_t^i)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i > \phi(\bar{V}_t^i)\}} = 1$ . Cela nous permet d'écrire :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] = \mathbb{E}\left|V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \left(\bar{V}_t^i + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i\right]\right)\right|.$$

Cette quantité sera majorée plus loin, car son développement est un peu plus long.

En reprenant Équation 12 avec ces résultats ainsi que Équation 10 et  $\mathbb{P}(\mathbf{0}) \leq 1$ , nous obtenons :

$$d_{t+1}^{i,N} \leq \frac{k}{2}(\theta + 1)\delta_t^{i,N} + \mathbb{E}[f|\mathbf{0}]. \quad (13)$$

Maintenant, nous allons développer  $\mathbb{E}[f|\mathbf{0}]$ .

#### 4.4.9. Développement de $\mathbb{E}[f|\mathbf{0}]$

Ajoutons et retirons  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f|\mathbf{0}] &= \mathbb{E}\left|V_t^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \left(\bar{V}_t^i + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i\right]\right)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right|, \end{aligned}$$

Posons

$$\bar{M}_t^i = \sum_{j=1}^N \left( \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right] \right), \quad (14)$$

nous avons alors,

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] = \mathbb{E}\left|V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j + \frac{1}{N} \bar{M}_t^i\right|,$$

ce qui aboutit à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f|\mathbf{0}] &\leq \mathbb{E}\left|V_t^{i,N} - \bar{V}_t^i\right| + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right| \\ &\quad + \frac{1}{N} \mathbb{E}|\bar{M}_t^i|. \end{aligned} \quad (15)$$

Pour majorer cette quantité, nous aurons besoin de la Proposition 4.6 :

**Proposition 4.6:**

$$\mathbb{E}|\overline{M}_t^i| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

*Preuve:*

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |\overline{M}_t^i| &= \sqrt{|\overline{M}_t^i|^2}, \\ \Rightarrow \mathbb{E}|\overline{M}_t^i| &= \mathbb{E}\left[\sqrt{|\overline{M}_t^i|^2}\right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen pour majorer la fonction concave racine carrée :

$$\mathbb{E}|\overline{M}_t^i| \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right]}. \quad (16)$$

Reprenons la définition de  $\overline{M}_t^i$  (Équation 14) :

$$\mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^N \left(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^i)\}} \overline{A}_t^j - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\overline{V}_t^i)\}} \overline{A}_t^j\right]\right)\right|^2\right].$$

Pour clarifier les calculs, notons également

$$Y^i = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\overline{V}_t^i)\}} \overline{A}_t^i - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\overline{V}_t^i)\}} \overline{A}_t^i\right].$$

En utilisant le carré de la somme, il vient :

$$\mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^N Y^j\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (Y^j)(Y^k)\right].$$

En séparant les termes carrés des termes rectangles, nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N (Y^j)^2\right] + \mathbb{E}\left[2 \sum_{1 \leq k < j \leq N} (Y^j)(Y^k)\right].$$

Écrit autrement :

$$\mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right] = \sum_{j=1}^N \text{Var}[Y^j] + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq N} \text{Cov}[Y^j, Y^k].$$

Or, comme nous travaillons dans le cadre champ moyen, les neurones sont des copies indépendantes les uns des autres. Ainsi  $\text{Cov}[Y^j, Y^k] = 0$ . Nous obtenons donc :

$$\mathbb{E}\left[|\overline{M}_t^i|^2\right] = N \text{Var}[Y^i] = N \text{Var}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\overline{V}_t^i)\}} \overline{A}_t^i - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\overline{V}_t^i)\}} \overline{A}_t^i\right]\right].$$

Comme  $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\overline{V}_t^i)\}} \overline{A}_t^i \in \{0, 1\}$ , alors  $0 \leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\overline{V}_t^i)\}} \overline{A}_t^i\right] \leq 1$  et donc

$$0 \leq \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i - \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right] \leq 1.$$

Cela nous permet d'écrire la majoration suivante :

$$\text{Var} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i - \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right] \right] \leq \frac{1}{4},$$

puis d'écrire

$$\mathbb{E} \left[ |\bar{M}_t^i|^2 \right] \leq \frac{N}{4}.$$

Pour finir, nous pouvons dire que

$$\sqrt{\mathbb{E} \left[ |\bar{M}_t^i|^2 \right]} \leq \sqrt{\frac{N}{4}}$$

et enfin conclure la preuve en réutilisant Équation 16 :

$$\mathbb{E} |\bar{M}_t^i| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

□

On reprend Équation 15, avec la Proposition 4.6, pour écrire :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] \leq d_t^{i,N} + \mathbb{E} \left| \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(V_t^i)\}} A_t^{i,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_t^i \right| + \frac{1}{2\sqrt{N}}. \quad (17)$$

Pour conclure la majoration de  $\mathbb{E}[f|\mathbf{0}]$ , il reste uniquement à majorer le terme  $\mathbb{E} \left| \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j \right|$ . Énonçant pour cela la proposition suivante :

**Proposition 4.7:**

$$\mathbb{E} \left| \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j \right| \leq \left( \frac{k}{2} + 1 \right) \delta_t^{j,N}.$$

*Preuve:*

#### 4.4.10. Séparation en événements disjoints

Commençons par réécrire  $\mathbb{E} \left| \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j \right|$  en utilisant les trois événements **2**, **1** et **0** mais cette fois appliqués au neurone  $j$ .

Pour alléger l'écriture, notons également  $g = \left| A_t^{j,N} \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} - \bar{A}_t^j \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \right|$ .

Écrivons grâce à ces événements :

$$\mathbb{P}(\mathbf{2}) \mathbb{E}[g|\mathbf{2}] + \mathbb{P}(\mathbf{1}) \mathbb{E}[g|\mathbf{1}] + \mathbb{P}(\mathbf{0}) \mathbb{E}[g|\mathbf{0}], \quad (18)$$

puis observons les effets de chacun sur  $g$ .

- Si l'événement **2** est vérifié, alors les indicatrices de spike valent toutes les deux un ( $\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} = \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} = 1$ ), ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}[g|\mathbf{2}] = \mathbb{E}|A_t^{j,N} - \bar{A}_t^j| = \delta_t^{j,N}.$$

- Si l'événement **1** est vérifié, alors une des indicatrices de spike vaut zéro et l'autre un. Il reste donc dans  $\mathbb{E}[g|\mathbf{1}]$  :

$$\mathbb{E}[g|\mathbf{1}] = \begin{cases} \mathbb{E}|A_t^{j,N}| \\ \mathbb{E}|\bar{A}_t^j| \end{cases} \leq 1 \text{ dans tous les cas.}$$

- Si l'événement **0** est vérifié, alors les indicatrices de spike valent toutes les deux zéro, aboutissant à :

$$\mathbb{E}[g|\mathbf{0}] = 0.$$

Reprenons à présent Équation 18 :

$$\mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right| = \mathbb{P}(\mathbf{2})\delta_t^{j,N} + \mathbb{P}(\mathbf{1}). \quad (19)$$

En utilisant Équation 10 pour majorer  $\mathbb{P}(\mathbf{1})$  et en majorant  $\mathbb{P}(\mathbf{2})$  par 1, nous transformons Équation 19 :

$$\mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(V_t^j)\}} A_t^{j,N} - \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^j \leq \phi(\bar{V}_t^j)\}} \bar{A}_t^j\right| \leq \left(\frac{k}{2} + 1\right)\delta_t^{j,N},$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

Enfin, en reprenant Équation 17 avec la Proposition 4.7, nous obtenons :

$$\mathbb{E}[f|\mathbf{0}] \leq d_t^{i,N} + \left(\frac{k}{2} + 1\right)\delta_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}. \quad (20)$$

Ultimement, pour écrire la majoration définitive de  $d_{t+1}^{i,N}$ , nous pouvons repartir de Équation 13 et utiliser Équation 20 pour écrire :

$$\begin{aligned} d_{t+1}^{i,N} &\leq \frac{k}{2}(\theta + 1)\delta_t^{i,N} + d_t^{i,N} + \left(\frac{k}{2} + 1\right)\delta_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}, \\ d_{t+1}^{i,N} &\leq d_t^{i,N} + \left(\frac{k}{2}(\theta + 2) + 1\right)\delta_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

soit, en utilisant le fait que  $d_t^{i,N} \leq \left(\frac{k}{2}(\theta + 2) + 1\right)d_t^{i,N}$  :

$$d_{t+1}^{i,N} \leq \left(\frac{k}{2}(\theta + 2) + 1\right)d_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}}. \quad (21)$$

Si nous combinons la première pièce du puzzle Équation 11 avec la seconde Équation 21, nous obtenons enfin,

$$D_{t+1}^{i,N} \leq \left(\frac{k}{2}(\theta + 2) + 1\right)D_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}} + \left(1 + \frac{k}{2} + \lambda\right)\delta_t^{i,N},$$

soit, en utilisant que  $\delta_t^{i,N} \leq D_t^{i,N}$  :

$$D_{t+1}^{i,N} \leq CD_t^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}},$$

avec  $C$  la constante suivante :  $C = \max\left(\frac{k}{2}(\theta + 2) + 1, \frac{k}{2} + 1 + \lambda\right)$ .

Rappelons-nous que les processus sont initialisés de la même façon, ce qui signifie que  $D_0^{i,N} = 0$ .

Ainsi, en  $t = 1$  :

$$D_1^{i,N} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

Poursuivant l'itération, nous avons :

$$\begin{aligned} D_2^{i,N} &\leq CD_1^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}} = (C+1)\frac{1}{2\sqrt{N}} \text{ puis,} \\ D_3^{i,N} &\leq CD_2^{i,N} + \frac{1}{2\sqrt{N}} \leq C(C+1)\frac{1}{2\sqrt{N}} + \frac{1}{2\sqrt{N}} = (C^2 + C + 1)\frac{1}{2\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Ce qui nous fait aboutir à :

$$D_t^{i,N} \leq \left( \sum_{k=0}^{t-1} C^k \right) \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

Or puisque  $C$  est une combinaison finie d'opérations sur des paramètres finis de notre modèle, et que nous nous sommes placés sur une fenêtre temporelle finie, alors  $\sum_{k=0}^{t-1} C^k < \infty$ .

En notant  $K = \sum_{k=0}^{t-1} C^k$ , nous voilà arrivé au bout de la preuve du Théorème 4.3 ! □

## 5. Mesure stationnaire du modèle limite

La mémoire de travail est un maintien actif d'une information via l'activité persistente des neurones. Si l'activité est perturbée ou si l'information n'est plus nécessaire, elle est oubliée, libérant les neurones. D'un côté, notre modèle inclut un mécanisme de désactivation (paramètre  $\lambda$ ) qui pousse la chaîne  $\bar{X}_t$  vers l'extinction. De l'autre, le mécanisme de facilitation synaptique (spike  $\rightarrow$  activation) tend à maintenir l'activité. Des questions viennent ainsi naturellement : Quelle dynamique l'emporte ? Existe-il un équilibre ? Dans quelles conditions ?

Notre modèle limite de champ moyen décrit la dynamique temporelle des neurones, mais nous voyons que pour comprendre la mémoire de travail, il faut pouvoir décrire la dynamique à long-terme de ces neurones et voir les comportements typiques qui en émergent. Le comportement qui nous intéresse particulièrement est celui où le système peut soutenir une activité persistente. D'un point de vue mathématique, cela peut s'aborder comme un questionnement sur l'existence d'**états d'équilibres actifs** (autre que les états d'absorption) où le système limite pourrait rester indéfiniment et connaître une activité régulière.

La notion d'analyse de l'activité à long-terme (à entendre dans un sens mathématique) de notre chaîne de Markov limite amène l'étude de la **mesure stationnaire** associée à notre chaîne de Markov limite  $\bar{X}_t$ .

Dans cette optique, cette section répondra à plusieurs objectifs :

1. Introduire et définir la mesure invariante, ou stationnaire, pour notre chaîne de Markov  $\bar{X}_t = (\bar{V}_t^i, \bar{A}_t^i)$ .
2. Prouver son existence à l'aide de résultats classiques.
3. La calculer pour tous les états du système.
4. Étudier l'existence de ses équilibres et en faire émerger une condition sur les paramètres du modèle.



## 5.1. Définition et existence

De façon générale pour notre modèle, la mesure stationnaire est une **mesure de probabilité** descriptive de l'état « moyen » de la chaîne de Markov  $\bar{X}_t$  après un temps long. Dans notre contexte, elle représente la **proportion de temps** qu'un neurone passe dans chaque état  $(v, a)$ . Il est aussi possible de la voir comme la **proportion de neurones** dans chaque état  $(v, a)$ .

Pour prouver l'**existence** de cette mesure et garantir son **unicité**, appuyons-nous sur les résultats classiques en probabilités. Si nous pouvons montrer que notre chaîne de Markov limite  $\bar{X}_t$  est **irréductible** et **apériodique** sur son espace d'états fini  $\mathcal{V}^N \times \{0, 1\}$ , nous aurons montré qu'une unique mesure stationnaire existe.

### 5.1.1. Existence

**Théorème 5.1** (Existence et unicité de la mesure stationnaire associée à  $\bar{X}_t$ ): Il existe une unique mesure stationnaire, notée  $\pi^K(x = (v, a))$ , associée à la chaîne de Markov  $\bar{X}_t$ .

*Preuve:* En prouvant Lemme 5.2 et Lemme 5.3 plus bas, nous prouvons le Théorème 5.1. □

**Lemme 5.2** (Irréductibilité de la chaîne limite): La chaîne de Markov  $\bar{X}_t$  est irréductible sur son espace d'état  $\mathcal{X}$ .

*Preuve:* Cette preuve est philosophiquement similaire à la preuve du Théorème 3.2. Elle reste cependant plus simple grâce à plusieurs points importants. La Remarque 4.1 nous dit que la chaîne limite  $\bar{X}_t$  ne peut pas être absorbée du fait de l'ajout des contributions moyennes  $\gamma_t$  à chaque pas de temps. Il n'y a donc pas d'états absorbants ou presque-absorbants qui pourraient poser problème.

Par contrainte temporelle, ce qui est proposé ici est seulement une ébauche de preuve. Nous allons montrer qu'il est possible, à partir d'un état quelconque  $x \in \mathcal{X}$  d'atteindre un état de référence  $y$  avec probabilité positive. Ensuite, nous établirons qu'à partir d' $y$ , n'importe quel état  $z \in \mathcal{X}$  est atteignable avec probabilité positive.

Soit  $y$  l'état où :

- tous les neurones sont dans la couche la plus haute définie en Équation 4 (c'est-à-dire  $K$  dans le cas de la chaîne limite  $\bar{X}_t$ ) :  $y_{K,\cdot}^N = N$ .
- tous les neurones sont actifs :  $y_{\cdot,1}^N = N$ .

Cet état est facilement atteignable à partir de n'importe quel état  $x$ . Il suffit d'abord d'attendre  $K$  pas de temps sans aucun saut, amenant tous les neurones à la couche  $K$ . Puis ensuite d'effectuer  $N$  sauts, activant tous les neurones. Enfin, dans le cas où  $N < K$ , il suffit d'attendre encore  $K - N$  pas de temps pour avoir de nouveau tous les neurones dans la couche  $K$ . Toutes les étapes précédentes ont une probabilité positive d'advenir par construction du modèle limite.

Finalelement, nous pouvons nous douter (et c'est la partie moins formelle de cette preuve) qu'atteindre un état  $z$  soit possible à partir de  $y$  en faisant spiker les neurones dans le bon ordre pour que tous atteignent leur couche finale dans  $z$  (tout en corrigeant pour prendre en compte les ajouts  $\gamma_t$  à chaque pas de temps). Nous n'irons malheureusement pas plus loin par manque de temps. □

**Lemme 5.3** (Apériodicité de la chaîne limite): La chaîne de Markov  $\bar{X}_t$  est apériodique sur son espace d'état  $\mathcal{X}$ .

*Preuve:* Le plus simple dans notre cas est de montrer que notre chaîne de Markov  $\bar{X}_t$  peut, sur un état quelconque  $x \in \mathcal{X}$ , rester dans cet état avec probabilité positive.

Prenons l'état  $x$  tel que tous les neurones soient actifs, et à la couche  $K$ , soit

$$x_{\cdot,a}^N = x_{K,\cdot}^N = N.$$

Il, peut avec probabilité positive et égale à  $(1 - \lambda)^N \times (1 - \beta)^N$  rester dans cet état.  $\square$

### 5.1.2. Définition

Pour définir la **mesure stationnaire**, nous utiliserons le résultat classique suivant :

Si  $r$  est un état régénérant pour une chaîne de Markov  $X_t$ , alors la mesure stationnaire se définit par :

Soit  $x$ , un état quelconque du système. Notons  $\pi$  la mesure stationnaire associée à  $X_t$

$$\pi(x) = \frac{\mathbb{E}[\text{Temps passé en } x \text{ entre deux visites de } r]}{\mathbb{E}[\text{Temps entre deux visites de } r]}$$

Il nous faut donc trouver un état régénérant pour notre système, afin de définir toutes les quantités nécessaire pour calculer  $\pi^K(x = (v, a))$ .

## 5.2. État régénérant

Un état est dit « régénérant » pour notre chaîne  $\bar{X}_t$  si, en le visitant le processus oublie son passé et peut être considéré comme « redémarrant de zéro ». Formellement, si  $T_r$  est le premier temps de visite de l'état régénérant :

$$\mathbb{P}(\bar{X}_{T_r+s} | \mathcal{F}_{T_r}) = \mathbb{P}(\bar{X}_s | \bar{X}_0 = r).$$

Pour notre système, remarquons que :

**Remarque 5.4:** L'état  $(0, 1)$  est un état de régénération pour la chaîne  $\bar{X}_t$ .

Cette remarque s'établit pour plusieurs raisons structurelles :

- Après un potentiel d'action, un neurone termine toujours dans l'état  $(0, 1)$  peu importe sa trajectoire passée.
- Depuis  $(0, 1)$ , le neurone peut reprendre un cycle complet d'accumulation de potentiel.
- La futur évolution à partir de  $(0, 1)$  ne dépend que de  $(0, 1)$  et non pas de son historique complet.

Introduisons maintenant  $T_{(0,1)}$ , le temps **aléatoire** entre deux visites de la chaîne en  $(0, 1)$ . Formellement :

$$T_{(0,1)} = \inf\{t > 0 : \bar{X}_t = (0, 1) \text{ sachant que } \bar{X}_0 = (0, 1)\}.$$

En partant de  $(0, 1)$ , un neurone de notre système limite passe par deux dynamiques successives :

- Croissance **déterministe** du potentiel : le neurone gagne à chaque pas de temps un voltage égal  $\gamma_t$ , jusqu'à ce que  $V_t^{i,N} > \theta$ . Cette phase dure un temps déterministe égal au nombre de  $\gamma_t$  nécessaire

pour dépasser  $\theta$ . Ce nombre a été appelé  $K$  dans la Chapitre 4, mais nous l'appellerons simplement  $K$  dans la suite de cette partie.

- Potentiel d'action **aléatoire** : le neurone peut spiker, toujours avec probabilité  $\beta$ . Ce faisant, le temps passé avant d'effectuer ce spike suit une loi géométrique de paramètre  $\beta$ .

Bien sûr, il peut également toujours se désactiver avec probabilité  $\lambda$ .

Ainsi, pour calculer  $\mathbb{E}_{(0,1)}[T_{(0,1)}]$ , il suffit de sommer la durée de ces deux phases, ce qui donne lieu à la remarque suivante :

**Remarque 5.5 :**

$$\mathbb{E}_{(0,1)}[T_{(0,1)}] = K + \frac{1}{\beta}.$$

Avant de pouvoir correctement définir la mesure stationnaire de  $\bar{X}_t$ , nous devons définir le temps moyen passé en  $x$  dans le contexte de notre système de neurones. Soit l'état quelconque  $(v, a)$ , ce temps vaut classiquement :  $\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_t=(v,a)\}}\right]$

Avec cette information et la Remarque 5.5, nous écrivons maintenant la définition de la mesure stationnaire de  $\bar{X}_t$  :

$$\pi^K(x = (v, a)) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_t=(v,a)\}}\right]}{K + \frac{1}{\beta}}.$$

Maintenant que la définition est correctement posée, nous pouvons calculer cette mesure stationnaire pour les différents états possibles.

### 5.3. Calcul de la mesure stationnaire

Son calcul va dépendre des valeurs prises par  $v$ .

#### 5.3.1. Cas où $v < K\gamma^*$

Dans le cas présent,  $\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_t=(v,1)\}}$  vaut exactement un si le neurone ne subit aucune désactivation avant la couche  $v$ , ce qui arrive avec probabilité  $(1 - \lambda)^v$ . S'il se désactive avant  $v$ , alors  $\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_t=(v,1)\}}$  est nulle.

Ainsi, pour  $v < K\gamma^*$ ,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_t=(v,1)\}}\right] = (1 - \lambda)^v.$$

De façon similaire, pour  $a = 0$ ,  $\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_t=(v,0)\}}$  vaut un si le neurone subit une désactivation avant la couche  $v$ , ce qui arrive avec probabilité  $1 - (1 - \lambda)^v$ . Sinon, le temps passé dans l'état  $(v, 0)$  est nul. D'où,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_t=(v,0)\}}\right] = 1 - (1 - \lambda)^v.$$

Finalement, nous avons

$$\forall v < K\gamma, \pi^K(x = (v, 1)) = \frac{(1 - \lambda)^v}{K + \frac{1}{\beta}},$$

ainsi que

$$\pi^K(x = (v, 0)) = \frac{1 - (1 - \lambda)^v}{K + \frac{1}{\beta}}.$$

### 5.3.2. Cas où $v = K\gamma^*$

Ici, le neurone peut, avec probabilité positive, passer un temps plus long qu'un pas de temps dans l'état  $(K, 1)$ . Le neurone quittera l'état  $(K, 1)$  lors de l'émission d'un spike, ou après une désactivation.

Si nous notons  $T_\beta$  le temps aléatoire avant l'émission d'un spike et  $T_\lambda$ , le temps aléatoire avant la désactivation du neurone, nous pouvons alors écrire que :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_t=(K,1)\}} \right] = \mathbb{E} [\min(T_\beta, T_\lambda)].$$

Comme  $T_\beta$  suit une loi géométrique de paramètre  $\beta$  et  $T_\lambda$  suit une loi géométrique de paramètre  $\lambda$ , nous avons :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^{T_{(0,1)}} \mathbf{1}_{\{X_t=(K,1)\}} \right] = \frac{1}{\beta + \lambda}. \quad (22)$$

Avec Remarque 5.5 et Équation 22, nous aboutissons donc à la mesure stationnaire suivante pour l'état  $(K, 1)$  :

$$\pi^K(x = (K, 1)) = \frac{1}{\left(K + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}. \quad (23)$$

Enfin, pour l'état  $(K\gamma, 0)$ , étant donné que  $\pi$  est une mesure de probabilité, nous pouvons écrire :

$$\pi^K(x = (K\gamma, 0)) = 1 - \left( \sum_{a=0}^1 \sum_{v=0}^{(K-1)\gamma} \pi^K(x = (v, a)) + \pi^K(x = (K, 1)) \right).$$

Étudions à présent les équilibres de la mesure  $\pi^K(x = (v, a))$ , afin de placer la chaîne  $\overline{X}_t$  dans un cadre où elle pourrait manifester une activité régulière.

## 5.4. Équilibres de la mesure stationnaire

L'objectif de cette section est de caractériser les **régimes de mémoire persistante** : les configurations où notre système se maintient dans une configuration constante, pour maintenir indéfiniment une activité neuronale. Nous voulons que le système garde une proportion constante de neurones à chaque niveau de potentiel, garantissant un flux régulier de potentiels d'action.

Dans notre modèle limite (infinité de neurones), la proportion de neurones effectuant un spike les temps  $t$  et  $t + 1$  est égale à  $\gamma_t$ . Rappelons-nous (Chapitre 4) que la proportion inconnue  $\gamma_t$  est aussi égale à l'ajout de potentiel entre  $t$  et  $t + 1$  pour tous les neurones. Résumé en une ligne :

proportion de neurones spikant = ajout de potentiel aux potentiels de tous les neurones =  $\gamma_t$ .

Si, à long-terme, la proportion de neurones dans chaque état est égale à la proportion de neurones spikant, alors le système aura atteint une configuration « constante », se maintenant à l'identique indéfiniment. Cela se traduit par l'équation d'équilibre :

$$\pi^K(x = (v, a)) = \gamma_t, \quad (24)$$

En reprenant la définition de  $\gamma_t$ , nous pourrions trouver les conditions sur les paramètres biologiques où Équation 24 admet une solution. Cependant, cela nécessite de changer la définition de  $K$  pour utiliser une version utilisable dans nos calculs.

#### 5.4.1. Nouvelle définition de $K$

À la place de Équation 4, nous allons utiliser la définition suivante, plus maniable :

$$K = \left\lceil \frac{\theta}{\gamma^*} \right\rceil.$$

Rappelons que  $\gamma^*$  représente la plus petite valeur prise par  $\gamma_t$  sur l'intervalle  $\llbracket 0, T \rrbracket$ . Ainsi,  $K$  devient le maximum possible de pas à effectuer pour dépasser de façon certaine le seuil de  $\theta$ . Cela revient par ailleurs à considérer de nouveau  $\bar{V}_t^i$  comme prenant des valeurs sur un « escalier de potentiel », où chaque marche vaut  $\gamma^*$ .

Pour plus de simplicité, nous noterons par la suite  $\gamma^* = \gamma$ .

Développons Équation 24 en se rappelant de Équation 3 :

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{U_{t+1}^i \leq \phi(\bar{V}_t^i)\}} \bar{A}_{t^*}^i \right] = \mathbb{E} \left[ \phi(\bar{V}_{t^*}^i) \bar{A}_{t^*}^i \right], \\ &= \sum_{a=0}^1 \sum_{k=0}^K \phi(k\gamma) \cdot a \cdot \pi^K(x = (k\gamma, a)). \end{aligned}$$

Or, comme  $\phi(v)$  est nulle tant que  $v < \theta$ , tous les termes, sauf celui où  $k = K$  vont s'annuler, laissant ainsi :

$$\gamma = \phi(K\gamma) \pi^K(x = (K\gamma, 1)),$$

soit, avec Équation 23 :

$$\gamma = \beta \frac{1}{\left(K + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}.$$

Ainsi trouver les points d'équilibre de la mesure stationnaire revient à résoudre l'équation suivante :

$$f(\gamma) = \gamma - \frac{\beta}{\left(\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)} = 0. \quad (25)$$

À cause de la fonction partie entière, cette équation n'est pas triviale à résoudre.

Premièrement, pour  $\gamma \rightarrow 0$ , l'Équation 25 admet une solution, triviale, correspondant à l'absorption du système en zéro. Cette absorption correspond à l'état d'oubli de l'élément mémoriel.

Cependant, nous sommes à la recherche d'équilibres non nuls qui pourraient correspondre à une configuration constante avec une activité neuronale persistente.

Grâce à Fig. 2, et à Équation 25, nous pouvons voir que  $f$  est une fonction **continue par morceau et croissante**.

Énonçons la proposition Proposition 5.6, nous donnant une condition suffisante pour assurer l'existence d'un équilibre non trivial à Équation 25.

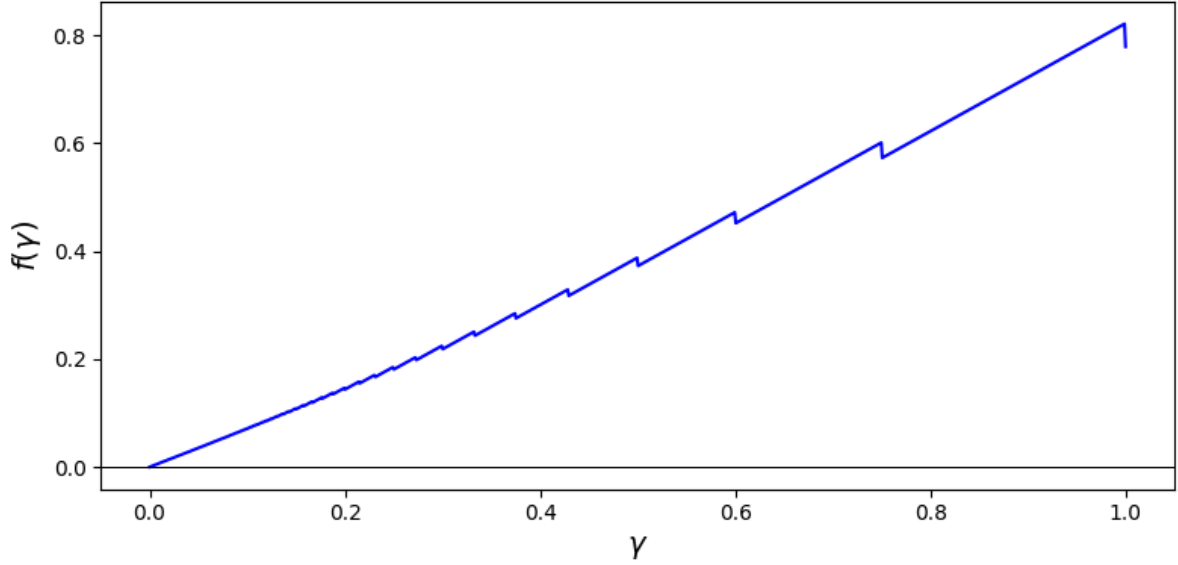


Fig. 2. – Représentation de  $f$  pour  $\gamma$  compris entre 0 et 1, avec  $\theta = 3$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\lambda = 0.09$ .

**Proposition 5.6:** Si

$$\theta < \frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)},$$

alors il existe au moins une solution pour Équation 25.

*Preuve:* Supposons que  $\gamma > \theta$ . Ceci implique que  $\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil = 1$ . Ainsi, pour tout  $\gamma > \theta$ , le nombre  $\frac{\beta}{\left(\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$  devient une **constante**, égale à  $\frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$ . Ce qui veut dire que tant que  $\gamma$  se trouve dans l'intervalle  $[\theta, 1]$ , la fonction  $f$  est **continue**.

Et donc si jamais l'équilibre  $\frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$  se trouve aussi dans  $[\theta, 1]$ , alors il sera nécessairement atteint, puisque la fonction est continue sur ce même intervalle. D'où la condition suffisante suivante :

$$\theta < \frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)},$$

concluant la preuve. Le tout est illustré sur la Fig. 3. □

**Remarque 5.7** ( $f$  peut admettre d'autres équilibres grâce aux sauts de  $\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil$ ): Si jamais  $\theta > \frac{\beta}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(\beta + \lambda)}$ , un ou plusieurs équilibres peuvent tout de même exister, grâce aux sauts de la fonction  $\left\lceil \frac{\theta}{\gamma} \right\rceil$ . Ceci est illustré grâce à la Fig. 4.

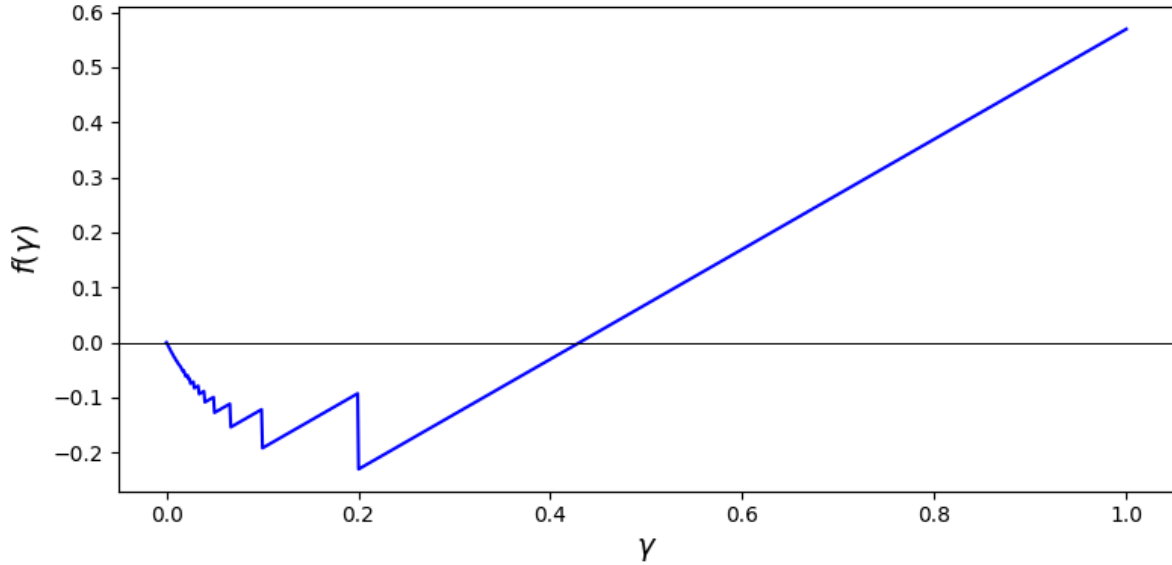


Fig. 3. – Représentation de  $f$  pour  $\gamma$  compris entre 0 et 1. Ici  $\theta = 0.2$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\lambda = 0.09$ . Pour cette combinaison de paramètres, le point d'équilibre est  $\gamma = \frac{\beta}{(1+\frac{1}{\beta})(\beta+\lambda)} = 0.430622009569378$ . Nous avons donc bien  $\theta < \frac{\beta}{(1+\frac{1}{\beta})(\beta+\lambda)}$ , et  $f$  coupe proprement l'axe des abscisses en  $\frac{\beta}{(1+\frac{1}{\beta})(\beta+\lambda)}$ .

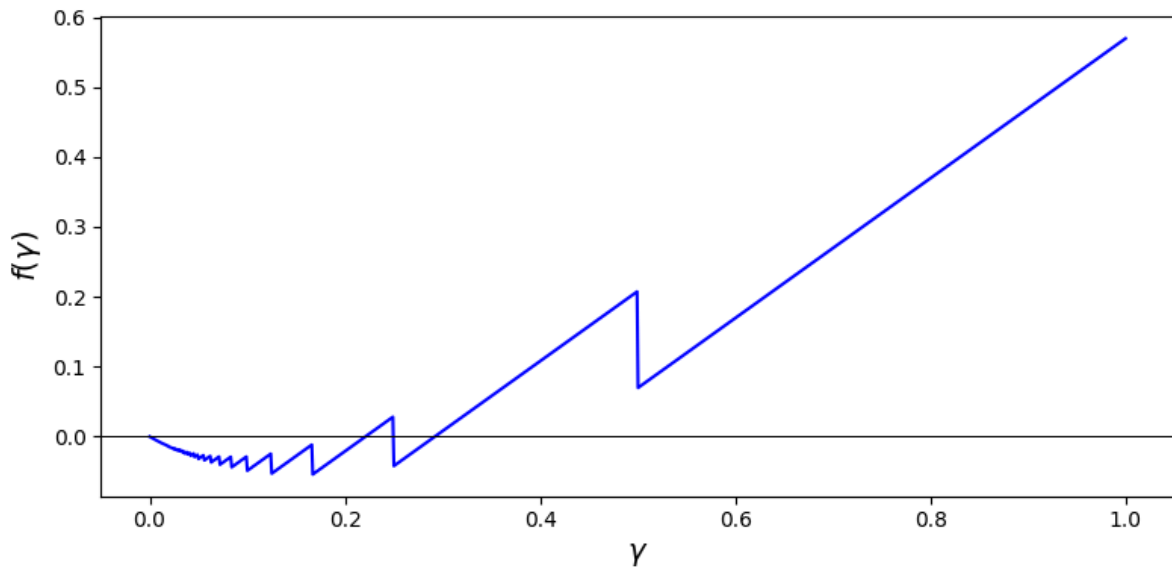


Fig. 4. – Illustration de la présence de plusieurs équilibres. Ici  $\theta = 0.5$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\lambda = 0.09$ , donnant  $\theta > \frac{\beta}{(1+\frac{1}{\beta})(\beta+\lambda)}$ . Pourtant,  $f(\gamma)$  s'annule deux fois dans l'intervalle  $(0, \theta]$ .

## 6. Conclusion

## Références

André, M., & Pouzat, C. (2025). A Quasi-Stationary Approach to Metastability in a System of Spiking Neurons with Synaptic Plasticity. *Mathematical Neuroscience and Applications*, 7668. <https://doi.org/10.46298/mna.7668>

- Brémaud, P. (2017). *Discrete Probability Models and Methods: Probability on Graphs and Trees, Markov Chains and Random Fields, Entropy and Coding: 78* (Vol. 78). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-43476-6>
- Darroch, J. N., & Seneta, E. (1965). On Quasi-Stationary Distributions in Absorbing Discrete-Time Finite Markov Chains. *Journal of Applied Probability*, 2(1), 88-100. <https://doi.org/10.2307/3211876>