LEPL1106 Signaux et systèmes

Simon Desmidt

Année académique 2022-2023 - Q2

UCLouvain

Table des matières

Introduction

1.1 Signaux

Un signal est une fonction d'une ou plusieurs variables, continues ou discrètes, correspondant à de l'information ou à un phénomène physique.

1.1.1 Conventions

- Un signal en temps continu s'écrit $x(t)$, et un signal en temps discret s'écrit $x[n]$
- x est un signal, i.e. une fonction, tandis que $x[k]$ est une valeur.
- Par convention, pour alléger les notations, on note en temps discret (resp. continu) $x[n]$ (resp. $x(t)$) comme étant le signal x dans son ensemble, et n (resp. t) est la variable libre.

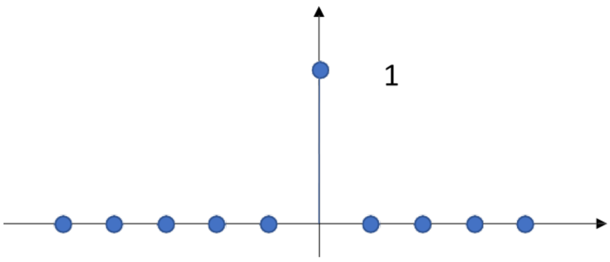
1.1.2 Opérations sur les signaux

	Temps discret	Temps continu
Combinaison linéaire	$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Multiplication	$x_1[n]x_2[n]$	$x_1(t)x_2(t)$
Différentiation		$d^n x(t)/dt^n$
Intégration		$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
Dilatation	$x[n/a]$! Arrondis	$x(t/a)$, $a \in \mathbb{R}$
Translation	$x[n-n_0], n_0 \in \mathbb{Z}$	$x(t-t_0), t_0 \in \mathbb{R}$
Renversement	$x[-n]$	$x(-t)$

1.2 Impulsion

1.2.1 Temps discret

$$\boxed{\delta[n] = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}} \tag{1.1}$$



Une impulsion peut également être décalée par rapport à l'axe vertical. Elle se note alors

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 \text{ si } n = n_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{1.2}$$

→ Remarque : La composition d'impulsions est possible, il s'agit de combinaisons linéaires de différentes impulsions.

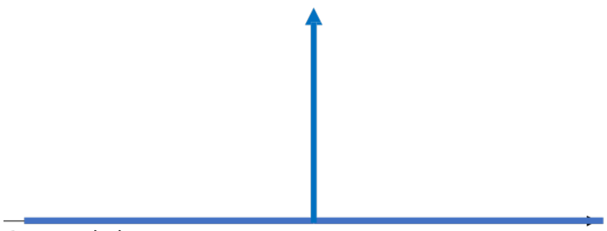
- <u>Théorème :</u> Pour tout signal x,

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]} \tag{1.3}$$

Cela signifie que tout signal peut s'écrire comme une somme d'impulsions décalées. Les impulsions forment donc une base de l'espace des signaux.

1.2.2 Temps continu

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$



De plus, toute impulsion continue respecte la propriété suivante : $\int_{-a}^{a} \delta(s)ds = 1$.

<u>Propriétés :</u>

- $\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(s)ds = x(0)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(s-t)ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(t-s)ds = x(t)$

- <u>Théorème :</u> Pour tout signal x,

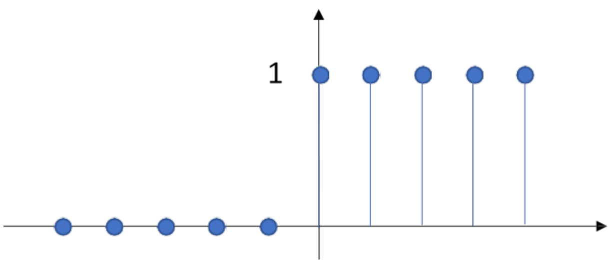
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(t-s)ds \tag{1.5}$$

Les impulsions forment donc une base de l'espace des signaux en temps continu également.

1.3 Echelon

1.3.1 Temps discret

$$u[n] = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

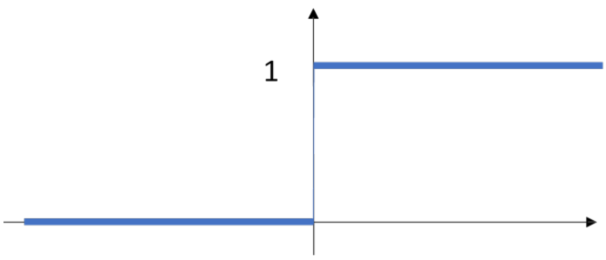


Un échelon peut s'écrire comme une somme d'impulsions :

$$\boxed{u[n] = \sum_{k \geq 0} \delta[n-k]} \tag{1.7}$$

1.3.2 Temps continu

$$u(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases} \tag{1.8}$$



1.3.3 Lien avec l'impulsion

Dans le cas continu, on a la propriété :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(s) ds \tag{1.9}$$

1.4 Systèmes

Un système est une entité qui produits de nouveaux signaux (sortie) sur base d'un ou plusieurs signaux (entrée). Il se note $H\{x[n]\}$ ou $H\{x(t)\}$.

Les systèmes peuvent traiter aussi bien des signaux discrets que continus.

1.4.1 Systèmes LIT

Un système LIT est un système linéaire et invariant dans le temps.
- <u>Linéaire :</u>

$$H\{\sum_i a_i x_i\} = \sum_i a_i H\{x_i\} \tag{1.10}$$

- <u>Invariance temporelle :</u>

$$H\{x\}[n] = y[n] \implies H\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0] \tag{1.11}$$

1.4.2 Produit de convolution

Temps discret

$$f[n] * g[n] := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] g[n-k] \tag{1.12}$$

avec $h \coloneqq H\{\delta\}$ et l'opération $*$ le produit de convolution.
- Propriétés :

- Pour tout système LIT, le signal de sortie est le produit de convolution du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du système.
- Le produit de convolution est commutatif, associatif et distributif par rapport à l'addition.
- L'élément neutre de la convolution est $\delta[n]$.
- Pour décaler un signal, $f[n] * \delta[n-n_0] = f[n-n_0]$

- Evaluation graphique de la convolution :

- Renversement : $g[-k]$
- Translatation : $g[n-k]$
- Multiplication : $f[k]g[n-k]$
- Sommation : $z[n] \coloneqq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]g[n-k]$
- Répéter à partir de la translation n fois.

Temps continu

Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux signaux en temps continu. Leur convolution est

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1.13}$$

Les propriétés vues pour un temps discret tiennent également pour le temps continu.

- Evaluation graphique de la convolution :

- Renversement : $g(-\tau)$
- Translatation : $g(t-\tau)$
- Multiplication : $f(\tau)g(t-\tau)$
- Sommation : $z(t) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)$
- Répéter à partir de la translation sur un intervalle t.

1.5 Convolutions de signaux

La réponse impulsionnelle d'un système LIT H est la réponse du système à une impulsion en entrée. Elle est notée h. Elle existe en temps discret et continu.

Pour tout système LIT, le signal de sortie est le produit de convolution du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du système :

$$\begin{cases} y[n] = x[n] * h[n] \\ y(t) = x(t) * h(t) \end{cases} \tag{1.14}$$

→ Remarque : ce signal caractérise complètement le comportement du système entrée-sortie.

1.5.1 Système sans mémoire

Un système sans mémoire est caractérisé par une sortie à un temps donné ne dépendant que de la valeur de l'entrée à cet instant.

1.5.2 Système causal

Un système est causal lorsque le futur dépend du passé, mais jamais l'inverse.

1.5.3 Système stable

Un système est stable lorsque, si l'entrée est bornée, la sortie l'est également.

1.5.4 Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système LIT est la réponse du système à un échelon unité en entrée. Elle se note s.

1.6 Modélisation/représentation des systèmes

1.6.1 Inconvénients de la réponse impulsionnelle

- La description de tout signal est de taille infinie : c'est toute une fonction. On souhaiterais que des systèmes simples aient une représentation simple.
- La modélisation d'un système ne mène pas de façon naturelle à une réponse impulsionnelle.
- Il est nécessaire de connaître le signal d'entrée depuis $-\infty$.

1.7 Représentations en temps continu

1.7.1 Equation différentielle entrée - sortie

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{d^k}{dt^k}\right) y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \left(\frac{d^k}{dt^k}\right) u(t)} \tag{1.15}$$

Avec $x(t)$ le signal d'entrée et $y(t)$ le signal de sortie. Un système de ce type est SISO (single input, single output).

Cette représentation ne permet par de représenter tous les systèmes LIT (e.g. $\mathcal{H}(x)(t) = x(t-t_0)$).

Observation : nous pouvons introduire la notation $\left(\frac{d}{dt}\right)^k := \frac{d^k}{dt^k}$, $k \geq 0$.

Nous pouvons donc maintenant poser les "polynômes de différentielles"

$$\begin{cases} p\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \\ q\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{k=0}^{M} b_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \end{cases} \tag{1.16}$$

Si on pose également $f(t) \coloneqq q\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)$, on a une EDO de $y(t)$ dont la solution est la somme d'une solution particulière et la solution homogène.

Réponse libre et forcée

Nous pouvons décomposer l'équation différentielle autrement : par l'effet des conditions initailes et les entrées.

- La réponse libre est la solution de l'équation homogène avec les conditions initiales du problème. Elle représente l'impac des solutions initiales.
- La réponse forcée est la solution de l'équation non homogène avec des conditions initiales nulles. Elle représente l'impact de l'entrée u.

$\rightarrow$ Remarque : les réponses forcée et libre sont linéaires entre elles.

La solution finale est bien entendu la même, qu'on utilise la technique homogène/particulière ou la technique libre/forcée.

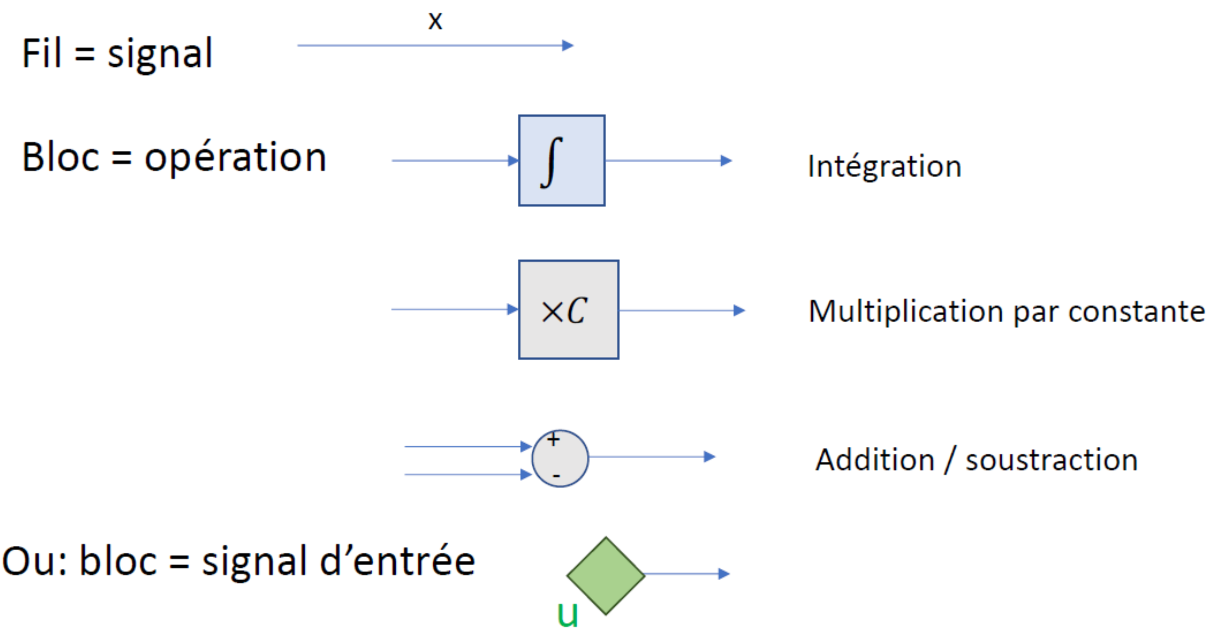
Stabilité

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = q\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) \tag{1.17}$$

Soit la solution homogène $y_H(t) = \sum_i \alpha_i e^{r_i t}$ avec les r_i les racines complexes de $p(z)$.

- $Re(r_i) < 0 \, \forall i$: les exponentielles sont décroissantes (en module) et le système est stable et stable BIBO.
- $Re(r_i) > 0$ pour un i : une exponentielle croissante (en module) et le système est instable.
- $Re(r_i) = 0$ pour un i : stabilité "marginale", i.e. n'explose pas mais ne revient pas à 0, ou instabilité.

1.7.2 Schéma bloc



En principe, toutes les opérations sont possibles dans un bloc, mais, dans les LIT, on se limite aux opérations linéaires, et parfois juste mulitplication/addition/intégration.

$\rightarrow$ Remarque : pour des opérations linéaires sur des signaux en une dimension, la multiplication par une constante est commutative aux autres opérations.

1.7.3 Représentation d'état

$$\begin{cases} \text{Evolution : } \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \text{Sortie : } y = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.18}$$

- x est l'état. C'est le vecteur de variables représentant la situation interne du système.
- u est l'entrée. C'est le signal venant de l'extérieur du système et affectant celui-ci.
- y est la sortie. C'est le signal qui est accessible depuis l'extérieur du système.

La solution est une combinaison linéaire de e^{λ_i}, avec λ_i les vap de la matrice A. Les conditions de stabilités sont les mêmes que précédemment.

Etat non unique

Posons le changement d'état $z = Tx$, avec T inversible. On a maintenant le système

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = TAT^{-1}z + TBu = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = Cx + Du = CT^{-1}z + Du = \tilde{C} + Du \end{cases} \tag{1.19}$$

Le changement d'état n'a aucun impact sur le lien entrée-sortie de u, y. Cela montre par contre que les états ne sont pas uniques, et que certains choix de représentation sont plus "physiques" que d'autres.

Découplage

Dans le changem ent d'état précédent, si A est diagonalisable, on peut prendre T tel que $\tilde{A} = TAT^{-1}$ est diagonale, et on a maintenant des modes découplés

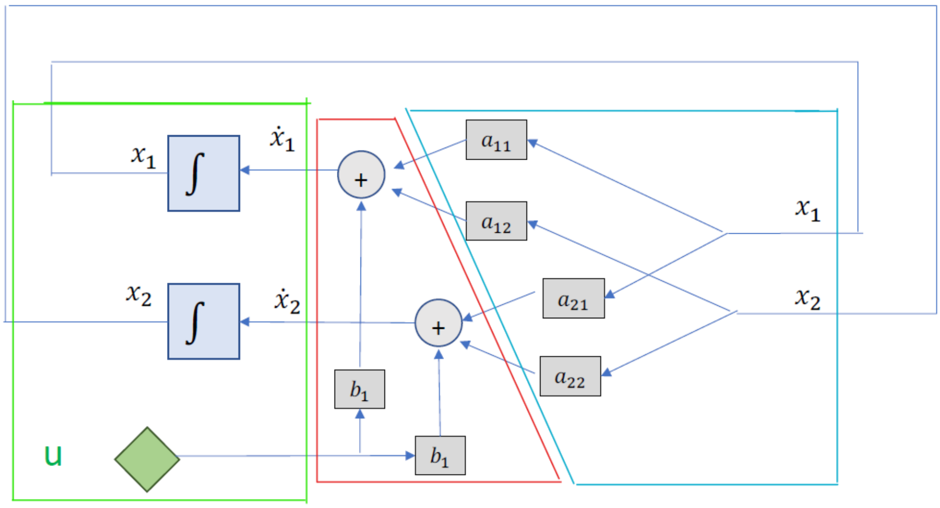
$$\frac{d}{dt} z_i = \lambda_i z_i + \tilde{B}_i u \tag{1.20}$$

Les solutions sont alors faciles à trouver.

1.8 Passage d'une représentation à l'autre

1.8.1 Etat → Schéma bloc

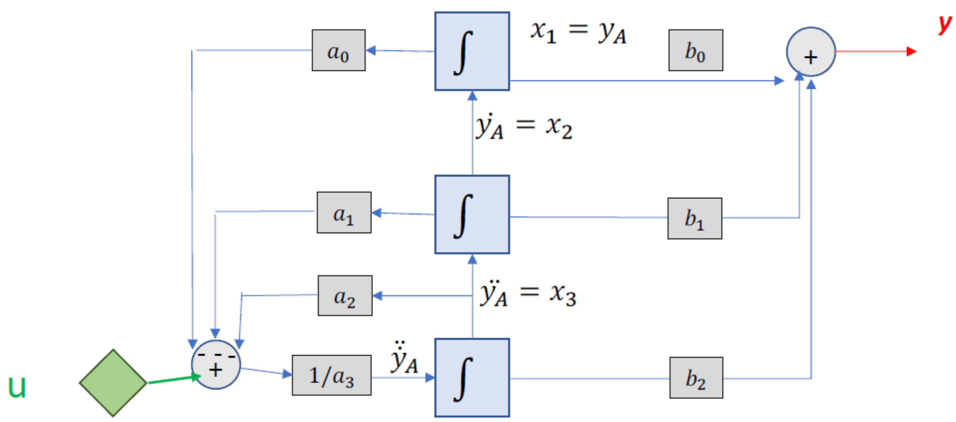
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u \tag{1.21}$$



→ Remarque : cette technique fonctionne dans les deux sens.

1.8.2 Equation différentielle → Schéma bloc

Exemple pour $y(t) = b_0 y_A + b_1 y_A' + b_2 y_A''$:



1.9 Temps discret

Les équations en temps discret fonctionnent de la même façon. On remplace l'opérateur $\frac{d}{dt}$ par l'opérateur décalage D : $Dx[n] = x[n-1]$. L'équation initiale devient alors

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k u[n-k] \Longrightarrow p(D)y = q(D)u \tag{1.22}$$

La solution homogène est

$$y_H[n] = \sum_i c_i r_i^n \tag{1.23}$$

Pour r_i racines complexes de p.
Stabilité :

- Décroissance si $|r_i| < 1$
- Croissance si $|r_i| > 1$

En temps discret, il est par contre possible d'utiliser l'opérateur D dans les schémas blocs, alors que l'opérateur différentielle ne l'est pas en temps continu.

Série et transformée de Fourier

Pour stocker un signal qui est la somme de sinus ou cosinus, on peut stocker uniquement les coefficients, les fréquences et les phases de chacun des sinus.

2.1 Série de Fourier

Soit un signal $x(t)$ périodique d'énergie finie. La décomposition de $x(t)$ en série de Fourier trigonométrique est

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2a_k \cos\left(k\omega_0 t\right) + 2b_k \sin\left(k\omega_0 t\right)\right)} \tag{2.1}$$

où les coefficients sont

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos\left(k\omega_0 t\right)dt \\ b_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin\left(k\omega_0 t\right)dt \end{cases} \tag{2.2}$$

Tout signal périodique peut être décomposé en une partie paire (les cosinus) et une partie impaire (les sinus).

2.1.1 Spectre

Le signal $x(t)$ est défini de manière unique par ses coefficients de Fourier qui composent le spectre discret de $x(t)$. On peut faire deux graphes discrets : l'un contenant les $2a_n$ en fonction de n et l'autre les $2b_n$ en fonction de n[1].

→ Remarque : les sommes infinies de sinus permettent de modéliser le signal carré en prenant $a_k = 0 \; \forall k$.

→ Remarque : on observe un effet de Gibbs aux limites des discontinuités de la fonction sinusoïdale carrée, mais la variation est bornée.

2.1.2 Série de Fourier complexe

Soit le signal $x(t)$ périodique d'énergie finie. La décomposition de ce signal en série de Fourier complexe est

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}} \tag{2.3}$$

[1] n ou k, indice muet

où les coefficients sont[2]

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{2.4}$$

→ Remarque : rappel des formules d'Euler : $\cos t = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}$ et $\sin t = \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}$

Nous pouvons alors caractériser les signaux à partir de leurs coefficients X_k, avec les graphes parties réelle-imaginaire ou les graphes module-argument.

	$x(t)$ est réel $X[k]^* = X[-k]$	$x(t)$ est imaginaire $X[k]^* = -X[-k]$
$Re(X[n])$	Pair	Impair
$Im(X[n])$	Impair	Pair
$\|X[n]\|$	Pair	Pair
$arg\{X[n]\}$	Impair	Supplémentaire

→ Remarque : les $\{e^{jk\omega_0 t}\}$ forment une base orthogonale.

2.2 Transformée de Fourier

La série de Fourier est un cas particulier de la transformée de Fourier, qui généralise la décomposition aux signaux non périodiques.

Soit le signal $x(t)$ non périodique d'énergie finie. Un signal non périodique est un signal périodique dont la période est infinie : $T_0 \to \infty$. Le signal s'exprime donc selon ses fréquences comme

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}} \tag{2.5}$$

Cette forme s'appelle la transformée de Fourier inverse. Les coefficients forment le spectre $X(j\omega)$ du signal, qui est lui-même la transformée de Fourier du signal initial :

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{2.6}$$

Le signal s'exprime alors selon ses fréquences comme

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{2.7}$$

et cette formule s'appelle la transformée de Fourier inverse.

On voit maintenant que les signaux périodiques s'expriment avec des coefficients discrets ($[k]$) et les signaux non périodiques par des coefficients continus (ω).

[2]Bien faire attention au signe -

2.3 Série de Fourier discrète

→ Remarque : un signal sinusoïdal discret n'a une période finie que si l'argument contient π. La période $N \in \mathbb{N}$ vérifie $x[n+N] = x[n]$.

Soit le signal $x[n]$ périodique. Sa pulsation fondamentale est $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = [rad]$. La décomposition en série de Fouier discrète est

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_0 n}} \tag{2.8}$$

où les coefficients de Fourier sont

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-jk\Omega_0 m} \tag{2.9}$$

Les indices itérés sont limités à $N-1$ car $0 \equiv 2\pi$.

2.4 Transformée de Fourier discrète

Soit le signal discret $x[n]$ non périodique d'énergie finie. Le signal $x[n]$ s'exprime de manière unique selon ses "fréquences" :

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega} \tag{2.10}$$

où la transformée de $x[n]$ est

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\Omega m} \tag{2.11}$$

→ Remarque : $X\left(e^{j(\Omega+\pi)}\right) = X\left(e^{j(\Omega-\pi)}\right)$

2.5 Propriétés de la transformée de Fourier

2.5.1 Dualité

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Longrightarrow X(jt) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi x(-\omega)} \tag{2.12}$$

Si on connait une transformée donnée, il suffit d'échanger les variables ($\omega \to t$ et $t \to -\omega$) et d'échanger les fonctions pour obtenir la transformée du signal dual.

Exemple : la transformée du signal $x(t) = 1$ est duale de celle de $x(t) = \delta(t)$.

2.5.2 Linéarité

L'opérateur d'intégration étant linéaire, la transformée de Fourier l'est aussi.

$$\boxed{x_k(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_k(j\omega),\ k = 0, 1, 2, \ldots \Longrightarrow \sum_k x_k(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_k X_k(j\omega)} \tag{2.13}$$

Cette propriété permet de décomposer des fonctions a priori complexe en une somme de fonctions simples.

Train d'impulsions

Un train d'impulsion de Dirac est $s_{T_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \to s_{T_0}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT_0)$.

Sa transformée de Fourier est, par liénarité, $X(j\omega) = \omega_0 s_{\omega_0}(\omega)$, où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Il est donc sa propre transformée à une constante près.

2.5.3 Translation et modulation

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Longrightarrow x(t - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)e^{-j\omega t_0}} \tag{2.14}$$

La translation d'un signal modifie donc la phase de son spectre.

Par dualité, la modulation du signal modifie son amplitude : si $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$, alors $e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\omega - \omega_0))$

2.5.4 Différentiation

Dériver un signal à énergie finie revient à amplifier (resp. atténuer) ses hautes (resp. basses) fréquences :

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Longrightarrow \frac{d^k x}{dt^k}(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)^k X(j\omega)} \tag{2.15}$$

2.5.5 Multiplication par un monôme

Par dualité, multiplier un signal par un monôme revient à dériver son spectre.

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Longrightarrow t^n x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j^n \frac{d^n X}{d\omega^n}(j\omega)} \tag{2.16}$$

2.5.6 Intégration

Par effet réciproque, intégrer un signal promeut les basses fréquences.

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Longrightarrow \int_{-\infty}^{t} x(t)dt \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)} \tag{2.17}$$

Où le second terme est la constante d'intégration.

Fonction échelon

La fonction échelon est$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$. Sa transformée de Fourier est donc $X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$.

Fonction fenêtre

La fonction fenêtre est $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \Pi(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } -1 < t < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = u(t+1) - u(t-1)$. La transformée de Fourier de cette fonction est $X(j\omega) = 2sinc(\omega) = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$.

2.5.7 Dilatation

Dilater un signal revient à compresser son spectre.

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Longrightarrow x(t/a) = |a|X(aj\omega)} \tag{2.18}$$

La dilatation ralentit le signal et favorise les basses fréquences, tandis que la compression accélère le signal et favorise les hautes fréquences.

2.5.8 Relation de Parseval

L'énergie du signal est conservée dans son spectre :

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \tag{2.19}$$

Cela signifie que l'énergie du signal ne dépend pas de la représentation choisie.

2.5.9 Renversement

Renverser un signal revient à renverser son spectre.

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Longrightarrow x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-j\omega)} \tag{2.20}$$

Il s'agit en réalité d'une dilatation par $a = -1$.

2.5.10 Complexe conjugué

Le spectre d'un signal conjugué est le conjugué renversé du spectre du signal.

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega)} \tag{2.21}$$

Fonction signe

La fonction sign est $sign : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : sign(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t < 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$. Sa transformée de Fourier est $X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$.

→ Remarque : calculer des transformées de Fourier nécessite souvent l'utilisation des formules d'Euler et de la linéarité.

2.5.11 Convolution

Convoluer deux signaux revient à multiplier leurs spectres.

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega),\ y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) \Longrightarrow (x * y)(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)Y(j\omega)} \tag{2.22}$$

2.5.12 Multiplication

Par dualité, multiplier deux signaux revient à convoluer leurs spectres.

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega),\ y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) \Longrightarrow (x \cdot y)(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}(X * Y)(j\omega)} \tag{2.23}$$

Filtrage

La réponse fréquentielle est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système.

Un filtre est un système qui modifie le contenu fréquentiel du signal. Un filtre peut être passe-bas, passe-haut, ou passe-bande.

3.1 Filtres idéaux

3.1.1 Filtre passe-bas idéal

Un filtre passe-bas est un filtre qui laisse passer les basses fréquences.

Le module de la réponse fréquentielle du filtre passe-bas est une fonction fenêtre. La réponse impulsionnelle du filtre basse-pas idéal alors est paire, et donc non-causale! Un tel filtre est donc impossible à réaliser physiquement, tout comme tous les filtres idéaux, mais il est possible de s'en approcher.

3.1.2 Filtre passe-bande idéal

Le module de la réponse fréquentielle du filtre passe-bande est une double fonction fenêtre, paire, dont les deu fenêtres sont de largeur B et centrées en $\pm\omega_0$.

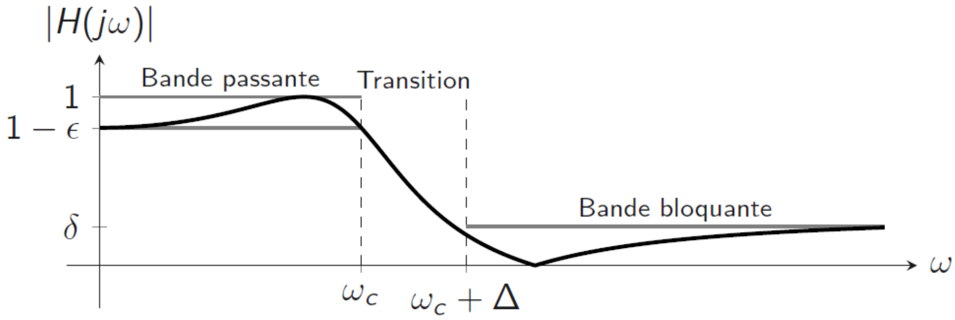
3.2 Filtres analogiques en pratique

Un filtre analogique est un système analogique LIT composé d'éléments passifs et/ou actifs. L'entrée et la sortie de ce système sont des fonctions continues et peuvent être décrites de manière équivalentes par leur réponse impulsionnelle, indicielle ou fréquentielle.

Filtres			
Filtres causaux		Filtres non causaux	
Réponse impulsionnelle		Réponse impulsionnelle	
Finie	Infinie	Finie	Infinie
Filtre FIR	Filtre IIR	Filtre FIR	Filtre idéal

Si la variable est le temps, seuls les filtres causaux sont physiquement réalisables.

3.2.1 Gabarit



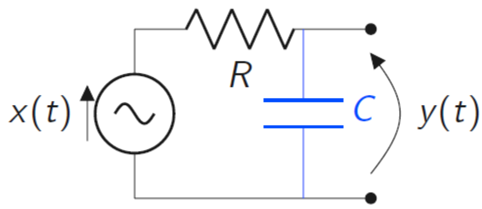
Un gabarit spécifie les tolérances par rapport à un filtre idéal :

- Fluctuations dans la zone passe $(1-\varepsilon)$.
- Zone de transition (Δ).
- Fluctuations dans la zone bloquante (δ).

3.2.2 Filtre passe-bas – Circuit analogique

Dans le cas du circuit RC, par l'EDO du circuit et la transformée de Fourier du signal, on trouve une réponse impulsionnelle $H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}$ la fréquence de coupure.

Le module du filtre (i.e. de sa réponse impulsionnelle) est $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}}$, avec $\omega_c = 1/RC$.



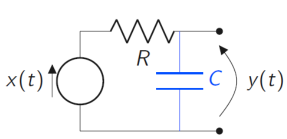
3.2.3 Filtre passe-bas – Butterworth

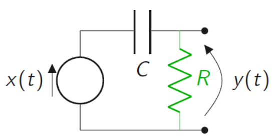
Le filtre de Butterworth est "maximally flat", i.e. le signal de sortie est le plus plat possible dans la bande passante. Butterworth d'ordre n est défini comme

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}} \tag{3.1}$$

Il existe d'autres filtres, qui permettent une oscillation dans la bande passante, dans la bande bloquante, ou encore dans les deux; masis ils ne sont pas à connaître.

3.2.4 Filtre passe-haut





Un filtre passe-haut est l'inverse du filtre passe-bas. Son module est le suivant : $H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$. Il est possible d'obtenir un filtre passe-haut à partir de l'expression du filtre passe-bas en faisant le changement de variable

$$\frac{j\omega}{\omega_c} \to \frac{\omega_c}{j\omega} \tag{3.2}$$

Le filtre de Butterworth passe-haut d'ordre n est défini comme

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega_c/\omega)^{2n}} \tag{3.3}$$

3.2.5 Filtre passe-bande

Pour obtenir un filtre passe-bande à partir d'un filtre passe-bas, on fait le changement de variable suivant :

$$j\omega \to \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{Bj\omega} \tag{3.4}$$

avec B la largeur du filtre et ω_0 la fréquence de centrage des fenêtres.

3.2.6 Filtre passe-tout

Le rôle d'un filtre passe-tout est de modifier la phase d'un filtre sans altérer sa réponse en amplitude. Sa réponse fréquentielle s'écrit

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - \alpha}{j\omega + \alpha} \tag{3.5}$$

avec α un paramètre.

3.3 Représentations

Un filtre peut être représenté par les graphes du module et de l'argument de sa réponse impulsionnelle, mais cela n'est pas toujours efficace, contrairement à la représentation de son module en échelle logarithmique.

Le diagramme de Bode est le graphe de $20\log_{10}|H(j\omega)|$ en fonction de ω. Il fait ressortir les modes asymptotiques du module et on appelle gain le logarithme.

Tracer le diagramme de Bode en amplitude :

- Factoriser $H(j\omega)$
- Exprimer $20\log_{10}|H(j\omega)|$
- Tracer la courbe correspondant à chacun des termes
- Additionner les courbes

Echantillonnage

L'échantillonnage fait le line entre le monde continu et le monde discret. Un signal discret correpond aux échantillons du signal continu, tel que $x[n] = x(nT_e)$, avec T_e la période d'échantillonnage.

La représentation continue $x_e(t)$ du signal échantillonné fait le lien entre $x(t)$ et $x[n]$:

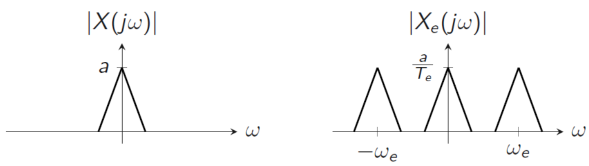
$$\boxed{x_e(t) = x(t)\sum_n \delta(t - nT_e) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e)} \tag{4.1}$$

4.1 Effet de l'échantillonnage sur le spectre de $x(t)$

L'expression de $X_e(j\omega)$ en fonction de $X(j\omega)$ est

$$\boxed{X_e(j\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_k X\left(j(\omega - k\omega_e)\right)} \tag{4.2}$$

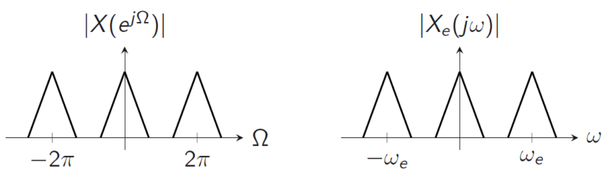
On observe donc une répétition spectrale de période $\omega_e = 2\pi f_e$



L'expression de $X_e(j\omega)$ en fonction de $X(e^{j\Omega})$ est

$$\boxed{X_e(j\omega) = \sum_n x[n]e^{-j\omega nT_e} = X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\omega T_e}} \tag{4.3}$$

Les spectres sont dont identiques à un changement de variable près : $\Omega = \omega T_e$

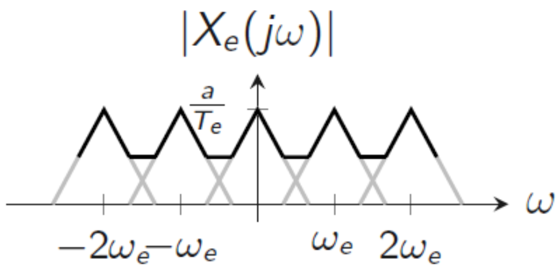


4.2 Du temps continu vers le temps discret

Pour passer d'un signal continu à un signal discret, on multiplie le signal par un train de Dirac et on pose ensuite le signal discret $x[n] = x(nT_e)$.

Pour passer du module de la transformée de Fourier en temps continu à celle en discret, on la périodise (période $\omega_e = 2\pi f_e$) et on pose le changement de variable $\Omega = \omega T_e$.

4.2.1 Repli spectral



On observe un repli spectral, i.e. les périodes s'additionnent, si $T > 2T_e$. Le théorème d'échantillonnage est une condition suffisante pour éviter le repli spectral :

Une fonction à bande limitée qui ne contient pas de fréquences supérieures à f_{max} est complètement déterminée par ses échantillons pour autant que $f_e \geq 2f_{max} \iff \omega_e \geq 2\omega_{max}$.

4.3 Du temps discret vers le temps continu

Pour passer d'un signal discret à un signal continu, si T_e est connu, on multiplie par un train de Dirac ($\sum_n x[n]\delta(t - nT_e)$ pour obtenir $x_e(t)$ et on obtient ensuite le signal continu par filtrage pour autant que $\omega_e \geq 2\omega_{max}$.

Pour passer du module de la transformée de Fourier en temps discret à celle en continu, on pose le changement de variable $\omega = \Omega/T_e$ (si T_e est connnu) et on obtient ensuite le module du signal continu par filtrage, pour autant que $\omega_e \geq 2\omega_{max}$.

4.3.1 Reconstruction par filtrage

Si le théorème d'échantillonnage est satisfait, on peut reconstuire exactement le signal continu $x(t)$ en filtrant $X_e(j\omega)$:

$$X(j\omega) = T_e X_e(j\omega)\Pi\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \tag{4.4}$$

avec $\omega_{max} \leq omega_c \leq \omega_e - \omega_{max}$.

La formule de reconstruction de Shannon est

$$\boxed{x(t) = \sum_n x[n] sinc\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)} \tag{4.5}$$

La fonction sinus cardinal permet d'interpoler les points $t, x(nT_e)$ (on pourrait en prendre une autre).

4.3.2 Généralisation du théorème d'échantillonnage

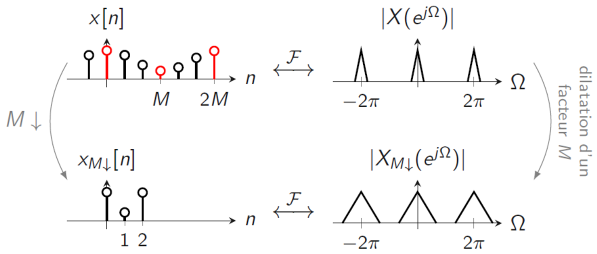
La reconstruction exacte de x est possible ssi il n'y a pas de recouvrement spectral.

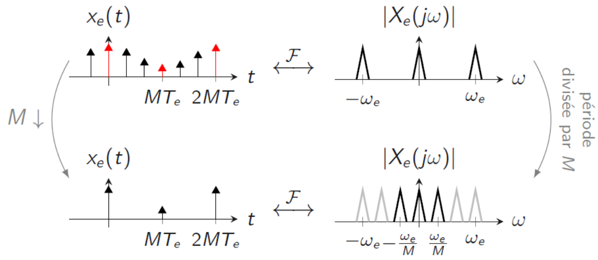
4.4 Sous-/Suréchantillonnage

4.4.1 Sous-échantillonnage

$$x[n] \to x_M[n] = x[Mn] \tag{4.6}$$

On garde un échantillon tous les M.



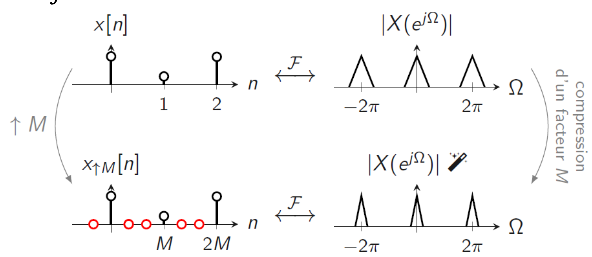


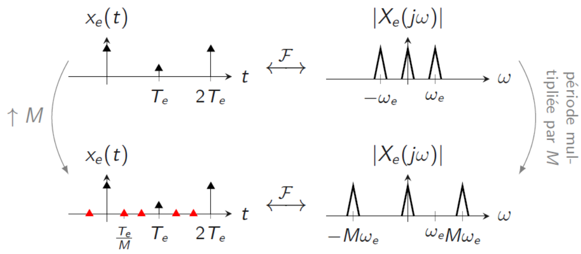
!! Repli spectral.

4.4.2 Suréchantillonnage

$$x[n] \to x_M[n] = \begin{cases} x[n/M] \text{ si } M \text{ divise } n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{4.7}$$

On ajoute $M - 1$ zéros entre les échantillons.





Transformée de Fourier discrète (DFT)

La transformée de Fourier discrète a pour intérêt d'être la seule qu'un ordinateur peut réellement calculer, car il ne peut jamais prendre des valeurs continues sur un support infini.

5.1 Définition

A partir d'une suite discrète M-périodique $x[n]$, on construit une nouvelle suite $X_{DFT}[k]$ également M-périodique et appelée transformée de Fourier discrète de $x[n]$.

$$\boxed{X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-2\pi jkn/M}} \tag{5.1}$$

On peut écrire cela sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X_{DFT}[0] \\ X_{DFT}[1] \\ \vdots \\ X_{DFT}[M-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-2\pi \frac{j}{M}} & \dots & e^{-2\pi \frac{j(M-1)}{M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi \frac{j(M-1)}{M}} & \dots & e^{-2\pi \frac{j(M-1)^2}{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[M-1] \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

La matrice centrale est une matrice de Vandermonde.

5.2 Lien avec la DTFT

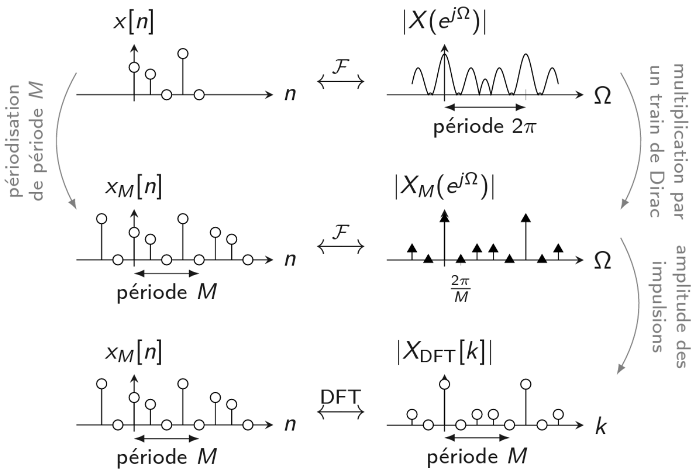
On suppose un signal $x[n]$ non périodique et on définit sa version M-périodisée :

$$x_M[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[n + mM] \tag{5.3}$$

La DTFT de $x[n]$ évaluée en $\Omega_k = 2\pi k/M$ est

$$X(e^{j\Omega_k}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-2\pi jkn/M} = X_{M,DFT}[k] \tag{5.4}$$

Les échantillons de la DTFT correspondent donc aux valeurs de la DFT de la version M-périodisée du signal.



5.3 Ré-échantillonage de la DTFT

On suppose un signal $x[n]$ non périodique de support fini $\{0, 1, \dots, M-1\}$. Sa DFT est donc

$$X_{DFT,M}[k] = \left. X(e^{j\Omega}) \right|_{\Omega=\Omega_k=\frac{2\pi k}{M}} \tag{5.5}$$

Le zero-padding consiste alors à choisir une taille de périodisation $M' > M$ en complétant avec des zéros. Cela permet d'évaluer la DTFT de $x[n]$ en d'autres fréquences.

→ Remarque : la DFT possède les mêmes propriétés que toutes les transformées de Fourier vues jusqu'à présent.

5.4 Transformée de Fourier rapide

A partir de l'équation 5.2, on déduit un nombre d'opérations pour calculer la DFT de l'ordre de $8M^2$ (coûteux). L'idée de l'agorithme rapide est de factoriser M et de diviser la somme de la DFT en sous-sommes qui correspondent à des DFT de plus petites tailles.

Transformée de Laplace

6.1 Définition

La transformée de Laplace d'un signal x est une généralisation à $s \in \mathbb{C}$ quelconque de la transformée de Fourier :

$$X(s) = \mathcal{L}\{x\} := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{6.1}$$

$X(s)$ est définie pour les s pour lesquels l'intégrale existe, i.e. pour s dans la région de convergence (ROC).

La transformée inverse est

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + i\omega)e^{(\sigma+i\omega)t}d\omega \tag{6.2}$$

Pour tout σ tel que X est définie sur $\sigma + i\mathbb{R}$

6.2 Région de convergence

Si $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y)$ sur $\sigma + i\mathbb{R}$ pour un σ quelconque, alors $x = y$. Toutefois, si les transformées ont la même expression sans avoir la même ROC, on ne peut rien déduire.

Support	ROC
Support fini	$ROC = \mathbb{C}$
Support fini à gauche et $\lvert x(t)\rvert \leq ae^{k_1 t}$	ROC contient $Re(s) > k_1$
Support fini à droite et $\lvert x(t)\rvert \leq ae^{k_2 t}$	ROC contient $Re(s) < k_2$
Support infini, $\lvert x(t) \leq ae^{k_1 t}$ à droite	ROC contient $k_1 < Re(s) < k_2$
$\lvert x(t) \leq ae^{k_2 t}$ à gauche	

6.3 Propriétés

- La transformée de Laplace vérifie la propriété de liénarité :

$$\mathcal{L}\{a_1x_1 + a_2x_2\} = a_1\mathcal{L}\{x_1\} + a_2\mathcal{L}\{x_2\} \qquad R_1 \cap R_2 \subseteq R \tag{6.3}$$

- Décalage temporel (la ROC ne change pas) :

$$\mathcal{L}\{x(t - t_0)\} = e^{-st_0}\mathcal{L}\{x(t)\} \tag{6.4}$$

- Par dualité, décalage fréquentiel (la ROC devient $R + Re(s_0)$) :

$$\mathcal{L}\{e^{s_0 t}x(t)\} = X(s - s_0) \tag{6.5}$$

- Convolution (la ROC : $R_1 \cap R_2 \subseteq R$) :

$$\mathcal{L}\{x * y\} = \mathcal{L}\{x\}\mathcal{L}\{y\} = X(s)Y(s) \tag{6.6}$$

- Différentiation (la ROC : $R = R_1 \cap R_2$) :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{x\} = sX(s) \tag{6.7}$$

- Intégration (la ROC : $R = R_1 \cap R_2$) :

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{s\} = \frac{X(s)}{s} \tag{6.8}$$

- Différentiation fréquentielle :

$$\mathcal{L}\{-tx(t)\} = \frac{d}{ds}X(s) \tag{6.9}$$

→ Remarque : Lorsque $X(s)$ est un quotient de polynôme, il faut la décomposer en fractions simples.

6.4 Fonction de transfert

Pour un système tel que $y = h * u$ avec h la réponse impulsionnelle du système, on a

$$Y(s) = H(s)U(s) = \mathcal{L}\{h * u\} \tag{6.10}$$

et on appelle la fonction $H(s) = \mathcal{L}\{h\}$ la fonction de transfert du système.

6.4.1 Résoudre une EDO

Soit l'EDO

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k u(t) \tag{6.11}$$

Dans le domaine fréquentielle, elle se réécrit

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) U \tag{6.12}$$

On peut donc isoler $Y(s)$ et retrouver ensuite le signal $y(t)$ par transformée inverse.

6.4.2 Représentation d'état

Soit le système dont la représentation d'état est

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{6.13}$$

Par Laplace puis en isolant, on trouve

$$Y = (C(sI - A)^{-1}B + D)U \tag{6.14}$$

et le terme entre parenthèses est la fonction de transfert du système.

Si le système admet une représentation d'état, alors $H(s)$ est rationnelle : son dénominateur est de degré n et son numérateur de degré $< n$ si $D = 0$ et n sinon.

6.4.3 Passage de la représentation d'état à une EDO

Dans la représentation d'état, la fonction de transfert H rationnelle est

$$H = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{6.15}$$

et l'EDO associée est donc l'équation 6.11

6.4.4 Schéma bloc

Dans un schéma bloc, si on a une intégration en temporel, on peut remplacer par $\times \frac{1}{s}$ avec Laplace et si on a une dérivation en temporel, on remplace par $\times s$ avec Laplace.

$\rightarrow$ Remarque : on modifie ces blocs, mais on garde des signaux en temporel et le reste ne change pas.

6.4.5 Importance des pôles

A AJOUTER, SLIDES 5x SUR MOODLE

6.5 Transformée de Laplace unilatérale

La transformée de Laplace unilatérale se note $X_+(s) = \mathcal{L}_+\{x\}$

$$X_+(s) := \mathcal{L}\{u(t)x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{st}dt \tag{6.16}$$

6.5.1 Propriétés

La propriété de convolution de la transformée de Laplace ne reste valable en unilatéral que si

$$\begin{cases} h(t) = u(t)h(t) \\ x(t) = u(t)x(t) \\ y(t) = u(t)y(t) \end{cases} \tag{6.17}$$

et le système est alors causal.

La propriété de dérivation change :

$$\mathcal{L}_+\{x'(t)\} = -x(0) + sX_+(s) \tag{6.18}$$

et celle d'intégration aussi :

$$\mathcal{L}_+\left\{\int_0^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}_+\{x\} \tag{6.19}$$

Propriétés des limites de $X_+(s)$:

$$\begin{cases} \lim_{s\to 0} sX_+(s) = x(\infty) \\ \lim_{s\to\infty} sX_+(s) = x(0^+) \end{cases} \tag{6.20}$$

On en déduit que

$$\lim_{s\to 0} H(s) = \frac{y(\infty)}{x(\infty)} \tag{6.21}$$

et donc $H(0)$ représente le rapport entre la sortie et l'entrée "à l'infini" (i.e. après stabilisation). On l'appelle gain à fréquence nulle.

6.5.2 Résoudre une EDO

Comme précédemment, on remplace les signaux par leur transformée de Laplace (maintenant unilatérale) et il faut donc prendre en compte les conditions initiales dans ces transformées.

Transformée en z

7.1 Définition

La transformée en z d'un signal x est

$$\mathcal{Z}\{x\} := X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \tag{7.1}$$

si la somme converge. Il s'agit en quelque sorte d'une DTFT atténuée par un facteur r^{-k}, avec $z = re^{i\omega}$.

7.1.1 Convergence

La transformée en z d'un signal s'apparente à une série de Laurent autour de 0. En effet, elle se réécrit

$$X(z) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \tag{7.2}$$

Elle converge sur un anneau $A(0, r, s)$, avec r le rayon de convergence des $x[-k]$ et $1/s$ le rayon de convergene des $x[k]$.

Si le support du signal est fini dans le futur, alors $\sigma = \infty$ et $A(0, \rho, 0$.
Si le support du signal est fini dans le passé, alors $\rho = \infty$ et $A(0, \infty, 1/\sigma$, et on appelle $s = 1/\sigma$ le taux de croissance asymptotique du signal.

7.1.2 Transformée en z inverse

Si X est analytique sur $A(0, r, s)$, alors

$$x[k] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\rho)} X(z)z^{k-1}dz \tag{7.3}$$

pour tout $\rho \in (r, s)$.
Le signal $x[k]$ est donc une combinaison linéaire de $z^k = \rho^k e^{i\omega k}$ pour un ρ fixe et $\omega \in [-\pi, \pi[$, dont les poids sont $X(z) = X(\rho e^{i\omega})$.

→ Remarque : en fonction des rayons de l'anneau de convergence, la transformée est différente.

7.1.3 Propriétés

- Linéarité : $\mathcal{Z}\{\alpha x + \beta y\} = \alpha \mathcal{Z}\{x\} = \beta \mathcal{Z}\{y\}$ et $R \supseteq R_x \cap R_y$.
- Décalage temporel : $\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} = z^{-n_0}\mathcal{Z}\{x[n]\}$ et la ROC ne change pas.
- Mise à l'échelle fréquentielle : $X(az) = \mathcal{Z}\{a^{-n}x\}$ et la ROC subit un scaling par $1/|a|$.
- Convolution : $\mathcal{Z}\{x * y\} = \mathcal{Z}\{x\}\mathcal{Z}\{y\}$ et $R \supseteq R_X \cap R_y$.
- Intégrale (accumulation) : si $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$, alors $Y = \frac{1}{1-z^{-1}}X$.
- Dérivée fréquentielle : $X'(z) = -\mathcal{Z}\{x[n-1](n-1)\} \iff \mathcal{Z}(nx[n]) = -zX'(z)$.

7.2 Fonction de transfert

Soit h la réponse impulsionnelle d'un système tel que $y = h * u$. La fonction de transfert du système est $H(z) \coloneqq \mathcal{Z}\{h\}$.

Le signal z^n est un vecteur propre de tout système LTI et $H(z)$ est la valeur propre qui multiplie ce vecteur propre. Si le signal x est une combili de vecteurs propres z^n, on peut utiliser la linéarité pour traiter chaque z^k séparément.

7.2.1 Passage vers d'autres représentations

Voir section 6.4, fonctionne de la même manière.

→ Remarque : les zéros de H sont les z tels que $H = 0$, tandis que les pôles de H sont les z tels que $H = \infty$.

→ Remarque : le système est causal si H est bornée en ∞.

→ Remarque : le plus grand pôle (en module) de la fonction de transfert est le taux de croissance asymptotique.

7.3 Transformée en z unilatérale

$$\mathcal{Z}_+\{x\} \coloneqq \mathcal{Z}\{u[n]x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{7.4}$$

7.3.1 Propriétés

- Convolution : $\mathcal{Z}\{x * y\} \neq \mathcal{Z}\{x\}\mathcal{Z}\{y\}$ en général.
- Décalage arrière : $\mathcal{Z}_+\{x[n-1]\} = z^{-1}\mathcal{Z}_+\{x[n]\} + x[-1]$
- Décalage avant : $\mathcal{Z}_+\{x[n+1]\} = z\mathcal{Z}_+\{x[n]\} - zx[0]$
- $\lim_{|z|\to\infty} X_+(z) = x[0]$
- $\lim_{|z|\to 1}(z-1)X_+(z) = x[\infty]$ si elle existe.