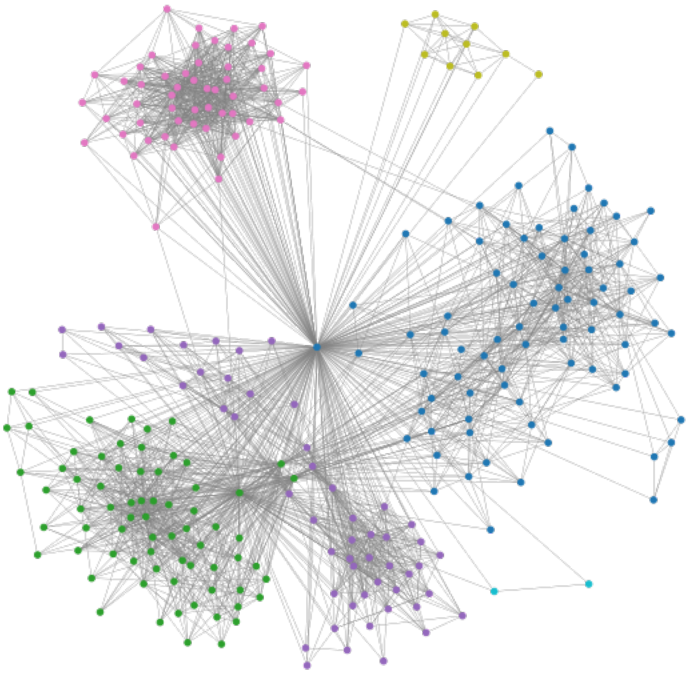


LINMA1691 Théorie des graphes

Simon Desmidt

Année académique 2023-2024 - Q1

UCLouvain

Table des matières

Graphes connexes, eulériens et bipartis

1.1 Rappels

- Un graphe est un triplet (V, E, ϕ), où
  - V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets/noeuds.
  - E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés arêtes.
  - ϕ est une fonction d'incidence qui associe à chaque arête un sommet ou une paire de sommets.
- Un sous-graphe du graphe (V, E, ϕ) est un graphe (V', E', ϕ'), avec $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ et ϕ' est la restriction de ϕ à E'.
- Deux graphes (V, E, ϕ) et (V', E', ϕ') sont dits isomorphes s'il existe des bijections $f : V \to V'$ et $g : E \to E'$ telles que $\phi(e) = \{u, v\}$ ssi $\phi(g(e)) = \{f(u), f(v)\}$.
- Un parcours est une suite $v_0e_1v_1e_2...e_nv_n$ où les v_i sont des sommets et les e_i sont des arêtes. La longueur du parcours est son nombre d'arêtes n. Le sommet d'origine est v_0 et son sommet de destination est v_n. Les autres sommets sont dits intérieurs. Un parcours est fermé si $v_0 = v_n$.
- Un chemin est un parcours dont les sommets et arêtes sont tous distincts.
- Un cycle est un chemin fermé.
- Un graphe est connexe si, pour chaque paire de points, il existe un parcours les reliant.
- Les composantes connexes d'un graphe sont les sous-graphes connexes maximaux.
- Un parcours est eulérien s'il visite chaque arête une et une seule fois. Un graphe est eulérien s'il existe un parcours eulérien fermé.
- Soient les sommets v_i. La matrice d'adjacence est une matrice carrée $n \times n$ dont l'élément ij est le nombre d'arêtes entre le sommet v_i et le sommet v_j.
- Soient les arêtes e_j. La matrice d'incidence est une matrice rectangulaire $n \times m$ dont l'élément ij est le nombre de fois ($\in \{0, 1, 2\}$) que le sommet v_i est incident à l'arête e_j.
- Le vecteur des degrés est donné par le produit matriciel $M\mathbb{1}$, avec M la matrice d'adjacence et $\mathbb{1}$ le vecteur ne contenant que des 1. De plus, $\mathbb{1}^T M = 2\mathbb{1}$ et $\mathbb{1}^T M\mathbb{1} = 2|E|$.

- La distance $d(u, v)$ entre les noeuds u et v d'un graphe est le nombre d'arêrtes minimal d'un parcours entre ces noeuds. Si un tel parcours n'existe pas, alors la distance est infinie.
- Un graphe est biparti s'il existe une partition en deux ensembles V_1, V_2 tels que les sommets de V_1 ne sont adjacents qu'a des sommets de V_2 et vice versa. La bipartition est (V_1, V_2).

1.2 Théorèmes

- Un graphe connexe est eulérien ssi tous les sommets sont de degré pair. La relation $\Leftarrow$ est prouvée par l'algorithme de Hierholzer (complexité $\mathcal{O}(|E|)$).
- Un graphe connexe possède un parcours eulérien ssi le nombre de noeuds de degré impair est zéro ou deux.
- Théorème des poignées de mains : La somme des degrés des noeuds d'un graphe est deux fois le nombre d'arêtes.
- Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe. Alors l'élément ij de A^k, $k \geq 0$, est le nombre de parcours de longueur k de v_i vers v_j.
- Si $u...u'...v'...v$ est un parcours de longueur minimale de u vers v, alors le sous-parcours $u'...v'$ est un parcours de longueur minimale de u' vers v'.
- Un graphe est biparti ssi tous ses cycles sont de longueur paire.

Arbres et connectivité

2.1 Définitions

- Un arbre est un graphe connexe et sans cycle.
- Une forêt est un graphe sans cycle.
- Un sous-graphe sous-tendant d'un graphe G est un sous-graphe qui contient tous les sommets de G, i.e. les noeuds ne changent pas, mais on enlève certaines arêtes.

$\rightarrow$ Remarque : tout graphe connexe contient un arbre sous-tendant.

- Le graphe complet contenant n noeuds est noté K_n.

Soit G un graphe à n sommets et m arêtes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- G est connexe et sans cycle.
- G est sans cycle et $m = n - 1$.
- G est connexe et $m = n - 1$.
- G est connexe et supprimer une arête quelconque déconnecte G.
- G est sans cycle et ajouter une arête quelconque crée un et un seul cycle.
- Deux noeuds de G sont toujours reliés par un seul chemin.

2.2 Nombre d'arbres sous-tendants

Pour un graphe G et une arête e, on note $G - e$ le graphe obtenu en supprimant e, et $G.e$ me graphe obtenu en contractant e, i.e. en supprimant e et en fusionnant les deux extrémités de e.

Soit $T(G$ le nombre d'arbres sous-tendants de G, et e une arête quelconque de G (qui n'est pas une boucle). Alors $T(G) = T(G - e) + T(G.e)$.

$\rightarrow$ Remarque : Le nombre d'arbres sous-tendants de K_n est n^{n-2}.

2.3 Problème de l'arbre sous-tendant de poids minimum

Soit un graphe connexe pondéré. Le problème est de trouver un arbre sous-tendant de poids minimum.

2.3.1 Algorithme de Kruskal

Soit un graphe pondéré à n noeuds.

- Trier les arêtes par poids croissants;
- Tant que $|T| < n - 1$,
  - Parmi les arêtes pas encore considérées, choisir celle de moindre poids, qu'on appellera e;
  - Si $T \cup \{e\}$ est sans cycle, alors $T := T \cup \{e\}$.

Le graphe formé des arêtes T est un arbre sous-tendant de poids minimum.

Cet algorithme est correct et requiert un temps de calcul de l'ordre de $m \log m$ sur un graphe à m arêtes.

2.3.2 Algorithme de Prim

Soit un graphe pondéré à n noeuds.

- Initialiser l'arbre T à un noeud de départ arbitraire;
- Tant que $|T| < n - 1$,
  - Parmi les arêtes incidentes à exactement un noeud de T, choisir celle de moindre poids, qu'on appellera e;
  - $T := T \cup \{e\}$.

Le graphe formé des arêtes de T est un arbre sous-tendant de poids minimum.

Cet algorithme est correct et requiert un temps de calcul de l'ordre de $m + n \log n$ pour un graphe à n noeuds et m arêtes.

$\rightarrow$ Remarque : Prim est meilleur que Kruskal car n est, le plus souvent, inférieur à m.

2.4 Connectivité

2.4.1 Définitions

- Pour un graphe connexe, une coupe de sommets est un ensemble de sommets qui déconnecte le graphe quand on l'en retire.
- Pour un graphe connexe, une coupe d'arêtes est un ensemble d'arêtes qui déconnecte le graphe quand on l'en retire.

- Un graphe est dit k-connexe si retirer $k-1$ noeuds quelconques laisse le graphe connexe. Autrement dit, si toutes les coupes de sommets sont de taille au moins k.
- La connectivité d'un graphe est la taille de la plus petite coupe de sommets. Par convention, si tous les n noeuds sont voisins, la connectivité est définie comme $n - 1$.
- Un graphe est dit k-arête-connexe si retirer $k - 1$ arêtes quelconques laisse le graphe connexe. Autrement dit, si toutes les coupes d'arêtes sont de taille au moins k.
- L'arête-connectivité d'un graphe est la taille de la plus petite coupe d'arêtes.
- Un graphe est dit connexe ssi il est 1-arête-connexe ssi il est 1-connexe.

2.4.2 Théorèmes

- connectivité $\geq$ arête-connectivité $\geq$ degré minimum.
- Théorème de Whitney : Un graphe à au moins trois noeuds est 2-connexe ssi toute paire de noeuds distincts est reliée par au moins deux chemins dont les noeuds internes sont distincts.[1]
- Théorème de Menger, généralisation du théorème de Whitney : Un graphe à au moins $k + 1$ noeuds est k-connexe ssi toute paire de noeuds distincts est reliée par au moins k chemins dont les noeuds internes sont distincts.
- Tout graphe k-connexe à n noeuds possède $kn/2$ arêtes au minimum, et on peut construire des graphes k-connexes avec exactement $\lceil kn/2 \rceil$, les graphes de Harary[2].
- Le graphe de Harary $H_{k,n}$ possède $kn/2$ arêtes et est k-connexe.

[1] Donc, dans un graphe 2-connexe, deux noeuds distincts sont toujours sur un même cycle (l'union des deux chemins).

[2] Le graphe de Harary $H_{k,n}$ par k pair : les noeuds sont $v_1, \ldots, v_j$, et on relie v_i à $v_{i\pm1}, \ldots, v_{i\pm k/2}$ (modulo n).

Les plus courts chemins

3.1 Définitions

- Une fonction de poids sur un graphe (V, E, φ) est une fonction $E \to \mathbb{R}$. Un graphe pondéré est un graphe muni d'une fonction de poids.
- Le poids (ou longueur) d'un parcours est la somme des poids des arêtes qui le compose.
- La distance $d(u, v)$ est la longueur du plus court chemin de u vers v.
- Un algorithme qui prend comme donnée un graphe à n noeuds et m arêtes est dit efficace s'il s'arête en un temps polynomial.
- Un graphe dirigé est un triplet (E, V, φ) où
  - V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets ou noeuds;
  - E est un ensemble dont les éléments sont appelés arêtes;
  - φ est une fonction, dite fonction d'incidence, qui associe à chaque arête un couple de sommets.

3.2 Théorèmes

- Pour un graphe avec une fonction de poids ≥ 0, si le plus court parcours entre u et v est de longueur d, alors le plus court chemin entre u et v est aussi de longueur d.

3.3 Problème du plus court chemin

Etant donnés un graphe et deux sommets u, v, le problème du plus court chemin consiste à trouver le chemin le plus court entre u et v.

L'algorithme de Dijkstra résout ce problème efficacement :
Etant donné un graphe avec une fonction de poids $w \geq 0$, on veut trouver la longueur du plus court chemin entre u_0 et t. Par convention, $w(ab) = \infty$ si les sommets a et b ne sont pas adjacents. On peut supposer le graphe simple.

- Initialisation : $l(u_0) = 0, l(v) = \infty \; \forall v \neq u_0, S := u_0, u' = u_0$.
- Tant qu'il reste des sommets hors de S :

- Pour tout $v \notin S$, $l(v) = \min l(v), l(u') + w(u'v)$;
- Trouver $v_min \notin S$ tel que $l(v_min) \leq l(v)$ pour tout $v \notin S$;
- $u' := v_min$;
- $S := S \cup \{u'\}$.

Après chaque mise à jour de l dans l'algorithme, les deux propriétés suivantes (appelées invariants de boucle) sont vérifiées :

- Pour $v \in S$, $l(v) = d(u_0, v)$ et le chemin le plus court de u_0 à v reste dans S.
- Pour $v \notin S$, $l(v) \geq d(u_0, v)$ et $l(v)$ est la longueur du plus court chemin de u_0 vers v dont tous les noeuds internes sont dans S.

→ Remarque : si on n'est intéressé que par le plus court chemin de u_0 vers un certain noeud v_0, alors on peut arrêter l'algorithme quand $v_0 \in S$.

L'algorithme de Dijkstra sur un graphe se termine en un temps de l'ordre n^2.

3.4 A l'aide des matrices

Pour définir un produit matriciel, il suffit de deux opérations $(+, \times)$ sur les éléments scalaires, avec propriétés de 'semi-anneau' sur les scalaires. On obtient les opérations $+, \times$ sur les matrices.

- La matrice des plus courts parcours de longueur k est A^k pour le semi-anneau $(\min, +)$ sur les réels positifs.
- La matrice des plus courts parcours de longueur $\leq k$ est $(I + A)^k$.
- La matrice des plus courts chemins est $(I + A)^n$, dont le calcul a une complexité en $n^3 \log_2 n$.

3.4.1 Semi-anneau du nombre de parcours

Le semi-anneau du nombre de parcours est simple : il s'agit du semi-anneau muni des opérations habituelles $(+, \cdot)$.

3.4.2 Semi-anneau des plus cours parcours

Soient $A, B \in (\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\})^{n \times n}$. On définit l'élément $AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A_{ik} \times B_{kj}) = \min_k A_{ik} + B_{kj}$. Le neutre de la multiplication est donc la matice identité.

Le neutre additif est par contre I tel que sa diagonale est nulle et tous les autres termes valent ∞.

3.4.3 Semi-anneau du parcours de plus grande capacité

Ce semi-anneau calcule le chemin entre deux noeuds dans lequel le débit global est le plus élevé. Il s'agit du semi-anneau $(\max, \min)$.

Mariages, couplages et couvertures

4.1 Définitions

- Un couplage dans un graphe est un ensemble M d'arêtes tel que M ne contient par de boucles et deux arêtes de M n'ont jamais d'extrémité en commun.
- Un couplage maximum est tel que son nombre d'arêtes est maximal.
- Un couple parfait est tel qu'il est incident à tous les noeuds. S'il existe, il est maximum.
- Pour un couplage M, un chemin M-alterné est un chemin qui passe alternativement par une arête de M et par une arête hors de M.
- Un chemin M-augmenté est un chemin M-alterné dont les noeuds d'origine et de destination sont distincts et aucun des deux n'est incident à une arête de M.
- L'opération de différence symétrique entre des ensembles A et B se note $C = A \Delta B$, et est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B mais pas dans les deux. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- Un graphe est k-régulier si tous les noeuds sont de degré k.
- Une couverture de sommets d'un graphe est un ensemble de sommets incident à toutes les arêtes. La couverture est minimum si elle contient un nombre minimal de sommets.

$\rightarrow$ Remarque : Si K est une couvertue de sommets et M un couplage, alors $|M| \leq |K|$.

- Si K^* est une couverture de sommets minimum et M^* un couplage maximum, alors $|M^*| \leq |K^*|$.

4.2 Théorèmes

- Un couple M est maximum ssi il n'y a pas de chemin M-augmenté.
- Théorème du mariage : Un graphe biparti avec partition (X, Y) epossède un couplage incident à tous les noeuds de X ssi pour tout ensemble $S \subseteq X$, le nombre de voisins de S est au moins $|S|$.
  - Corollaire : Tout graphe biparti k-régulier ($k > 0$) possède un couplage parfait.
- Si K est une couvertue de sommets et M un couplage, et si $|M| = |K|$, alors K est mninimum et M est maximum.

- Dans un graphe biparti, si K^* est une couverture de sommets minimum et M^* un couplage maximum, alros $|M^*| = |K^*|$. De plus, dans un graphe biparti, K^* et M^* existent toujours.

4.3 L'algorithme hongrois

Soit un graphe biparti de bipartition (X, Y) avec $|X| \leq |Y|$.

- Soit un couplage M_0 quelconque.
- $M \coloneqq M_0$.
- While (M pas maximum) :
  - Si M incident à tout X, alors M maximum.
  - Sinon, trouver $U = \{u \in X \text{ non incident à } M\}$.
  - Construire tous les chemins M-alternés à partir de U.
  - Si pas de chemin M-augmenté, alors M maximum.
  - Sinon, choisir un chemin M-augmenté C.
  - $M \coloneqq (M \setminus C) \cup (C \setminus M)(= M \Delta C)$.

De plus, pour un problème de poids maximum dans un graphe biparti dans lequel on a donné un poids aux arêtes, l'algorithme hongrois général permet de trouver un couplage de poids maximum.

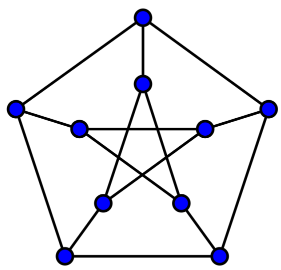
Coloriage de graphes

5.1 Introduction

- Soit le graphe $G = (V, E)$. Une k-coloration de G est une fonction $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ telle que $f(i) \neq f(j)$ lorsque $(i, j) \in E$.
- Le nombre chromatique d'un graphe G est $\chi(G) = \min\{k : \exists\text{k-coloration de G}\}$.
- Le nombre chromatique d'un graphe G est 2 ssi G est biparti : $\chi(G) = 2 \longleftrightarrow G$ biparti.
- Le nombre chromatique d'un cycle C_n est 2 si le cycle est de longueur paire (car biparti) et 3 s'il est de longueur impaire.
- Le nombre chromatique d'un graphe complet K_n est n.

5.2 Théorèmes

- Le calcul du nombre chromatique d'un graphe est NP-complet.
- Soit Δ le degré maximum des sommets d'un graphe. Alors $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
- Théorème de Brooks : Dans un graphe connexe, autre que K_n et autre qu'un circuit impair, $\chi(G) \leq \Delta$.
- Soit un graphe G à m arêtes. Alors $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$.
- Soit la séquence des degrés $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$. Alors $\chi(G) \leq 1 + \max_i (\min\{d_i, i - 1\})$.
- Théorème des 4 couleurs : Tout graphe planaire est 4-colorable.
- Le graphe de Petersen est tel que $\chi(G) = 3$.



5.3 Algorithme

L'algorithme glouton consiste de manière général à optimiser de manière locale à chaque étape. Cela ne permet toutefois pas toujours d'arriver à un optimum global. L'algorithme glouton suivant permet de déterminer $\chi(G)$:

- Choisir un ordre sur les sommets;

- Considérer les sommets dans l'ordre et leur donaner la couleur la plus petite possibel qui n'est pas déjà utilisée par les voisins.
- !Le résultat de l'algorithme glouton dépend de l'ordre de parcours des sommets.

5.4 Polynômes chromatiques

Le nombre de manières avec lesquelles un graphe peut être colorié avec k couleurs est un polynôme $\Pi_G(k)$.

Soit G un graphe. Alors $\Pi_G(k)$ est un polynôme de degré n, avec n le nombre de sommets, à coefficients entiers de signes alternants. Il s'écrit sous la forme

$$\Pi_G(k) = k^n - a_{n-1}k^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} - \dots \tag{5.1}$$

et a_{n-1} est le nombre d'arêtes du graphe G.

5.4.1 Propriétés

- Le terme indépendant est toujours nul car il n'existe aucune manière de colorier un graphe avec 0 couleur.
- $\forall k < \chi(G), \Pi_G(k) = 0$
- $\forall k \geq \chi(G), \Pi_G(k) > 0$
- Si $G = \{n \text{ noeuds isolés}\}$, alors $\Pi_G(k) = k^n$.
- Si $G = K_n$, alors $\Pi_G(k) = \prod_{i=0}^{n-1}(k - i)$.
- Si G est un arbre à n noeuds, $\Pi_G(k) = k(k-1)^{n-1}$.
- $\Pi_G(k) = \Pi_{G-e}(k) - \Pi_{G \cdot e}(k)$.

5.5 Coloriage d'arêtes

5.5.1 Définitions

- Un coloriage des arêtes d'un graphe en k couleurs est l'assignation à chaque arête d'une couleur $1, 2, \dots,$ ou k.
- Un coloriage est dit propre si deux arêtes adjacentes sont toujours de couleurs différentes.

$\rightarrow$ Remarque : trouver un coloriage propre en k couleurs consiste à séparer les arêtes en k couplages distincts.

- L'indice chromatique d'un graphe G, noté $\chi'(G)$, est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour obtenir un coloriage propre des arêtes de G.

5.5.2 Théorèmes et propriétés

- $chi'(G) \geq$ degré maximum de G.
- Pour un graphe G biparti, $\chi'(G) =$ degré max.
- Pour un graphe simple, $\chi'(G) =$ degré max ou $\chi'(G) =$ degré max $+1$.
- S'il y a au plus m arêtes entre deux noeuds, alors degré max $\geq \chi'(G) \geq$ degré max $+m$.

Cliques, ensembles indépendants et l’impossible désordre

6.1 Ensembles indépendants

6.1.1 Définitions

- Un ensemble indépendant (stable) d’un graphe est un ensemble de noeuds deux à deux non adjacents.
- Un ensemble indépendant maximum est un ensemble indépendant dont le nombre de noeuds est maximal.

6.1.2 Théorèmes

- Un ensemble de noeuds est indépendant ssi son complémentaire est une couverture de sommets.
- Corollaire : |ensemble indépendant max| + |couverture min| = |{noeuds}|

6.2 Cliques

6.2.1 Définitions

- Une clique d’un graphe est un ensemble de noeuds deux à deux adjacents. C’est donc un sous-graphe complet.
- Une clique maximum est une clique dont le nombre de noeuds est maximal.
- Un triangle est une clique de trois noeuds.

6.2.2 Théorèmes

- Un ensemble est indépendant dans un graphe simple ssi il est une clique dans le graphe complémentaire. Cela implique que deux noeuds sont adjacents dans le complémentaire du graphe G ssi ils sont non-adjacents dans G.
- Théorème de Ramsey : tout graphe simple à 6 noeuds contient une clique de trois noeuds ou un ensemble indépendant de trois noeuds.

- Théorème de Ramsey généralisé : Soit un graphe complet à r noeuds. On colorie les arêtes en les couleurs c_i, $i \in \{1, \cdots, k\}$. On cherche la plus petite valeur de r telle que tout coloriage crée une clique à n_i noeuds de couleur c_i pour un certain i. Cette plus petite valeur de r est le nombre de Ramsey $R(n_1, \ldots, n_k)$. Le théorème de Ramsey dit que ce nombre existe et est fini. Cela se prouve grâce aux théorèmes suivants.

- Pour $m, n \geq 2$, $R(m,n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n)$. Cela implique que $R(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$.

- $R(n_1, \ldots, n_k) \leq R(n_1, \ldots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k))$.

- Si N est tel que $\binom{N}{m} < 2^{m(m-1)/2-1}$, alors $R(m,m) > N$. En utilisant l'approximation de Stirling[1], on obtient pour les grands m: $R(m,m) \geq \frac{m2^{m/2}}{e\sqrt{2}}$.

6.2.3 Ramsey

Il existe beaucoup de théorèmes qui imitent le théorème de Ramsey : "Dans quelque chose suffisamment grand, il y a toujours des sous-quelque chose qui ont une certaine propriété". Cela signifie que le désordre complet est impossible.
Exemples :

- Théorème de Schur : Pour chaque k, il y a un nombre r_k tel que pour toute partition des nombres $1, \ldots, r_k$ en k classes, une de ces classes contient x, y, z tels que $x + y = z$.

- Parmi cinq points arbitraires dans le plan, tels que trois d'entre eux ne sont jamais alignés, on peut toujours en choisir quatre qui déterminent un quadriliatère convexe.

- Théorème de Van der Waerden : Pour tout k, l, il existe un nombre $W(k,l)$ tel que les nombres de 1 à $W(k,l)$, coloriés arbitrairement en k couleurs, contiennent une progression arithmétique monochrome de longueur l.

- Théorème de Green-Tao : la suite des nombres premiers contient des suites arithmétiques arbitraiement longues.

6.3 Cliques et densité

Si un graphe simple a strictement plus de $\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$ arêtes, alors il a une clique de $r+1$ noeuds.

[1] $m! \approx \sqrt{2\pi m}(\frac{m}{e})^m$

Réseaux et flots

7.1 Définitions

- Un réseau est un digraphe, i.e. un graphe dirigé, avec un sommet s tel que $d^+(s) > 0$ (degré sortant), et un noeud t tel que $d^-(s) > 0$ (degré entrant); et une capacité limitée $c(u, v) \geq 0$ pour toute arête (u, v).
- Un flot est une fonction f qui associe un scalaire $f(u, v)$ à chaque arête (u, v). Elle vérifie les contraintes suivantes :
  - $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \qquad \forall (u, v)$.
  - Conservation du flot : $\sum_u f(u, v) = \sum_u f(v, u) \qquad \forall v \neq s, t$.
- La valeur d'un flot N est $F(N) = \sum_u f(s, u)$.
- Une coupe $(P, \bar{P})$ d'un réseau $N = (V, E)$ est une partition de sommets telle que $V = P \cup \bar{P}$, $P \cap \bar{P} = \emptyset$, $s \in P$ et $t \in \bar{P}$.
- La capacité d'une coupe $(P, \bar{P})$ est la somme des capacités des arêtes de P à $\bar{P}$[1].
- Un chemin d'augmentation est un chemin qui part de s et arrive en t par des arêtes dont le flot n'est pas encore maximum, ou dans le sens inverse des arêtes dont le flot est maximum.

7.2 Théorèmes

- Soit une coupe $(P, \bar{P})$ quelconque. La valeur d'un flot est donné par $F(N) = \sum_{u \in P} \sum_{v \in \bar{P}} f(u, v) - \sum_{u \in P} \sum_{v \in \bar{P}} f(v, u)$.
- La valeur d'un flot dans un réseau ne peut pas excéder la capacité d'une coupe.
- Si toutes les capacités sont entières, alors il existe un flot maximum entier également, i.e. sa valeur est entière et le flot sur chaque arête aussi.

[1] Et pas celles de $\bar{P}$ à P!

7.3 Observations

- Si un réseau possède plusieurs noeuds sources et/ plusieurs noeuds de destination, on ajoute un noeud source (resp. destination) global lié à tous les noeuds sources (resp. destination) et le poids de ces arêtes est la somme de tous les noeuds sortant (resp. entrant) du noeud.

- Si certains noeuds ont des capacités, on peut les remplacer par deux noeuds sans poids, reliés par une arête dans chaque sens, de même poids que le noeud initial.

- Un problème de réseau et de flot est un problème d'optimisation linéaire s'écrivant sous la forme suivante :

$$\max \sum_u f(s,u) - \sum_u f(u,s) \qquad \begin{cases} 0 \leq f(u,v) \leq c(u,v) \\ \text{Conservation du flot} \end{cases} \tag{7.1}$$

- Un couplage de graphes bipartis est un problème de réseau et de flot : chaque arête a un coût unitaire, et on relie tous les noeuds d'une partition à s et les autres à t.

7.4 Algorithme de Ford Fulkerson

1. Trouver un flot initial;

2. Tant qu'il reste un chemin d'augmentation, le saturer, i.e. l'ajouter au flot;

3. S'il n'existe plus de chemin d'augmentation, alors le flot est maximum.

Théorème de Edmond-Karp : Parmi les chemins d'augmentation possibles, choisir un plus court chemin.

$\rightarrow$ Remarque : L'algorithme de Ford Fulkerson a une complexité indépendante des capacités.

Graphes planaires

8.1 Définitions

- Un graphe est planaire ssi il peut être représenté par des points distincts dans le plan, tels que les arêtes sont des courbes qui ne s'intersectent pas.
- Le degré d'une face est le nombre de sommets qui la composent.
- Un polyèdre régulier est un solide dont toutes les faces sont des polygônes réguliers identiques. Soit k le degré des noeuds et k le degré des faces. Ils vérifient $(k-2)(l-2) < 4$.
- Un mineur d'un graphe G est obtenu au départ de G :
  1. Supprimer des arêtes de G;
  2. Supprimer des sommets isolés;
  3. Contracter des arêtes.

8.2 Propriétés

- Une représentation planaire d'un graphe peut être transformée en une autre représentation pour laquelle une face quelconque devient la face extérieure.
- Il existe des algorithmes vérifiant qu'un graphe est planaire qui tournent en temps linéaire.

8.3 Théorèmes

- Théorème de Fary : Tout graphe planaire possède une représentation dans le plan dans laquelle les arêtes sont des segments de droite.
- La propriété de projection sur une sphère est équivalente à la planarité.
- Une représentation planaire d'un graphe divise le plan en un nombre fini de faces. La face extérieure est celle qui entour le graphe.
- Formule d'Euler : Si G est un graphe connexe planaire, alors $f = e - n + 2$, avec f le nombre de faces, e le nombre d'arêtes et n le nombre de noeuds.
- Soit un graphe planaire avec $f \geq 2$. Alors $3f \leq 2e$. Si le graphe ne contient pas de triangles, alors $4f \leq 2e$.

- Dans un graphe planaire connexe avec $n \geq 3$, $e \leq 3n - 6$. Si le graphe ne contient pas de triangles, $e \leq 2n - 4$.
- Un graphe planaire est toujours 6-colorable.
- Théorème de Kuratovski : pour être planaire, un graphe ne peut posséder K_5 ou $K_{3,3}$ comme mineur.
- Conjecture de Hadwiger : soit un graphe sans mineur K_n. Il est $n - 1$ colorable.

Complexité algorithmique

9.1 Formalisation et problèmes de décision

Lors de la formalisation d'un problème mathématique, nous avons besoin de plusieurs éléments :

- Un nom : il faut donner un nom au problème;
- Des instances : il s'agit de tous les éléments nécessaires en input du problème;
- Une question : Dans un problème de décision, il faut avoir une question à laquelle l'agorithme répondra.

Tout problème mathématique peut être transformé en un problème de décision. Exemple :

Quel est le nombre chromatique du graphe G?

- Nom : Nombre chromatique
- Instance : Graphe G, entier k
- Question : Le graphe G peut-il être colorié avec k couleurs?

9.2 Efficacité

Pour tout problème utilisant des objets finis, il existe un algorithme qui résout le problème : les algorithmes énumératifs. Cependant, ils ne sont pas efficaces!

- Un algorithme est dit efficace[1] (polynomial) si il produit une réponse en un nmobre d'opérations borné par un polynôme en la taille de l'instance.
- Un problème est polynomial s'il peut être résolu par un algorithme polynomial.
- Un problème appartient à la classe $\mathcal{P}$ s'il peut être résolu par un algorithme polynomial : classe $\mathcal{P} \equiv$ polynomial.
- Un problème appartient à la classe $\mathcal{NP}$[2] si une réponse positive peut toujours être vérifiée en temps polynomial, i.e. on peut toujours vérifier (en temps polynomial) si une instance répond positivement à la question du problème de décision.

$\rightarrow$ Remarque : $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$, mais on ne sait pas si $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

[1] L'efficacité est liée à un problème et non pas à un algorithme.
[2] $\mathcal{NP}$ signifie Nondeterministic polynomial

9.3 Réductibilité

Etant donnés deux problèmes P et Q, P est réductible à Q, i.e. P est plus facile que Q, noté $P \leq Q$, s'il existe un algorithme efficace qqui transforme les instances de P en insatnces équivalentes de Q.

- Si $P \leq Q$ et $Q \in \mathcal{P}$, alors $P \in \mathcal{P}$.
- Un problème $P \in \mathcal{NP}$ est $\mathcal{NP}$-complet si $Q \leq P$ pour tous les problème $Q \in \mathcal{NP}$, i.e. tout problème de $\mathcal{NP}$ est plus facile que P. Un problèle $\mathcal{NP}$-complet est donc un problème de $\mathcal{NP}$ qui est aussi difficile que tous les autres problèmes de $\mathcal{NP}$.

Algèbre linéaire et théorie des graphes

10.1 Graphes, matrices et valeurs propres

Soit un graphe G et soient M la matrice d'incidence et A la matrice d'adjacence.

- Le rayon spectral $\rho(A)$ est la valeur propre de plus grande valeur absolue. Il permet d'estimer la croissance du nombre de parcours de longueur l par $[\rho(A)]^l$.
- $\deg\min \leq \rho(A) \leq \deg\max$.
- Le laplacien du graphe G est $L = A - D$, avec D la matrice diagonale des degrés.

10.2 Equation différentielle sur un graphe

10.2.1 Equation de la chaleur sur un graphe

Si la température au temps t au noeud i (e.g. une pièce dans un bâtiment) est $T_(t)$, que le poids a_{ij} de l'arête ij est la conductance thermique entre i et j, et que chaque noeud a une capacité calorigique unitaire (énegergie interne = température), alors l'équation de la chaleur est

$$\dot{T}_i = \sum_j a_{ij}(T_j - T_i) \Longrightarrow \dot{T} = LT \tag{10.1}$$

Cela est équvalent en espace discret à l'équation de la chaleur $\dot{T} = \nabla^2 T$ dans l'espace continu.

10.2.2 Dynamique d'opinion sur un graphe

$T_i(t)$ représente maintenant l'opinion d'un noeud i au temps t dans un graphe social. On fait l'hypothèse que les noeuds voisins discutent et tendent à rapprocher leur opinion avec le temps : $\dot{T}_i = a_{ij}(T_j - T_i)$ sur une arête ij, où a_{ij} est une influençabilité mutuelle. L'équation de la dynamique d'opinion sur le graphe social est identique à l'équation de la chaleur :

$$\dot{T} = LT \tag{10.2}$$

10.3 Laplacien

Soit un graphe G dont le laplacien est L.
Les valeurs propres de L sont dans l'intervalle $[-2\deg\max, 0]$, et la dimension du noyau, i.e.

le nombre de valeurs propres nulles, est le nobre de composantes connexes du graphe.
Donc l'équation de la chaleur sur un graphe connexe converge vers une température constante.
La dynamique d'opinion aboutit à un consensus.

10.3.1 Déterminant

Le déterminant du laplacien est nul, mais ses cofacteurs sont intéressants.
Matrix-tree theorem :
Tout cofacteur du laplacien d'un graphe simple non-pondéré connexe est égal, au signe près, au nombre d'arbres sous-tendants du graphe. De manière équivalente, ce théorème signifie que le nombre d'arbres sous-tendants d'un graphe simple non-pondéré connexe à n noeuds est égal à

$$\frac{|\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n}{n} = \frac{|\text{coefficient de degré 1 du polynôme caractéristique } \det(L - xI)}{n} \tag{10.3}$$

avec les λ_i les valeurs propres non nulles du laplacien (on fait l'hypothèse que seule $\lambda_1 = 0$.

On en déduit le théorème de Cayley : le graphe complext à n noeuds, i.e. K_n a n^{n-2} arbres sous-tendants.

10.4 Orienter un graphe non dirigé

Sur un graphe non-dirigé non-pondéré, on peut donner une orientation arbitraire au graphe.
Soit M la matrice d'incidence dirigée de ce graphe : une arête e de i vers j est encodée par un -1 dans la ligne i et un $+1$ dans la ligne j de la colonne de cette arête.
Alors, $L = -MM^T$ est le laplacien du graphe, quelle que soit l'orientation. Si le graphe est connexe, alors $rank(M) = n - 1$ avec $\nVdash M = 0$ pour seule relatio linéaire entre les lignes.

Une matrice d'incidence réduite M' s'obtient en retirant une ligne arbitraire de M. Elle est de rang plein $n - 1$ et les lignes sont donc linéairement indépendantes.

10.5 Matrice d'incidence et arbres

Un graphe à n noeuds et $n - 1$ arêtes a une matrice d'incidence M de rang $n - 1$, et une matrice d'incidence carrée inversible ssi le graphe est un arbre. La matrice d'incidence réduite est alors triangulaire supérieure, pour un certain ordre des noeuds, et de déterminant ± 1.

Dans un graphe à n noeuds, un ensemble de $n - 1$ arêtes forment un arbre sous-tendant ssi les $n - 1$ colonnes correspondantes de M sont libres, ssi les $n - 1$ colonnes correspondantes de M' forment une matrice carrée inversible.

10.6 Théorème de Binet-Cauchy

Pour des matrices carrées A et B, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Pour des matrices rectangulaires, $\det(AB) = \sum_S \det(A_S)\det(B_S)$, où A_S est une sous-matrice carrée résultant du choix d'un ensemble de n colonnes de A et B_S la sous-matrice de B résultant du choix des n lignes correspondantes.

Graphes hamiltoniens

11.1 Définitions

- Un chemin est hamiltonien s'il passe par chaque noeud du graphe une et une seule fois.
- Un cycle est hamiltonien s'il passe par chaque noeud du graphe une et une seule fois.
- Un graphe est hamiltonion s'il possède un cycle hamiltonien.

11.2 Propriétés et théorèmes

- Un graphe biparti est hamiltonien s'il a autant de noeuds dans chaque partition.
- Condition nécessaire : Si on ôte k noeuds quelconques d'un graphe hamiltonien, on obtient au plus k composantes connexes.
- Condition suffisante : Un graphe simple à $n \geq 3$ noeuds tel que le degré minimum est au moins $n/2$ est hamiltonien.

11.3 Problèmes

11.3.1 Problème du postier chinois

Mise en contexte : Un postier veut passer dans chaque rue au moins une fois, de façon à parcourir la plus petite distance possible.

Dans un graphe pondéré, il faut trouver le parcours fermé le plus court qui passe par toutes les arêtes au moins une fois.

11.3.2 Problème du voyageur de commerce

Un voyageur de commerce doit passer par chaque ville au moins une fois, de façon à parcourir la plus petite distance possible.

Dans un graphe pondéré, trouver le parcours fermé le plus court qui passe par tous les noeuds au moins une fois.

$\rightarrow$ Remarque : ce problème ne possède actuellement aucun algorithme efficace.