

LMECA1855 Thermodynamique et énergétique

SIMON DESMIDT
ARI PREZEROWITZ

Année académique 2023-2024 - Q2



Table des matières

1. Formulaire

→ Remarque : les lettres majuscules caractérisent des grandeurs absolues, tandis que les minuscules sont indiquant des grandeurs massiques.

1.1 Relations fondamentales

$$du = \delta q - pdv + \delta w_f \implies \Delta u = q - \int_1^2 pdv + w_f \quad (1.1)$$

En système monophasique :

$$du = \frac{\partial u}{\partial T}dT + \frac{\partial u}{\partial v}dv = c_vdT + \pi_Tdv \quad (1.2)$$

En réversible isochore : $du = \delta q$.

$$dh = \frac{\partial h}{\partial T}dT + \frac{\partial h}{\partial p}dp = c_pdT + \mu_Tdp \quad (1.3)$$

En réversible isobare : $dh = \delta q$.

Liquides et solides incompressibles : $\rho = \text{cste}$ et $dv = 0$.

Rendement d'un cycle moteur : $\eta = \frac{\text{effet utile}}{\text{coût}} = \frac{W_{tot}}{Q_I}$, avec Q_I la chaleur absorbée par le système et transmise depuis la source chaude.

Coefficient de performance en cycle récepteur :

- $COP_{PAC} = \frac{\text{effet utile}}{\text{coût}} = \frac{Q_I}{W_m} = COP_{frigo} + 1$.
- $COP_{frigo} = \frac{Q_{II}}{W_m}$, Q_{II} étant la chaleur transmise depuis la source froide.

Formule de Gibbs :

$$ds = \frac{du + pdv}{T} = \frac{dh - vdp}{T} \quad (1.4)$$

	Système fermé	Système ouvert
Mécanique	$w_m = - \int pdv + w_f$	$w_m = g\Delta z + \Delta k + w_f + \int vdp$
Energétique	$w_m = \Delta u - q$	$w_m = g\Delta z + \Delta k + \Delta h - q$
Hypothèses :	Le fluide est au repos aux états initial et final ($\Delta k = 0$).	Régime permanent : $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$.
	ΔE_{pot} négligeable par rapport aux travaux.	

2. Relations fondamentales

2.1 Définitions

- Des variables sont dites d'état si elles sont significatives, indépendantes entre elles et que le passage d'un état à un autre du système est indépendant du chemin emprunté.
- Un état d'équilibre est tel que tous les sous-systèmes sont dans le même état.
- Un processus est dit réversible s'il s'agit d'une séquence continue d'états d'équilibre.

2.2 Equations fondamentales

2.2.1 Gibbs en système fermé

L'équation de Gibbs en système fermé est

$$dk = dw_e + dw_i - gdz \quad (2.1)$$

avec K l'énergie cinétique, W_e les travaux extérieurs et W_i les travaux intérieurs. On peut exprimer de manière plus précise les travaux internes en séparant les effets des forces dissipatives ou non :

$$dW_i = dW_i^{\text{rev}} + dW_i^{\text{irrev}} = \int_1^2 pdV - W_f \quad (2.2)$$

Le premier terme est la déformation réversible et W_f est le terme dissipatif. On peut également développer les travaux extérieurs :

$$W_e = W_m + p_1 V_1 - p_2 V_2 \quad (2.3)$$

Où le premier terme est le travail moteur, i.e. effectué par un organisme externe, et le second le travail des forces de pression sur la frontière du système. Tout cela se réécrit dans l'équation de Gibbs :

$$w_m = \int_1^2 vdp + \Delta k + g\Delta z + w_f \quad (2.4)$$

2.2.2 1ère loi de la thermodynamique

$$dQ = dU + dW_i \quad (2.5)$$

avec Q la chaleur et U l'énergie interne.

→ Remarque : ce ne sont pas des variables d'états.

Dans le cas de procédés réversibles, on peut développer certains termes :

- Si le fluide est simple, on peut écrire $dW_i = pdV$. Il est à noter que le volume est une variable d'état.
- $dS = dQ/T$, avec S l'entropie.

En combinant tout cela, on obtient une relation différentielle totale valable pour des procédés réversibles, mais aussi entre deux états d'équilibre :

$$TdS = dU + pdV \quad (2.6)$$

2.3 Principe d'équivalence

Partons de l'équation de base

$$de = dw_e - gdz + dq \quad (2.7)$$

avec $dE = dU + dK$. En utilisant les équations des sections précédentes et en introduisant la notion d'enthalpie $H := U + pV$, on obtient une nouvelle expression du travail moteur :

$$w_m = \Delta h + \Delta k + g\Delta z - q \quad (2.8)$$

2.4 Entropie et diagramme

On peut séparer l'entropie en deux parties : $dS = d^eS + d^iS$, avec $d^eS = dQ/T$ et d^iS la partie irréversible due aux forces dissipatives. On peut maintenant retrouver le second principe :

Par Gibbs, on sait que $dS = \frac{dU+pdV}{T} = \frac{dH-Vdp}{T}$. De plus, en utilisant les définitions de c_v et c_p suivantes :

$$\begin{cases} du = c_vdT \text{ en transformation réversible isochore} \\ du = c_pdT \text{ en transformation réversible isobare} \end{cases} \quad (2.9)$$

Ajouter les pp5-7.

2.5 Fonctions d'état thermodynamiques

2.5.1 Rappel sur les formes différentielles

Soit une forme différentielle $df = udx + vdy$.

- Si $\oint df = C$, alors la forme différentielle est dite fermée.
- Si $\oint df = 0$, alors la forme différentielle est dite exacte.

Si on choisit un ensemble de variables d'état indépendantes décrivant complètement le système, alors les autres variables d'état peuvent être décrites selon cet ensemble et, de manière équivalente, leur évolution peut être exprimée en fonction de l'évolution de l'ensemble initial. Par exemple :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT \quad (2.10)$$

Introduisons les coefficients empiriques (α, β, K) suivants :

- Coefficient de dilatation isobare : $\alpha := \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$.
- Coefficient de dilatation isochore : $\beta := \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$.
- Coefficient de compressibilité isotherme : $K := -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$.

Ils permettent d'écrire le système suivant :

$$\begin{pmatrix} dp \\ dv \\ dT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T & \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \\ \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T & 0 & \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \\ \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v & \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp \\ dv \\ dT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{Kv} & \beta p \\ -Kv & 0 & \alpha v \\ \frac{1}{\beta p} & \frac{1}{\alpha v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp \\ dv \\ dT \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

On sait cependant que l'ensemble (p, V) décrit totalement le système. Celui-ci est donc surdéterminé et on sait que $p\beta K = \alpha$. A partir de l'équation de Gibbs, on peut écrire le second système suivant :

$$\begin{pmatrix} TdS \\ TdS \\ TdS \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{c_p - c_v}{\alpha v T} & \frac{c_v}{T} \\ \frac{c_v - c_p}{\beta p T} & 0 & \frac{c_p}{T} \\ \frac{c_v}{\beta p T} & \frac{c_p}{\alpha v T} & 0 \end{pmatrix}}_{S'} \begin{pmatrix} dp \\ dV \\ dT \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

A partir de cette matrice, on peut définir de nouvelles fonctions d'état :

- Energie libre de Helmholtz : $F = U - TS \implies dF = -pdV - SdT$.
- Energie libre de Gibbs : $G = H - TS \implies dG = Vdp - SdT$.

En égalisant les dérivées partielles de ces deux quantités, on trouve la relation suivante :

$$c_p - c_v = \alpha\beta p v T = R^* \quad (2.13)$$

A partir de cette relation, la matrice S' ne contient en réalité que 3 coefficients indépendants.

→ Remarque : les chaleurs massiques, en tout généralité, varient avec la température.

2.5.2 Diagramme entropique

Le diagramme entropique d'un gaz idéal reprend la température en fonction de l'entropie. Les courbes isobares et isochores sont des exponentielles. Les isochores sont cependant de plus grande pente, car $c_v < c_p$.

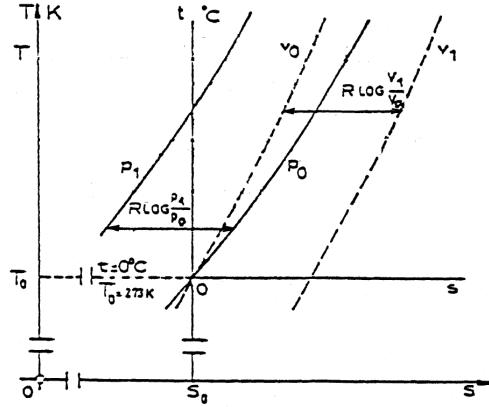


Figure 2.1: Diagramme entropique

2.5.3 Transformation polytropique

Une transformation polytropique est telle que $pv^m = cste$, avec m un coefficient. On a donc

$$dU = \Phi T dS \quad dH = \Psi T dS \quad (2.14)$$

avec la relation $m = \frac{\Psi - 1}{\Phi - 1}$. De plus, $\Phi = \frac{m-1}{m-\gamma}$ et $\Psi = \gamma \frac{m-1}{m-\gamma}$, avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

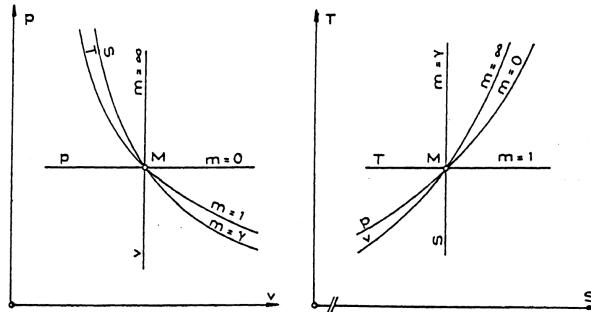


Figure 2.2: Transformation polytropique

Isotherme	$m = 1$	$\Psi = 0$	$pv = cste$	$\Delta H = 0$
Isentropique	$m = \gamma$	$\Psi = \infty$	$pv^\gamma = cste$	$\Delta S = 0$
Isobare	$m = 0$	$\Psi = 1$	$p = cste$	$\Delta S = c_p \ln(T/T_0)$
Isochore	$m = \infty$	$\Psi = \gamma$	$v = cste$	$\Delta S = c_v \ln(T/T_0)$

De plus, en transformation adiabatique, on a

Cas	M	Δp	Δv	ΔT
MN	$\gamma < m < +\infty$	> 0	< 0	> 0
MO	$-\infty < m < 0$	> 0	> 0	> 0
MP	$0 < m < 1$	< 0	> 0	> 0
MQ	$1 < m < \gamma$	< 0	> 0	< 0

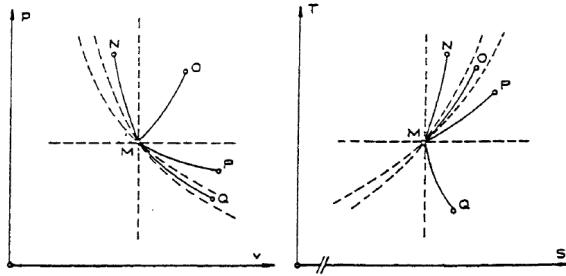


Figure 2.3: Transformations adiabatiques

2.6 Mélanges de gaz

On définit la fraction molaire, à partir de laquelle on peut calculer la masse molaire globale du mélange :

$$[i] := \frac{n_i}{\sum_{i=1}^N n_i} \quad M_m = \frac{\sum_{i=1}^N n_i M_{m,i}}{\sum_{i=1}^N n_i} = \sum_{i=1}^N [i] M_{m,i} \quad (2.15)$$

→ Remarque : en mélange, R^* se calcule sur base de la masse molaire du mélange.

De plus, lorsque le mélange a lieu en conditions isothermes irréversibles,

$$h = \int_0^t c_p dt = \frac{1}{M_m} \int_0^t C_p dt = \frac{1}{M_m} \sum_{i=1}^N [i] \int_0^t C_{p,i} dt \quad (2.16)$$

$$u = \int_0^t c_v dt = \frac{1}{M_m} \int_0^t C_v dt = \frac{1}{M_m} \sum_{i=1}^N [i] \int_0^t C_{v,i} dt \quad (2.17)$$

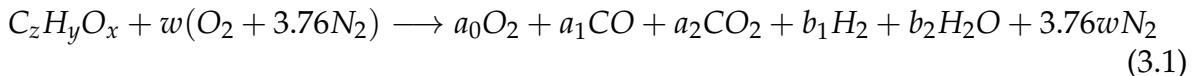
$$\Delta S = \frac{\Delta S_m}{M_m} = -R \sum_{i=1}^N [i] \ln[i] \quad (2.18)$$

3. Combustion

Une combustion est une réaction exothermique d'un élément avec un oxydant (i.e. un mélange contenant beaucoup d' O_2). Elle a la particularité de dégager beaucoup de chaleur. On appelle combustible le composé qui réagit. En général, la réaction globale est un ensemble de beaucoup de réactions élémentaires simultanées.

3.1 Réaction

L'air est l'oxydant le plus couramment utilisé en combustion : il contient de l' O_2 et du N_2 , en proportions molaires respectives 29% et 71%. On a donc $\frac{[N_2]}{[O_2]} = 3.76$. La réaction globale de combustion utilisée dans ce chapitre est la suivante :



Dans les produits, on a les réactifs non utilisés (O_2 et N_2), les imbrûlés (CO et H_2) en cas de réaction incomplète, et les produits stables (CO_2 et H_2O). Par bilan atomique, on trouve les équations suivantes :

$$a_1 + a_2 = z \quad (3.2)$$

$$2(b_1 + b_2) = y \quad (3.3)$$

$$2a_0 + a_1 + 2a_2 + b_2 = x + 2w \quad (3.4)$$

Nous allons maintenant exprimer les coefficients en terme de fraction molaire sur base sèche, i.e. faire l'analyse des fumées sur les fumées sèches (après évacuation de l'eau).

$$A := a_0 + a_1 + a_2 + b_1 + 3.76w \quad (3.5)$$

On a donc

$$[O_2]' = \frac{a_0}{A} \quad [CO]' = \frac{a_1}{A} \quad [CO_2]' = \frac{a_2}{A} \quad [H_2]' = \frac{b_1}{A} \quad [N_2]' = \frac{3.76w}{A} \quad (3.6)$$

Par ??, on trouve donc

$$[CO]' + [CO_2]' = \frac{z}{A} \quad (3.7)$$

$$[H_2]' + \frac{z}{3.76} - 2[O_2]' - [CO]' - 2[CO_2]' = \frac{y - 2x}{z} \frac{1}{A} \quad (3.8)$$

$$[N_2]' + [O_2]' + [CO]' + [CO_2]' + [H_2]' = 1 \quad (3.9)$$

On trouve finalement la relation de compatibilité de la combustion :

$$4.76[O_2]' + \left(2.88 + 3.76 \frac{y-2x}{z} \right) [CO]' + \left(4.76 + 3.76 \frac{y-2x}{4z} \right) [CO_2]' - 0.88[H_2]' = 1 \quad (3.10)$$

De plus, si les imbrûlés sont causé par un manque d' O_2 , alors on a la relation suivante :

$$[H_2]' = \frac{y}{4z}[CO]' \quad [H_2]'; [CO]' \ll [CO_2]'; [H_2O]' \quad (3.11)$$

En combinant les ?? et ??, on a la relation de compatibilité couramment utilisée dans ce cours :

$$4.76[O_2]' + \left(2.88 + 3.46 \frac{y-2x}{4z} - 0.88 \frac{y}{4z} \right) [CO]' + \left(4.76 + 3.76 \frac{y-2x}{4z} \right) [CO_2]' = 1 \quad (3.12)$$

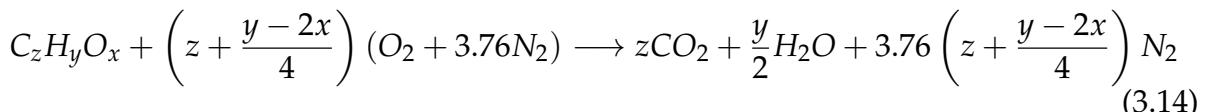
3.2 Propriétés

Une combustion est dite complète lorsqu'il n'y a pas d'imbrûlés.

Une combustion est dite stoechiométrique et complète lorsqu'il n'y a pas d' O_2 dans les produits, ni d'imrbûlés. On a donc

$$w = z + \frac{y-2x}{4} \quad (3.13)$$

et la réaction est donc



Si trop d'air est fourni, une partie ne participe pas à la réaction et joue le rôle de diluant. Cela diminue alors la température du système (cela est recherché ou non dépendant de l'application).

Si la réaction n'est pas complète malgré que les proportions de réaction complète et stoechiométrique soient respectées, on parle de réaction à proportions stoechiométriques.

3.3 Indicateurs

Le pouvoir comburivore est la proportion de masse d'air nécessaire à la réaction par unité de masse de combustible, en conditions standards, i.e. $T = 25^\circ\text{C}$ et $p = 1\text{atm}$.

$$m_{a,1} = \frac{(32 + 3.76 * 28)}{(12z + y + 16x)} \left(z + \frac{y-2x}{4} \right) \left[\frac{\text{kg air}}{\text{kg combustible}} \right] \quad (3.15)$$

Le pouvoir fumigène est la quantité de fumée dégagée par unité de masse de combustible introduit pour la réaction :

$$m_{f,1} = \frac{44z + 9y + 3.76 * 28 * \left(z + \frac{y-2x}{4} \right)}{12z + y + 16x} = \left[\frac{\text{kg fumée}}{\text{kg combustible}} \right] \quad (3.16)$$

→ Remarque : $m_{f,1} = m_{a,1} + 1$.

Le coefficient d'imbrûlés est la proportion d'imbrûlés dans les produits. On le veut généralement le plus proche possible de 0.

$$k := \frac{[CO]'}{[CO]'+[CO_2]'} \quad (3.17)$$

En combustion quelconque, le rapport air/carburant est le suivant :

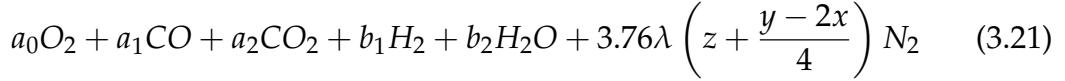
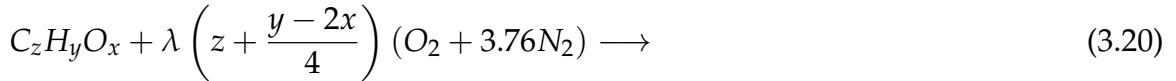
$$m_a = \frac{(32 + 3.76 * 28)w}{12z + y + 16x} = \left[\frac{kg \text{ air}}{kg \text{ combustible}} \right] \quad (3.18)$$

Le coefficient d'excès d'air est la proportion d' O_2 qui n'a pas été utilisée lors de la combustion :

$$\lambda := \frac{m_a}{m_{a,1}} = \frac{w}{z + \frac{y-2x}{4}} \quad (3.19)$$

- Si $\lambda > 1$, on parle de mélange pauvre.
- Si $\lambda < 1$, on parle de mélange riche.
- On définit la richesse $\varphi = 1/\lambda$.

On peut remplacer les coefficients stoechiométriques de l'?? pour obtenir ceci :



Par les différentes équations, on trouve les expressions suivantes des coefficients des produits :

$$a_1 = kz \quad a_2 = z(1-k) \quad b_1 = \frac{ky}{4} \quad b_2 \frac{y}{2} \left(1 - \frac{k}{2} \right) \quad (3.22)$$

$$a_0 = (\lambda - 1) \left(z + \frac{y-2x}{4} \right) + \frac{k}{2} \left(z + \frac{y}{4} \right) \quad (3.23)$$

On peut donc réécrire l'expression du coefficient d'excès d'air de la manière suivante :

$$\lambda = 1 + \frac{z[O_2]' - 1/2(z + \frac{y}{4})[CO]'}{(z + \frac{y-2x}{4})([CO_2]' + [CO]')} \quad (3.24)$$

3.4 Pouvoir calorifique et température de flamme

Nous étudions ici un système isolé dans lequel on ignore les frottements. De plus, on le suppose isobare. Puisque le système est thermiquement isolé et isobare, on a $\Delta H = 0$.

$$\hat{h} = \hat{h}_0^f(p_0, T_0) + \hat{h}^s(p, T) \quad (3.25)$$

→ Remarque : On met un $\hat{\cdot}$ pour indiquer une variable molaire.

\hat{h}_0^f est l'énergie nécessaire pour produire une molécule de réactif en conditions standards (nulle pour les composés diatomiques, par convention) et \hat{h}^s est $\Delta\hat{h}$ par rapport à l'état de référence (i.e. état standard). De plus, pour les gaz idéaux,

$$\hat{h}^s(T) = \int_{T_s}^T \hat{c}_p(T') dT' \quad (3.26)$$

On peut donc finalement écrire

$$\sum_R \hat{h}_i^f n_i + \sum_R \int_{T_s}^{T_{in}} \hat{c}_{p,i} n_i dT' = \sum_P \hat{h}_j^f n_j + \sum_P \int_{T_s}^{T_f} \hat{c}_{p,j} n_j dT' \quad (3.27)$$

On pose maintenant

$$\begin{cases} \Delta H^f = \sum_P \hat{h}_j^f n_j - \sum_R \hat{h}_i^f n_i \\ \Delta C_p = \sum_P \hat{c}_{p,j} n_j - \sum_R \hat{c}_{p,i} n_i \end{cases} \quad (3.28)$$

Et donc

$$\sum_P \int_{T_{in}}^{T_s} \hat{c}_{p,j} n_j dT = - \left(\Delta H^f + \int_{T_s}^{T_{in}} \Delta C_p dT \right) = Q_p \quad (3.29)$$

On appelle Q_p la chaleur de combustion.

→ Remarque : en isobare, on peut effectuer le même raisonnement, en remplaçant c_p par c_v et H par U .

Le pouvoir calorifique de combustible inférieur (PCI) est la chaleur dégagée lors de la combustion complète et stoechiométrique par une mole de combustible en conditions standard ($T_{in} = T_s$).

$$PCI = -\Delta\hat{h}^f = \sum_R \hat{h}_i^f n_i - \sum_P \hat{h}_j^f n_j \quad \sum_F n_i = 1 \quad (3.30)$$

avec le F indiquant les combustibles. Le pouvoir calorifique est dit inférieur si l'eau dans les fumées est sous forme gazeuse, et supérieur si l'eau est liquide.

$$PCS = PCI + h_{lv} n_{H_2O} \quad (3.31)$$

avec h_{lv} l'énergie de vaporisation de l'eau.

Réécrivons l'?? en changeant uniquement l'une des bornes des intégrales :

$$\sum_R \hat{h}_i^f n_i + \sum_R \int_{T_s}^{T_{in}} \hat{c}_{p,i} n_i dT' = \sum_P \hat{h}_j^f n_j + \sum_P \int_{T_s}^{\textcolor{red}{T_{ad}}} \hat{c}_{p,j} n_j dT' \quad (3.32)$$

En utilisant les valeurs moyennes de $\hat{c}_{p,i}$ pour simplifier les intégrales, on peut exprimer la température adiabatique de flamme T_{ad} :

$$T_{ad} = T_s + \frac{PCI + (T_{in} - T_s) \sum_R n_i \hat{c}_{p,i} \Big|_{T_s}^{T_{in}}}{\sum_P n_j \hat{c}_{p,j} \Big|_{T_s}^{\textcolor{red}{T_{ad}}}} \quad (3.33)$$

La formule est implicite, il faut donc effectuer un processus itératif pour trouver la valeur exacte.

3.5 Polluants

En combustion complète, les polluants sont

- le CO
- les composés organiques volatiles, e.g. des hydrocarbures imbrûlés, des substances mutagènes,...
- la suie, i.e. des filaments carbonisés
- le dioxyde de soufre présent dans le combustible (celui-ci est contrôlable)
- le NO , lui pas contrôlable

4. Vapeurs

4.1 Vaporisation de l'eau à pression constante

Lorsque l'on chauffe de l'eau liquide à pression constante, on observe une augmentation du volume. A partir d'une certaine température, des bulles de gaz apparaissent et l'apport de chaleur n'augmente plus la température. La chaleur est en effet utilisée pour la transformation d'état de l'eau. La vaporisation est donc une transformation isotherme à pression constante.

4.1.1 Condensation à température constante

Dans cette section, l'état initial est la vapeur pure, que l'on comprime de manière isotherme. En gaz idéal, la courbe (p, v) est une hyperbole ($1 \rightarrow 2$ sur la ??), car $pv = cste$.

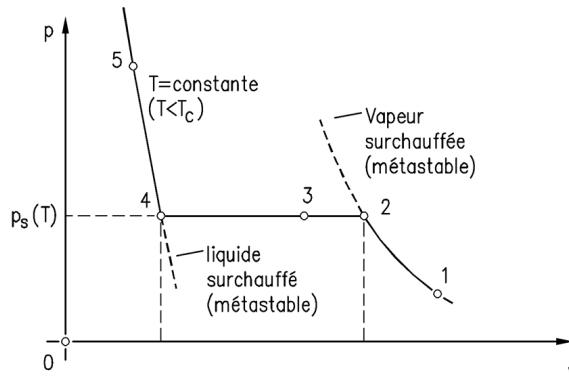


Figure 4.1: Condensation à température constante

Le point 2 est le point de pression de saturation. De 2 à 3, la pression est constante bien que le volume diminue. Le point 4 est en phase liquide complète et on arrive sur une courbe (p, v) associée à cet état : une faible diminution du volume entraîne une grande augmentation de pression. Le liquide est en effet quasi-incompressible.

4.2 Diagramme (p, v) d'un fluide vaporisable

La ?? est un diagramme (p, v) contenant des courbes isothermes. Il y a coexistence des phases dans la partie sous la courbe pointillée, et on se rapproche du comportement des gaz idéaux dans la partie supérieure G.

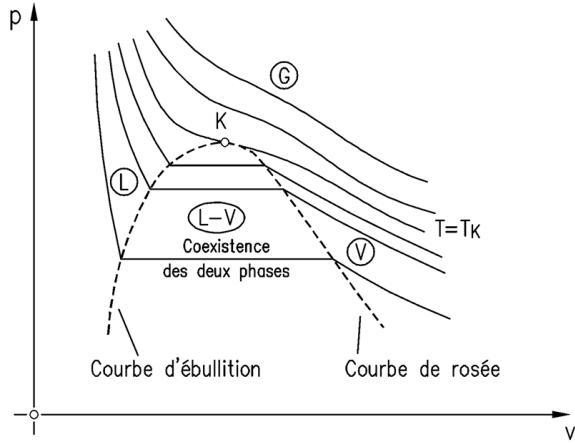


Figure 4.2: Isothermes en diagramme (p, v)

4.3 Courbe de vaporisation - Diagramme (p, T) d'une substance pure

La pression de saturation varie selon la température, comme illustré à la section précédente. Si la température augmente, le palier a lieu à pression de saturation plus élevée. Les isothermes sont donc les courbes $p_{sat}(T)$. Cependant, après le point critique, il n'y a plus de pression de saturation, et donc plus de séparation entre liquide et gaz.

→ Remarque : le même phénomène existe pour la séparation entre les états liquide-solide et solide-gaz.

4.3.1 Règle de phases de Gibbs

$$\psi = -r + n + 2 \quad (4.1)$$

- ψ est le nombre de variables intensives indépendantes, déterminant l'état d'un système thermodynamique.
- r est le nombre de phases.
- n est le nombre de constituants du système.

Par exemple, en substance pure ($n = 1$) et une seule phase ($r = 1$), $\psi = 2$ et le couple (p, v) suffit à caractériser l'état du système. Durant le TP 4, nous étudions des systèmes bi-phasiques où coexistent une phase liquide et une phase vapeur. Les substances sont toujours pures ($n=1$), par contre on a deux phases donc $r=2$. On arrive donc à $\psi = 1$. Il existe une relation univoque entre la pression et la température de saturation. Autrement dit, pour chaque palier de pression sous la cloche du diagramme (T-S), si on connaît la température de saturation, on connaît également sa pression.

4.4 Modèle de Van der Waals et continuité gaz-liquide

4.4.1 Equation de Van der Waals

Un élément semble toutefois singulier. Au cours de Chimie 2, nous avons étudié que la transformation isotherme d'un gaz idéal était représentée par une hyperbole ($pv=\text{const}$).

Cependant, empiriquement, les observations diffèrent. En effet, une discontinuité apparaît dans cette hyperbole lorsque le "gaz passe sous la cloche". En réalité, le modèle du gaz parfait que nous avons étudié jusqu'à présent est valide uniquement pour les basses pressions et températures, c'est-à-dire dans la phase gazeuse. Dès que l'on approche de la phase liquide, le modèle n'est plus applicable.

Van der Waals a proposé un modèle qui correspond mieux à ces conditions de température et de pression. Il épouse correctement la courbe à l'extérieur de la cloche, tant pour la phase liquide que gazeuse, mais ne parvient pas à représenter correctement la transition observée sous celle-ci.

Le modèle proposé par Van der Waals est le suivant :

$$p = \frac{RT}{r - b} - \frac{a}{r^2} \quad (4.2)$$

On trouve les valeurs des coefficients a et b en étudiant l'isotherme au point critique $T = T_k$. Mathématiquement ce n'est pas absolument pas intéressant. On impose les conditions de toutes les isothermes uniquement sur base de l'isotherme critique.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_{T=T_k} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{T=T_k} = 0 \quad (4.3)$$

On peut toutefois remplacer la portion du modèle de VdW sous la cloche par ce qu'on sait (expérimentalement) être une droite.

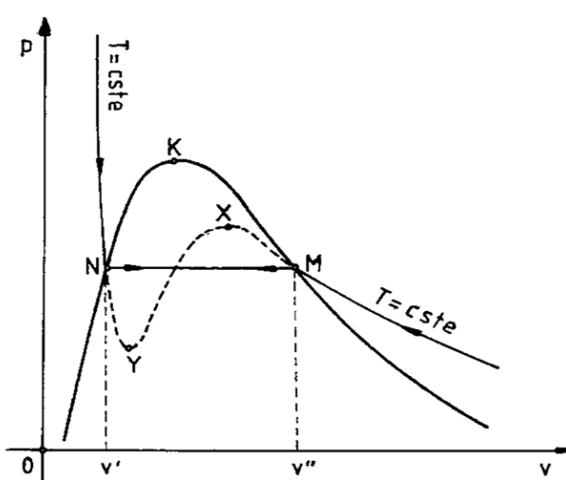


Figure 4.3: Modèle de Van der Waals

Il nous faut connaître les bornes N et M sur la ?? afin de connaître l'équation de la droite. Cela revient à connaître la pression de saturation $p_{\text{sat}}(T)$. Par l'??, on a

finalement

$$p_{sat} = \frac{1}{v'' - v'} \left(RT \ln \left(\frac{v'' - b}{v' - b} \right) + \frac{a}{v''} - \frac{a}{v'} \right) \quad (4.4)$$

L'équation de Van der Wals permettra donc de dessiner une courbe par morceaux où la valeur sous la cloche est (4.4).

4.5 Diagramme des vapeurs

Selon la relation de Gibbs, il est nécessaire d'ajouter une variable indépendante pour décrire correctement notre système biphasique. Naturellement, nous introduisons alors le titre.

Le titre représente simplement la fraction massique de gaz présente dans le système biphasique. Lorsque nous nous trouvons sur un palier sous la cloche, le titre varie entre 0 et 1 et augmente de gauche à droite.

$$x = \frac{m_{vap}}{m_{vap} + m_{liq}} \quad (4.5)$$

On peut alors écrire la fonction du volume massique en fonction du titre. Soit v' le volume massique du liquide saturé en N et v'' en M .

$$v(x) = xv'' + (1 - x)v' \quad (4.6)$$

Si l'on veut connaître n'importe quel état sous la cloche, il faut connaître les états de liquide saturée et de vapeur saturée sur l'isotherme (c'est à dire sur la frontière de la cloche) et de connaître le titre de mélange. En d'autres mots, les états sous la cloche seront une moyenne pondérée des états en dehors de la cloche.

- Remarque : la formule est identique pour chacune des variables d'état du système, on peut donc lier s à s', s'', h à $h', h'', \text{etc.}$

4.6 Surface d'état (p, v, T)

On peut coupler les deux courbes (p, v) et (p, T) en un graphe 3D, de manière à obtenir la surface d'état $F(p, v, T) = 0$.

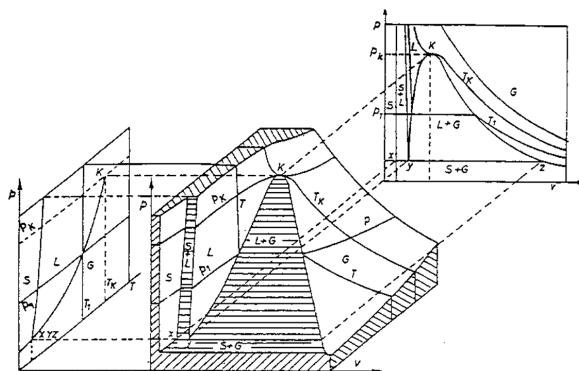


Figure 4.4: Surface et diagrammes d'état - CO_2

Pour la plupart des substances, le volume massique du solide au point triple est inférieur à celui du liquide saturé dans le même état. Ce n'est toutefois pas le cas de l'eau.

4.7 Action calorifique de formation d'une vapeur

L'action calorifique de formation d'une vapeur est l'action calorifique nécessaire à l'obtention par voie isobare d'un kilogramme de cette vapeur à partir d'un kilogramme de liquide à 0°C .

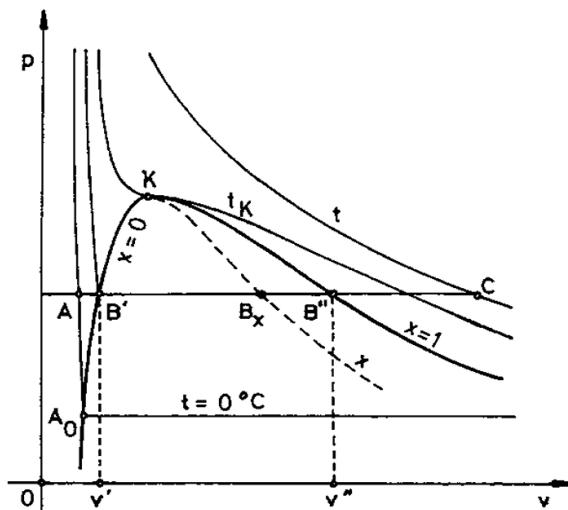


Figure 4.5: Formation d'une vapeur

- q_{ech} : chaleur d'échauffement du liquide (AB').
- h_{lv} : chaleur de vaporisation (B'B'').
- q_{sur} : chaleur de surchauffe (B''C).

$$q_{ech} = \left(\int_0^{T_{sat}} c_{p,liq} dT \right) \Big|_p \quad (4.7)$$

→ $c_{p,l}$ varie avec la pression et la température.

La chaleur de vaporisation est l'action calorifique nécessaire à la vaporisation isobare, et donc aussi isotherme, d'un kilogramme de fluide. Soit un cycle réversible passant par B' et B''.

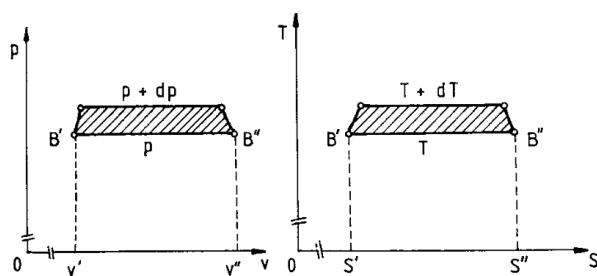


Figure 4.6: Cycle réversible

Nous cherchons à déterminer la quantité de chaleur nécessaire pour passer du point B' au point B''. Pour ce faire, nous allons recourir à une astuce ingénieuse. Tout d'abord, nous savons que cette transformation est effectuée à température constante, mais également à pression constante. Ainsi, le passage de B' à B'' est représenté dans les diagrammes (T-S) et (P-V) par une droite horizontale.

Selon la relation de Gibbs, nous avons $Tds = dh - vdp$. À pression constante, $Tds = dh$. Puisque nous sommes également à température constante, $T(S'' - S') = \Delta H$. Nous souhaitons exprimer cette chaleur de vaporisation en fonction de p, v et T. Pour ce faire, nous adoptons une astuce consistant à créer un cycle réversible correspondant à une légère variation de température, et donc de pression. Les quatre sommets de ce que nous supposons être un rectangle représentent des points de la cloche (c'est-à-dire des états saturés). Nous négligeons la variation du volume massique. En égalant les aires des deux rectangles, nous retrouvons une expression pour la chaleur de vaporisation. On peut obtenir les expressions comme ceci :

$$h_{lv} = T(s'' - s') \quad (4.8)$$

Par définition du cycle, les états C' et C'' se trouvent aussi sur la cloche, i.e. ils sont saturés. Le cycle élémentaire B'C'C''B'' étant réversible, la surface du cycle vaut

$$a(p, v) = (v'' - v')dp \quad a(T, s) = (s'' - s')dT = \frac{h_{lv}}{T}dT \quad (4.9)$$

Or, puisque ces deux aires sont égales en cycle, on trouve l'expression de h_{lv} (formule de Clapeyron) :

$$h_{lv} = T_{sat}(v'' - v') \left. \left(\frac{dp}{dT} \right) \right|_{T=T_{sat}} \quad (4.10)$$

4.7.1 Dérivation de la formule de Clapeyron-Clausius

La formule de Clapeyron-Clausius est utilisée pour décrire la relation entre la pression de vapeur d'un liquide à deux températures différentes. Voici la dérivation de cette formule :

1. Formule de Clapeyron: Nous partons de la formule de Clapeyron, qui s'écrit :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H_{vap}}{T\Delta V}$$

2. Hypothèse sur le volume: Pour une vaporisation, le volume de la phase gazeuse V_g est beaucoup plus grand que celui de la phase liquide V_l , donc $\Delta V \approx V_g$. En utilisant l'équation des gaz parfaits, $V_g = \frac{RT}{P}$, où R est la constante des gaz parfaits et P est la pression :

$$\Delta V \approx \frac{RT}{P}$$

3. Substitution dans la formule de Clapeyron: En substituant ΔV dans la formule de Clapeyron, nous obtenons :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H_{vap}}{T \cdot \frac{RT}{P}} = \frac{P\Delta H_{vap}}{RT^2}$$

4. Séparation des variables: Nous réarrangeons les termes pour séparer les variables P et T :

$$\frac{dP}{P} = \frac{\Delta H_{\text{vap}}}{R} \frac{dT}{T^2}$$

5. Intégration: Nous intégrons les deux côtés de l'équation. Pour la pression, nous intégrons de P_1 à P_2 , et pour la température, de T_1 à T_2 :

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{P} dP = \frac{\Delta H_{\text{vap}}}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T^2} dT$$

L'intégrale de gauche donne :

$$\ln \frac{P_2}{P_1}$$

L'intégrale de droite donne :

$$\frac{\Delta H_{\text{vap}}}{R} \left[-\frac{1}{T} \right]_{T_1}^{T_2} = \frac{\Delta H_{\text{vap}}}{R} \left(-\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right)$$

6. Résultat final: En combinant les deux résultats, nous obtenons la formule de Clapeyron-Clausius :

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = -\frac{\Delta H_{\text{vap}}}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

Cette formule permet de calculer la variation de la pression de vapeur d'un liquide en fonction de la température, connaissant l'enthalpie de vaporisation ΔH_{vap} .

4.8 Energie interne, enthalpie et entropie de vapeurs saturées

Dans les exercices, on va souvent devoir trouver les valeurs des différents états sous la cloche. Comme il s'agit d'une moyenne pondérée par le titre des valeurs sur la cloche, on a besoin de connaître les valeurs sur la cloche. Ces données pourront être retrouvées dans les tables mais ici on voit comment les calculer. Comme d'habitude ces grandeurs ne sont jamais utilisées dans l'absolue mais plutôt de manière relative.

L'énergie interne, l'enthalpie et l'entropie des vapeurs saturées sont définies par rapport à l'état de référence $T = 0K$. On utilise plutôt des valeurs relatives avec comme état de référence l'état de liquide saturé à $T = 0^\circ C$. Cependant, cet état n'existe que si la température du point critique est supérieure à $0^\circ C$ et la température du point triple inférieure. Si ce n'est pas le cas, on choisit arbitrairement un autre état de référence. Les valeurs relatives sont donc

$$u = U - U_0 \quad h = H - H_0 \quad s = S - S_0 \quad (4.11)$$

4.8.1 Variations u, h, s sur l'isotherme liquide $0^\circ C$

Par le théorème de Schwarz,

$$-\frac{\partial S}{\partial p} \Big|_T = \frac{\partial v}{\partial T} \Big|_p = \alpha v \quad (4.12)$$

avec α le coefficient de dilatation thermique.

$$s_A = S_A - S_0 = - \int_{p_0}^{p_A} \alpha v dp = -\bar{\alpha}v(p_A - p_0) \quad (4.13)$$

Pour l'eau, on peut négliger s_A , car α et v sont très petits. Calculons maintenant la variation d'énergie interne :

$$dU = TdS - pdV \approx -pdV \implies u_A = U_A - U_0 \approx -\bar{p}(V_0 - V_A) \quad (4.14)$$

Puisqu'on étudie la phase liquide, $V_0 - V_A = \mathcal{O}(10^{-4})$ et on néglige u_A . La variation de h_A est, elle, non négligeable :

$$h_A = H_A - H_0 = v_0(p_A - p_0) \quad (4.15)$$

4.8.2 Calcul de u', h', s' pour les liquides saturés

Le point A n'est pas un liquide saturé, mais B' l'est. La transformation AB' est isobare, on a donc

$$h' - h_A = q_{ech} = \int_{273.15}^T c_p dT \quad u' = h' - (pA'_v - p_0 v_0) \quad s' = \int_{273.15}^T \frac{c_{p,l}}{T} dT \quad (4.16)$$

4.8.3 Calcul de u'', h'', s'' en vapeur saturée

$$h'' - h' = h_{lv} \quad s'' - s' = \frac{h'' - h'}{T_{sat}} = \frac{h_{lv}}{T_{sat}} \quad u'' - u' = h_{lv} - p(v'' - v') \quad (4.17)$$

4.9 Diagramme (T, S) des vapeurs

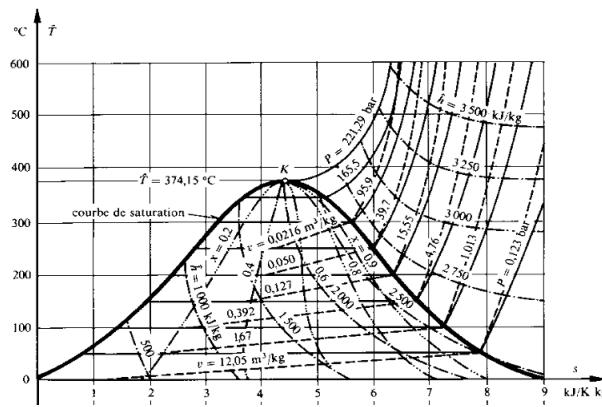


Figure 4.7: Diagramme (T, S)

On va souvent représenter les isobares sur le diagrammes ($T-S$) qui ont une allure très proche des isochore. Sur le diagramme 4.7, on trace les isochores, les isobares mais aussi les isotrites qui sont tout simplement les droites qui rejoignent les points ayant le même titre sous la cloche.

A gauche de la cloche ($x = 0$), l'état est complètement liquide, et complètement vapeur à droite ($x = 1$). Sous la cloche, les isothermes sont confondues avec les

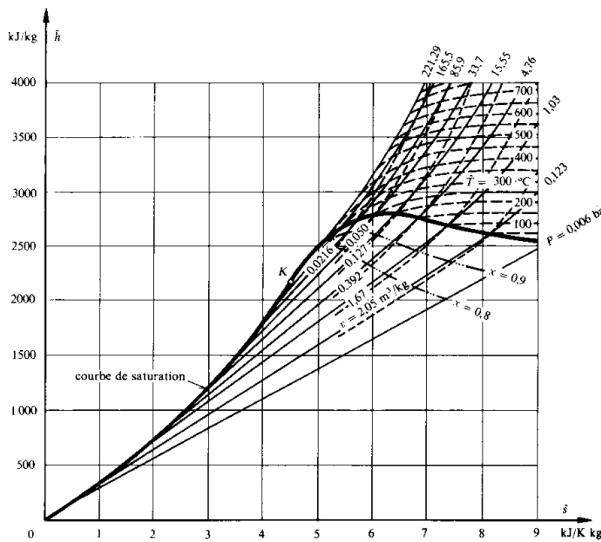
isobares.

En dehors de la cloche, on trouve l'expression suivante :

$$dS = C_{pv} \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right) \Big|_T dp = C_{pv} \frac{dT}{T} \quad (4.18)$$

Il s'agit donc d'une courbe exponentielle. A gauche de $x = 0$, on fait l'approximation pour les liquides peu compressibles que l'isobare et la limite $x = 0$ sont confondues. Cela rejoint l'approximation $s_A = S_A - S_0 = 0$.

4.10 Diagramme (H, S) de vapeur d'eau



Si on suppose que $c'_p(T_{sat}) = c'_p$, alors

$$dh' = c'_p dT \quad ds' = c'_p \frac{dT}{T} \quad (4.21)$$

On a donc finalement que

$$\frac{dh'}{ds'} = T \quad (4.22)$$

Cette expression est bien tangente aux isobares, car $\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T$ pour toute température, lorsqu'on se situe dans $x \in [0, 1]$.

5. Machines thermodynamiques

5.1 Machines réceptrices ou motrices

En machine réceptrice, le fluide reçoit l'énergie utile, tandis qu'il la fournit en machine motrice.

	Liquide	Gaz
Machines RECEPTRICES	Pompe	Compresseur
Machines dynamiques-turbomachines (machines tournantes)	Pompe centrifuge Pompe hélicoïdale ou axiale	Compresseur centrifuge Compresseur axial (=ventilateur)
Machines volumétriques (agissant sur le volume)	Pompe à piston Pompe volumétrique	Compresseur à piston Compresseur volumétrique
Machines MOTRICES		
Machines dynamique-turbomachines	Turbine hydraulique	Turbine à gaz ou vapeur
Machines volumétriques	Moteur hydraulique Moteur pneumatique Moteur à essence/diesel	

Les éléments nécessaires au bon fonctionnement d'une machine thermodynamique sont les suivants :

- Fluide : liquide, gaz ou vapeur.
- Compression (en machine opératrice) : compresseur ou pompe.
- Détente (en machine motrice) : turbine à gaz ou vapeur.
- Echangeur de chaleur entre deux flux de gaz, vapeur ou liquide.
- Combustion (voir ??).

5.2 Analyse mécanique et énergétique en système ouvert

Pour rappel,

	Expression mécanique du travail moteur	Expression énergétique du travail moteur
Machine réceptrice	$w_m = w_f + \int_1^2 vdp + \underbrace{\Delta k}_{\text{ventilateur}} + \underbrace{g\Delta z}_{\text{pompe (puits)}}$	$w_m = \Delta h + \Delta k + g\Delta z - q \geq 0$
Machine motrice	$w_m = -w_f - \int_1^2 vdp - \underbrace{\Delta k}_{\text{éolienne}} - \underbrace{g\Delta z}_{\text{turbine hydro}}$	$w_m = -\Delta h - \Delta k - g\Delta z + q \geq 0$

Dans l'expression mécanique, la somme des trois premiers termes représente le travail utile et le dernier le travail lié au frottement. Il s'agit de la dissipation sous forme de chaleur liée aux irréversibilités.

- Remarque : pour rappel, la puissance mécanique est $P_m = \dot{m}w_m$, avec \dot{m} le débit massique.
- Remarque : sur un cycle, $w_m^{\text{cycle}} = q^{\text{cycle}}$.

5.3 Pertes de charge en conduite

5.3.1 Pertes de charges régulières

A partir des principes de la thermodynamique, on a les équations suivantes :

$$\int Tds = q + w_f \quad w_m = \int_1^2 vdp + \Delta k + d\Delta z + w_f \quad (5.1)$$

Dans un écoulement en conduite, le travail moteur est nul. De plus, on suppose le fluide incompressible et les effets de la gravité sont négligés. La seconde équation devient alors

$$0 = \Delta p + \rho\Delta k + \rho w_f \quad (5.2)$$

On définit maintenant la notion de pression totale. Il s'agit de la somme de la pression statique (pression usuelle) et de la pression dynamique :

$$\rho w_{\infty} - \Delta p_{tot} = -(\Delta p + \rho\Delta k) = \left(p + \rho \frac{c^2}{2} \right)_2^1 \quad (5.3)$$

De manière générale, avec le terme de gravité, on a

$$0 = \Delta p + \rho\Delta k + \rho g\Delta z + \rho w_f \implies -\Delta p = \Delta p_{acc} + \Delta p_{grav} + \Delta p_f \quad (5.4)$$

Le terme Δp_{acc} est nul car la conduite est de section constante et de débit constant. On a finalement

$$\Delta p_f = \lambda \frac{L}{D_h} \rho \frac{c^2}{2} \quad (5.5)$$

avec λ le coefficient de perte de charges, L la longueur de la conduite, $D_h = \frac{4Aire}{perimetre}$ le diamètre mouillé. On trouve la valeur de λ sur base du diagramme de Moody, en connaissant Re_{D_h} et ϵ la rugosité.

- Remarque : dans le cas lisse, $w_f \propto c$, et donc $p_f \propto c^2$.
- dans le cas rugueux, $w_f \propto c^2$, et donc $p_f \propto c^5$

5.3.2 Pertes de charge singulières

Les pertes de charges sont dites singulières lorsqu'elles sont dues à un changement de géométrie (coude, rétrécissement brusque,...).

$$\Delta p_{fs} = \rho w_{fs} = K \frac{c^2}{2} \quad (5.6)$$

avec K une constante dépendant du type de changement de géométrie.

5.4 Rendement interne

En machine réceptrice,

$$w_m = \int_1^2 vdp + \Delta k + g\Delta z + w_f = w_u + w_f \quad (5.7)$$

On définit le rendement interne d'une machine réceptrice comme le rapport entre le travail utile et le travail moteur :

$$\eta_i = \frac{w_u}{w_m} = \frac{w_m - w_f}{w_m} \quad (5.8)$$

En machine motrice, le travail utile est le travail moteur, on a donc une relation différente :

$$\eta_i = \frac{w_m}{w_m + w_f} \quad (5.9)$$

5.5 Rendement isentropique

Nous analysons ici le travail effectué de manière isentropique pour un même rapport de compression, en machine réceptrice. Cette analyse est utile car le terme de travail utile $\int vdp$ peut être difficile à calculer.

Considérons que les compresseurs fonctionnent de manière adiabatique. L'expression énergétique du travail moteur devient

$$w_m = \Delta h \quad (5.10)$$

Le rendement isentropique est donc

$$\eta_{is} = \frac{\Delta h}{\Delta h_{is}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2,is} - h_{1,is}} \quad (5.11)$$

En isentropique, i.e. adiabatique sans frottement, on a $pv^\gamma = cste$. En gaz parfait, l'expression du volume est donc

$$v = v_1 \left(\frac{p_1}{p} \right)^{1/\gamma} \quad (5.12)$$

Dont on tire l'expression du travail isentropique $w_{is} = \int vdp$.

5.6 Rendement interne en transformation polytropique

En transformation polytropique, on a

$$\frac{dh}{Tds} = cste = \frac{\delta w_m}{\delta w_f} \quad (5.13)$$

avec la seconde égalité valable uniquement en adiabatique. En machines réceptrice, on a

$$dw_f = Tds = (1 - \eta_i)dw_m = (1 - \eta_i)dh \quad (5.14)$$

Si on suppose le gaz parfait :

$$Tds = (1 - \eta_i)c_pdT \implies c_pdT - rT\frac{dp}{p} = (1 - \eta_i)c_pdT \implies \frac{1}{\eta_i} \frac{r}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} \quad (5.15)$$

Introduisons maintenant la propriété polytropique $p v^m = cste$:

$$\begin{cases} \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \\ \frac{1}{\eta_i} \frac{r}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} \end{cases} \implies \ln \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\eta_i} \frac{r}{c_p}} \right] = \ln \left(\frac{T}{T_1} \right) \quad (5.16)$$

On trouve finalement

$$\frac{1}{\eta_i} \frac{r}{c_p} = \frac{m-1}{m} \implies m = f(\eta_i, c_p, R^*) \quad (5.17)$$

On en déduit ensuite le travail utile :

$$w_u = \pm \int_1^2 vdp = \pm R^* \left(\frac{m}{m-1} \right) (T_2 - T_1) = \pm p_1 v_1 \left(\frac{m}{m-1} \right) \left[\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{m-1} - 1 \right] \quad (5.18)$$

Supposons maintenant que l'on connaît le rendement isentropique, et qu'on veut retrouver la relation entre rendements interne et isentropique en machine réceptrice :

$$\eta_{is} = \frac{\Delta h_{is}}{\Delta h} = \frac{T_{2s} - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{T_{2s}/T_1 - 1}{T_2/T_1 - 1} \quad (5.19)$$

$$= \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\eta_i} \frac{r}{c_p}} - 1} \quad (5.20)$$

On sait que $c_p = \frac{\gamma R^*}{\gamma-1}$ et on pose $X = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

$$\eta_{is} = \frac{X - 1}{X^{1/\eta_i} - 1} \implies \eta_i = \frac{\log(X)}{\log\left(\frac{X-1}{\eta_{is}} - 1\right)} \quad (5.21)$$

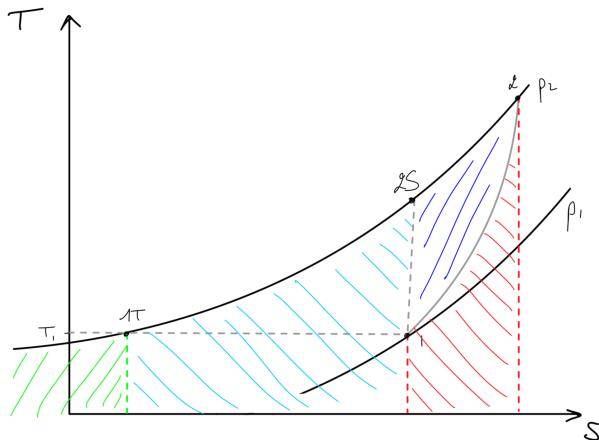
5.7 Rendements polytropique et isentropique en compresseur

On cherche ici à démontrer graphiquement que le rendement polytropique est supérieur au rendement isentropique, i.e. que le rendement interne en transformation polytropique est supérieur au rendement isentropique en transformation isentropique.

$$\begin{cases} \eta_i = \frac{\int vdp}{w_m} = \frac{w_m - w_f}{w_m} \\ \eta_{is} = \frac{w_{ms}}{w_m} \\ Tds = dh - vdp = c_p dT - rT \frac{dp}{p} \end{cases} \quad (5.22)$$

En isobare, on a donc

$$(dh - vdp)|_p = \left(c_p dT - rT \frac{dp}{p} \right) \Big|_p \implies dh = c_p dT \quad (5.23)$$



Les courbes noires sont des isobares. La transformation $1 \rightarrow 2$ est polytropique. Les expressions "graphiques" des enthalpies sont les suivantes :

$$h_{2s} = \int_{ref}^{2s} Tds = \blacksquare + \blacksquare \quad (5.24)$$

$$h_2 = \int_{ref}^2 Tds = \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare \quad (5.25)$$

$$h_2 - h_1 = \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare \quad (5.26)$$

$$w_f = \blacksquare \quad (5.27)$$

$$w_m = \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare \quad (5.28)$$

$$w_u = w_m - w_f = \blacksquare + \blacksquare \quad (5.29)$$

On déduit que $w_{is} = \blacksquare$

5.8 Compression multi-étageée et refroidie

En compression adiabatique, on a

$$\int vdp = \Delta h - \int Tds \quad (5.30)$$

Par analyse graphique d'un diagramme (T, S), on a que $w_m|_T < w_{m,ad}$. Notre but étant

En compression isotherme, on a

$$\int vdp = T|\Delta S| \quad (5.31)$$

de minimiser le travail moteur, l'idéal serait de faire une compression isotherme. Cela n'est cependant pas réalisable en pratique. L'adiabatique parfait ne l'est pas non plus si la température est trop élevée. On va donc minimiser le travail moteur en passant de p_1 à p_2 par plusieurs étages de pression. On réalise une succession de compressions adiabatiques suivies de refroidissements isobares.

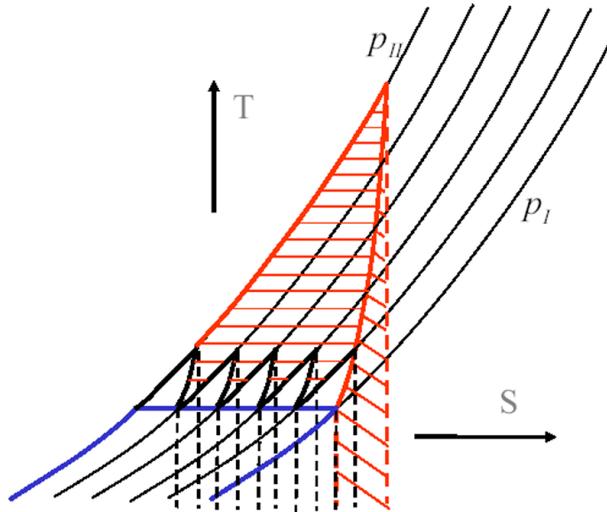


Figure 5.1: Compression multi-étagée

→ Remarque : la hauteur des "dents" est le rapport de compression des compressions adiabatiques.

L'effet sur w_u est visible sur un diagramme (p, v) :

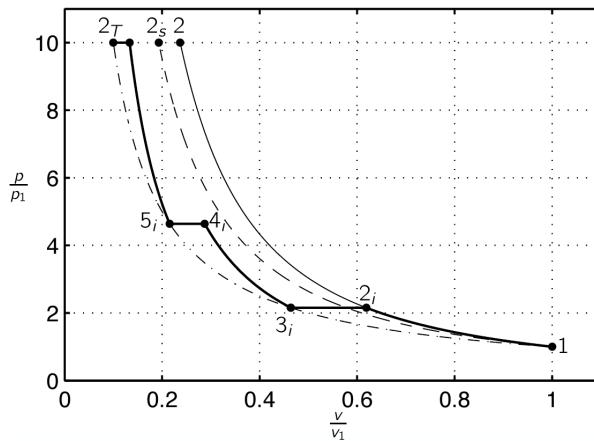


Figure 5.2: Diagramme (p, v)

La courbe discontinue est l'isotherme, la courbe pointillée l'isentropique, le trait fin l'adiabatique et le trait gras la compression multi-étagée. Celle-ci fait donc mieux que les transformations adiabatique ou isentropique, mais la courbe optimale reste l'isotherme.

A cause des capacités physiques des machines, il existe une température maximale tolérable, et la transformation adiabatique parfaite ne sera pas possible. Il faut donc adapter les rapports de compression en fonction de ces contraintes. Mathématiquement,

on a

$$\prod_{j=1}^n \frac{p_{2,j}}{p_{1,j}} = \frac{p_2}{p_1} \quad (5.32)$$

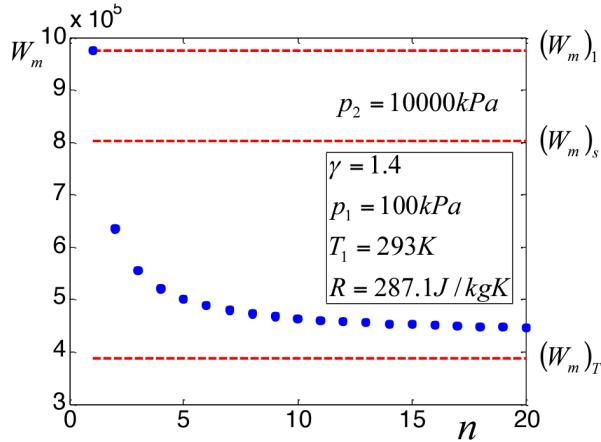
avec $p_{1,j} = p_{2,j-2}$, car les deux points se situent sur une même isobare : les $p_{1,j}$ commencent au premier point à gauche, tandis que les $p_{2,j}$ comment au deuxième point à gauche.

Puisque les compressions sont polytropiques, on a

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \implies T_{2,j} = T_{1,j} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} < T_{\max} \quad (5.33)$$

On peut maintenant calculer le travail moteur, en supposant que les transformations multi-étages sont adiabatiques :

$$w_m = \sum_j \Delta h_j = \sum_j c_p (T_{2,j} - T_{1,j}) \quad (5.34)$$



Soit n le nombre d'étages de compression. Le travail moteur en multi-étage tend vers une valeur supérieure au travail moteur en isotherme réversible, mais reste inférieure aux deux autres transformations possibles (adiabatique et isentropique).

5.9 Cavitation d'une pompe

La cavitation est la formation de bulles de gaz dans un liquide dans une pompe. Cela arrive lorsque la pression dans cette pompe diminue et devient inférieure à la pression de saturation du fluide. La pompe n'étant pas créée dans le but de gérer des vapeurs ou gaz, elle s'abîme alors beaucoup plus et cela peut créer d'importants dommages à la machine.

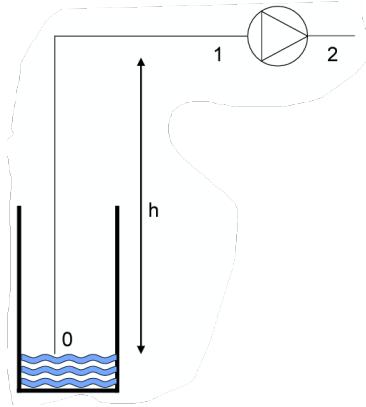


Figure 5.3: Pompe

Dans cette pompe, on a

$$\begin{cases} 0 = \int_0^1 vdp + gh + w_f \\ p_1 = p_0 - \rho gh + \rho w_f \end{cases} \quad (5.35)$$

Au vu de l'expression de la pression en 1, il faut faire attention qu'elle ne devienne pas négative, mais aussi qu'elle reste supérieure à la pression de saturation.

$$p_1 - p_{sat} = p_0 - \rho gh - \rho w_f - p_{sat} > 0 \quad (5.36)$$

Réécrivons cette expression :

$$\underbrace{\frac{p_1 - p_{sat}}{\rho g}}_{NPSH_{dispo}} = \frac{p_0}{\rho g} - h - \frac{w_f}{g} - \frac{p_{sat}}{\rho g} > NPSH_{adm} \quad (5.37)$$

Le NPSH est le "Net Positive Suction Head". On l'exprime comme la hauteur de colonne d'eau nécessaire pour éviter la cavitation.

5.10 Analyse cinématique des machines de compression

On analyse ici les turbo-machines, i.e. des machines rotatives traversées par un fluide. L'action du fluide sur la machine le ralentit et crée donc une différence de pression, créant un travail moteur. La machine est composée d'un rotor (qui tourne) sur lequel sont posées des ailettes, et d'un stator (qui ne tourne pas), avec ailettes lui aussi.

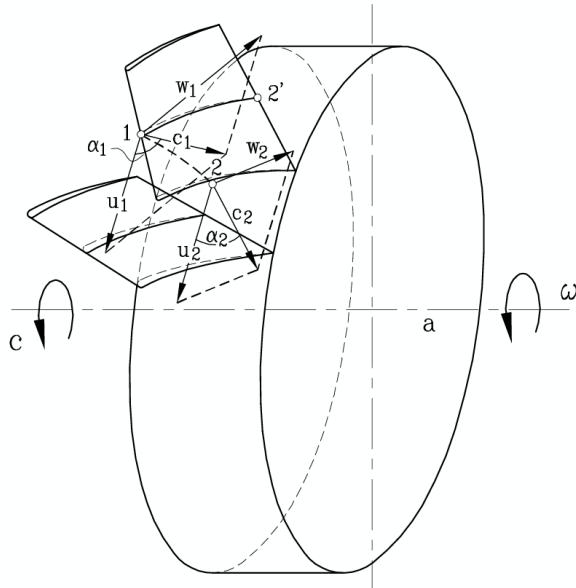


Figure 5.4: Machine axiale

La machine que nous analysons est axiale, car le fluide entre et sort dans une direction parallèle à l'axe de la machine.

- Soit c_1 la vitesse absolue de l'air (ou du fluide) dans un repère qui n'est pas celui de la machine.
- Soit ω_1 la vitesse relative du fluide par rapport au rotor.
- Soit α l'angle entre le vecteur de vitesse absolue du fluide et le vecteur vitesse du rotor.
- Soient ω_m et c_m les projections de vitesse dans la direction axiale ou radiale (ici axiale).

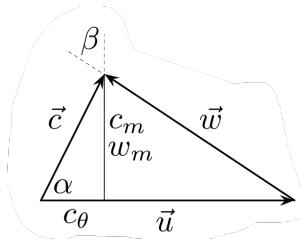


Figure 5.5: Triangle des vitesses

$$\vec{\omega} = \vec{c} - \vec{u} \quad (5.38)$$

On connaît la vitesse d'entrée du fluide c_1 , mais on ne connaît pas la vitesse de sortie c_2 . On peut cependant trouver une relation liant ces deux vitesses. Le fluide lèche le chenal et sort donc dans une direction tangente à l'ailette. Sa norme sera déterminée grâce à notre connaissance des échanges du fluide dans la machine. On sait que $u_1 = u_2$, car la vitesse de la roue ne change pas.

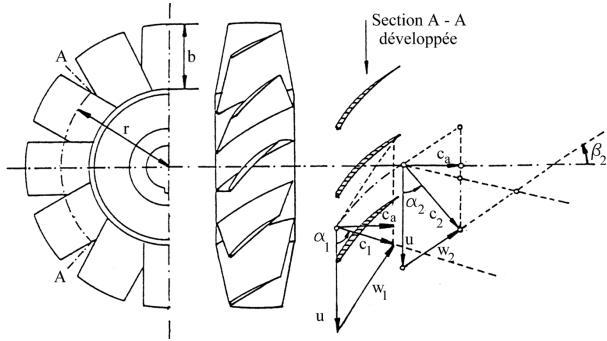


Figure 5.6: Section développée

c_m vaut ici c_a , une constante. En effet,

$$\dot{V} = 2\pi rbc_a \implies c_a = \text{cste} \quad (5.39)$$

Faisons un bilan de moment de quantité de mouvement :

$$\Delta(MQDM) = \pm \dot{m}(c_{2,t}r_2 - c_{1,t}r_1) \quad (5.40)$$

avec l'indice t indiquant la vitesse tangentielle et r les bras de levier.

$$w_m = \frac{P_m}{\dot{m}} = \pm \frac{\Delta(MQDM)\omega}{\dot{m}} = \pm(c_2u_2 \cos \alpha_2 - c_1u_1 \cos \alpha_1) \quad (5.41)$$

5.10.1 Cas de la machine axiale

En machine axiale, $r_1 = r_2 = r$. On peut donc développer l'expression du travail moteur comme suit :

$$\frac{W_m}{u^2} = 1 - \frac{c_a}{u}(\tan \beta_2 + \cot \alpha_1) \quad \dot{V} = 2\pi rbc_a \quad (5.42)$$

$$\frac{W_m}{u^2} = 1 - \dot{V} \frac{\tan \beta_2 + \cot \alpha_1}{2\pi bru} \implies \begin{cases} W_m = u^2 \left(1 - \frac{\dot{V}}{\dot{V}_x}\right) \\ \dot{V}_x = \frac{2\pi bru}{f(\alpha, \beta)} \end{cases} \quad (5.43)$$

5.10.2 Cas de la machine radiale

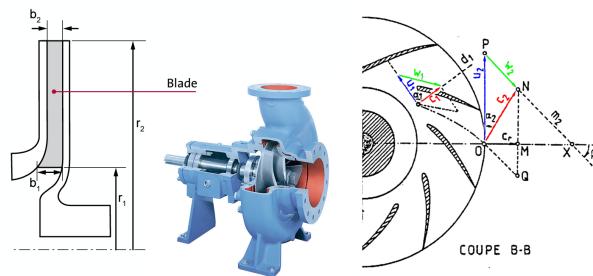


Figure 5.7: Machine radiale

Ici, $\dot{V} = 2\pi r_2 b_2 c_{2,r}$ et $\alpha_1 = \pi/2$. L' $??$ générale se simplifie alors et en introduisant de nouveau \dot{V} dans l'équation, on a

$$\frac{W_m}{u^2} = 1 - \dot{V} \frac{\tan \beta_2}{2\pi b_2 r_2 u_2} \Rightarrow \begin{cases} w_m = u^2 \left(1 - \frac{\dot{V}_x}{\dot{V}}\right) \\ \dot{V}_x = \frac{2\pi b r u}{f(\alpha, \beta)} \end{cases} \quad (5.44)$$

La forme est donc la même que pour la machine axiale, mais l'expression de \dot{V}_x change.

5.10.3 Droites d'Euler et courbe caractéristique

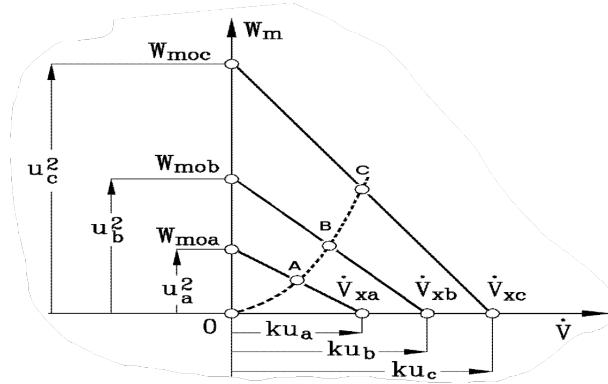


Figure 5.8: Droites d'Euler

Les droites d'Euler illustrent l'évolution du travail moteur en fonction de \dot{V} pour différentes valeurs de u , mais la variable qui nous intéresse est $w_u = w_m - w_f$. Il faut donc prendre en compte les pertes de charges dans la machine, qui induisent le travail w_f . Il y a des dissipations régulières aussi bien que des dissipations singulières à l'entrée et à la sortie. Elles s'expriment comme suit :

$$W_{f,L} = K_L \dot{V}^2 \quad (5.45)$$

$$W_{f,1} = K_1 (\dot{V} - \dot{V}_y)^2 \quad (5.46)$$

$$W_{f,2} = K_2 (\dot{V} - \dot{V}_z)^2 \quad (5.47)$$

$$(5.48)$$

Les pertes de charge singulières sont dues au changement brutal de direction du fluide. La courbe caractéristique de la machine est alors l'expression du travail utile en fonction du débit :

$$W_u = W_m - W_{f,1} - W_{f,2} - W_{f,L} \quad (5.49)$$

Il s'agit d'une parabole en \dot{V} .

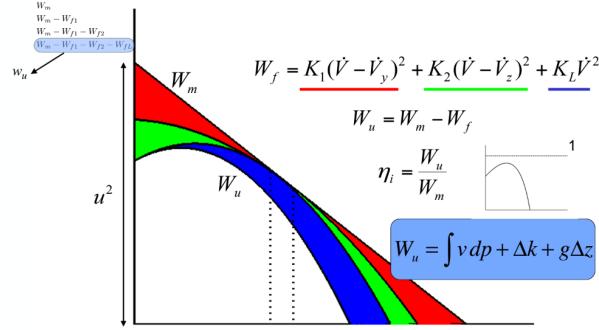


Figure 5.9: Courbe caractéristique

On peut donc optimiser le travail utile, en modifiant le débit, mais tout en prenant en compte les phénomènes de cavitation. En changeant l'orientation des pales, on peut également jouer sur les valeurs des termes \dot{V}_y et \dot{V}_z et donc augmenter la hauteur de la parabole. Il est toutefois impossible en pratique de les annuler tous les deux, car ils dépendent des mêmes paramètres mais pas de la même manière.

5.11 Adaptation machine-circuit

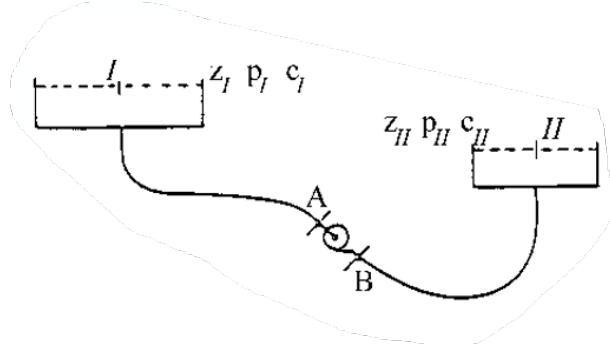


Figure 5.10: Système analysé

L'adaptation machine-circuit consiste à trouver le point d'intersection entre les courbes de fonctionnement du circuit et de la pompe. Soit le système à deux bassins de la ???. En toute généralité, il y a une différence de hauteur, de pression et de vitesse entre les deux bassins. On a donc les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{m,\text{circuit}} = \underbrace{\int_I^{II} v dp}_{\text{statique}} + g(z_{II} - z_I) + \underbrace{\frac{c_{II}^2 - c_I^2}{2}}_{\text{dynamique}} + w_{fI-II} \\ w_{m,\text{pompe}} = \underbrace{\int_A^B v dp}_{w_u} + w_{fA-B} \end{array} \right. \quad (5.50)$$

$$w_u = \underbrace{\int_I^{II} v dp}_{w_{stat}} + g(z_{II} - z_I) + \underbrace{\frac{c_{II}^2 - c_I^2}{2}}_{w_{dyn}} + w_{fI-A} + w_{fB-II} \quad (5.51)$$

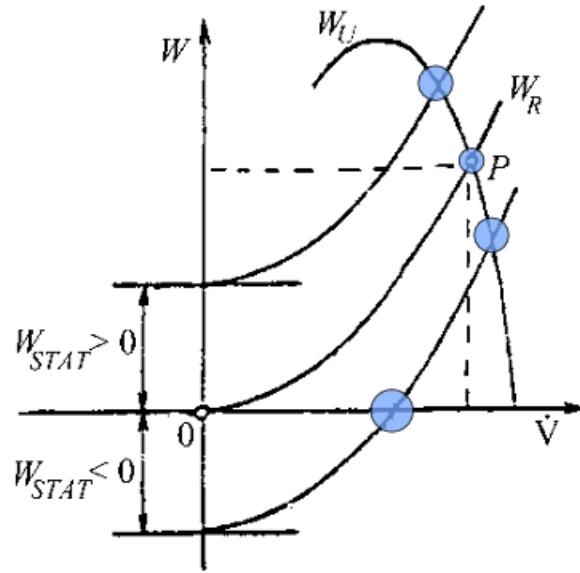


Figure 5.11: Adaptation machine-circuit

Les courbes croissantes sont celles du travail utile du circuit, tandis que la parabole négative est caractéristique de la pompe et est l'expression de l'?. On observe sur l'axe \dot{V} une intersection entre l'axe et la courbe du circuit lorsque $W_{stat} < 0$. Il s'agit du point tel qu'il y a un débit dans le circuit sans que la pompe ne fournisse de travail utile.

5.11.1 Stabilité

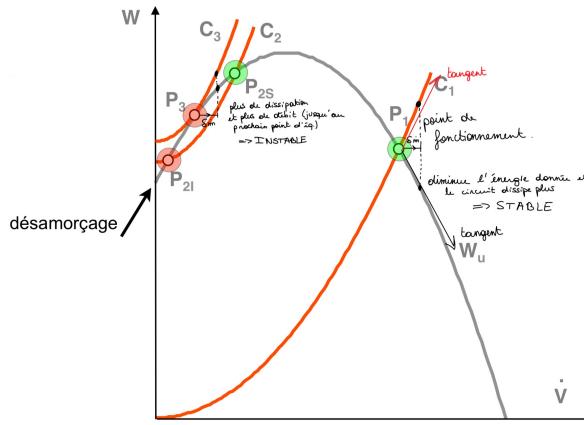
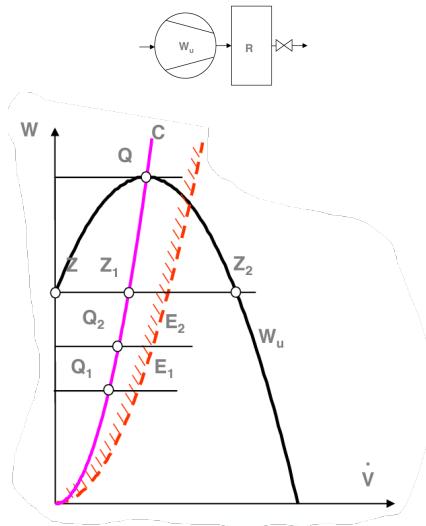


Figure 5.12: Stabilité

Le système est stable si une perturbation de débit autour d'un point de fonctionnement entraîne un effet correcteur qui ramène au point de fonctionnement. Inversement, il est instable si une perturbation de débit autour d'un point de fonctionnement entraîne un effet amplificateur qui éloigne encore plus du point de fonctionnement initial. En termes mathématiques, il faut que la pente de la courbe C au point P soit strictement supérieure à la pente de W_u au point P .

→ Remarque : on analyse les pentes, mais pas leur valeur absolue.

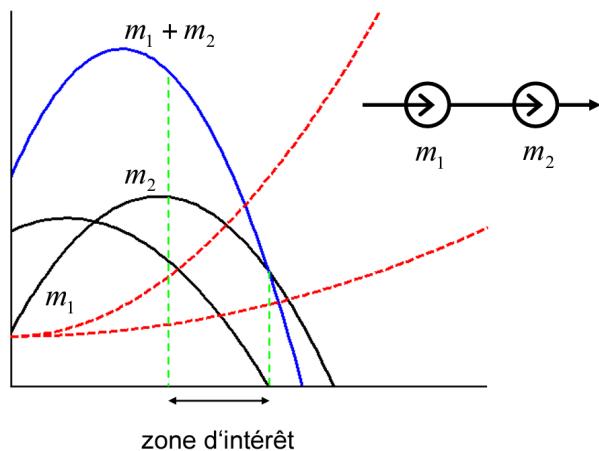
5.11.2 Limite de pompage



Le cercle est la pompe, le R un réservoir, i.e. une "capacité" caractérisée par son niveau de remplissage, et le troisième symbole le reste du circuit. Le couple réservoir circuit est toujours stable, tandis que le couple réservoir-pompe peut être aussi bien stable que instable. On analyse ici le cas où la courbe du travail utile du circuit passe par l'extremum de la parabole.

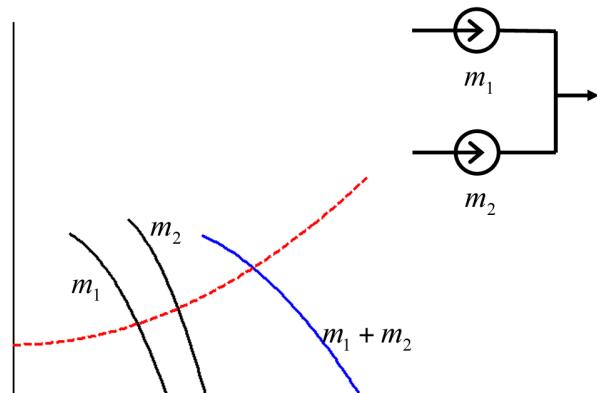
En cas de fluctuation, le compresseur va se couper, et le niveau du réservoir baisse jusqu'à ce que le compresseur puisse redémarrer naturellement, lorsqu'il passe sous la droite Z (condition sur les pentes alors respectée). La limite de pompage est la courbe rouge, au-dessus de laquelle une fluctuation de débit risque d'amener la courbe au point Q .

5.11.3 Mise en série



La mise en série de deux machines m_1 et m_2 entraîne un travail supérieur sur une certaine tranche de débit. La zone d'intérêt est limitée à gauche par la limite de pompage et à droite par le fait que la courbe est alors inférieure à la courbe de la machine 2. En série, le travail des deux machines est sommé.

5.11.4 Mise en parallèle



La mise en parallèle de deux machines m_1 et m_2 entraîne un débit supérieur sur une certaine tranche de travail.

En parallèle, le débit des deux machines est sommé.

6. Air humide

6.1 Mélange de gaz parfaits - Loi de Dalton

Dans un mélange de gaz parfaits, on a

$$\frac{p_k}{p} = \frac{n_k}{n} = \frac{V_k}{V} \quad (6.1)$$

avec p_k la pression partielle et n_k et V_k les quantité de matière et volume correspondants. La fraction molaire ou volumique est

$$[k] := \frac{n_k}{n} = \frac{V_k}{V} \quad (6.2)$$

et la fraction massique

$$\frac{m_k}{m} = (k) = [k] \frac{M_k}{M} \quad M = \sum_k [k] M_k \quad (6.3)$$

avec M la masse molaire.

6.1.1 Point de rosée

Le point de rosée, en refroidissement isobare, est le point auquel le premier constituant du mélange condense. Pour les fumées de combustion à pression atmosphérique, il s'agit de l'eau, et

$$t_{sat}(18.23kPa) = 58^\circ C \quad (6.4)$$

Les valeurs pour les autres constituants sont tellement faibles qu'elles ne nous intéressent pas ici¹.

A $58^\circ C$, le mélange est composé de vapeur d'eau saturée et d'incondensables (notés NC : CO_2, O_2, N_2). Si on poursuit le refroidissement, le mélange est composée de vapeur d'eau toujours saturée, des incondensables, et d'eau liquide.

6.2 Humidité absolue et humidité absolue totale

On définit l'humidité absolue vapeur dans un mélange gazeux :

$$x_v = \frac{(H_2O)}{1 - (H_2O)} = \frac{M_{H_2O}}{M_{NC}} \frac{[H_2O]}{1 - [H_2O]} = \frac{M_{H_2O}}{M_{NC}} \frac{p_{H_2O}}{p - p_{H_2O}} \equiv \left[\frac{kg_{H_2O}}{kg_{NC}} \right] \quad (6.5)$$

¹Le CO_2 n'existe même pas en phase liquide

Il s'agit de la quantité massique de vapeur d'eau contenue dans le mélange gazeux par kilogramme de mélange sec ou non condensable. Elle reste constante et égale à sa valeur initiale jusqu'au point de rosée. Si on continue à refroidir, x_v diminue et le mélange gazeux reste saturé.

Pour un mélange à saturation,

$$x'_v = \frac{M_{H_2O}}{M_{NC}} \frac{p_{sat}(t)}{p - p_{sat}(t)} \quad (6.6)$$

La masse d'eau condensée est, par conservation de la masse,

$$m_e = m_{NC}(x_{v,200} - x_{v,25}) \quad (6.7)$$

Pour des températures $0.01^\circ C < t < t_R$, le mélange est constitué de la vapeur d'eau (limitée par la quantité à saturation), des NC et d'eau liquide. On définit donc l'humidité absolue totale :

$$x = x'_v + x_l \quad (6.8)$$

avec x_l la fraction du liquide à l'extérieur.

Pour des températures $t < t_R < 0.01^\circ C$, le mélange est constitué de la vapeur d'eau (limitée par la quantité à sublimation), des NC et d'eau sous forme de glace. On définit donc l'humidité absolue totale de manière différente :

$$x = x''_v + x_s \quad x''_v = \frac{M_{H_2O}}{M_{NC}} \frac{p_{sub}(t)}{p - p_{sub}(t)} \quad (6.9)$$

6.3 Humidité relative

On définit l'humidité relative :

$$\varphi = \frac{p_{H_2O}}{p_{sat}(t)} \quad (6.10)$$

Il s'agit du rapport entre la quantité volumique ou molaire de vapeur d'eau dans le mélange gazeux à la température considérée et la quantité maximale que pourrait contenir ce mélange à cette température. Si on néglige les pressions partielles de vapeur par rapport à la pression totale,

$$\varphi \approx \frac{x_v}{x'_v} \quad (6.11)$$

6.3.1 Relation humidité relative et absolue

Par définition, on a

$$x_v = \frac{M_{H_2O}}{M_{NC}} \frac{p_{H_2O}}{p - p_{H_2O}} = \frac{M_{H_2O}}{M_{NC}} \frac{\varphi p_{sat}(t)}{p - \varphi p_{sat}(t)} \quad (6.12)$$

Par la dernière égalité, on a donc

$$\begin{cases} \text{Mélange sec : } \varphi = 0 \implies x_v = 0 \\ \text{Mélange saturé : } \varphi = 1 \implies x_v = x'_v = \frac{M_{H_2O}}{M_{NC}} \frac{p_{sat}(t)}{p - p_{sat}(t)} \end{cases} \quad (6.13)$$

6.4 Applications

6.4.1 Hygromètre

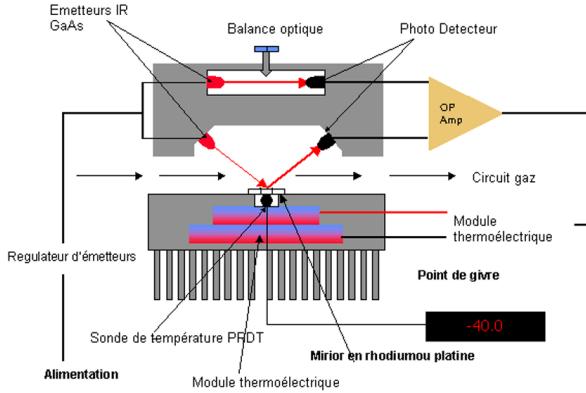


Figure 6.1: Hygromètre

Un miroir est refroidi, et la condensation de l'eau du mélange est captée par atténuation d'un faisceau lumineux. Cette atténuation du courant, due à l'apparition d'eau sur le miroir, permet de déterminer le point de rosée, afin de calculer x_v et x'_v . On mesure donc l'humidité absolue au point de rosée, cela permettant de remonter à l'humidité relative, car x_v est constant entre t et t_R , et t est connu.

6.5 Enthalpie des constituants et du mélange

Dans cette section, nous faisons l'hypothèse que le gaz et la vapeur sont assimilés à des gaz parfaits. La référence enthalpique pour un mélange sec est 0°C et celle pour un mélange humide est l'eau liquide à 0°C.

- Pour le mélange sec (non condensable) : $h_g = c_{p,g}t$
- Pour la vapeur d'eau : $h_v = h_{lv0} + c_{pv}t$
- Pour l'eau liquide : $h_l = c_{pl}t$
- Pour l'eau solide : $h_s = -h_{sl0} + c_{ps}t$

6.5.1 Enthalpie de mélange

Pour un mélange gaz sec (NC) et vapeur d'eau :

$$h = h_g + x_v h_v \quad (6.14)$$

Pour un mélange gaz sec (NC), vapeur d'eau et eau liquide :

$$h = h_g + x'_v h_v + x_l h_l \quad (6.15)$$

Pour un mélange gaz sec (NC), vapeur d'eau et eau solide :

$$h = h_g + x''_v h_v + x_s h_s \quad (6.16)$$

6.6 Cas de l'air

La composition de l'air sec est

$$[O_2] = 0.21 \quad [N_2] = 0.781 \quad [Ar] = 0.009 \quad (6.17)$$

L'air humide est un mélange d'air sec et d'eau sous forme de vapeur. La masse molaire de l'air sec est $M_a = 28.96 \text{ kg/kmole}$.

Dans le cas de l'air, les degrés hygrométriques sont

$$\varphi = \frac{p_{H_2O}}{p_{sat}(t)} \quad x_v = 0.622 \frac{\varphi p_{sat}(t)}{p - \varphi p_{sat}(t)} \quad (6.18)$$

Enthalpie d'air humide

Pour une température positive, on a

- Air humide non saturé (air sec + vapeur d'eau)

$$h = (\underbrace{1.009}_{c_{p,airsec}} + \underbrace{1.854x_v}_{c_{pv}})t + \underbrace{2501.6x_v}_{h_{lv,vap}} \quad (6.19)$$

- Air humide saturé (air sec + vapeur d'eau et eau liquide)

$$h = (\underbrace{1.009}_{c_{p,airsec}} + \underbrace{1.854x'_v}_{c_{pv}})t + \underbrace{2501.6x'_v}_{h_{lv,vap}} + \underbrace{4.1868x_l t}_{\text{eau liquide}} \quad (6.20)$$

Pour une température négative, ça devient

$$h = (\underbrace{1.009}_{c_{p,airsec}} + \underbrace{1.854x''_v}_{c_{pv}})t + \underbrace{2501.6x''_v}_{h_{lv,vap}} - \underbrace{(333.5 - 2.093t)x_s}_{\text{eau solide}} \quad (6.21)$$

6.7 Température humide

La température bulbe humide est la température indiquée par un thermomètre plongé dans un linge humide. Elle est toujours inférieure ou égale à la température bulbe sec, avec égalité en cas de saturation de l'air. L'effet de refroidissement est d'autant plus fort qu'il fait sec.

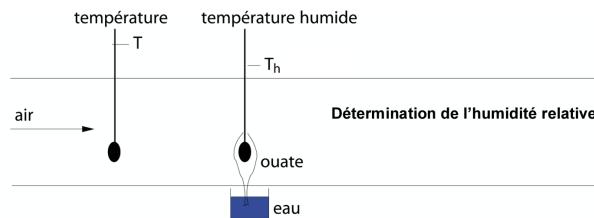


Figure 6.2: Température bulbe humide

On a (pas démontrée dans ce cours) la formule suivante :

$$c_{pa}(t_a - t_h) \approx h_{lv}(x_h - x_a) \quad h_a - h_h = c_{pa}(t_a - t_h) + h_{lv}(x_a - x_h) \approx 0 \quad (6.22)$$

6.8 Applications

6.8.1 Mélange adiabatique et isobare

Soit un mélange entre deux états hygrométriques (h_1, t_1, x_1) et (h_2, t_2, x_2) . Les équations de conservation de la masse sèche et de l'énergie sont

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 m_{1s} + x_2 m_{2s}}{m_{1s} + m_{2s}} \\ h = \frac{h_1 m_{1s} + h_2 m_{2s}}{m_{1s} + m_{2s}} \end{cases} \quad (6.23)$$

Soit maintenant le mélange d'air humide et d'eau (liquide ou vapeur) : l'air humide a une masse sèche m_{as} et un état hygrométrique (h_a, t_a, x_a) . L'eau est de masse m_e à température t_e . Les équations sont

$$\begin{cases} x_m = \frac{m_e + x_a m_{as}}{m_{as}} \\ h_m = \frac{m_e h_e + m_{as} h_a}{m_{as}} \end{cases} \quad (6.24)$$

En isolant h_e , on trouve finalement

$$h_e = \frac{h_m - h_a}{x_m - x_a} \quad (6.25)$$

cette valeur étant la pente de la droite de mélange dans le diagramme (h, x) .

6.8.2 Formation de buée ou de givre

La formation de buée a lieu lorsque la température du vitrage est inférieure à la température de rosée (8°C). Une humidité relative élevée est favorable au phénomène, car il demande alors un écart de température moins important.

Le givre se forme lorsque la température de surface (route,...) est plus basse que la température de rosée, elle-même inférieure à 0°C . Une humidité relative élevée et température basse sont favorable au phénomène.

- Remarque : la formation de givre est possible pour des températures positives par temps clair, par rayonnement.

7. Turbines à gaz

7.1 Principe de fonctionnement

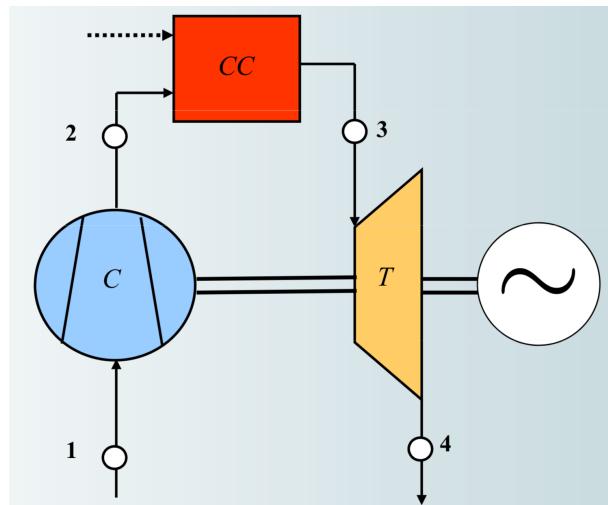


Figure 7.1: Turbine à gaz

La puissance électrique fournie en sortie de turbine, i.e. la puissance utile, est

$$P_e = \underbrace{\dot{m}_T w_{m,T} - \dot{m}_C w_{m,C}}_{P_m} - P_{fm+aux} \quad (7.1)$$

avec P_{fm+aux} la puissance consommée par les frottements et le système auxiliaire.

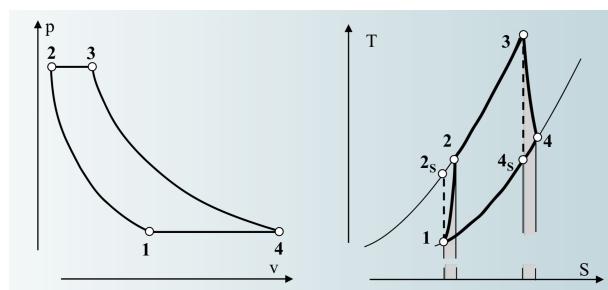


Figure 7.2: Cycles de turbine à gaz

Les transformations sont les suivantes :

- $1 \rightarrow 2$: Compression (quasi) isentropique.

- $2 \rightarrow 3$: Combustion isobare dans la chambre.
- $3 \rightarrow 4$: Détente.
- $4 \rightarrow 1$: Retour isobare à l'état initial.

$$w_m = \frac{P_m}{\dot{m}_C} = \frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_C} w_{m,T} - w_{m,C} \quad (7.2)$$

$$= \frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_C} (h_3 - h_4) - (h_2 - h_1) \quad (7.3)$$

Faisons maintenant le bilan énergétique de la combustion (supposée complète) :

$$\dot{m}_{fuel} PCI + \dot{m}_C h_2 = \dot{m}_T h_3 \quad (7.4)$$

La chaleur à la source chaude, i.e. le compresseur, est donc

$$Q_I := \frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_C} h_3 - h_2 = \frac{\dot{m}_{fuel}}{\dot{m}_C} PCI = \frac{PCI}{\lambda m_{a1}} \quad (7.5)$$

On a donc une nouvelle expression du travail moteur :

$$w_m = \left(1 + \frac{1}{\lambda m_{a1}}\right) (h_3 - h_4) - (h_2 - h_1) = \underbrace{\left(\left(1 + \frac{1}{\lambda m_{a1}}\right) h_3 - h_2\right)}_{Q_I} - \underbrace{\left(\left(1 + \frac{1}{\lambda m_{a1}}\right) h_4 - h_1\right)}_{Q_{II}} \quad (7.6)$$

Et on définit maintenant le rendement thermique

$$\eta_{th} = \frac{W_m}{Q_I} = 1 - \frac{Q_{II}}{Q_I} = 1 - \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{\lambda m_{a1}}\right) h_4 - h_1\right)}{\left(\left(1 + \frac{1}{\lambda m_{a1}}\right) h_3 - h_2\right)} \quad (7.7)$$

7.2 Etude paramétrique des performances

→ Remarque : les indices C et T correspondent respectivement au compresseur et à la turbine.

Hypothèses :

- Combustion isobare
- Masse invariable
- Gaz idéal et chaleur massique constante

$$w_m = c_p ((T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)) \quad (7.8)$$

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (7.9)$$

Hypothèses supplémentaires :

- $T_3 - T_4 = \eta_{siT}(T_3 - T_{4s})$
- $T_2 - T_1 = \frac{1}{\eta_{isC}}(T_{2s} - T_1)$

Le travail moteur est alors

$$w_m = \eta_{siT}c_pT_3\left(1 - \frac{T_{4s}}{T_3}\right) - \frac{1}{\eta_{isC}}c_pT_1\left(\frac{T_{2s}}{T_1} - 1\right) \quad (7.10)$$

$$w_m = c_pT_3\left(1 - \left(\frac{T_{4s}}{T_3}\right)^{\eta_{piT}}\right) - c_pT_1\left(\left(\frac{T_{2s}}{T_1}\right)^{\frac{1}{\eta_{piC}}} - 1\right) \quad (7.11)$$

Si on définit maintenant X et Y tels que

$$\begin{cases} W_m = c_pT_1\left(\eta_{siT}Y\left(1 - \frac{1}{X}\right) - \frac{1}{\eta_{isC}}(X - 1)\right) \\ w_m = c_pT_1\left(Y\left(1 - X^{-\eta_{piT}}\right) - \left(X^{\frac{1}{\eta_{piC}}} - 1\right)\right) \end{cases} \quad (7.12)$$

Soient X_A la valeur de X telle que le travail moteur est maximal et X_0 tel qu'il est nul. A Y fixé, leurs expressions respectives sont

$$X_0 = \eta_{siC}\eta_{siT}Y \approx \eta_{piT}\eta_{piC}YX_A \quad = \sqrt{\eta_{siC}\eta_{siT}Y} \approx \sqrt{\eta_{piT}\eta_{piC}Y} \quad (7.13)$$

Soit finalement X_B la valeur de X maximisant le rendement thermique. On a $X_A < X_B < X_0$.

7.2.1 Indice de répartition et rendement mécanique

On définit de plus l'indice de répartition :

$$\tau_C := \frac{W_{mC}}{W_{mT}} = \frac{1/\eta_{si,T}c_pT_1(X-1)}{\eta_{si,T}c_pT_3(X-1)/X} = \frac{X}{X_0} \quad (7.14)$$

On peut écrire les puissances de pertes comme suit :

$$P_{fm+aux} = k(P_{mC} + P_{mT}) \quad (7.15)$$

avec k un coefficient de pertes. Le rendement mécanique est donc par définition

$$\eta_{mec} = 1 - \frac{P_{fm+aux}}{P_m} = 1 - k\frac{1 + \tau_C}{1 - \tau_C} = 1 - k\frac{X_0 + X}{X_0 - X} \quad (7.16)$$

7.3 Cycle aval

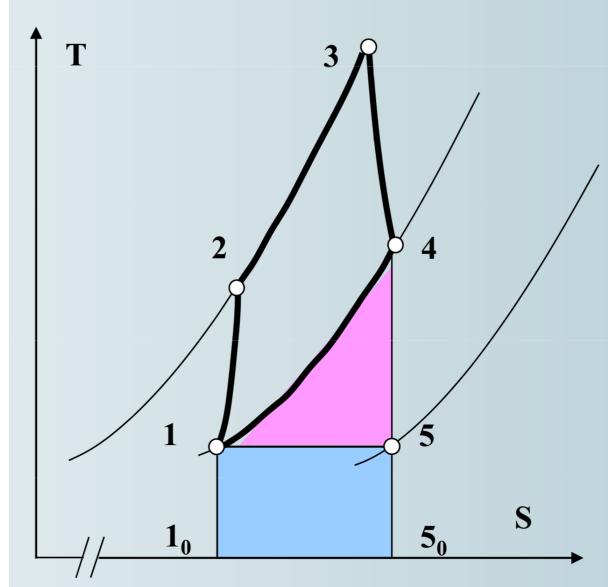


Figure 7.3: Cycle aval

Un cycle aval est le cycle permettant de sortir les gaz d'échappement de la turbine à gaz. En effet, leur pression étant inférieure à la pression atmosphérique, il faut fournir un travail pour les sortir de la turbine.

La partie rose sur la figure ?? est ce que l'on peut réellement utiliser dans ce but, et la partie bleue est les pertes qui y sont liées. On a donc un rendement de cycle aval tel que

$$\begin{cases} e_4 = H_4 - H_1 - T_1(S_4 - S_1) \\ a_4 = T_1(S_4 - S_1) \end{cases} \implies \eta_{CAV} = \frac{e_4}{e_4 + a_4} = 1 - \frac{T_1(S_4 - S_1)}{H_4 - H_1} = 1 - \frac{T_1}{T_4 - T_1} \log\left(\frac{T_4}{T_1}\right) \quad (7.17)$$

7.3.1 Cycle combiné

On combine évidemment le cycle aval avec une turbine à gaz. On a donc un rendement total. Il s'exprime comme suit :

$$\eta_{TGCAV} = \eta_{TG} + (1 - \eta_{TG})\eta_{CAV}\eta_R \quad (7.18)$$

avec η_R un coefficient dépendant des hypothèses du cycle (e.G. adiabatique, ...). Si on remplace les rendements par leur expression, dans le cas $\eta_R = 1$,

$$\eta_{TGCAV} = 1 - \frac{T_1}{T_3 - T_2} \log\left(\frac{T_4}{T_1}\right) \quad (7.19)$$

8. Machines frigorifiques

8.1 Cycle de Carnot

Le cycle de Carnot est un cycle théorique idéal composé de

- A → B : évaporation isotherme, c'est l'effet utile du cycle.
- B → C : compression isentropique, c'est le travail permettant d'augmenter la température.
- C → D : condensation isotherme.
- D → A : détente isentropique.

$$q_I = T_I(s_B - s_A) \quad (8.1)$$

$$q_{II} = T_{II}(s_B - s_A) \quad (8.2)$$

$$w_{m,cycle} = (T_{II} - T_I)(s_B - s_A) > 0 \quad (8.3)$$

Le coefficient de performance (COP) d'un frigo et d'une pompe à chaleur sont respectivement

$$COP_{fri} \triangleq \frac{q_I}{w_{m,cycle}} = \frac{T_I}{T_{II} - T_I} \quad (8.4)$$

$$COP_{PAC} \triangleq \frac{|q_{II}|}{w_{m,cycle}} = \frac{T_{II}}{T_{II} - T_I} \quad (8.5)$$

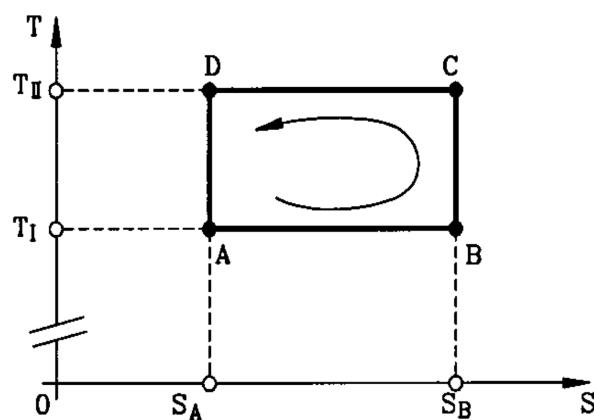


Figure 8.1: Cycle de Carnot

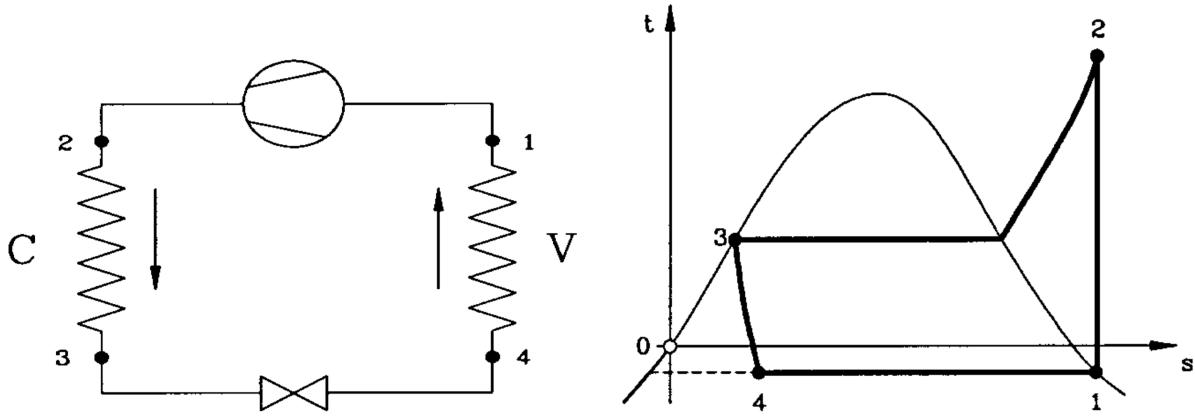


Figure 8.2: Cycle frigorifique de référence

8.2 Cycle frigorifique de référence

Les étapes du cycle de référence sont

- $1 \rightarrow 2$: compression isentropique
- $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$: évolutions isobares
- $3 \rightarrow 4$: détente isenthalpique

Comme toujours en cycle frigorigique, l'effet utile est ici q_I :

$$q_I = \int_4^1 T ds = T_1(s_1 - s_4) = h_{lv}(x_1 - x_4) = h_1 - h_4 > 0 \quad (8.6)$$

$$q_{II} = \int_2^3 T ds = h_3 - h_2 - \underbrace{\int_2^3 v dp}_{=0} < 0 \quad (8.7)$$

$$w_m = \int_1^2 v dp = h_2 - h_1 - \underbrace{\int_1^2 T ds}_{=0} \quad (8.8)$$

On trouve donc le coefficient de performance suivant, le cycle étant un frigo :

$$COP = \frac{q_I}{w_m} = \frac{q_I}{h_2 - h_1} = \frac{q_I}{|q_{II}| - q_I} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} \quad (8.9)$$

8.3 Choix des fluides frigorigènes

→ Remarque : les fluides frigorigènes ne sont pas des gaz parfaits.

8.3.1 Critères thermodynamiques

- Faisabilité : Il faut que la pression de l'évolution isobare de l'effet utile soit supérieure à la pression du point triple : $p_{4-1} > p_{XYZ}$.

- Efficacité : On veut un effet utile élevé, il faut donc que $\frac{h_1-h_4}{h_2-h_1}$ soit élevé $\iff \frac{h_{lv(4-1)}}{c_p(1-2)}$ soit élevé également, l'équivalence étant due au caractère polytropique de la transformation 1-2.

8.3.2 Critères de sécurité et environnementaux

- Toxicité
- Inflammabilité
- Toxicité des produits de dégradation
- Effet sur l'ozone de la stratosphère

8.3.3 Critères technologiques

- Une masse volumique élevée pour le fluide frigorigène impliquera une plus forte compacité.
- Pression de fonctionnement : il faut que p_{2-3} soit modérée, et p_{4-1} supérieure à la pression atmosphérique.
- Propriétés aérauliques et thermiques : une viscosité faible impliquera un écoulement et un transfert plus simples. De plus, une conductivité thermique élevée aidera au transfert thermique.

8.3.4 Compatibilité des matériaux et durabilité

- Il faut prendre en compte la compatibilité du fluide avec les lubrifiants, la compatibilité du matériaux avec la machine et la stabilité chimique et thermique.

8.3.5 Cout

- On est restreint au niveau de la taille de la machine par les coûts que cela engendre.

8.3.6 Exemples de fluides frigorigènes

- Fluides inorganiques : NH_3 (toxique), H_2O , CO_2
- Alcanes et alcènes légers : C_2H_6 , C_3H_8 , C_4H_{10} , C_2H_4 (inflammable), C_3H_6 (inflammable aussi).
- Chlorofluorocarbones et halocarbones : $C_nH_pCl_qBr_rF_s$ avec l'égalité $p + q + r + s = 2n + 2$.

8.4 Irréversibilités en cycle réel

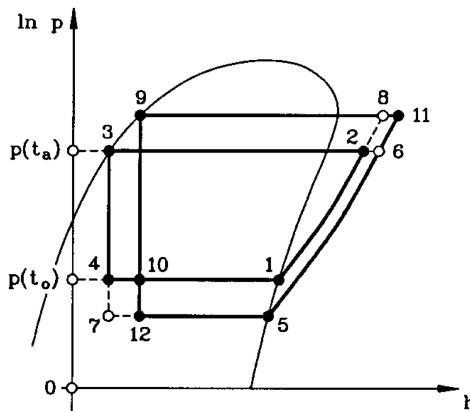


Figure 8.3: Irréversibilités en cycle frigorifique

En cycle réel, il y a des irréversibilités aux échangeurs : on a $t_9 > t_3$ au condenseur et $t_{12} < t_4$ à l'évaporateur. Cela implique une dégradation du COP, par un accroissement de $T_{II} - T_I$ et une diminution de T_I .

→ Remarque : ces écarts inévitables sont de l'ordre de 10°C.

On a également un sous-refroidissement au condenseur.

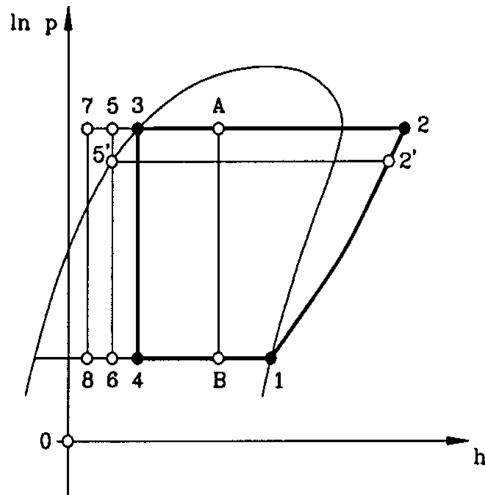


Figure 8.4: Sous-refroissement des cycles réels

Le sous-refroidissement a pour intérêt d'éviter le cycle $1 - 2 - A - B$. Il est composé d'une partie externe au système de base mais qui dégrade bien le COP, et une partie interne par échange aux étapes 3 - 7 et 8 - 4.

→ Remarque : le sous-refroidissement nécessaire est de l'ordre de 3 à 5°C.

8.5 En cascade

On peut également mettre des cycles frigorifiques en cascade, afin de descendre à des températures très faibles

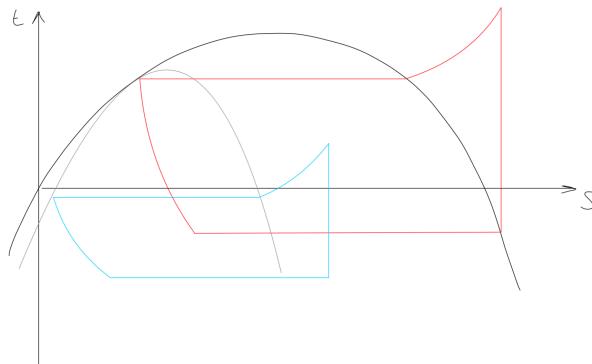


Figure 8.5: Cycles frigorifiques en cascade

La courbe noir est la cloche de saturation correspondant au cycle initial rouge, tandis que la cloche grise est celle du cycle bleu. Pour chaque nouveau cycle ajouté, on aura une courbe de saturation différente.

9. Cycles à vapeur

→ Remarque : pour rappel, les aires d'un cycle en diagramme (p, v) ou (T, s) sont identiques et on a $w_m = \text{Aire} - w_f = q$

9.1 Description

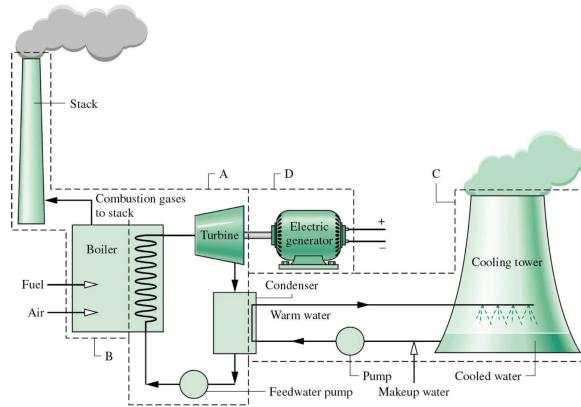


Figure 9.1: Cycle moteur à vapeur

La figure ?? contient tous les éléments essentiels à un cycle moteur à vapeur. On le simplifie toutefois ici par le cycle suivant :

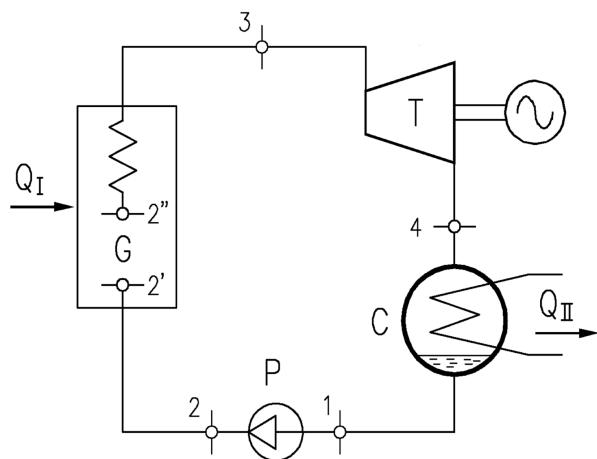


Figure 9.2: Modèle thermodynamique simple d'un cycle moteur à vapeur

Nous avons les éléments suivants :

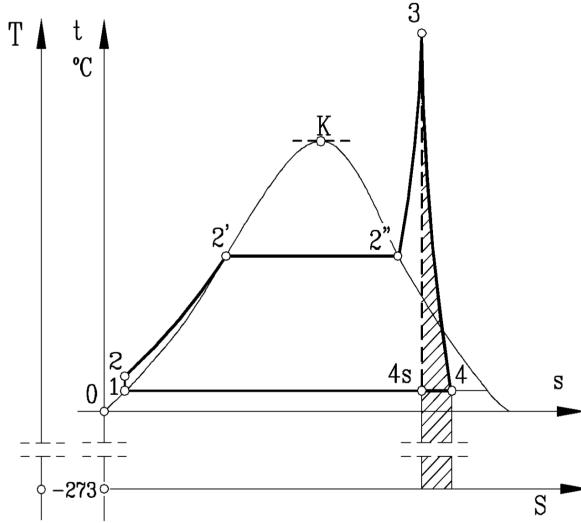


Figure 9.3: Diagramme (T,s) d'un cycle moteur à vapeur

- 1 – 2 : pompe P
- 2 – 2' : TODO
- 3 – 4 : turbine T et générateur de courant
- 4 – 1 : condenseur C

Le diagramme T,s équivalent est le suivant :

9.2 Analyse énergétique

Analysons les différents éléments de ce cycle :

$$Q_I = h_3 - h_2 > 0 \quad (9.1)$$

$$Q_{II} = h_1 - h_4 < 0 \quad (9.2)$$

$$W_{m,P} = \int_1^2 vdp + W_f \approx \frac{\int_1^2 vdp}{\eta_{iP}} = h_2 - h_1 = \frac{h_{2s} - h_1}{\eta_{s,P}} \quad (9.3)$$

la dernière égalité étant valable uniquement si le rendement isentropique est connu. Finalement, dans la turbine,

$$W_{mT} = h_3 - h_4 = (h_3 - h_{4s})\eta_{s,T} \quad (9.4)$$

9.3 Rendement de cycle

Par le premier principe, on a

$$W_m Q_I - |Q_{II}| = W_{mT} - W_{mP} \quad (9.5)$$

et donc le rendement énergétique du cycle, ou rendement thermique, est

$$\eta_{cyclem} = \eta_t = \frac{W_m}{Q_I} = 1 - \frac{|Q_{II}|}{Q_I} \quad (9.6)$$

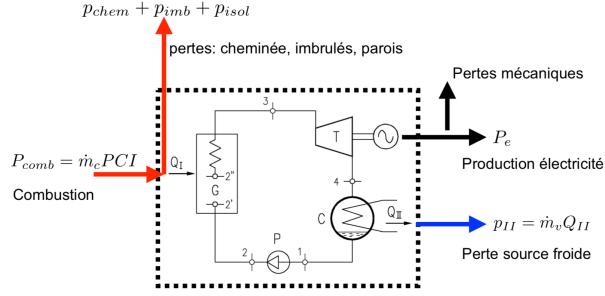


Figure 9.4: Rendement total de cycle

En supposant que $W_{mP} \ll W_{mT}$, le rendement de cycle est approximé :

$$\eta_{cyclen} \approx \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_1} \quad (9.7)$$

→ Remarque : on a une condition sur h_4 : pour que le cycle fonctionne il faut que $x_4 \geq 0.88$.

9.4 Rendement total

Le rendement total est le rapport entre la puissance électrique créée et la puissance de combustion fournie. En Q_I , il y a des pertes liées à la combustion, la cheminée, l'isolement des parois et les imbrûlés. A la turbine, il y a des pertes mécaniques lors de la production d'électricité. Il y a également des pertes à la source froide du condenseur. Le rendement total de cycle est donc

$$\eta_{toten} = \frac{P_e}{m_c PCI} = \underbrace{\frac{P_e}{P_m}}_{\text{pertes méca}} \underbrace{\frac{P_m}{m_v(h_3 - h_2)}}_{\text{source froide}} \underbrace{\frac{m_v(h_3 - h_2)}{m_c PCI}}_{\text{source chaude}} \quad (9.8)$$

$$= \eta_{mec} \eta_{cyclen} \eta_{gen} \quad (9.9)$$

Les développements des différentes pertes sont les suivants :

- Pertes mécaniques :

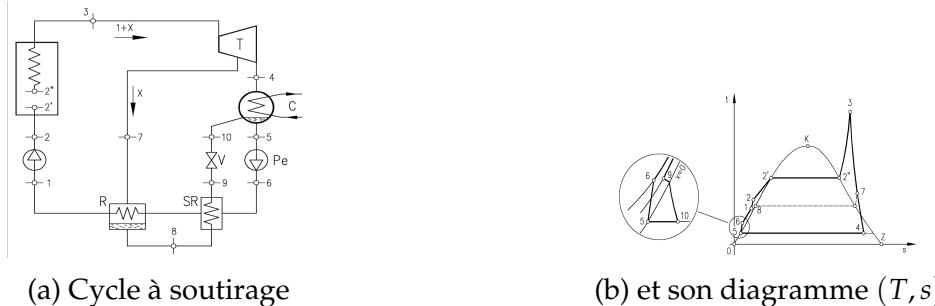
$$p_{mec} = P_e - P_m \quad (9.10)$$

- Pertes à la source froide :

$$p_{II} = P_m - m_v(h_3 - h_2) = m_v W_m - m_v Q_I \quad (9.11)$$

- Pertes au générateur de vapeur :

$$p_{chem} + p_{imb} + p_{isol} = m_v(h_3 - h_2) - m_c PCI \quad (9.12)$$



(a) Cycle à soutirage

(b) et son diagramme (T, s)

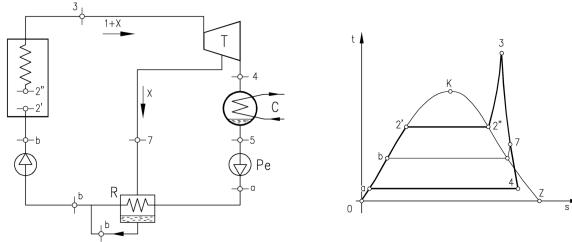


Figure 9.6: Cycle à soutirage équivalent

9.5 Cycle à soutirage

Le soutirage consiste à dévier une fraction $\frac{X}{1+X}$ de la vapeur en sortie de turbine vers un réchauffeur (R). Là, la vapeur donne de la chaleur à l'eau liquide (échange interne au cycle) et donc une partie de la vapeur condense. Elle passe ensuite par un sous-refroidisseur (SR) et une vanne de détente (V)¹. Elle est ensuite réinjectée dans le condenseur et termine le cycle normalement.

La vanne de détente a pour intérêt de renvoyer de l'eau à même pression que dans le condenseur.

Les différents états étant très proches, on fait les hypothèses suivantes :

- $h_5 \approx h_6 \approx h_9 \approx h_{10}$ (point *a* dans la suite).
- $h_1 \approx h_8$ (point *b* dans la suite).

On a donc

$$X(h_7 - h_9) = (1 + X)(h_6 - h_1) \quad (9.13)$$

→ Remarque : Le X dans ce cycle ne correspond pas au x des chapitres précédents!! (titre, etc).

Afin de simplifier le cycle, on introduit un cycle à soutirage équivalent au précédent, grâce aux hypothèses ci-dessus : Par les hypothèses des points *a* et *b*, on peut simplifier le cycle sans perte de généralité en ne gardant que le réchauffeur. On peut maintenant calculer le nouveau rendement de cycle :

- Rendement du cycle de référence :

$$\eta_{cyclen}^1 = \frac{W_m^1}{Q_I^1} = 1 - \frac{|Q_{II}^1|}{Q_I} \quad (9.14)$$

¹Une vanne de détente est équivalente à une forte perte de charge.

- Rendement du cycle avec soutirage :

$$\eta_{cyclen}^{1+X} = \frac{W_m^{1+X}}{Q_I^{1+X}} = \frac{W_m^1 + W_m^X}{Q_I^1 + Q_I^X} = \frac{W_m^1 + Q_I^X}{Q_I^1 + Q_I^X} > \frac{W_m^1}{Q_I^1} = \eta_{cyclen}^1 \quad (9.15)$$

Cela démontre que le rendement avec soutirage sera toujours plus élevé que sans.

- Rendement du cycle "X" :

$$\eta_{cyclen}^X = \frac{W_m^X}{Q_I^X} = 1 - \frac{Q_{II}^X}{Q_I^X} \approx 1 \quad (9.16)$$

Ce rendement vaut presque 1 car on a $Q_{II}^X \approx 0$. Cependant, ce cycle ne peut pas exister seul.

En pratique, on place le soutirage de façon à couper la détente en deux chutes d'enthalpie égales. La fraction soutirée est donc une conséquence du bilan au réchauffeur.

$$X = \frac{h_b - h_a}{h_7 - h_b} \quad (9.17)$$

→ Remarque : on peut ajouter plusieurs soutirages, le rendement aura cependant une valeur asymptotique, qui ne variera donc plus après un certain nombre de soutireurs.

9.6 Cycle à resurchauffe

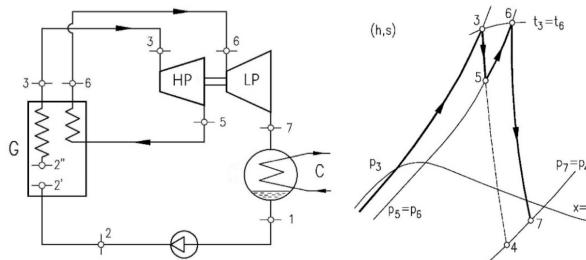


Figure 9.7: Cycle à resurchauffe

La resurchauffe consiste à séparer la turbine en une zone haute pression et une zone basse pression, afin de rechauffer une partie de la vapeur et de la renvoyer directement vers la zone basse pression. On va donc chauffer plus de vapeur dans le générateur de vapeur, mais sans changer la quantité de combustible utilisé.

→ Remarque : on ne fait jamais plus d'une resurchauffe, car la vapeur serait trop détendue.

Ce genre de machine est apparue avec l'augmentation des puissances requise : elles permettent des pressions de vapeur vive plus élevées, tout en respectant la contrainte de titre en fin de détente.

Le rendement de cycle est

$$\eta_{cyclen} = \frac{(h_3 - h_5) + (h_6 - h_7)}{(h_3 - h_2) + (h_6 - h_5)} > \frac{h_6 - h_7}{h_6 - h_2} \quad (9.18)$$

De nouveau, le rendement avec resurchauffe est donc toujours supérieur à celui sans.

En plus de mettre plusieurs soutireurs dans un cycle, on peut également combiner soutirage et resurchauffe. On introduit alors une turbine à pression intermédiaire, de laquelle part une partie des soutireurs. Ils peuvent également partir de la turbine basse pression.

9.7 Cycles combinés

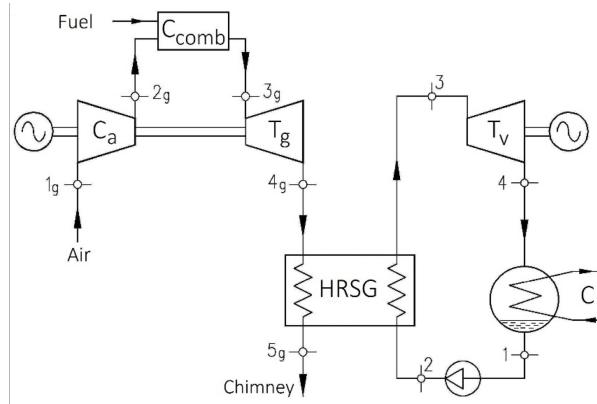


Figure 9.8: Cycles combinés

On combine ici un cycle à vapeur avec une turbine à gaz, lesquels sont liés au niveau du générateur de vapeur. Cela a pour intérêt de récupérer les pertes thermiques à l'échappement de la turbine à gaz. On produit donc de l'électricité sans consommation supplémentaire d'énergie primaire. La chaudière de récupération est ici l'élément clé du cycle.

→ Remarque : on ne peut pas faire de soutirage dans un tel système.

Les rendements qui nous intéressent ici sont les suivants :

$$\eta_{tot,g} = \frac{P_g}{P_{prim}} = \frac{P_g}{\dot{m}_c PCI} \quad \eta_{tot,v} = \frac{P_v}{\dot{m}_v(h_3 - h_1)} \quad \eta_{tot} = \frac{P_g + P_v}{\dot{m}_c PCI} \quad (9.19)$$

10. Questions théoriques

Est-ce que la chaleur échangée entre un système et son extérieur est une variable d'état du système?

La chaleur échangée par le système avec son extérieur n'est pas une variable d'état car δQ n'est pas une différentielle exacte $\oint \delta Q \neq 0$. On peut également le montrer par un contre exemple, si la chaleur échangée était une variable d'état, alors elle serait indépendante de la transformation. Hors on calcul que la chaleur échangée par une transformation adiabatique et une transformation isotherme n'est pas la même.

Donner la définition d'un processus adiabatique. Donner un exemple de processus adiabatique réversible puis irréversible.

Un processus est adiabatique quand $\delta Q = 0$ tout au long de la transformation. Un exemple de processus adiabatique réversible est la compression d'un piston dont les parois sont parfaitement isolées et sans frottements. Pour rendre la transformation adiabatique irréversible, il suffit d'ajouter des frottements.

Donner la définition mathématique ainsi que la signification physique de c_p et c_v .

Les définitions mathématiques des chaleurs spécifiques sont les suivantes

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) \Big|_p \quad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) \Big|_v \quad (10.1)$$

- c_p représente la quantité de chaleur qu'il faut fournir à 1kg de matière pour la faire monter de 1K à pression constante.
- c_v représente la quantité de chaleur qu'il faut fournir à 1kg de matière pour la faire monter de 1K à volume constant.

Donner la définition de l'enthalpie libre F de Helmholtz ainsi que de l'enthalpie libre G de Gibbs. Ecrivez l'équation de Gibbs sous la forme différentielle de F et G.

On a

$F = U - TS$	$G = H - TS$
$dF = dU - TdS - SdT$	$dG = dH - TdS - SdT$

Les formules de Gibbs sont les suivantes :

$$TdS = dU + pdV \quad TdS = dH - Vdp \quad (10.2)$$

En injectant les différentielles de F et G dans les formules de Gibbs, on trouve

$$\begin{aligned} dU - SdT - dF &= dU + pdV \\ dG - dH + TdS &= dF + pdV \\ dG - dH + TsD &= dF + pdV \end{aligned}$$

Dériver l'équation (1.18), page 9 des notes du chapitre 1, $\alpha = p\beta K$

La matrice des dérivées partielles doit posséder un nullspce non trivial, il faut donc annuler son déterminant. Par définition des paramètres α, β, K , on trouve cette relation.

Démontrer que les expressions suivantes sont valables pour toutes les espèces,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) \Big|_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right) \Big|_p \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right) \Big|_T = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right) \Big|_p \quad (10.3)$$

Sur base des différentielles, on a

$$\left(\cdot \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right) \right)_T = -p \quad \left(\cdot \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) \right)_v = -s \quad \left(\cdot \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right) \right)_T = v \quad \left(\cdot \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right) \right)_p = -s$$

Par le théorème de Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial v} &= \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial T} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \Big|_v &= \left(\frac{\partial s}{\partial s} \right) \Big|_p \end{aligned}$$

On a donc la première égalité. On trouve la seconde de la même manière avec G.

Dériver l'équation suivante : $c_p - c_v = \alpha\beta pvT$

Dériver l'équation suivante, $l_T = (c_p - c_v)/\alpha v$. Le coefficient l_T apparaît dans l'équation (1.19), page 9 des notes du chapitre 1.

Démontrer que l'entropie d'un gaz idéal est donnée par l'expression suivante
 $s = s_0(T_0) - R_g \ln \frac{p}{p_0} + \int_{T_0}^T c_p \frac{dT}{T} = s_0(T_0) + R_g \ln \frac{\rho_0}{\rho} + \int_{T_0}^T c_v \frac{dT}{T}$.

On fait l'intégrale des relations de Gibbs.

Donner l'expression de la variation d'entropie quand on chauffe un gaz idéal de T_i jusqu'à T_f sous pression constante. Donner également l'expression de la variation d'entropie quand l'élévation de la température est effectuée sous volume constant. Lequel des deux processus donne la plus grande augmentation d'entropie ?

Relations de Gibbs encore. Le processus qui mène à la plus grande variation d'entropie est l'augmentation de température à pression constante, car $c_p > c_v$.

Définissez la transformation polytropique et établissez-en les équations appliquées au gaz idéal.

Une transformation polytropique est une relation pour laquelle une des relations suivantes est respectée :

$$\frac{dH}{TdS} = \Psi \quad \frac{dU}{TdS} = \Phi \quad (10.4)$$

Dans le plan (T, S) :

$$dU = c_v dT = \Phi T dS \quad dH = c_p dT = \Psi T dS \quad (10.5)$$

Ces relations peuvent être intégrées pour obtenir des ΔS , mais en pratique, on ne pourra pas résoudre ces intégrales, car $c_v = c_v(T)$ et $c_p = c_p(T)$.

Dans le plan (p, V) :

$$dU = c_v dT = \Phi T dS \quad dH = c_p dT = \Psi T dS \quad (10.6)$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, on trouve :

$$\frac{\frac{dp}{p}}{\frac{dV}{V}} = \frac{1 - \Psi}{\Phi - 1} = -m \quad (10.7)$$

A nouveau, on ne peut pas détailler plus comme dans le cas d'un gaz parfait, car c_p et c_v ne sont pas constants, donc Φ, Ψ et m non plus.

Quelle est la loi de Dalton ? Donner l'équation d'état d'un mélange homogène des gaz idéaux en appliquant la loi.

Quand on mélange plusieurs gaz qui ne réagissent pas chimiquement, chacun d'eux se répartit uniformément dans tout le volume offert comme s'il était seul et la pression du mélange a pour valeur la somme des pressions dites partielles qu'aurait chacun d'eux s'il occupait seul le volume total du mélange. En pratique, si on a deux gaz idéaux α, β dans un volume, on aura :

$$p_t = p_\alpha + p_\beta$$

$$p_\alpha = \frac{m_\alpha R^* T}{V_t}$$

$$p_\beta = \frac{m_\beta R^* T}{V_t}$$

Démontrer que si l'énergie interne et l'enthalpie d'une substance ne dépendent que de la température, alors cette substance est un gaz idéal.

On a :

$$dU = TdS - pdV = C_v dT \quad dH = TdS + Vdp = C_p dT \quad (10.8)$$

Donc, si dU et dH ne dépendent que de la température, cela signifie que c'est également le cas pour C_v et C_p , donc c'est un gaz idéal.

Considérer l'équation des transformations isochores ainsi que l'équation des transformations isobares d'un gaz idéal. Quelle entre les deux équations a la pente la plus élevée dans le plan (T,S). Justifiez votre réponse.

Pentes des isochores plus élevées par les relations de Gibbs.

Démontrer que l'expression suivante est valable pour des gaz idéaux : $c_p - c_v = R^*$

On a la relation suivante : $c_p - c_v = \alpha\beta pvT$. Pour un gaz idéal, α et β ont été déterminés expérimentalement et pour des valeurs de température, pression où le gaz peut exister, on a :

$$\alpha = \frac{1}{T} \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (10.9)$$

On trouve alors

$$c_p - c_v = \frac{pv}{T} = R \quad (10.10)$$

La dernière égalité par la loi des gaz parfaits.

Démontrer que l'expression suivante est valable pour des gaz idéaux : $c_p - c_v = R^*$.

On a la relation suivante : $c_p - c_v = \alpha\beta p v T$. Pour un gaz idéal, α et β ont été déterminés expérimentalement et pour des valeurs de température, pression où le gaz peut exister, on a :

$$\alpha = \frac{1}{T} \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (10.11)$$

On trouve alors

$$c_p - c_v = \frac{pv}{T} = R \quad (10.12)$$

La dernière égalité par la loi des gaz parfaits.

Démontrer que le travail produit par l'expansion isotherme de N moles d'un gaz idéal est donnée par $W = -NRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$ où V_i est le volume initial et V_f est le volume final.

Trivial.

Donner la définition de la pression partielle p_i du constituant i dans un mélange homogène de n constituants. Dériver l'expression de la production d'entropie lors de l'opération de mélange des η_A moles d'un gaz idéal A avec η_B moles d'un gaz idéal B. Initialement, les deux gaz occupent des volumes différents, V_A et V_B séparés par un diaphragme.

Trivial.

Turbines à gaz

Dessiner un cycle thermodynamique idéal d'une turbine à gaz sur les plans ($p - v$) et ($T - s$). Décrire les 4 étapes du cycle.

- 1-2 : compression (quasi) isentropique
- 2-3 : combustion isobare
- 3-4 : détente
- 4-1 : compression isobare

On considère le cycle d'une turbine à gaz. On suppose que i) $p_2 = p_3$, ii) $c_p = \text{cste.}$ et iii) les flux de masse à la turbine et au compresseur sont égaux. Dériver l'expression du rendement thermique du cycle.