

LMECA1901 Mécanique des Milieux Continus

SIMON DESMIDT

Année académique 2022-2023 - Q2



UCLouvain

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Base orthonormée	2
1.2	Matrice de transformation	2
1.3	Vecteurs	2
1.4	Tenseurs	3
1.5	Analyse tensorielle	5
2	Cinématique des milieux continus	8
2.1	Configurations	8
2.2	Courbes caractéristiques	9
2.3	Gradient de transformation	9
2.4	Mesures de déformation	12
2.5	Gradient de vitesse	14
2.6	Tenseur tourbillon (spin tensor)	15
2.7	Conditions de compatibilité	16
3	Mesures de contraintes	17
3.1	Tenseur de contraintes de Cauchy	17
3.2	Stress test uniaxial sur un matériau solide	18
3.3	Critères de contrainte	18
4	Lois de conservation	21
4.1	Conservation	21
4.2	Conservation de la masse	22
4.3	Conservation de la quantité de mouvement	23
4.4	Moment de la quantité de mouvement	23
4.5	Théorème de l'énergie cinétique	24
4.6	Premier principe de la thermodynamique	25
4.7	Théorème de Green-Naghdi-Rivlin	26
4.8	Volume de contrôle	26
4.9	Second principe de la thermodynamique	27
5	Equations constitutives	28
5.1	Axiomes	28
5.2	Petits déplacements	30

Introduction

1.1 Base orthonormée

Une base orthonormée (B.O.N) (e_1, e_2, e_3) est telle que, $\forall i, j, e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, avec δ_{ij} le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ sinon.

On note les bases $(e_i) \equiv (e_1, e_2, e_3)$.

1.2 Matrice de transformation

Une matrice de transformation $[P]$ d'une B.O.N. (e_i) vers une autre (e'_i) est une matrice 3×3 telle que la ligne i contient les composantes du vecteur e'_i dans la base (e_i) .

1.2.1 Propriétés

- $[P][P]^T = [P]^T[P] = [I_d]$
- $\det[P] = \pm 1$. Il vaut 1 si la B.O.N. est directe (B.O.N.D.).

1.2.2 Notation d'Einstein

Einstein a introduit une nouvelle notation pour les sommes afin de rendre les équations plus lisibles : on enlève le symbole somme et, par convention, on sous-entend que la somme se fait sur l'indice qui revient deux fois.

Exemple : $\sum_{j=1}^3 P_{ij} e_j \equiv P_{ij} e_j$

1.3 Vecteurs

Tout vecteur \mathbf{v} peut être représenté par des composantes dans une base quelconque (e_i) : $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i e_i \equiv v_i e_i$.

Le vecteur \mathbf{v} se note $\mathbf{v} = (v_i)$ dans (e_i) ou $\mathbf{v} = \{v\}$ dans (e_i) .

1.3.1 Produit scalaire

Soit les vecteurs quelconques \mathbf{u}, \mathbf{v} . Leur produit scalaire est

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i = \{u\}^T \{v\} = \{v\}^T \{u\} \quad (1.1)$$

1.3.2 Norme d'un vecteur

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_i v_i} = \sqrt{\{\mathbf{v}\}^T \{\mathbf{v}\}} \quad (1.2)$$

1.3.3 Vecteur dans différentes bases

$$\begin{cases} \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_j \mathbf{e}'_j \\ v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i \\ v'_j = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_j \end{cases} \quad (1.3)$$

Si la matrice $[P]$ est la matrice de changement de base de (\mathbf{e}_i) vers (\mathbf{e}'_i) , alors l'équivalence entre les composantes du vecteur \mathbf{v} dans les deux bases est

$$\{\mathbf{v}'\} = [P]\{\mathbf{v}\}; \quad \{\mathbf{v}\} = [P]^T\{\mathbf{v}'\} \quad (1.4)$$

Sous forme indicielle :

$$\mathbf{v}'_i = P_{ij} \mathbf{v}_j; \quad \mathbf{v}_i = P_{ji} \mathbf{v}'_j \quad (1.5)$$

1.3.4 Produit vectoriel

Le produit vectoriel entre les vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} est

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \equiv \mathbf{u}^{\mathbf{v}} \quad (1.6)$$

Dans une B.O.N.D.,
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Produit mixte : $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$

1.4 Tenseurs

Un tenseur est un objet mathématique, qui peut être représentée par des composantes dans une base donnée, sachant que ces composantes sont régies par des lois de transformation précises.

Un scalaire est un tenseur d'ordre 0, un vecteur un tenseur d'ordre 1, et les tenseurs d'ordre peuvent être représentés sous forme de matrices.

1.4.1 Tenseurs d'ordre 2

Soit E^3 l'espace euclidien vectoriel associé à \mathbb{R} , et soit \mathbf{a} une transformation linéaire sur E^3 : $\mathbf{a} : E^3 \rightarrow E^3 : \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{u})$. \mathbf{a} est appelée un tenseur d'ordre 2.

Si $\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{u})$, alors dans la B.O.N. (\mathbf{e}_i) , on a $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_{ij} \mathbf{u}_j$, avec $\mathbf{a}_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{e}_j))$.

Le tenseur \mathbf{a} , comme un vecteur, s'écrit sous forme indicielle : $\mathbf{a} = (a_{ij})$ dans (\mathbf{e}_i) .

→ Remarque : les tenseurs d'ordre 2 se comportant comme des matrices, ils possèdent également un inverse si leur déterminant est non nul.

1.4.2 Changement de base

La règle de transformation des vecteurs existe aussi pour les tenseurs d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{a}'_{ij} = P_{ik}P_{jl}\mathbf{a}_{kl} \\ \mathbf{a}_{ij} = P_{ki}P_{lj}\mathbf{a}'_{kl} \end{cases} \quad (1.7)$$

On a dans ce cas-ci une double somme sur k et l .

Sous forme matricielle, on a alors

$$[a'] = [P][a][P]^T \quad [a] = [P]^T[a'][P] \quad (1.8)$$

1.4.3 Produit tensoriel

$$\mathbf{a} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{u}_i\mathbf{v}_j \text{ dans } (\mathbf{e}_i) \quad (1.10)$$

Le produit scalaire est $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$, tandis que le produit tensoriel est $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

Il est possible de décomposer tout tenseur \mathbf{a} : $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$.

1.4.4 Trace d'un tenseur

$$tr(\mathbf{a}) = \mathbf{a}_{ii} = \mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22} + \mathbf{a}_{33} \quad (1.11)$$

1.4.5 Carré d'un tenseur

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \implies (\mathbf{a}^2)_{ij} = a_{ik}a_{kj} \quad (1.12)$$

1.4.6 Produit contracté

$$a : b = a_{ij}b_{ji} = tr(a \cdot b) \quad (1.13)$$

→ Remarque : $tr(a) = a : \mathbf{1}$

1.4.7 Tenseurs symétriques

Tout tenseur \mathbf{a} peut être décomposé de la manière suivante : $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^T)$. Le premier terme est symétrique et le second anti-symétrique.

Un tenseur a est symétrique s'il vérifie $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ji} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}^T$. Il peut être décomposé tel que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{1}{3}(tra)\mathbf{1} + \frac{1}{3}(tra)\mathbf{1} \quad (1.14)$$

Le tiers négatif est le terme déviatorique, i.e. lié au changement de forme, et le tiers positif le terme sphérique, i.e. lié au changement de volume.

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{dev} \equiv \mathbf{a} - \frac{1}{3}(tra)\mathbf{1} \\ \mathbf{a}^{sph} \equiv \frac{1}{3}(tra)\mathbf{1} \end{cases} \quad (1.15)$$

Propriétés

- $tra^{dev} = 0$
- $tra^{sph} = tra$

1.4.8 Principes invariants

- $I_1(\mathbf{a}) = tra$
- $I_2(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}((tra)^2 - tr(\mathbf{a}^2))$
- $I_3(\mathbf{a}) = \det(\mathbf{a})$

Cela signifie que ces trois valeurs ne changent pas pour un tenseur donné, quelle que soit la base dans laquelle il est exprimé.

1.4.9 Tenseurs d'ordre supérieur

Pour un tenseur d'ordre n , le changement de base nécessite une n -uple somme contenant n termes de la matrice de changement de base et le terme du tenseur.

Les produits tensoriels et contractés vus précédemment fonctionnent de la même manière pour les tenseurs d'ordre supérieur à 2.

→ Remarque : une base est directe uniquement si son déterminant vaut 1.

1.5 Analyse tensorielle

1.5.1 Analyse tensorielle d'un champ scalaire

Soit $f(\bar{x}_i)$ un champ scalaire.

Considérons deux particules matérielles infiniment proches dont les positions sont x et $x + dx$. Le gradient ∇f du champ $f(\bar{x}_i)$ est un champ vectoriel défini par

$$\begin{cases} df = \vec{\nabla} f \cdot \vec{dx} \\ df \equiv f(\bar{x}_i + d\bar{x}_i) - f(\bar{x}_i) \end{cases} \quad (1.16)$$

Trouver le gradient de f dans un système de coordonnées B.O.N. quelconque

- Déterminer df .
- Déterminer \vec{dx} .
- A partir de l'équation 1.16 écrite sous forme vectorielle, déterminer les composantes du vecteur $\vec{\nabla} f$.

En coordonnées cartésiennes, cela donne

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3)e_i \quad (1.17)$$

Et coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z)e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z)e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}(r, \theta, z)e_z \quad (1.18)$$

1.5.2 Analyse tensorielle d'un champ vectoriel

→ Remarque : la manière de faire ne change pas entre les champs scalaires et vectoriels.

Soit $\mathbf{v}(\bar{x}_i)$ un champ vectoriel.

Considérons deux particules matérielles infiniment proches dont les positions sont \mathbf{x} et $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$. Le gradient $\nabla \mathbf{v}$ du champ $\mathbf{v}(\bar{x}_i)$ est un tenseur d'ordre 2 défini par

$$\begin{cases} d\mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{x} \\ d\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\bar{x}_i + d\bar{x}_i) - \mathbf{v}(\bar{x}_i) \end{cases} \quad (1.19)$$

Trouver le gradient de \mathbf{v} dans un système de coordonnées B.O.N. quelconque

- Déterminer $d\mathbf{v}$.
- Déterminer $d\mathbf{x}$.
- A partir de l'équation 1.19 écrite sous forme matricielle, déterminer les composantes de la matrice $\vec{\nabla} \mathbf{v}$

En coordonnées cartésiennes, cela donne

$$\vec{\nabla} \mathbf{v}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) \quad (1.20)$$

Et en coordonnées cylindriques, pour un champ vectoriel $\mathbf{v}(r, \theta, z) = F\vec{e}_r + G\vec{e}_\theta + H\vec{e}_z$, avec F, G, H des fonctions de (r, θ, z)

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} - G \right) & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial G}{\partial \theta} + F \right) & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Divergence

La divergence d'un champ vectoriel sous forme intrinsèque (ou tensorielle) est

$$\boxed{\text{div}(\mathbf{v}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{v})} \quad (1.22)$$

Pour les systèmes de coordonnées cartésiennes, on peut la noter

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} \quad (1.23)$$

Et en coordonnées cylindriques,

$$\text{div}(\mathbf{v}) \equiv \text{tr}(\nabla \mathbf{v}) = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial G}{\partial \theta} + F \right) + \frac{\partial H}{\partial z} \quad (1.24)$$

Laplacien

Pour rappel,

$$dg = (\nabla g) \cdot (d\mathbf{x}) \quad (1.25)$$

On peut donc calculer la divergence de la divergence du champ scalaire $g : \nabla \nabla g$. Le laplacien d'un champ scalaire g sous forme intrinsèque est

$$\Delta g = \text{tr} (\nabla \nabla g) \quad (1.26)$$

Pour les systèmes de coordonnées cartésiennes, il vaut

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \quad (1.27)$$

Et en coordonnées cylindriques,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \quad (1.28)$$

1.5.3 Analyse tensorielle d'un champ tensoriel symétrique d'ordre 2

Soit \mathbf{a} un champ tensoriel symétrique d'ordre 2, et \mathbf{u} un champ vectoriel quelconque.

Sous forme intrinsèque, on a

$$\text{div}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) = (\text{div} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} : (\nabla \mathbf{u}) \quad (1.29)$$

En coordonnées cartésiennes, on a donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} u_j) = \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) u_i + a_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.30)$$

Si on remplace le champ vectoriel \mathbf{u} par les vecteurs de la base de coordonnées cylindriques, on a

$$\begin{cases} (\text{div} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_r = \text{div}(a \cdot \mathbf{e}_r) - a : (\nabla \mathbf{e}_r) = \frac{\partial a_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_{\theta r}}{\partial \theta} + a_{rr} \right) + \frac{\partial a_{zr}}{\partial z} - \frac{1}{r} a_{\theta\theta} \\ (\text{div} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_\theta = \text{div}(a \cdot \mathbf{e}_\theta) - a : (\nabla \mathbf{e}_\theta) = \frac{\partial a_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_{\theta\theta}}{\partial \theta} + a_{r\theta} \right) + \frac{\partial a_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} a_{r\theta} \\ (\text{div} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_z = \text{div}(a \cdot \mathbf{e}_z) - a : (\nabla \mathbf{e}_z) = \frac{\partial a_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_{\theta z}}{\partial \theta} + a_{rz} \right) + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z} \end{cases} \quad (1.31)$$

Cinématique des milieux continus

2.1 Configurations

Considérons un milieu continu. Il occupe une configuration de référence $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ au temps $t = 0$ et une configuration actuelle $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ au temps $t > 0$.

→ Remarque : lorsque le milieu est un solide, on considère la configuration de référence comme étant sa forme lorsqu'il n'est pas déformé. Lorsque le milieu est fluide, la configuration de référence est arbitraire.

2.1.1 Description du mouvement

Le mouvement du milieu continu est décrit par la transformation $\Phi(\mathbf{X}, t)$ telle que

$$\Phi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

La relation réciproque à Φ est $\mathbf{X} = \phi(\mathbf{x}, t)$ et est bijective.

Convention : On utilise des indices majuscules pour les configurations de référence et des indices minuscules pour les configurations actuelles : $\mathbf{X} = (X_A)$ et $\mathbf{x} = (x_i)$.

→ Remarque : en cartésiennes, \mathbf{X} est aussi le vecteur position d'une particule matérielle dans Ω_0 $\mathbf{X} = \vec{OM}_0$ et \mathbf{x} est aussi le vecteur position d'une particule matérielle dans Ω_t : $\mathbf{x} = \vec{OM}_t$.

2.1.2 Descriptions lagrangienne et eulérienne

Soit un champ donné exprimé par $\mathbf{K}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$. Sa description lagrangienne est $\mathbf{K}(\mathbf{X}, t)$ et sa description eulérienne est $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$.

Exemple du vecteur vitesse

Soit le champ vectoriel de vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$. Sa description lagrangienne est

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

et l'eulérienne est

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

2.1.3 Dérivée matérielle par rapport au temps

Si le champ $\mathbf{K}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$, alors

$$\dot{\mathbf{K}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x} \cdot \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{k}} \equiv \frac{dk}{dt} \quad (2.4)$$

Exemple de l'accélération

Soit le champ vectoriel de la vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

$$\dot{\mathbf{V}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{v}} \quad (2.5)$$

L'accélération se définit donc comme étant

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \equiv \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

2.2 Courbes caractéristiques

2.2.1 Trajectoire

Une trajectoire est une courbe dans l'espace définie comme étant l'ensemble des positions x prises aux temps $t \geq 0$ par une particule matérielle donnée qui était à la position \hat{X} au temps $t = 0$.

$$dx = \mathbf{V}(\hat{\mathbf{X}}, t) dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt \quad (2.7)$$

avec la condition initiale $\mathbf{x}(t = 0) = \hat{\mathbf{X}}$

2.2.2 Ligne de courant

Une ligne de courant au temps \hat{t} est une courbe dans l'espace tangente en tout point au vecteur vitesse de chacun de ces points. Soit le paramètre s .

$$dx(s) = v(x(s), \hat{t}) ds \quad (2.8)$$

Il s'agit en quelque sorte d'une image en instantané.

2.2.3 Ligne d'émission

Une ligne d'émission à une position \hat{x} dans l'espace et au temps \hat{t} est une courbe créée par toutes les particules matérielles \mathbf{X} qui ont occupé la position \hat{x} en tout temps $t \in [0, \hat{t}]$.

$$x = x(\phi(\hat{x}, t), \hat{t}) \quad (2.9)$$

2.3 Gradient de transformation

Considérons deux particules infiniment proches dont les vecteurs positions sont \mathbf{X} et $(\mathbf{X} + d\mathbf{X})$ dans la configuration de référence, et \mathbf{x} et $(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ dans la configuration actuelle. Le gradient de transformation $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ est défini par

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.10)$$

En coordonnées cartésiennes, les éléments du gradient sont

$$F_{iA} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \quad (2.11)$$

et le vecteur déplacement u est défini par

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (2.12)$$

2.3.1 Changement de volume

Soit dans une B.O.N. les éléments infinitésimaux de volume $dV_0 := d\vec{\mathbf{X}}_1 \cdot (d\vec{\mathbf{X}}_2 \times d\vec{\mathbf{X}}_3)$ et $dV := d\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot (d\vec{\mathbf{x}}_2 \times d\vec{\mathbf{x}}_3)$.

Par l'équation 2.10,

$$dV = \det(\mathbf{F})dV_0 \quad (2.13)$$

et on définit

$$J(\mathbf{X}, t) \equiv \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) > 0 \quad (2.14)$$

Par conséquent, \mathbf{F} est inversible et $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}$

2.3.2 Changement de surface

Considérons un élément de surface infinitésimal de surface dA et de vecteur normal sortant \mathbf{N} dans la configuration de référence qui se transforme en l'élément de surface da dont le vecteur normal sortant est \mathbf{n} dans la configuration actuelle.

$$\mathbf{n}da = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA \quad (2.15)$$

→ Remarque : $F^{-T} = (F^{-1})^T = (F^T)^{-1}$

2.3.3 Propriétés

- Dans une base donnée, F peut être représenté par une matrice $[F]_{3 \times 3}$ inversible, mais pas symétrique en général.
- Si $J = 1$, alors la déformation n'induit pas de changement de volume et on dit qu'elle est isochore. Un matériau est dit incompressible si toutes ses transformations possibles sont isochores.

2.3.4 Décomposition polaire

F peut être décomposé de manière unique de la manière suivante :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.16)$$

avec la rotation \mathbf{R} tel que $[R][R]^T = [I_d]$, et \mathbf{U} et \mathbf{V} des tenseurs d'ordre 2, symétriques et définis positifs.

2.3.5 Tenseurs de Cauchy-Green à droite

\mathbf{C} est appelé Tenseur de Cauchy-Green à droite et est défini selon la configuration de référence :

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{F}^T \mathbf{F} \implies C_{AB} = F_{Ai} F_{iB} \quad (2.17)$$

On voit que les indices sont des majuscules et on est donc bien dans la configuration de référence. De plus,

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad (2.18)$$

Appelons les valeurs propres de \mathbf{U} $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ et ses vecteurs propres associés $(E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)})$ formant une B.O.N.

On peut montrer (voir cours) que \mathbf{C} et \mathbf{U} ont les mêmes vecteurs propres, et les valeurs propres de \mathbf{C} sont le carré de celles de \mathbf{U} .

→ Remarque : cela se généralise pour toutes les puissances de \mathbf{U} .

Les vecteurs propres de \mathbf{C} et donc de \mathbf{U} forment une B.O.N.

Soit les vecteurs $\mathbf{e}^{(I)}$ tels que

$$\mathbf{e}^{(I)} = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{F} \cdot \vec{E}^{(I)} \quad (2.19)$$

Ils forment une B.O.N., et la décomposition polaire de \mathbf{F} peut alors se réécrire

$$\mathbf{F} = \sum_J \lambda_J \mathbf{e}^{(J)} \otimes \vec{E}^{(J)} \quad (2.20)$$

→ Remarque : \mathbf{C} est symétrique, défini positif et $\det \mathbf{C} = J^2$.

2.3.6 Tenseur de Cauchy-Green à gauche

Soit le tenseur de Cauchy-Green à gauche défini par

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.21)$$

Le tenseur de CG à gauche est défini par rapport à la configuration actuelle. Il est symétrique, défini positif et $\det \mathbf{b} = J^2$.

→ Remarque : $\mathbf{b}^T \neq \mathbf{C}$.

\mathbf{b} sous décomposition spectrale s'écrit

$$\sum_I \lambda_I^2 \{e^{(I)}\} \{e^{(I)}\} \quad (2.22)$$

Les valeurs propres de \mathbf{b} sont les mêmes que \mathbf{C} , mais ils n'ont pas les mêmes vecteurs propres : les vecteurs propres de \mathbf{b} sont les $\{e^{(I)}\}$.

2.3.7 En résumé

	\mathbf{b}	\mathbf{C}	\mathbf{U}	
\mathbf{b}	-	Mêmes valeurs propres		M
\mathbf{C}	Mêmes valeurs propres	-	Mêmes vecteurs propres	
$+ \text{vap}(\mathbf{C}) = \text{vap}(\mathbf{U})^2$				
\mathbf{U}		Mêmes vecteurs propres		
$+ \text{vap}(\mathbf{C}) = \text{vap}(\mathbf{U})^2$	-	Mêmes valeurs propres		
\mathbf{V}	Mêmes vecteurs propres		Mêmes valeurs propres	

2.3.8 Rotation \mathbf{R}

A partir de $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$, on peut trouver \mathbf{R} , car nous avons déterminé \mathbf{F} et \mathbf{U} précédemment :

$$\mathbf{R} = \sum_I \{e^{(I)}\} \{E^{(I)}\}^T \quad (2.23)$$

2.3.9 Décomposition spectrale

La décomposition spectrale de la matrice identité est

$$[\mathbf{I}_d] = \sum_I \{E^{(I)}\} \{E^{(I)}\}^T \quad (2.24)$$

et celle du vecteur $d\mathbf{X}$ est

$$d\mathbf{X} = \sum_I \alpha_I \mathbf{E}^{(I)} \quad (2.25)$$

Par le calcul de $\frac{dl}{dL} := \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|}$, on trouve $\frac{dl}{dL} = \lambda_i$ si $d\mathbf{X}$ est parallèle à $\vec{E}^{(i)}$. Les λ_i sont donc les rapports de longueur d'un segment matériel infinitésimal qui, dans la configuration principale, était parallèle à $\vec{E}^{(I)}$.

$$\begin{cases} \text{Si } \lambda_i > 1, \text{ on parle d'élongation.} \\ \text{Si } \lambda_i = 1, \text{ on parle d'inextensibilité.} \\ \text{Si } \lambda_i < 1, \text{ on parle de retrécissement.} \end{cases} \quad (2.26)$$

2.4 Mesures de déformation

2.4.1 En une dimension

La mesure de déformation peut être définie de différentes manières :

- Mesure nominale : $\varepsilon^B(\lambda) = \lambda - 1$. Elle est utilisée pour les petites déformations.
- Mesure de Green-Lagrange : $\varepsilon^G(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$
- Mesure d'Almansi-Euler : $\varepsilon^A(\lambda) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)$
- Mesure logarithmique : $\varepsilon^{Log}(\lambda) = \ln \lambda$
- Mesure de Seth-Hill : $\varepsilon^{(m)}(\lambda) = \frac{1}{m}(\lambda^m - 1)$ avec $m \in \mathbb{Z}_0$. Elle généralise les précédentes.

→ Remarque : lorsque la déformation est petite, la mesure nominale approxime correctement toutes les autres.

D'autres mesures peuvent être définies, mais elles doivent respecter les conditions suivantes :

- $f(1) = 0$
- $\frac{df}{d\lambda}(1) = 1$
- $\frac{df}{d\lambda}(\lambda) > 0 \forall \lambda > 0$, i.e. $f(\lambda)$ est monotone croissante.

2.4.2 En plusieurs dimensions

Soit $f(\lambda)$ la mesure de déformation en 1D. Elle peut être généralisée au cas multidimensionnel :

- Dans la configuration de référence : $\varepsilon^r = \sum_{I=1}^3 f(\lambda_I) E^{(I)} \otimes E^{(I)}$
- Dans la configuration actuelle : $\varepsilon^c = \sum_{I=1}^3 f(\lambda_I) e^{(I)} \otimes e^{(I)}$

Dans le cas multidimensionnel, les mesures définies précédemment existent également :

- Mesure nominale : $\varepsilon^B = \mathbf{U} - \mathbf{1}$
- Mesure de Green-Lagrange, liée à la configuration de référence : $\varepsilon^G = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$
- Mesure d'Almansi-Euler, liée à la configuration actuelle : $\varepsilon^A = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1})$
- Mesure logarithmique : $\varepsilon^{Log} = \sum_{I=1}^3 (\ln \lambda_I) e^{(I)} \otimes e^{(I)} \equiv \ln V$
- Mesure de Seth-Hill dans la configuration de référence : $\varepsilon^{(m)r} = \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{1})$ avec $m > 0, \in \mathbb{Z}$
- Mesure de Seth-Hill dans la configuration actuelle : $\varepsilon^{(m)c} = \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{1})$ avec $m < 0, \in \mathbb{Z}$

2.4.3 Tenseur de déformation de Green-Lagrange

Considérons deux particules matérielles infiniment proches dont les vecteurs positions sont \mathbf{X} et $(\mathbf{X} + d\mathbf{X})$ dans la configuration de référence, et \mathbf{x} et $(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ dans la configuration actuelle.

$$\frac{1}{2} \frac{\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2}{\|d\mathbf{X}\|^2} = \frac{d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|} \cdot \varepsilon^G \cdot \frac{d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|} \quad (2.27)$$

où ε^G a été défini précédemment.

Considérons maintenant deux segments matériels infiniment petits dont l'origine est le même point matériel : $d\mathbf{X}^{(1)}$ et $d\mathbf{X}^{(2)}$ dans la configuration de référence, et $d\mathbf{x}^{(1)}$ et $d\mathbf{x}^{(2)}$ dans la configuration actuelle. Nous pouvons prouver que

$$\frac{1}{2} (d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} - d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)}) = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \varepsilon^G \cdot d\mathbf{X}^{(2)} \quad (2.28)$$

Si ces segments sont perpendiculaires, ε_{ii}^G donne une variation relative de longueur, tandis que $\varepsilon_{ij}^G = \cos dx^{(i)}, dx^{(j)}, \forall i \neq j$ et donne une variation relative d'angle.

Dans un repère cartésien, avec le vecteur déplacement $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$,

$$\varepsilon^G = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (2.29)$$

→ Remarque : on peut négliger le terme non linéaire lorsque les déformations sont petites.

2.4.4 Hypothèse des petites déformations

Dans un système de coordonnées cartésiennes où les déformations sont petites, on peut négliger le terme non linéaire du gradient de déformation, et il n'y a donc plus besoin de distinguer les indices majuscules des minuscules. On peut alors faire les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{C} \approx \mathbf{1} + 2\varepsilon \approx b \\ \mathbf{U} \approx \mathbf{1} + \varepsilon \approx \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \approx \mathbf{1} + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T) \\ \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} \approx \mathbf{1} + \frac{d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|} \cdot \varepsilon \cdot \frac{d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|} \end{cases} \quad (2.30)$$

Dès lors, si un segment $d\mathbf{X}^{(i)}$ est aligné avec le vecteur \mathbf{e}_i avant la déformation, alors après la déformation il est transformé en $d\mathbf{x}^{(i)}$ tel que :

$$\frac{\|d\mathbf{x}^{(i)}\|^2 - \|d\mathbf{X}^{(i)}\|^2}{\|d\mathbf{X}^{(i)}\|^2} \approx \varepsilon_{ii} \quad (2.31)$$

Sans somme sur les indices.

Si deux petits segments matériels $d\mathbf{X}^{(i)}$, $d\mathbf{X}^{(j)}$ alignés respectivement avec \mathbf{e}_i et \mathbf{e}_j avant la déformation, avec $i \neq j$, alors ils sont transformés après déformation en $d\mathbf{x}^{(i)}$, $d\mathbf{x}^{(j)}$ tels que :

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathbf{x}^{(i)}}{\|d\mathbf{x}^{(i)}\|} \cdot \frac{d\mathbf{x}^{(j)}}{\|d\mathbf{x}^{(j)}\|} \approx \varepsilon_{ij} \quad (2.32)$$

Sans somme sur les indices.

Si un élément de volume infiniment petit a une valeur dV_0 avant déformation et dV après, alors

$$J = \det \mathbf{F} \approx 1 + \varepsilon \operatorname{tr} \varepsilon \approx \frac{dV - dv_0}{dV_0} \quad (2.33)$$

2.4.5 Tenseur de déformation d'Almansi-Euler

Soient deux particules matérielles infiniment proches dont les vecteurs positions sont \mathbf{X} et $(\mathbf{X} + d\mathbf{X})$ dans la configuration de référence et \mathbf{x} et $(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ dans la configuration actuelle.

$$\frac{1}{2} \frac{\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2}{\|d\mathbf{x}\|^2} = \frac{d\mathbf{x}}{\|d\mathbf{x}\|} \cdot \varepsilon^A \cdot \frac{d\mathbf{x}}{\|d\mathbf{x}\|} \quad (2.34)$$

où ε^A a été défini précédemment.

2.5 Gradient de vitesse

Soient deux particules matérielles infiniment proches dont les vecteurs positions sont \mathbf{X} et $(\mathbf{X} + d\mathbf{X})$ dans la configuration de référence et \mathbf{x} et $(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ dans la configuration actuelle. Le gradient de vitesse L est le tenseur d'ordre 2 défini comme suit :

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.35)$$

Dans un repère cartésien, $L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

→ Remarque : L est défini par rapport à la configuration actuelle et n'est pas symétrique en général.

Par la définition du gradient de déformation F , on peut trouver

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \iff \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.36)$$

Le gradient de vitesse peut être décomposé en deux parties, symétrique et anti-symétrique, comme tout tenseur d'ordre 2:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.37)$$

Et on appelle le terme symétrique le tenseur du taux de déformation D , et le terme anti-symétrique le tenseur tourbillon Ω .

2.5.1 Tenseur du taux de déformation

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (L_{ij} + L_{ji}) = D_{ji} \quad (2.38)$$

$$div \mathbf{v} = tr \mathbf{L} = tr \mathbf{D} = \frac{\dot{\mathbf{J}}}{\mathbf{J}} \quad (2.39)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\ln \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} \right) = \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{x}\|} \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{x}\|} \quad (2.40)$$

Cela signifie que D mesure la dérivée matérielle temporelle de l'élongation $\frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|}$.

De plus,

$$\dot{\varepsilon}^G = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.41)$$

$$\dot{\varepsilon}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{b}^{-1}) \quad (2.42)$$

2.6 Tenseur tourbillon (spin tensor)

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (L_{ij} - L_{ji}) = -\Omega_{ji} \quad (2.43)$$

Et $\Omega_{ii} = 0 \forall i$.

Soit le vecteur spin ω défini comme suit :

$$\{\omega\} \equiv \begin{pmatrix} -\Omega_{23} \\ \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$\Omega \cdot \mathbf{u} = \omega \times \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \quad (2.45)$$

2.7 Conditions de compatibilité

Soit $\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon_{ji}(x)$ un champ de tenseur d'ordre 2. Il est possible de trouver le champ de déplacement tel que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.46)$$

si les conditions de compatibilité (CC) sont satisfaites. Ces conditions sont dans le formulaire et ne sont pas reprises ici.

- Pour un domaine simplement connexe, les CC sont nécessaires et suffisantes.
- Un domaine simplement connexe est tel que toute courbe fermée dans le domaine peut être rétrécie continuellement jusqu'à un point sans sortir du domaine.
- Pour un domaine multi-connexe, les CC sont nécessaires mais pas suffisantes.

Mesures de contraintes

3.1 Tenseur de contraintes de Cauchy

3.1.1 Définition

- Le tenseur de contraintes de Cauchy s'appliquant sur un milieu continu est noté σ .
- Définition de Cauchy : la force (de contact) surfacique sur une surface dont le vecteur normal unitaire sortant est \mathbf{n} est le vecteur \mathbf{t} tel que $\mathbf{t} = [\sigma]^T \cdot \mathbf{n}$, et ce dans toute base. On le note :

$$\mathbf{t}^{(i)} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (3.1)$$

- Une contrainte de cisaillement est une contrainte dont la direction est perpendiculaire au vecteur normal unitaire sortant de la surface.

3.1.2 Propriétés

- Etant donné qu'un équilibre est requis à l'interface de deux parallélépipèdes infinitésimaux du milieu continu, \mathbf{t} doit satisfaire $\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}, t) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$.
- Le tenseur de Cauchy est symétrique.
- La règle de changement de base vue précédemment pour les tenseurs généraux s'applique et plus largement toutes les propriétés des tenseurs.

3.1.3 Contraintes tangentielle et normale

Lorsque l'adhésion entre les faces de deux parallélépipèdes infinitésimaux du milieu continu n'est plus parfaite (= décollement), on a un phénomène de décohésion (ou fissure pour les solides).

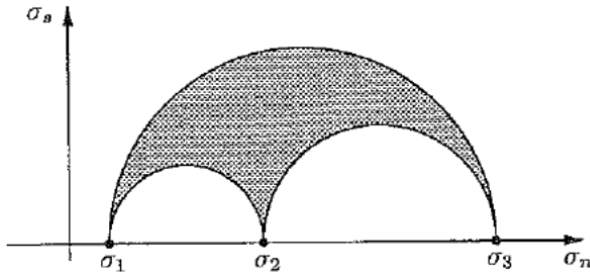
On peut décomposer le vecteur de contraintes en une partie normale et une partie tangentielle :

$$\mathbf{t} = (/ / \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\perp \mathbf{n}) = \sigma_n \mathbf{n} + \vec{\tau} \quad (3.2)$$

La contrainte normale s'écrit $/ / \mathbf{n} = \vec{n} \cdot \vec{t} = \vec{n} \cdot \sigma^T \cdot \vec{n} = n_i \sigma_{ji} n_j \equiv \sigma_n$ et est un scalaire. On l'appelle traction si elle est positive et compression dans le cas contraire.

La contrainte tangentielle s'écrit $\perp \vec{n} = \sigma^T \cdot \vec{n} - \sigma_n \vec{n} \equiv \vec{\sigma}$. Sa norme $\sigma_s = \|\vec{\sigma}\|$ s'appelle contrainte de cisaillement.

3.1.4 Cercles de Mohr



Soient les σ_i les contraintes normales s'appliquant. Les seuls couples σ_n, σ_s mathématiquement possibles sont ceux faisant partie de la surface hachurée. Cela signifie que le σ_s maximal est le rayon du plus grand cercle de Mohr.

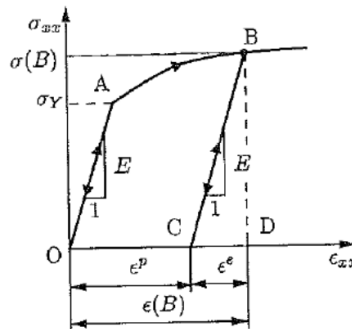
3.1.5 Pression hydrostatique

La pression hydrostatique est une pression s'appliquant uniformément de manière normale sur tout le milieu continu.

$$p \equiv \frac{-1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (3.3)$$

3.2 Stress test uniaxial sur un matériau solide

Pour les matériaux solides isotropes, l'évolution de la contrainte selon l'élongation est la suivante, pour $\varepsilon_{xx} = \frac{l-l_0}{l_0}$:



La courbe partant de l'origine jusqu'en A est linéaire. Ici, le comportement du solide est élastique et les déformations sont réversibles. Après A, la courbe est non linéaire et les transformations sont irréversibles (i.e. on ne peut pas retourner avant A). Le solide a un comportement plastique. Lorsqu'on arrive au point B et que la contrainte diminue, l'élongation suit la seconde droite et on arrive en C si la contrainte devient nulle. Après la déformation irréversible, le comportement linéaire et réversible a lieu sur la droite CB.

3.3 Critères de contrainte

3.3.1 Critère de von Mises

Si $\sigma_{eq} < \sigma_Y$, le matériau reste élastique. Avec σ_Y le "initial yield stress", et σ_{eq} le stress de von Mises équivalent :

$$\sigma_{eq} \equiv \left(\frac{3}{2} \sigma^{dev} : \sigma^{dev} \right)^{1/2} = \left(\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{dev} \sigma_{ji}^{dev} \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

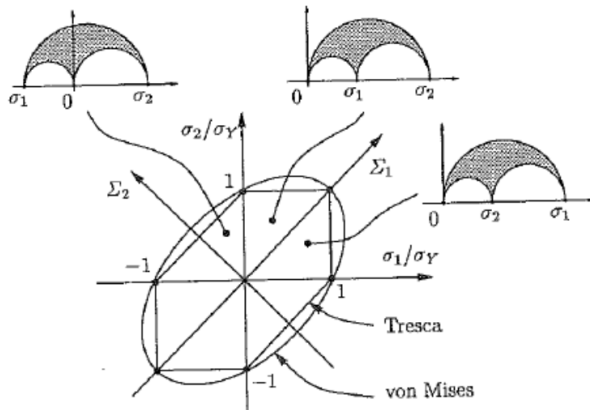
avec σ^{dev} la partie déviatorique de σ .

3.3.2 Critère de Tresca

Si $2\tau_{max} < \sigma_Y$, le matériau reste élastique. Avec τ_{max} la contrainte de cisaillement maximale.

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sup |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3| \quad (3.5)$$

3.3.3 Comparaison entre Tresca et von Mises



Pour un état de contrainte biaxial, l'équation du critère de von Mises donne une ellipse, tandis que le critère de Tresca donne un hexagone. Chacun des triangles de l'hexagone est déterminé à partir des cercles de Mohr.

A l'intérieur de ces formes, le comportement du matériau est élastique, et plastique à l'extérieur.

→ Remarque : par convention, on note les contraintes σ_i dans l'ordre décroissant.

3.3.4 Critère de cédement général

Le critère de cédement général se note à partir des principes invariants de la contrainte de Cauchy :

$$f(I_1(\sigma), I_2(\sigma), I_3(\sigma)) < \sigma_Y \quad (3.6)$$

ou à partir des valeurs principales de la contrainte de Cauchy :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_Y \quad (3.7)$$

où f est une fonction symétrique de ses arguments dans le second cas.

Si le critère est vérifié, le matériau reste élastique.

3.3.5 Critère de rupture

Soit $\sigma_T(\sigma) = \sup(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 0)$ la contrainte principale maximale. Si $\sigma_T < \sigma_F$, alors le matériau reste élastique. Si $\sigma_T \geq \sigma_F$, alors une fissure apparaît dans un plan perpendiculaire à la direction de σ_T . $\sigma_F > 0$ est la contrainte de rupture.

3.3.6 Autres mesures de contrainte

- Tenseur de contrainte de Kirchhoff : $\tau = J\sigma$; $\tau_{ij} = J\sigma_{ij}$. Il est symétrique dans la configuration actuelle.
- Second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff : $S = \mathbf{F}^{-1} \cdot \tau \cdot \mathbf{F}^{-T}$; $S_{AB} = (F^{-1})_{Ai} \tau_{ij} (F^{-1})_{Bj}$. Il est symétrique dans la configuration de référence.

3.3.7 Contrainte uniaxiale

Soit un objet cylindrique d'axe e_1 , de longueur l_0 et de surface de section A_0 en $t = 0$. En tout temps $t > 0$, l'objet est sujet à ses extrémités à une force axiale $F(t)e_1$ et $-F(t)e_1$. Sa longueur est $l(t)$ et sa surface de section est $A(t)$. Définissons la contrainte nominale :

$$P_{11}^n(t) = \frac{F(t)}{A_0} = \sigma_{11}(t) \frac{A(t)}{A_0} \quad (3.8)$$

Si le matériau est incompressible, alors $A(t)l(t) = A_0l_0$

3.3.8 Changement de surface

Considérons un élément de surface infinitésimal d'aire dA et de vecteur normal sortant N dans la configuration de référence. Dans la configuration actuelle, il a une aire da et un vecteur normal sortant n .

$$\mathbf{n}da = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA \quad (3.9)$$

3.3.9 Contrainte conjuguée

Pour tout tenseur de mesure de déformation ε^{mes} , on peut définir son tenseur de mesure de contrainte conjugué σ^{mes} tel que

$$\tau : \mathbf{D} = \sigma^{mes} : \dot{\varepsilon}^{mes} \quad (3.10)$$

Lois de conservation

4.1 Conservation

Ce chapitre considère maintenant un volume matériel $\Omega(t)$, et plus seulement un point.

$$\Omega(t) = \{\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) | \mathbf{X} \in \Omega_0\} \quad (4.1)$$

La masse est conservée au cours du temps

$$M(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dv \implies \frac{d}{dt} M(t) = 0 \quad (4.2)$$

avec dv un élément de volume.

4.1.1 Notations

- un exposant (l) (resp. (e)) signifie par rapport aux coordonnées lagrangiennes (resp. eulériennes).
- dv est un élément de volume, tandis que \mathbf{v} est le vecteur vitesse.

4.1.2 Théorème du transport de Reynolds

Soit une quantité physique quelconque $\mathcal{I}(t)$ et soit un champ générique $\phi(\mathbf{x}, t)$.

$$\mathcal{I}(t) = \int_{\Omega(t)} \phi^{(e)}(\mathbf{x}, t) dv \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}(t) = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dv \quad (4.4)$$

Cette expression (\approx lagrangienne) est la somme de la variation en suivant le point matériel et de la déformation du volume associé à ce point matériel.

$$= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi^{(e)} \mathbf{v}) \right) dv \quad (4.5)$$

$$= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial t} dv + \oint_{\partial \Omega(t)} \phi^{(e)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (4.6)$$

avec ds un élément de surface et \mathbf{n} le vecteur unitaire normal sortant de cette surface.

Cette expression (\approx eulérienne) est la somme de la variation à position fixée et du flux à travers la surface de $\Omega(t)$.

4.2 Conservation de la masse

Par le théorème de Reynolds, on obtient l'équation

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dv = 0 \quad (4.7)$$

Or, elle est valable pour tout $\Omega(t)$, l'intégrant est donc nul. On obtient l'équation de continuité :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0} \quad (4.8)$$

4.2.1 Cas particuliers

- Problème stationnaire : $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
- Masse volumique constante (milieu homogène) : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- Masse volumique constante par rapport à \mathbf{X} : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

4.2.2 Volume de contrôle

Soit $\Omega_c(t)$ un volume de contrôle arbitraire et soit \mathbf{v}_s sa vitesse de déformation. Par le TTR :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \phi dv = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \phi dv + \oint_{\partial\Omega(t)} \phi (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (4.9)$$

Le premier terme est une intégrale sur un volume que l'on peut mesurer et contrôler, le second ce que la physique nous dit, et le troisième le flux de la grandeur qui sort du volume de contrôle.

4.2.3 Volume de contrôle immobile

Dans ce cas, $\mathbf{v}_s = 0$. Par conservation de la masse,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho dv = - \oint_{\partial\Omega_c} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (4.10)$$

Si la masse volumique est indépendante du temps, on tombe sur la formule de Bernoulli de la conservation du débit massique :

$$\rho_1 v_1 A_1 - \rho_2 v_2 A_2 = 0 \quad (4.11)$$

4.2.4 Remarques sur le TTR

Le TTR en une seule dimension est la formule de Leibniz :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(b(t), t) \frac{db}{dt} - f(a(t), t) \frac{da}{dt} \quad (4.12)$$

Si on considère une grandeur massique $\phi = \rho Q = [x/kg]$, on a, par le TTR,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho Q dv = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{DQ}{Dt} dv \quad (4.13)$$

4.3 Conservation de la quantité de mouvement

Dans un milieu continu, la quantité de mouvement $\mathbf{P}(t)$ est

$$\mathbf{P}(t) = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} dv \quad (4.14)$$

et sa dérivée est

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{F} = \mathbf{F}^d + \mathbf{F}^c \quad (4.15)$$

avec \mathbf{F}^d les forces agissant à distance et \mathbf{F}^c les forces de contact.

De cela, on déduit, par le TTR et le théorème de la divergence, que

$$\int_{\Omega(t)} \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \sigma \right) dv = 0 \quad (4.16)$$

avec \mathbf{f} la force volumique. Puisque cela est vrai pour un $\Omega(t)$ arbitraire, l'intégrand est nul et

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma \quad (4.17)$$

Cas particuliers :

- Etat stationnaire : $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma$
- Déformations infinitésimales ($\mathbf{x} \approx \mathbf{X}$) : $\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f} = 0$

4.3.1 Volume de contrôle fixe

Ici, $\mathbf{v}_s = 0$ et $\partial\Omega_c(t) = \partial\Omega_c$

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{v} dv + \oint_{\partial\Omega_c} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (4.18)$$

4.4 Moment de la quantité de mouvement

4.4.1 Moment

En toute généralité, le moment d'une quantité $\omega(\mathbf{x}, t)$ est

$$\mathbf{x} \wedge \omega(\mathbf{x}, t) \quad (4.19)$$

Le moment de la quantité de mouvement est donc

$$\mathbf{L} = \rho \mathbf{x} \wedge \mathbf{v} \quad (4.20)$$

4.4.2 Conservation

La conservation du moment de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{x} \wedge \mathbf{v} dv = \mathbf{M}^d + \mathbf{M}^c \quad (4.21)$$

avec \mathbf{M}^d les moments de force à distance et \mathbf{M}^c les moments des forces de contact.

Pour un volume de contrôle fixe, on a

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{v} dx + \oint_{\partial\Omega_c} (\mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (4.22)$$

4.4.3 Forme locale

Par le TTR,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left(\rho \mathbf{x} \wedge \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dv \quad (4.23)$$

Par le théorème de la divergence, la forme indicielle et la conservation de la quantité de mouvement, trouver

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (4.24)$$

ce qui prouve la propriété de symétrie du tenseur des contraintes, sous l'hypothèse que les couples volumiques sont nuls.

4.5 Théorème de l'énergie cinétique

Par produit scalaire de la forme locale de la conservation de la quantité de mouvement avec le champ de vitesse, on obtient

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} = \rho \frac{1}{2} \frac{D(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{Dt} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{v} \quad (4.25)$$

et on y identifie l'énergie cinétique massique et la puissance des forces volumiques.

Par une intégration sur un volume matériel, puis par décomposition et par le théorème de la divergence, on trouve :

$$\int_{\Omega(t)} (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{v} dv = \oint_{\partial\Omega(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds \quad (4.26)$$

Sous l'hypothèse que les couples volumiques sont nuls¹ et par le TTR, on obtient finalement le théorème de l'énergie cinétique suivant :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} dv = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv + \oint_{\partial\Omega(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds - \int_{\Omega(t)} \sigma : \mathbf{D} dv \quad (4.27)$$

qui est équivalent à

$$\frac{d}{dt} K = W^d + W^c - W^i \quad (4.28)$$

avec \mathbf{t} le vecteur de contraintes, \mathbf{D} le tenseur de taux de déformation, K l'énergie cinétique, W^d la puissance des forces volumiques, W^c la puissance des forces de contact et W^i la puissance des efforts internes.

¹Nécessaire pour que σ soit symétrique

4.6 Premier principe de la thermodynamique

$$\frac{d}{dt}(K + U) = W + H \quad (4.29)$$

où $U = \int_{\Omega(t)} \rho e dv$ est l'énergie interne, $W = W^d + W^c$ la puissance mécanique fournie et $H = H^d + H^c$ la puissance calorifique fournie. Les exposants c signifient par conduction et d par production dans le volume.

Le principe se réécrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + e \right) dv = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv + \oint_{\partial\Omega(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds + \oint_{\partial\Omega(t)} h(\hat{\mathbf{n}}) ds + \int_{\Omega(t)} \rho \varepsilon dv \quad (4.30)$$

avec $h(\hat{\mathbf{n}})$ le flux de chaleur entrant dans la surface de normale sortante $\hat{\mathbf{n}}$.

Cette équation comprend

- l'énergie cinétique du mouvement microscopique des molécules (effets de température)
- l'énergie des degrés de liberté vibratoires (effets de chaleur spécifique)
- potentiel chimique des composants,...

La puissance calorifique $\rho \varepsilon$ est due à un rayonnement ou à l'effet Joule.

Si l'on soustrait le théorème de l'énergie cinétique à l'équation du premier principe, on obtient l'équation de conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho e dv = \oint_{\partial\Omega(t)} h(\hat{\mathbf{n}}) ds + \int_{\Omega(t)} \rho \varepsilon dv + \int_{\Omega(t)} \sigma : \mathbf{D} dv \quad (4.31)$$

Sous forme locale, avec \mathbf{q} le vecteur flux de chaleur tel que $q_i = h(\hat{\mathbf{e}}_i)$,

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \varepsilon + \sigma : \mathbf{D} \quad (4.32)$$

ou encore

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + e \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \varepsilon \quad (4.33)$$

4.6.1 Invariance et conséquences

Mouvement rigide - Translation simple

Un mouvement rigide est un mouvement sans déformation.

Soit le repère relatif $\mathbf{x}^r = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t)$, avec \mathbf{Q} la matrice de rotation et \mathbf{c} le vecteur de translation. Les variables transformées sont

$$\begin{cases} \mathbf{t}^r = \mathbf{Q}\mathbf{t} \\ \rho^r = \rho \\ \mathbf{f}^r = \mathbf{Q}\mathbf{f} + \frac{D\mathbf{v}^r}{Dt} - \mathbf{Q} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\begin{cases} \sigma^r = \mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{q}^r = \mathbf{Q}\mathbf{q} \end{cases} \quad (4.35)$$

Dans le cas de la translation simple, $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 t$. De plus, $\mathbf{v}^r = \mathbf{v} + \mathbf{c}_0$, $\frac{d}{dt}\mathbf{Q} = 0$ et $\mathbf{f}^r = \mathbf{f}$. Si on remplace dans l'équation du premier principe, par le principe d'invariance, on obtient :

$$\mathbf{c}_0 \cdot \left[\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} dv - \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} dv + \oint_{\partial\Omega(t)} \mathbf{t} ds \right] + \frac{1}{2} (\mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{c}_0) \left[\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho dv \right] = 0 \quad (4.36)$$

Il nous faut donc annuler les deux termes entre crochets et on retrouve les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de la masse.

Mouvement rigide - Rotation simple

Ce mouvement est caractérisé par les matrices suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{I} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \Omega_0 \\ \mathbf{c} = 0 \end{cases} \quad (4.37) \quad \begin{cases} \frac{D\mathbf{v}^T}{Dt} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \omega_0 \wedge (2\mathbf{v} + \omega \wedge \mathbf{x}) \\ \mathbf{f}^r = \mathbf{f} + \omega_0 \wedge (2\mathbf{v} + \omega_0 \wedge \mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.38)$$

Par le même raisonnement qu'au point précédent, on retrouve l'équation de conservation du moment de la quantité de mouvement.

4.7 Théorème de Green-Naghdi-Rivlin

L'équation de conservation de l'énergie interne couplée au principe d'invariance des lois sous des mouvements rigides permettent de retrouver les lois de conservations démontrées précédemment.

4.8 Volume de contrôle

Réécrivons la loi de conservation de l'énergie :

$$W^d + W^c + H^d + H^c = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + e \right) dv + \oint_{\partial\Omega_c} \rho \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + e \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (4.39)$$

Soit le cas particuliers des fluides. Le tenseur de contraintes se décompose $\sigma = \tau - p\mathbf{I}$ avec τ les contraintes visqueuses, p la pression et \mathbf{I} la matrice identité. Par décomposition des puissances,

$$W^c = \oint_{\partial\Omega_c} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma) \cdot \mathbf{v} ds = \oint_{\partial\Omega_c} (\hat{\mathbf{n}} \cdot (\tau - p\mathbf{I})) \cdot \mathbf{v} ds = W^{c,visc} - \oint_{\partial\Omega_c} p \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} ds \quad (4.40)$$

En réorganisant tout, on trouve

$$\begin{aligned} W^d + W^{c,visc} - \oint_{\partial\Omega_c} p \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_s ds + H^d + H^c &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + e \right) dv \\ &+ \oint_{\partial\Omega_c} \rho \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \boxed{e + \frac{p}{\rho}} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \end{aligned} \quad (4.41)$$

avec \boxed{h} l'enthalpie spécifique.

4.9 Second principe de la thermodynamique

L'entropie \mathcal{S} est une fonction d'état thermodynamique définie telle que

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega(t)} \rho S dv \quad \mathcal{R}^d = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{\varepsilon}{T} dv \quad \mathcal{R}^c = - \oint_{\partial\Omega(t)} \frac{(\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{T} ds \quad (4.42)$$

avec \mathcal{R}^d son flux par production dans le volume et \mathcal{R}^c son flux par conduction.

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} \geq \mathcal{R}^c + \mathcal{R}^d \quad (4.43)$$

Il y a égalité stricte pour des transformations réversibles de $\Omega(t)$.

4.9.1 Forme locale

Par le TTR et le théorème de Green, puis par soustraction de l'équation de l'énergie interne, on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem suivante :

$$\rho T \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{De}{Dt} \geq \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T - \sigma : \mathbf{D} \quad (4.44)$$

Cette inégalité constitue la condition d'admissibilité sur les équations de constitution.

Equations constitutives

Les champs à déterminer sont

- ρ (1)
- \mathbf{u} (3)
- σ (6)
- \mathbf{q} (3)
- e (1)
- S (1)
- T (1)

Cela nous fait 16 inconnues.

Les champs donnés sont

- \mathbf{f}
- ε

Les équations nous permettant de les déterminer sont :

- Les équations de conservation (5)
- Les équations constitutives de
 - σ , les contraintes
 - \mathbf{q} , le flux de chaleur
 - e , l'énergie interne
 - S , l'entropie

5.1 Axiomes

5.1.1 Causalité

Il existe deux variables indépendantes :

- La position dans le milieu continu : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$
- La température : $T = T(\mathbf{X}, t)$

Les autres variables¹ en dépendent (ainsi que de leurs dérivées).

¹Variables dépendantes : $F, \sigma, \mathbf{q}, e, S$

5.1.2 Déterminisme

Les variables dépendantes dépendent de l'histoire passée des variables indépendantes dans tout le système.

5.1.3 Equiprésence

Principe de précaution : si une loi de comportement fait intervenir une variable indépendante, alors on supposera que toutes les lois la font intervenir jusqu'à preuve du contraire.

5.1.4 Action locale

Le comportement du milieu en \mathbf{x} n'est pas trop influencé par les variables indépendantes en un \mathbf{x}' loin de ce point.

- Hypothèses :

Les variables indépendantes sont continues et peuvent être développées en série de Taylor. On définit alors des classes de milieux dont les lois constitutives dépendent des premiers coefficients de la série.

Dans un milieu dit matériellement simple, ou de Cauchy, les variables dépendantes ne dépendent que des variables indépendantes et de leur gradient.

5.1.5 Mémoire

Le comportement n'est pas trop influencé par les variables indépendantes dans le passé lointain. Contre-exemple : alliage à mémoire de forme.

5.1.6 Objectivité

La forme de la loi de comportement est invariante par rapport à un changement de repère spatial en mouvement rigide. Les variables dépendantes ne dépendent donc pas des déplacements \mathbf{x} , mais plutôt de leur gradient. Puisque le tenseur de Green-Lagrange est insensible aux mouvements rigides :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (5.1)$$

5.1.7 Invariance matérielle

Les invariances des propriétés du matériau sont respectées :

- Invariance dans les orientations : symétries.
 - Milieu isotrope : invariance sous rotations et réflexions.
 - Milieu anisotrope : loi dépend de l'orientation.
- Invariance dans les translations : milieu homogène ou hétérogène.

5.1.8 Admissibilité

La loi de constitution doit respecter les lois de conservations et le second principe de la thermodynamique (\equiv principe d'entropie).

5.2 Petits déplacements

Les problèmes de petits déplacements sont une large classe de problèmes caractérisés par des déformations infinitésimales : $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \ll L$, avec L la longueur caractéristique du milieu. Donc $\mathbf{u}/L \approx \varepsilon \ll 1$.

Cela implique que les représentations lagrangienne (tilde) et eulérienne (sans tilde) des champs (s un champ quelconque) sont confondues :

$$\tilde{s}(\mathbf{X}, t) \approx s(X, t) \quad s(\mathbf{x}, t) \approx \tilde{s}(\mathbf{x}, t) \quad (5.2)$$

et les dérivées partielles lagrangienne et eulérienne sont confondues également :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{X}} \approx \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{D \tilde{s}}{Dt} \approx \frac{\partial s}{\partial t} \end{cases} \quad (5.3)$$

5.2.1 Solide thermoélastique

Soient deux lames métalliques constituées de métaux ayant une elongation thermique différente. Si elles sont attachées aux deux extrémités, le solide va plier lorsque la température augmente, à cause de cette différence d'elongation thermique.

- Hypothèses :

Les variables dépendantes (sauf \mathbf{q}) ne dépendent pas du gradient de température. En petites déformations, $\mathbf{E} \rightarrow \epsilon$.

Si on introduit l'énergie libre $f = e - TS$, on obtient à partir de Clausius-Duhem la loi de comportement suivante :

$$S = -\frac{\partial F}{\partial t} \quad \boxed{\sigma = \rho_0 \frac{\partial F}{\partial \epsilon}} \quad \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T \leq 0 \quad (5.4)$$