



---

# LINMA1702 Modèles et méthodes d'optimisation

---

SIMON DESMIDT

Année académique 2022-2023 - Q2



UCLouvain

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Optimisation linéaire</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Enoncé d'un problème d'optimisation . . . . .	3
1.3	Polyèdres . . . . .	5
1.4	Géométrie des polyèdres . . . . .	6
1.5	Méthode du simplexe . . . . .	9
1.6	Dualité . . . . .	11
1.7	Interprétations de la dualité . . . . .	13
1.8	Modification des paramètres . . . . .	14
1.9	Optimisation linéaire en nombres entiers . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Optimisation non linéaire</b>	<b>19</b>
2.1	Conditions d'optimalité sous contraintes . . . . .	19
2.2	Conditions d'optimalité . . . . .	20
2.3	Problèmes avec contraintes d'égalité et d'inégalité . . . . .	21
2.4	Optimisation convexe . . . . .	21
2.5	Méthode de recherche en ligne - Méthode du premier ordre . . . . .	24
2.6	Méthodes de Newton et quasi-Newton . . . . .	26
2.7	Implémentation et autres méthodes . . . . .	28

# Optimisation linéaire

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Définition

Un problème d'optimisation linéaire est défini tel que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad Ax \geq b \quad (1.1)$$

avec  $c$  et  $x$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  une matrice  $m \times n$  contenant les coefficients des  $m$  contraintes linéaires et  $b$  le vecteur de  $\mathbb{R}^m$  complétant les contraintes.

- Les variables  $x_i$  sont appelées variables de décision.
  - Une solution  $x \in \mathbb{R}^n$  est admissible si elle appartient au domaine admissible  $\Omega$ .
  - Une solution optimale  $x^*$  est telle que  $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \Omega$ . Le coût optimal (valeur unique) est alors donné par la valeur  $f(x^*)$ .
- Remarque : il peut exister plusieurs solutions optimales, mais jamais plusieurs coûts optimaux.

### 1.1.2 Déterminer le problème d'optimisation

- Définir les variables du vecteur  $x$ .
- Déterminer la fonction objectif  $c^T x$ , souvent appelée fonction de coût.
- Lister les contraintes linéaires sur les variables de  $x$ .

### 1.1.3 Problème de transport

Un produit est transporté de  $m$  origines vers  $n$  destinations. Il est disponible en quantités  $a_i, i \in \{1, \dots, m\}$  aux origines et les demandes aux destinations sont de  $b_j, j \in \{1, \dots, n\}$ . Le coût de transport d'une unité du produit de l'origine  $i$  à la destination  $j$  est  $c_{ij}$ . On désire déterminer les quantités du produit à transporter de  $i$  à  $j$  de manière à satisfaire les demandes tout en minimisant le coût total des transports.

### 1.1.4 Problème du flot dans un réseau

On considère un réseau de communication de  $n$  noeuds. Les noeuds sont connectés entre eux par des liens de communication. Un lien entre le noeud  $i$  et le noeud  $j$  est représenté par le couple  $(i, j)$ . Chaque lien  $(i, j)$  possède une capacité maximale de  $u_{ij}$  unités de flot. La transmission sur le lien  $(i, j)$  coûte  $c_{ij}$  par unité de flot transmise. Le noeud 1 génère  $b$  unités qui doivent être transmises au noeud  $n$ . La transmission se fait soit par un lien direct, soit par une suite de liens. On cherche le flot qui permet la transmission pour un coût minimum.

### 1.1.5 Problème d'affectation

Il y a  $n$  personnes disponibles et  $n$  tâches à accomplir. A chaque personne on affecte exactement une tâche. On souhaite que toutes les tâches soient affectées. Le coût de la réalisation de la tâche  $j$  par la personne  $i$  est  $c_{ij}$ . On cherche une affectation des tâches qui minimise le coût total.

### 1.1.6 Problème de classification

Considérons  $m$  objets. Pour chaque objet on dispose d'une description de ses caractéristiques en terme d'un vecteur  $a_i \in \mathbb{R}^n$ . Ces objets appartiennent à une classe parmi deux. Soit  $I_1$  l'ensemble des indices des objets qui appartiennent à la première classe, et  $I_2$  l'ensemble des indices de ceux qui appartiennent à la seconde.

Nous disons que les ensembles  $\{a_i | i \in I_1\}$  et  $\{a_i | i \in I_2\}$  sont séparables par un hyperplan s'il existe un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  non nul et un scalaire  $b$  pour lesquels

$$\begin{cases} a_i^T x \leq b \text{ lorsque } i \in I_1 \\ a_i^T x \geq b \text{ lorsque } i \in I_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

avec les  $a_i$  les coordonnées des points,  $x$  le vecteur des coefficients de l'hyperplan et  $b$  le terme indépendant.

Le problème consiste donc à déterminer si deux ensembles donnés de vecteurs sont séparables, et l'équation de la droite de séparation.

Résoudre

$$\max_{x,b,t} t \text{ tel que } \begin{cases} a_i^T x \leq b - t, i \in I_1 \\ a_i^T x \geq b + t, i \in I_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

Si ce problème admet une solution admissible avec un objectif positif ( $t \geq 0$ ), alors le problème est admissible, et si  $t > 0$ , alors il existe une séparation stricte des données.

## 1.2 Enoncé d'un problème d'optimisation

Il s'agit de minimiser ou maximiser une fonction objectif linéaire sous des contraintes d'égalité et d'inégalité linéaires, avec la contrainte supplémentaire que certaines variables sont entières ou binaires.

- Optimisation entière :  $x_i \in \mathbb{Z}$

- Optimisation mixte :  $x_i \in \mathbb{Z}$  pour  $i \in N$
- Optimisation en variables binaires :  $x_i \in \{0, 1\}$

### 1.2.1 Forme générale

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} a_i^T x \leq b_i & i \in M_1 \\ a_i^T x \geq b_i & i \in M_2 \\ a_i^T x = b_i & i \in M_3 \\ x_i \geq 0 & i \in N_1 \\ x_i \leq 0 & i \in N_2 \\ x_i \text{ libres} & i \notin N_1 \cup N_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

On peut aussi spécifier des bornes sur chacune des variables :  $l_i \leq x_i \leq u_i$  avec les bornes inférieures  $l_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et supérieures  $u_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

### 1.2.2 Forme géométrique

Un programme linéaire sous forme géométrique est un problème de la forme

$$\min_{x \in \mathbb{R}} c^T x \quad Ax \geq b \quad (1.6)$$

### 1.2.3 De la forme générale à la forme géométrique

- $\max c^T x = -\min -c^T x$
- $a^T x \leq b \iff -a^T x \geq -b$
- $x_i \leq 0$  et  $x_i \geq 0$  sont des cas particuliers de  $a^T x \geq 0$
- $a^T x = b \iff a^T x \geq b$  et  $a^T x \leq b$

### 1.2.4 Forme standard

Un problème linéaire sous forme standard est un problème de la forme

$$\min c^T x \quad Ax = b \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.7)$$

### 1.2.5 De la forme géométrique à la forme standard

- Eliminer les contraintes d'inégalités : Chaque inégalité  $\sum_i a_{ij}x_j \geq b_i$  est remplacée par les contraintes  $\sum_i a_{ij}x_j - s_i = b_i$  et  $s_i \geq 0$ .
- Eliminer les variables libre : Une variable libre  $x_i$  est remplacée par  $x_i = x_i^+ - x_i^-$ , composée de deux nouvelles variables strictement positives.

→ Remarque : afin de ne pas doubler le nombre de contraintes, on peut définir  $x_i = x_i^+ - \Delta \quad \forall x_i$  libre.

## 1.3 Polyèdres

### 1.3.1 Centre de Chebychev

Le centre de Chebychev d'un polyèdre est le centre de la sphère de plus grand rayon incluse dans le polyèdre.

Soit un ensemble de  $m$  hyperplans d'équation  $a_i^T x = b_i$  et soit le polyèdre  $\{x \in \mathbb{R}^2 | a_i^T x \leq b_i\}$ . Le centre de la sphère est le point  $c$  situé dans le polyèdre pour lequel la plus petite distance  $\min_i |a_i^T c - b_i| / \|a_i\|$  est la plus grande possible.

→ Remarque : on cherche le centre de la boule car il est plus résistant à des variations dans les contraintes que les autres.

Ce problème s'énonce comme suit :

- Les variables sont les coordonnées  $x$  du centre et le rayon  $r$ .
- La fonction objectif est  $r$ .
- les contraintes sont

$$r \leq d(x, \{a_i^T x = b_i\}), \forall i \iff \|a_i\| r \leq |a_i^T x - b_i| \implies \|a_i\| r \leq a_i^T x - b_i \quad (1.8)$$

La dernière égalité s'obtient car lorsque le point  $x$  est dans le polyèdre, la valeur absolue est non positive.

### 1.3.2 Résolution approchée

Soit le système d'équations linéaires  $Ax = b$ . Lorsqu'il y a moins de variables que d'équations, le vecteur  $b$  n'appartient pas à l'image de  $A$  et le système est surdéterminé. Il n'admet pas de solution.

On peut chercher à résoudre le système de manière approchée en minimisant la norme du vecteur résidu  $r = Ax - b$  pour une norme particulière.

#### Normes

- Norme  $\ell^1$  :

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| \quad (1.9)$$

- Norme  $\ell^2$ , ou norme euclidienne :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} \quad (1.10)$$

- Norme  $\ell^\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad (1.11)$$

- Généralisation - norme  $\ell^p$  :

$$\|x\|_p = \left( \sum_i |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (1.12)$$

→ Remarque : la norme  $\ell^2$  est la seule pour laquelle un problème de résolution approchée a une solution analytique.

### 1.3.3 Approximation de fonctions convexes

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable convexe.

En évaluant  $f$  et  $\nabla f$  en  $k$  points  $x^i$ , on a

$$f(x^i) + \nabla f(x^i)^T (x - x^i) \leq f(x) \quad (1.13)$$

et donc

$$\max_{i \in \{1, \dots, k\}} \{f(x^i) + \nabla f(x^i)^T (x - x^i)\} \leq f(x) \quad (1.14)$$

## 1.4 Géométrie des polyèdres

### 1.4.1 Théorème fondamental

$$\min_x c^T x \quad Ax \geq b \quad (1.15)$$

L'ensemble  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$  est un polyèdre.

Si un problème d'optimisation linéaire possède un coût optimal fini et si le polyèdre  $\mathcal{P}$  possède un sommet, alors il y a un sommet de  $\mathcal{P}$  qui est optimal.

### 1.4.2 Hyperplans

Un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui peut être écrit comme  $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$  pour certains  $b \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ .

Le vecteur  $a$  est un vecteur normal à l'hyperplan.

### 1.4.3 Demi-espaces

Un demi-espace de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui peut être écrit comme  $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq b\}$  pour certains  $b \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ . C'est donc l'ensemble des points qui se trouvent d'un côté donné d'un hyperplan.

Le vecteur  $a$  est un vecteur normal au demi-espace.

### 1.4.4 Polyèdres

Un polyèdre de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui peut être écrit comme une intersection d'un nombre fini de demi-espaces de  $\mathbb{R}^n$  :  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^T x \geq b_i, i \in \{1, \dots, m\}\}$ . En notation matricielle,  $\mathcal{P} = \{x | Ax \geq b\}$ .

→ Remarque : un polyèdre est toujours convexe puisqu'il s'écrit comme une intersection d'ensembles convexes.

## Exemples

- Demi-espace
- Hyperplan
- Tranche :  $\{x | b_1 \leq a^T x \leq b_2\}$
- Polyèdre sous forme standard :  $\{x | Ax = b, x \geq 0\}$
- Polyèdre sous forme géométrique :  $\{x | Ax \geq b\}$

→ Remarque : un même polyèdre peut être obtenu au moyen de représentations différentes : si on rajoute des lignes combinaisons linéaires des autres dans la matrice  $A$ , la représentation change mais pas le polyèdre lui-même.

→ Remarque : l'orthant positif est le quadrant supérieur droit dans le plan 2D.

### 1.4.5 Contraintes actives

Soit le polyèdre  $\mathcal{P}$ . Si le point  $x^*$  est tel que  $a_k^T x^* = b_k$  pour un certain indice  $k$ , nous disons que la contrainte correspondante est active en  $x^*$ , i.e.  $x^*$  est sur le bord du polyèdre.

→ Remarque : dans  $\mathbb{R}^n$ , si  $n$  contraintes sont actives en  $x^*$ , alors  $x^*$  est un sommet.

### 1.4.6 Contraintes linéairement indépendantes

Soit le polyèdre  $\mathcal{P}$ . Ses contraintes sont linéairement indépendantes si les vecteurs correspondants  $a_i$  le sont.

→ Remarque : le nombre maximum de vecteurs indépendants dans  $\mathbb{R}^n$  est  $n$ .

### 1.4.7 Solutions admissibles de base

Soit le polyèdre  $\mathcal{P}$ . La solution  $x^* \in \mathbb{R}^n$  est une solution admissible de base de  $\mathcal{P}$  si  $x^* \in \mathcal{P}$  et s'il y a  $n$  contraintes linéairement indépendantes actives en  $x^*$ .

Une solution admissible de base est dégénérée si le nombre de contraintes actives en cette solution est supérieur à  $n$ .

Le caractère dégénéré d'une solution admissible de base dépend en général de la représentation du polyèdre. Ce n'est pas une propriété géométrique du polyèdre, mais bien une propriété de sa représentation.

### 1.4.8 Solutions adjacentes

Soit le polyèdre  $\mathcal{P}$ . Soient  $x_1, x_2$  deux solutions admissibles de base de  $\mathcal{P}$ . Ces deux solutions sont adjacentes s'il y a  $n - 1$  contraintes linéairement indépendantes actives à la fois en  $x_1$  et en  $x_2$ .



### 1.4.9 Points extrêmes et sommets

Le point  $x \in \mathcal{P}$  est un point extrême du polyèdre  $\mathcal{P}$  s'il ne peut pas être exprimé comme combinaison convexe d'autres points de  $\mathcal{P}$ , i.e. s'il n'existe pas deux points  $y, z \in \mathcal{P}$  différents de  $x$  et un scalaire  $\lambda \in [0, 1]$  tels que  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ .

Le point  $x \in \mathcal{P}$  est un sommet du polyèdre  $\mathcal{P}$  si  $x$  est séparable de  $\mathcal{P}$  par un hyperplan, i.e. s'il existe un vecteur  $c$  tel que  $c^T x < c^T y \forall y \in \mathcal{P}, y \neq x$ .

→ Remarque : ces définitions sont des propriétés géométriques du polyèdre, elles ne dépendent pas de sa représentation.

Théorème :

Soit  $\mathcal{P}$  un polyèdre et  $x^* \in \mathcal{P}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $x^*$  est un sommet.
- $x^*$  est un point extrême.
- $x^*$  est une solution admissible de base.

→ Remarque : il existe des polyèdres sans sommets : hyperplan, demi-espace, tranche,...

### 1.4.10 Existence des sommets

Un polyèdre  $\mathcal{P}$  contient une droite s'il existe un vecteur  $x_0$  et un vecteur non nul  $d$  tels que  $x_0 + \lambda d \in \mathcal{P}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ .

Les polyèdres qui possèdent un sommet sont exactement ceux qui ne contiennent pas de droite.

### 1.4.11 Présence des sommets

Un polyèdre donné sous forme géométrique  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$  possède un sommet ssi l'équation  $Ad = 0$  ne possède pas d'autre solution que  $d = 0$ .

Un polyèdre donné sous forme standard  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$  possède toujours un sommet.

→ Remarque : un même problème sous forme standard ne possède pas forcément de sommet sous forme géométrique.

Soit le problème de la minimisation d'une fonction linéaire sur un polyèdre  $\mathcal{P}$ . Si le coût optimal est fini et si le polyèdre possède un sommet, alors il y a un sommet du polyèdre qui est optimal.

### 1.4.12 Nombre de sommets

Un polynôme de  $\mathbb{R}^n$  donné sous forme géométrique au moyen de  $m$  contraintes possède au plus  $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ . Il s'agit bien d'une borne supérieure, le nombre de sommets peut être plus faible, car il faut que  $x \in \mathcal{P}$  et que les contraintes soient linéairement indépendantes.

### 1.4.13 Diamètre d'un polyèdre

La distance  $d(x, y)$  entre les sommets  $x$  et  $y$  d'un polyèdre est définie comme étant le plus court chemin, de sommet adjacent en sommet adjacent, de  $x$  à  $y$ . Le diamètre  $D(\mathcal{P})$  du polyèdre  $\mathcal{P}$  est la plus grande des distances entre des paires de sommets de  $\mathcal{P}$ .

On définit  $\Delta(d, n)$  comme le plus grand diamètre  $D(\mathcal{P})$  des polyèdres bornés de  $\mathbb{R}^d$  décrits au moyen de  $n$  contraintes d'inégalité. Voici la conjecture de Hirsch (en réalité fausse) :

$$\Delta(d, n) \leq n - d \quad (1.16)$$

La meilleure borne actuellement disponible est

$$\Delta(d, n) \leq (n - d)^{\log_2 d} = d^{\log_2(n-d)} \quad (1.17)$$

## 1.5 Méthode du simplexe

### 1.5.1 Théorème fondamental

Si le problème d'optimisation linéaire  $\min c^T x$  tel que  $x \in \mathcal{P}$  possède un coût optimal fini et si le polyèdre  $\mathcal{P}$  possède un sommet, alors il y a un sommet de  $\mathcal{P}$  qui est optimal.

### 1.5.2 Tableau simplexe

Soit le problème linéaire sous forme standard  $\min c^T x$  tel que  $Ax = b$  et  $x \geq 0$ . Le problème est équivalent à celui de la minimisation de  $z$  sous les contraintes

$$\begin{cases} c^T x = z \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Le tableau simplexe se note

$$\begin{array}{c|c} c^T & z \\ \hline A & b \end{array}$$

→ Remarque : les contraintes  $x \geq 0$  sont maintenant implicites.

→ Remarque : un problème peut être représenté par différents tableaux simplexes.

- Propriétés :

- Nous pouvons faire des combinaisons linéaires des contraintes dans le tableau simplexe, et on peut ajouter des multiples de contraintes à la première ligne.
- Un tableau simplexe est sous forme canonique si un ensemble de colonnes dans les contraintes forme la matrice identité et si les coefficients au-dessus de ces colonnes sont nuls. Les variables intervenant dans cette matrice identité sont les variables de base du simplexe.
- La propriété précédente implique que maximum  $n$  variables sont non nulles, avec  $n$  le nombre de contraintes actives.

- Tous les tableaux simplexes ne sont pas des sommets : si un des termes de  $b$  après les transformations est négatif, alors le point n'est pas un sommet.
- Si en un sommet tous les coûts réduits<sup>1</sup> sont positifs ou nuls, alors le sommet est optimal.
- Si une colonne ne possède que des termes négatifs, alors le coût est non borné.

### 1.5.3 Algorithme du simplexe

Une itération s'appelle un pivot :

1. Ecrire le tableau simplexe sous forme canonique
2. Si tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, stop. Sinon, choisir une variable hors base  $x_k$  de coût réduit négatif.
3. Soit  $a$  la colonne du tableau simplexe associée à la variable  $x_k$  et  $d$  la dernière colonne du tableau. Si  $a \leq 0$ , stop (coût optimal non borné). Sinon, il y a au moins un indice pour lequel  $a_i > 0$ . Calculer les quotients  $d_i/a_i$  pour les indices  $i$  pour lesquels  $a_i > 0$  et trouver l'indice  $l$  du plus petit quotient.
4. La variable  $x_k$  entre dans la base et  $x_l$  en sort. Mettre à jour la base et retour en 1.

La variable choisie à l'étape 2 est la variable de coût réduit minimum, mais elles peuvent toutes être utilisées.

→ Remarque : Si deux variables sortent de la base en même temps, on en rajoute une seule dans la base et l'autre est hors de la base bien que sa valeur soit nulle.

Convergence de l'algorithme : Si lors de chaque pivot, le coût décroît strictement, alors l'algorithme converge.

### 1.5.4 Dégénérescence

Un sommet est dégénéré si plusieurs bases donnent le même sommet. Il y a alors une possibilité de boucle (=cyclage) et l'algorithme ne convergera pas.

La règle de Bland permet de sortir du cyclage :

- Parmi les variables candidates à l'entrée dans la base, choisir celle de plus petit indice (numéro de colonne).
- Parmi les variables candidates à la sortie, choisir celle de plus petit indice.

### 1.5.5 Initialisation de l'algorithme

L'algorithme du simplexe nécessite de partir d'un sommet du polyèdre. Cependant, un sommet initial n'est pas toujours disponible. La recherche d'un sommet d'un polyèdre peut se faire par la résolution d'un problème d'optimisation linéaire annexe pour lequel on dispose d'un sommet initial.

---

<sup>1</sup>Les coûts réduits sont les valeurs de  $c^T$  après transformations

Soit le polyèdre  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$  pour lequel nous cherchons un sommet. Supposons sans perte de généralité que  $b \geq 0$ . On introduit autant de variables artificielles  $y_i$  que d'équations et on construit le problème annexe à  $n + m$  variables:

$$\min \sum_i y_i$$

tel que

$$Ax + y = b \quad x \geq 0, y \geq 0$$

La solution  $x = 0, y = b$  est une solution admissible de ce problème. De plus, cette solution serre  $n + m$  contraintes linéairement indépendantes. C'est donc un sommet que l'on peut utiliser pour démarrer l'algorithme annexe.

Si le coût optimal du problème annexe est supérieur à 0, le polyèdre initial est vide et il n'y a pas de solution admissible pour laquelle  $y = 0$ . Si le coût optimal du problème est 0, on considère une solution admissible de base optimale  $(x^*, 0)$  et  $x^*$  est un sommet du polyèdre initial  $\mathcal{P}$ .

### 1.5.6 Forme générale du tableau simplexe canonique

Soit le tableau simplexe initial et général

$$\begin{array}{c|c} c^T & z \\ \hline A & b \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c|c} c_B^T & c_N^T & z \\ \hline B & N & b \end{array}$$

Décomposons la matrice  $A$  telle que  $A = (B|N)$ , avec  $B$  les variables dans la base et  $N$  les variables hors base, et le vecteur  $c$  tel que  $(c_B|c_N)$  de la même manière que  $A$ .

Le tableau canonique général est le suivant :

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & c_N^T - c_B^T B^{-1} N & z - c_B^T B^{-1} b \\ \hline I & B^{-1} N & B^{-1} b \end{array}$$

Soit  $\bar{x}$  le sommet décrit dans le tableau et  $\bar{y}$  le sommet correspondant dans le problème dual.

- Si  $B^{-1}b \geq 0$ , alors le sommet  $\bar{x}$  est admissible et si  $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ , il est optimal.
- Si  $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ , alors le sommet dual  $\bar{y}$  est admissible et si  $B^{-1}b \geq 0$ , il est optimal.

### 1.5.7 Complexité

La complexité pire cas de l'algorithme du simplexe est exponentielle, mais le cas moyen est polynomial en  $n$  et  $m$ .

## 1.6 Dualité

Un problème d'optimisation linéaire possède un problème dual, pour lequel le rôle des variables et des contraintes est inversé. Le dual du dual est le problème initial et on l'appelle le primal. Pour chaque contrainte dans le dual il y a une variable dans le primal et inversement.

### 1.6.1 Borne sur la valeur optimale

Soit un problème d'optimisation linéaire de minimisation.

On peut facilement trouver une borne supérieure en prenant une solution admissible quelconque car sa valeur est toujours supérieure ou égale à la solution minimale optimale.

Pour trouver une borne inférieure, on peut faire une combinaison linéaire de contraintes qui donnent la fonction à minimiser dans le membre de gauche. Pour trouver la meilleure borne inférieure, on utilise la dualité.

### 1.6.2 Dualité

Problème primal

$\min c^T x$  tel que  $Ax \geq b$  et  $x \geq 0$ .

Ce problème a  $m$  contraintes et  $n$  variables.

Problème dual

$\max b^T y$  tel que  $A^T y \leq c$  et  $y \geq 0$   
 $\iff -\min -b^T y$  tel que  $-A^T y \geq -c$  et  $y \geq 0$

Ce problème a  $m$  variables et  $n$  contraintes.

- Chaque contrainte donne une variable duale et chaque variable correspond à une contrainte duale.
- Echanger les vecteurs de coûts et de contraintes.
- Transposer la matrice des coefficients.
- Changement de minimisation à maximisation.

### 1.6.3 Dualité faible

Si  $x$  est une solution admissible du primal et  $y$  une solution admissible du dual, alors  $c^T x \geq b^T y$  et on appelle écart dual la quantité  $c^T x - b^T y \geq 0$ .

### 1.6.4 Certificat d'optimalité

Si  $x$  est une solution admissible du problème primal,  $y$  une solution admissible du dual et  $c^T x = b^T y$ , alors  $x$  et  $y$  sont des solution optimale pour leur problème respectif.

$\implies$  Une solution admissible  $y$  du dual pour laquelle  $b^T y = c^T x$  certifie que  $x$  est bien optimal.

### 1.6.5 Cas de solutions

Problème primal	Problème dual
Non borné	Pas de solution admissible
Pas de solution admissible	Non borné
Pas de solution admissible	Pas de solution admissible
Optimum fini	Optimum fini

### 1.6.6 Généralisation du dual

$\min c^T x$  tel que

$$A_1 x \geq b_1$$

$$A_2 x \leq b_2$$

$$A_3 x = b_3$$

$$x \geq 0$$

$\max b_1^T y_1 + b_2^T y_2 + b_3^T y_3$  tel que

$$A_1^T y_1 + A_2^T y_2 + A_3^T y_3 \leq c$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

$$y_3 \text{ libres}$$

- En résumé :

- $\min \longleftrightarrow \max$ , variables  $\longleftrightarrow$  contraintes, matrice  $\longleftrightarrow$  transposée.
- Variable libre  $\longleftrightarrow$  égalité, variable positive  $\longleftrightarrow$  inégalité dans le sens naturel ( $\leq$  pour min et  $\geq$  pour max), variable négative  $\longleftrightarrow$  inégalité dans l'autre sens.

### 1.6.7 Dualité forte

Si un des problème possède une solution optimale, l'autre en possède une également et les objectifs optimaux sont égaux. L'écart dual est alors nul.

### 1.6.8 Conditions de complémentarité

Il y a une interdépendance entre les contraintes  $x \geq 0$  du primal et les contraintes  $A^T y \leq c$  du dual. En des solutions optimales, il y a donc au moins une de ces contraintes qui est active.

Si  $x$  est une solution optimale du primal et  $y$  une solution optimale du dual, alors  $x^T(c - A^T y) = 0$  et  $y^T(Ax - b) = 0$ .

Soit  $a_i^T x \geq b_i$  une contrainte dont l'écart  $b_i - a_i^T x \geq 0$  et soit  $y_i$  la variable duale correspondante. Parmi l'écart et la variable, au moins une des deux quantités est nulle, i.e. si l'écart est non nul (contrainte inactive), alors la variable duale est nulle, et si la variable duale est non nulle, alors l'écart est nul (contrainte active).

→ Remarque : les deux quantités peuvent être nulles simultanément et la relation fonctionne pour n'importe quelle paire contrainte/variable duale.

### 1.6.9 Lemme de Farkas

Exactement un des deux systèmes suivants admet une solution :

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$A^T y \geq 0$$

$$b^T y < 0$$

## 1.7 Interprétations de la dualité

Dans un problème d'allocation de ressources, où la quantité maximale disponible de chaque ressource est exprimée par une contrainte (d'inégalité ou d'égalité), la valeur optimale de la variable duale correspondante fournit la valeur marginale de cette ressource :

- Si un concurrent propose d'acheter les ressources du producteur de façon à ce que ce dernier ait intérêt à les vendre (prix offert pour une combinaison de ressources permettant de fabriquer un produit au moins égal au profit qu'on peut retirer de la vente de ce produit), les variables duales sont les prix unitaires qui minimisent le coût total de l'achat du concurrent.
- Si le producteur souhaite augmenter la quantité disponible d'une ressource, la variable duale correspondante fournit le prix unitaire minimal qu'il serait prêt à payer (pour que le profit additionnel escompté à partir de l'optimum compense le coût de l'achat supplémentaire).

Les variables duales fournissent les valeurs marginales des ressources, i.e. à quel point augmente le profit si on augmente l'achat de ressources. ! Ce comportement est local autour de l'optimum du problème initial et ne peut pas se généraliser sur tout le domaine du problème.

## 1.8 Modification des paramètres

### 1.8.1 Modification de $c$

Si le vecteur  $c$  de l'objectif dans le problème primal change vers  $c + \Delta c$ , la contrainte d'admissibilité reste satisfaite, mais la contrainte d'optimalité reste satisfaite uniquement sous condition : modifier l'objectif au primal revient à changer les contraintes au dual.

→ Remarque : si l'objectif change peu, le sommet reste optimal, mais son coût optimal change.

### 1.8.2 Modification de $b$

Si le vecteur  $b$  des contraintes change vers  $b + \Delta b$ , la contrainte d'optimalité reste satisfaite, mais la contrainte d'admissibilité reste satisfaite uniquement sous condition : modifier les contraintes au primal revient à modifier l'objectif au dual.

→ Remarque : la solution optimale du dual  $y_*$  donne la sensibilité de l'objectif optimal à une variation de  $b$ . Quand  $b$  augmente de  $\Delta b$ , la fonction objectif augmente de  $y_*^T \Delta b$ .

### 1.8.3 Modification du nombre de contraintes

Ajouter une variable au primal revient à ajouter une contrainte au dual et inversement.

## 1.9 Optimisation linéaire en nombres entiers

### 1.9.1 Types de problèmes

1. Optimisation linéaire en nombres entiers :

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \text{ entiers} \end{cases} \quad (1.19)$$

2. Optimisation mixte :

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x_i \text{ entiers, } i = 1, \dots, k \end{cases} \quad (1.20)$$

3. Optimisation en variables binaires :

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x_i \in \{0, 1\} \forall i \end{cases} \quad (1.21)$$

Le problème linéaire sans la contrainte de valeurs entières est appelé relaxation du problème initial.

Arrondir la solution du problème relaxé pour avoir celle du problème en nombres entiers ne fonctionne pas, car l'ensemble des solutions admissibles n'est plus un polyèdre convexe.

### 1.9.2 Variables de décision

- Conditions exclusives : soit  $x_i$ , soit  $x_j$ , mais pas les deux :  $x_i + x_j \leq 1$ .
- Conditions alternatives : au moins une des décisions est positive :  $x_i + x_j \geq 1$ .
- Conditions contingentes : la décision  $x_i$  n'est prise que si  $x_j$  l'est aussi :  $x_i \leq x_j$ .
- Méthode systématique :
  - Ecrire la table logique de toutes les combinaisons acceptées.
  - Pour chaque ligne qui n'appartient pas à la table, on peut écrire une contrainte linéaire pour l'éliminer : soit la combinaison  $\delta$  avec  $\delta_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq N$ . Pour éliminer le choix  $x_i = \delta_i \forall i$ , on écrit

$$\left( \sum_{i \text{ tq } \delta_i=0} x_i \right) + \left( \sum_{i \text{ tq } \delta_i=1} (1 - x_i) \right) \geq 1 \quad (1.22)$$

### 1.9.3 Contraintes alternatives

Soit un polyèdre  $P$ . L'ensemble des vecteurs de  $P$  qui satisfont les contraintes  $a_1^T x \leq b_1$  et  $a_2^T x \leq b_2$  est aussi un polyèdre. On introduit les variables binaires  $y_1, y_2$  afin de pour le cas de l'ensemble des vecteurs qui satisfont les contraintes  $a_1^T x \leq b_1$  ou  $a_2^T x \leq b_2$ . Imposons que  $x \in P$ .

$$\begin{cases} a_i^T x - b_i \leq M(1 - y_i) \\ \sum y_i = 1 \end{cases} \quad (1.23)$$

On choisit une valeur de  $M$  telle qu'elle soit toujours suffisamment grande pour que les contraintes  $a_i^T x - b_i \leq M$  soient satisfaites pour tout  $x \in P$ . Ces contraintes sont alors équivalentes à la condition qu'une au moins des contraintes  $a_i^T x \leq b_i$  est satisfaite.



### 1.9.4 Exemples de problèmes en nombres entiers

- Problème d'affectation : expliqué précédemment. Les variables sont  $x_{ij} = 1$  si la personne  $i$  effectue la tâche  $j$  et 0 sinon.
- Problème du sac à dos : on remplit un sac d'objets. Il y a  $n$  objets susceptibles de rentrer dans le sac, chacun ayant un poids  $a_i$  et procurant une satisfaction  $c_i$ . La somme des poids ne peut pas dépasser  $b$ , et on ne peut prendre que des nombres entiers d'objets. Soit le rendement  $r_i = c_i/a_i$ . Dans un sac à dos optimal, on ne peut charger un objet que si on a déjà chargé tous les objets disponibles de rendement strictement supérieur.
- Planification de vols (sous forme de graphe): Supposons qu'il y ait  $m$  vols (= arêtes) et  $n$  circuits possibles (= cycles). Soit  $a_{ij} = 1$  si le vol  $i$  fait partie du circuit  $j$  et 0 sinon. Soit  $x_j = 1$  si le circuit  $j$  est sélectionné et 0 sinon. Chaque vol doit appartenir à exactement un des circuits sélectionnés (variables binaires). L'objectif est de minimiser le coût total.
- Problème de recouvrement : problème de planification de vols, avec chaque vol doit appartenir à AU MOINS un des circuits sélectionnés.
- Set packing problem :

- Set partitioning :

$$\begin{cases} \min \sum_j c_j x_j \\ \sum_j a_{ij} x_j = 1 \\ x_j \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (1.24)$$

- Set covering :

$$\begin{cases} \min \sum_j c_j x_j \\ \sum_j a_{ij} x_j \geq 1 \\ x_j \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (1.25)$$

- Set packing :

$$\begin{cases} \min \sum_j c_j x_j \\ \sum_j a_{ij} x_j \leq 1 \\ x_j \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (1.26)$$

### 1.9.5 Relaxation continue

Soit le problème en nombres entiers général

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \text{ entiers} \end{cases} \quad (1.27)$$

La relaxation continue de ce problème est

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

- Si le problème relaxé ne possède pas de solution admissible, le problème de départ n'en possède pas non plus.
- Une solution optimale du problème relaxé fournit une borne supérieure sur l'objectif optimal du problème initial.
- Si la solution optimale du problème relaxé est entière, alors cette solution est également solution optimale pour le problème initial.

### 1.9.6 Bornes

Soit le problème de maximisation en nombres entiers général défini plus haut. Toute solution admissible  $x$  fournit une borne inférieure de l'optimum.

Soit le problème de maximisation relaxé. Toute solution optimale  $x$  du problème relaxé fournit une borne supérieure de l'optimum.

### 1.9.7 Méthode Branch and Bound

Soit  $z = \max\{cx | x \in S\}$ . Pour trouver la solution, on divise l'ensemble  $S$  en deux sous-ensembles  $S = S_1 \cup S_2$  et on cherche à résoudre les problèmes distincts  $z_1 = \max\{cx | x \in S_1\}$  et  $z_2 = \max\{cx | x \in S_2\}$  (= branchement)  $\implies z = \max(z_1, z_2)$ .

Souvent, on a seulement des bornes sur  $z_1, z_2$  :  $\underline{z}_1 \leq z_1 \leq \bar{z}_1$  et  $\underline{z}_2 \leq z_2 \leq \bar{z}_2$ . On a donc

$$\max(\underline{z}_1, \underline{z}_2) \leq z \leq \max(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \quad (1.29)$$

En poursuivant, on arrive à la construction d'un arbre d'énumération.

- Optimalité : si pour un noeud donné on a  $\underline{z} = \bar{z}$ , le coût optimal pour le noeud est connu et le processus de division s'arrête.
- Sous-optimalité : si au noeud  $i$  on obtient une borne supérieure qui est inférieure à la borne supérieure en un autre noeud, alors le processus s'arrête au noeud  $i$ .
- Ensemble admissible vide : après décomposition d'un ensemble  $S$  en deux sous-ensembles  $S_1, S_2$ , il se peut qu'un des ensembles soit vide. Le processus s'arrête au noeud d'ensemble associé vide.

### Choix des décompositions

Une stratégie pour décomposer  $S$  consiste à examiner la solution optimale de la relaxation et à choisir la variable  $x_i$  dont la partie fractionnaire est la plus proche de  $1/2$ .

- Dans le cas d'une variable entière binaire  $0 \leq x_i \leq 1$ , les deux sous-problèmes correspondent toujours aux contraintes  $x_i = 0$  et  $x_i = 1$ .
- Dans le cas d'une variable entière générale  $x_i \in \mathbb{Z}$  prenant la valeur non entière  $f$ , les deux sous-problèmes correspondent aux contraintes  $x_i \leq f$  et  $x_i \geq f$ .

### **Choix de l'ordre des noeuds**

- Recherche en largeur : résolution de tous les problèmes d'un niveau donné avant de poursuivre.
- Recherche en profondeur : on descend le plus rapidement possible dans l'arbre afin de trouver une solution admissible.
- Stratégie du meilleur noeud : on choisit un noeud pour lequel la borne supérieure est la plus élevée, de cette manière on ne développe jamais un noeud dont la borne supérieure est inférieure à l'optimum.

# Optimisation non linéaire

## 2.1 Conditions d'optimalité sous contraintes

Les problèmes vu lors de ce cours sont des problèmes d'optimisation non linéaire

- en dimension finie
- déterministe (= dépend uniquement de  $x$ ).
- mono-objectifs (une seule fonction objectif).
- Avec un objectif explicite, décrit analytiquement.
- Avec un objectif continu et différentiable.
- Sans contraintes ( $X = \mathbb{R}^n$ ).

### 2.1.1 Format d'un problème avec contraintes

Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des indices des contraintes d'égalité et  $\mathcal{I}$  l'ensemble des indices des contraintes d'inégalités.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } c_i(x) = 0 \ \forall i \in \mathcal{E}, c_i(x) \geq 0 \ \forall i \in \mathcal{I} \quad (2.1)$$

- $f$  et les  $c_i$  sont des fonctions scalaires à  $n$  variables définies sur tout  $\mathbb{R}^n$ .
- $f$  est la fonction objectif.
- Le domaine admissible s'écrit  $X = \{x \in \mathbb{R}^n | c_i(x) = 0, c_j(x) \geq 0\}$ .
- On ne considère que la minimisation (équivalence avec la maximisation).

### 2.1.2 Extrema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in X \quad (2.2)$$

- $x^*$  est un minimum global ssi  $x^* \in X$  et  $f(x^*) \leq f(x) \ \forall x \in X$ .
- $x^*$  est un minimum local ssi  $x^* \in X$  et il existe un voisinage  $V$  (boule ouverte,...) de  $x^*$  tel que  $f(x^*) \leq f(x) \ \forall x \in X \cap V$ .
- $x^*$  est un minimum global strict ssi  $x^* \in X$  et  $f(x^*) < f(x) \ \forall x \in X \setminus \{x^*\}$ .
- $x^*$  est un minimum local strict ssi  $x^* \in X$  et il existe un voisinage  $V$  (boule ouverte,...) de  $x^*$  tel que  $f(x^*) < f(x) \ \forall x \in X \cap V \setminus \{x^*\}$ .

## 2.2 Conditions d'optimalité

Un ensemble de conditions d'optimalité (CO) permet de caractériser les solutions optimales par un système d'équations plutôt que par une définition impliquant un quantificateur 'pour tout'.

Idéalement, un ensemble de conditions d'optimalité doit être nécessaire (toute solution optimale satisfait les conditions) et suffisant (tous les points les satisfaisant sont des solutions optimales).

Dans la plupart des cas, elles sont soit nécessaires mais pas suffisantes ou suffisantes mais pas nécessaires.

### 2.2.1 Problème sans contraintes

Pour caractériser les solutions optimales locales, on dispose de

- la condition  $\nabla f(x^*) = 0$  :  $x^*$  est un point critique. Nécessaire mais pas suffisante.
- la condition  $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0^1$  :  $x^*$  est un minimum local. Nécessaire mais pas suffisante.
- L'ensemble des deux conditions est suffisant mais pas nécessaire pour que  $x^*$  soit un minimum local strict.

### Solutions globales

Si une fonction admet un minimum global, il se trouve forcément parmi les minima locaux. On peut garantir son existence par le TBA.

### 2.2.2 Problème avec contraintes d'égalité

On suppose que  $f$  et  $c_i$  sont  $\mathcal{C}^1$ . A chaque contrainte  $c_i$  on associe une variable réelle  $\lambda_i$  appelée multiplicateur de Lagrange. L'ensemble de ces multiplicateurs est rassemblé en un vecteur  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathcal{E}}$ .

On introduit une fonction nommée lagrangien dépendant à la fois des variables  $x_i$  et des multiplicateurs  $\lambda_i$  telle que :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i c_i(x) \quad (2.3)$$

Si  $x^*$  est une solution optimale locale pour le problème non linéaire sous contraintes d'égalité telle que l'ensemble des gradients des contraintes  $\{\nabla c_i(x^*)\}_{i \in \mathcal{E}}$  est linéairement indépendant, alors il existe un vecteur de multiplicateurs de Lagrange  $\lambda^*$  tel que

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \quad (2.4)$$

Cette condition est nécessaire et le vecteur  $\lambda^*$  est unique.

→ Remarque : si un des gradients s'annule, l'ensemble des gradients est automatiquement linéairement dépendant.

---

<sup>1</sup>semi-définie positive

### Déterminer l'ensemble des minima locaux

1. Vérifier que  $f, c_i \in \mathcal{C}^1$  pour tout  $i \in \mathcal{E}$ .
2. Identifier toutes les solutions admissibles  $x^*$  vérifiant les conditions d'optimalité, i.e. telles qu'il existe un vecteur  $\lambda^*$  tel que

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i^* c_i(x^*) \\ c_i(x^*) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

3. Y ajouter les solutions admissibles où les gradients sont linéairement dépendants.

→ Remarque : dans certains cas, il peut s'avérer avantageux d'éliminer les contraintes par substitution plutôt que d'utiliser les multiplicateurs de Lagrange.

## 2.3 Problèmes avec contraintes d'égalité et d'inégalité

La contrainte  $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$  est dite active au point  $x$  lorsque  $c_i(x) = 0$ . Si  $x$  appartient au domaine admissible, alors toutes les contraintes d'égalité sont actives, mais pas forcément les autres.

L'ensemble des contraintes actives en un point admissible  $x$  se note  $\mathcal{A}(x)$  :

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{E} \cup \{i \in \mathcal{I} | c_i(x) = 0\} \quad (2.6)$$

On dit qu'un point admissible  $x$  satisfait la condition d'indépendance linéaire des gradients des contraintes actives (ILGCA) ssi l'ensemble  $\{\nabla c_i(x)\}_{i \in \mathcal{A}(x)}$  est linéairement indépendant.

### 2.3.1 Conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker

Si  $x^*$  est une solution optimale locale pour le problème telle que ILGCA, alors il existe un vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda^*$  tel que  $\lambda_i^* \geq 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ ,  $\lambda_i^* c_i(x) = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ , et

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \quad (2.7)$$

Le vecteur  $\lambda^*$  est unique.

## 2.4 Optimisation convexe

### 2.4.1 Absence de minima globaux

Une fonction peut ne pas posséder de minimum global : soit le plus petit minimum local est un minimum global, soit la fonction n'admet pas de minimum global.

### 2.4.2 Garantir l'existence d'un minimum global

Une fonction objectif  $f$  continue définie sur un domaine  $X$  fermé et borné possède forcément au moins un minimum global.

### 2.4.3 Définition

Le problème d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

est un problème d'optimisation convexe ssi

- Il s'agit d'un problème de minimisation
- La fonction objectif est une fonction convexe
- Le domaine admissible  $X$  est un ensemble convexe

Dans un problème convexe, tout minimum local est aussi un minimum global.

### 2.4.4 Ensemble convexe

Un ensemble  $X \subset \mathbb{R}^n$  est convexe ssi

$$\forall x, y \in X, \lambda x + (1 - \lambda)y \in X \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (2.9)$$

En d'autres termes,  $X$  est convexe ssi il contient tous les segments joignant deux de ses points.

#### Ensembles convexes de base

- $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$
- Les boules (ouvertes ou fermées)  $\{x \mid \|x - a\| \leq r\}$
- Les demi-espaces (ouverts ou fermés)  $\{x \mid b^T x \leq \beta\}$  et les hyper-plans  $\{x \mid b^T x = \beta\}$
- Dans  $\mathbb{R}$ , les ensembles convexes sont tous les intervalles.

- Propriétés :

- Si deux ensembles  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  sont convexes, alors leur intersection  $X \cap Y \subseteq \mathbb{R}^n$  est également convexe.
- Si deux ensembles  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  sont convexes, alors leur produit cartésien  $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  est également convexe.
- La convexité est compatible avec les transformations linéaires : Si  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  est convexe et  $\Theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : x \rightarrow Ax + b$  est une transformation linéaire, l'image de  $S$  par l'inverse de  $\Theta$

$$\Theta^{-1}S = \{x \mid \Theta(x) \in S\} \quad (2.10)$$

est aussi convexe.

### 2.4.5 Fonction convexe

Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe lorsque son domaine  $D$  est convexe et

$$\forall x, y \in D, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (2.11)$$

En d'autres termes,  $f$  est convexe si elle se situe sous les cordes qui sous-tendent son graphe.

## Fonctions convexes de base

- Les fonctions linéaires et affines
- La fonction norme et son carré, quelle que soit la norme utilisée
- La fonction quadratique  $x \rightarrow x^T Q x$  ssi  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est semi-définie positive.
- $x \rightarrow e^x$ ,  $x \rightarrow -\log(x)$ ,  $x \rightarrow |x|^p$  lorsque  $p \geq 1$
- Une fonction est dite concave ssi  $-f$  est convexe.

## Propriétés

- Si  $f$  est convexe, alors  $cf$  est également convexe  $\forall c \geq 0$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont convexes, alors leur somme l'est également (pas leur différence).
- Si  $f$  et  $g$  sont convexes, alors leur maximum  $\max\{f, g\}$  est convexe (pas leur minimum).
- Seules les fonctions affines sont convexes ET concaves.
- Soit  $f$  une fonction deux fois différentiable dont le domaine  $D$  est ouvert.  $f$  est convexe ssi son domaine est convexe et sa matrice hessienne est toujours définie positive.
- Soit  $f$  une fonction différentiable dont le domaine  $D$  est ouvert.  $f$  est convexe ssi  $D$  est convexe et

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \quad \forall x, y \in D \quad (2.12)$$

i.e.  $f$  se situe au-dessus de ses tangentes.

- La convexité est compatible avec les transformations linéaires : Si  $f : x \rightarrow f(x)$  est une fonction convexe, alors la composée  $f \circ \Phi : x \rightarrow f(\Phi(x)) = f(Ax + b)$  est aussi convexe, i.e. un changement de variables linéaire conserve la convexité.

### 2.4.6 Domaine admissible défini par des contraintes

Le domaine  $X$  est souvent défini par des contraintes fonctionnelles :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } c_i(x) = 0 \text{ pour } i \in \mathcal{E} \text{ et } c_i \geq 0 \text{ pour } i \in \mathcal{I} \quad (2.13)$$

Dans ce cas, si chaque contrainte d'égalité est affine et si chaque contrainte d'inégalité est concave, alors le domaine admissible défini par ces contraintes est convexe (condition suffisante mais pas nécessaire).

### 2.4.7 Propriétés d'un problème convexe

- L'ensemble des solutions admissibles globales est un ensemble convexe.
- L'optimisation linéaire est toujours convexe.
- L'optimisation quadratique  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} x^T Q x + c^T x$  tel que  $Ax = b$  est convexe si  $Q$  est semi-définie positive.



### 2.4.8 Conditions d'optimalité - sans contraintes

Soit le problème de minimisation de la fonction convexe  $f$ .

Si  $f$  est différentiable, la condition d'optimalité au premier ordre  $\nabla f(x^*) = 0$  est nécessaire et suffisante. Les conditions au second ordre sont donc inutiles.

### 2.4.9 Conditions d'optimalité - avec contraintes

Dans un problème d'optimisation avec contraintes d'égalité et d'inégalité, si le problème est convexe, alors les conditions KKT (voir section 2.3.1) sont suffisantes<sup>2</sup>.

### 2.4.10 Point de Slater

Un point de Slater dans un problème d'optimisation convexe est un point tel que les contraintes d'inégalité ne sont pas actives, mais les contraintes d'égalité le sont.

Si un problème d'optimisation convexe admet un point de Slater, alors les conditions KKT sont nécessaires et suffisantes sans exception.

## 2.5 Méthode de recherche en ligne - Méthode du premier ordre

### 2.5.1 Optimisation non linéaire sans contrainte

Cette section étudie les problème d'optimisation sans contrainte, où  $f$  est suffisamment différentiable, mais pas nécessairement convexe.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (2.14)$$

Si les conditions KKT ne sont pas solubles analytiquement, on tente de résoudre le problème par une méthode itérative. Obtenir exactement la solution après un certain nombre d'itérations est très rare, on vise plutôt la convergence vers une solution optimale. Ces méthodes ne servent qu'à identifier un point stationnaire et l'on n'a aucune garantie d'obtenir un minimum global.

#### Convergence locale et globale

Une méthode d'optimisation itérative calcule à partir d'un itéré initial  $x_0$  une suite d'itérés  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

- Si les itérés convergent vers une solution quel que soit l'itéré initial, on dit que la méthode converge globalement.
- Si les itérés convergent à condition que l'itéré initial soit suffisamment proche d'une solution, on dit que la méthode converge localement.

---

<sup>2</sup>Les exceptions des KKT sont toujours d'application

## Vitesse de convergence

Soit une suite d'itérés tendant vers une solution  $x^*$ , i.e. telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| = 0$ .

- Une méthode converge linéairement (convergence globale) s'il existe une constante  $0 < c < 1$  et un indice  $K$  à partir duquel on a

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\| \quad \forall k \geq K \quad (2.15)$$

- On peut utiliser une norme ellipsoïdale pour définir la distance :  $\|x\|_Q = \sqrt{x^T Q x}$  ou encore la norme du gradient de la fonction objectif :  $\|\nabla f(x_k)\|$ .
- Soit  $d_k = \|x_k - x^*\|$ .  $d_k < \varepsilon$  à partir de  $k \approx \frac{\ln d_0 / \varepsilon}{\theta}$  avec  $c = 1 - \theta \approx 1$ .
- La suite converge superlinéairement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0 \quad (2.16)$$

- Cette convergence est globale et plus rapide que la convergence linéaire.
- La suite converge quadratiquement s'il existe une constante  $c > 0$  et un indice  $K$  à partir duquel on a

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^2 \quad \forall k \geq K \quad (2.17)$$

- La convergence est locale, mais seul un petit nombre d'itérations est nécessaire si la suite converge.

## 2.5.2 Cas des fonctions à une variable

### Minimisation d'une fonction à une variable

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  à minimiser.

La résolution du problème se fait facilement à partir de sa dérivée, par les méthodes de la bisection, de Newton-Raphson ou de la sécante. Il existe également des méthodes n'utilisant pas la dérivée, que nous ne voyons pas dans ce cours.

### Descente coordonnée par coordonnée

Cette méthode consiste à minimiser successivement chaque variable séparément en gardant les autres fixes.

Méthodologie :

- Choisir un point de départ  $x$ .
- Calculer  $\alpha$  qui minimise  $f(x)$  telle que  $x_1 = \alpha$ , puis poser  $x_1 := \alpha$ .
- Idem pour toutes les coordonnées suivantes.
- Recommencer dans l'autre sens (d'abord dans le sens  $x_i \rightarrow x_{i+1}$  puis  $x_i \rightarrow x_{i-1}$ ).

Propriétés :

- Méthode simple et intuitive facile à implémenter si on sait minimiser les fonctions à une variable.
- Convergence souvent lente.
- La méthode peut ne pas converger vers un point stationnaire.

La méthode ne converge pas de manière générale. Toutefois, si la valeur  $\alpha$  calculée correspond à un minimum global et unique, alors l'algorithme converge globalement vers un point stationnaire.

### 2.5.3 Méthode du gradient

#### Sans contrainte

Un grand nombre de méthodes de résolution est basé sur une stratégie de recherche en ligne :

- Soit un point de départ  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et un indice  $k := 0$ .
- Tant que l'on n'est pas proche d'un minimum :
  - Choisir une direction de recherche  $p_k \in \mathbb{R}^n$  appropriée, i.e.  $p_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$
  - Choisir une longueur de pas  $\alpha_k > 0$  qui minimise  $f(x_k + \alpha_k p_k)$ .
  - Mettre à jour  $x_{k+1} := x_k + \alpha_k p_k$  et  $k := k + 1$

→ Remarque : pour un problème de maximisation, prendre  $p_k = \nabla f(x_k)$ .

#### - Longueur de pas :

On choisit généralement une longueur de pas minimale approximative, car la calculer est coûteux. Elle doit vérifier les conditions de Wolfe :

- Condition de décroissance suffisante :  $f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$  avec  $0 < c_1 < 1$ .
- Condition de courbure :  $\nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k \geq c_2 \nabla f(x_k)^T p_k$  avec  $c_1 < c_2 < 1$ .

## 2.6 Méthodes de Newton et quasi-Newton

### 2.6.1 Méthode de Newton

Soit un problème de minimisation de la fonction  $f$ . Soit un point de départ  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et un indice  $k := 0$ . Tant qu'on n'est pas suffisamment proche d'un minimum,

- Calculer la direction de Newton

$$p = -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x) \quad (2.18)$$

- Choisir une longueur de pas  $\alpha_k$  : soit unitaire, soit via les conditions de Wolfe.
- Calculer l'itéré suivant :  $x_{k+1} := x_k + \alpha_k p_k$ .
- Incrémenter  $k$ .

## Conditions sur le pas de Newton

Si la hessienne de la fonction objectif est semi-définie positive, alors  $p$  est bien définie et est un minimum global du système, et  $p$  est une direction de descente.

→ Remarque : la convergence globale de la méthode de Newton est quadratique.

→ Remarque : si la fonction objectif est quadratique convexe, on converge en un pas.

## 2.6.2 Méthode de quasi-Newton

On a inventé la méthode de quasi-Newton car la méthode de Newton est coûteuse bien que sa convergence soit globale et quadratique.

- Soit un point de départ  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et un indice  $k := 0$ . Soit  $B_0$  une approximation initiale de la hessienne en  $x_0$ .
- Tant qu'on n'est pas suffisamment proche d'un minimum,
  - Calculer la direction de quasi-Newton :  $p = -B_k^{-1} \nabla f(x_k)$
  - Choisir une longueur de pas  $\alpha_k$  qui minimise  $\min_{\alpha > 0} \phi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$
  - Calculer l'itéré suivant :  $x_{k+1} := x_k + \alpha p_k$
  - Calculer une nouvelle approximation de la hessienne  $B_{k+1}$
  - Incrément  $k := k + 1$

→ Remarque : la convergence globale est quadratique et la convergence locale est superlinéaire.

## Mise à jour SR1

On met à jour l'approximation de la hessienne de la manière suivante :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k)(y_k - B_k s_k)^T}{(y_k - B_k s_k)^T s_k} \quad (2.19)$$

Soient les vecteurs  $s_k := x_{k+1} - x_k$  et  $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ .

Posons  $H_k$  est une approximation de l'inverse de la hessienne :  $H_k \approx \nabla^2 f(x_k)^{-1}$ . On peut alors remplacer  $B_k^{-1}$  par  $H_k$ . On met à jour  $H_k$  par la formule

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(s_k - H_k y_k)(s_k - H_k y_k)^T}{(s_k - H_k y_k)^T y_k} \quad (2.20)$$

→ Remarque : les deux approximations donnent un résultat identique si on part de  $H_0 = B_0^{-1}$ .

Inconvénients de la méthode :

- Le dénominateur peut s'annuler.
- Rien ne garantit la définie-positivité de l'approximation de la hessienne.
- Pas de preuve de convergence locale ou globale.

## Mise à jour BFGS

La mise à jour BFGS pallie à tous les problèmes de SR1.

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} \quad (2.21)$$

Si  $H_0$  est définie positive, alors tous les  $H_k$  le sont aussi. De plus, la méthode converge globalement pour toute  $H_0 \succ 0$  et la convergence locale est superlinéaire.

## 2.7 Implémentation et autres méthodes

### 2.7.1 Implémentation

#### Critère d'arrêt

Un critère d'arrêt consiste à fixer une tolérance  $\epsilon$  et à itérer tant que la norme du gradient lui est supérieure. Cependant, ce critère ne garantit ni la précision de la fonction objectif, ni la distance par rapport à la solution.

#### Longueur de pas

##### Minimisation inexacte :

Voici l'algorithme de calcul d'un pas satisfaisant aux conditions de Wolfe pour des constantes  $0 < c_1 < c_2 < 1$  à partir d'un pas initial  $\alpha > 0$ .

- Partir de l'intervalle  $[L, U] = [0, \infty]$
- Calculer  $\phi(0)$  et  $\phi'(0)$
- Répéter
  - Evaluer  $\phi(\alpha)$ . Si  $\phi(\alpha) > \phi(0) + c_1 \alpha \phi'(0)$ 
    - $U := \alpha$
    - $\alpha := (U + L)/2$
    - Retour en 3.
  - Evaluer  $\phi'(\alpha)$ . Si  $\phi'(\alpha) < c_2 \phi'(0)$ 
    - $L := \alpha$
    - Si  $U = \infty$ ,  $\alpha := 2L$ ; sinon  $\alpha = (L + U)/2$
    - Retour en 3.
  - Stop :  $\alpha$  vérifie les conditions de Wolfe.

##### Choix de la longueur de pas initiale :

- Pour (quasi-)Newton, choisir  $\alpha_0 = 1$ .
- Pour la méthode du gradient, pas de valeur universelle de  $\alpha$ .

### Minimisation exacte :

Par minimisation exacte, il faut minimiser la fonction  $\phi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ . Si cette fonction est strictement convexe, on a

$$\alpha^* = \frac{p_k^T(b - Ax_k)}{p_k^T A p_k} \left( = \frac{p_k^T p_k}{p_k^T A p_k} \right) \quad (2.22)$$

La seconde égalité n'est vraie que pour la méthode du gradient.

## **2.7.2 Autres méthodes**

### Méthode des gradients conjugués :

Au lieu de choisir la direction du gradient  $p_k = -\nabla f(x_k)$ , on combine avec une direction précédente

$$p_k = -\nabla f(x_k) + \beta_k p_{k-1} \quad (2.23)$$

où  $\beta_k$  est un paramètre de la méthode à déterminer.

Dans le cas d'une fonction objectif quadratique convexe, on calcule  $\beta_k$  de telle manière que  $p_k^T A p_{k-1} = 0$ :

$$\beta_k = \frac{(Ax_k - b)^T A p_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}} \quad (2.24)$$

A l'aide de cette propriété, cette méthode, combinée à une minimisation unidimensionnelle exacte, calcul la solution optimale après  $n$  itérations pour une fonction objectif à  $n$  variables.

Dans le cas d'une fonction objectif quelconque, on peut utiliser la méthode de Fletcher-Reeves :

- Soit un point de départ  $x_0$  et un indice  $k := 0$ . On pose  $p_0 := -\nabla f(x_0)$
- Tant que  $\nabla f(x_k) \neq 0$ 
  - $x_{k+1} := x_k + \alpha_k p_k$
  - $p_{k+1} := -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_{k+1} p_k$
  - $k := k + 1$

avec  $\beta_k = \frac{\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k)}{\nabla f(x_{k-1})^T \nabla f(x_{k-1})}$ .