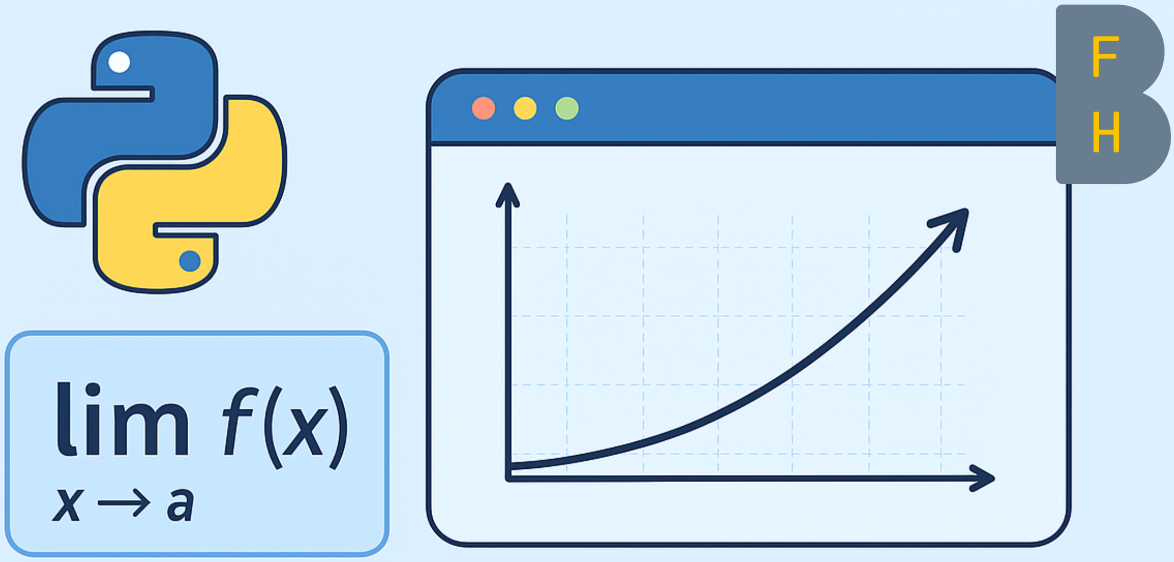

Projekt 1 mit Python

BZG1101a Analysis 1, Herbstsemester 2025/2026
Bericht

Simon Eisele

Version 1.0 vom 25. November 2025

- Technik und Informatik
- Elektrotechnik und Informationstechnologie

Inhaltsverzeichnis

1 Beispiel eines Grenzwerts

In der ersten Übung geht es um die Visualisierung des Grenzwerts folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad \text{für } x > 0 \tag{1}$$

Wir wissen, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Durch das Darstellen der Funktion 1 im Intervall $(0, 10]$ ist ersichtlich, dass sie sich für grosse Werte von x der horizontalen Asymptote bei $y = 1$ annähert. Für kleine Werte von x oszilliert die Funktion jedoch stark aufgrund des Terms $\sin \frac{1}{x}$.

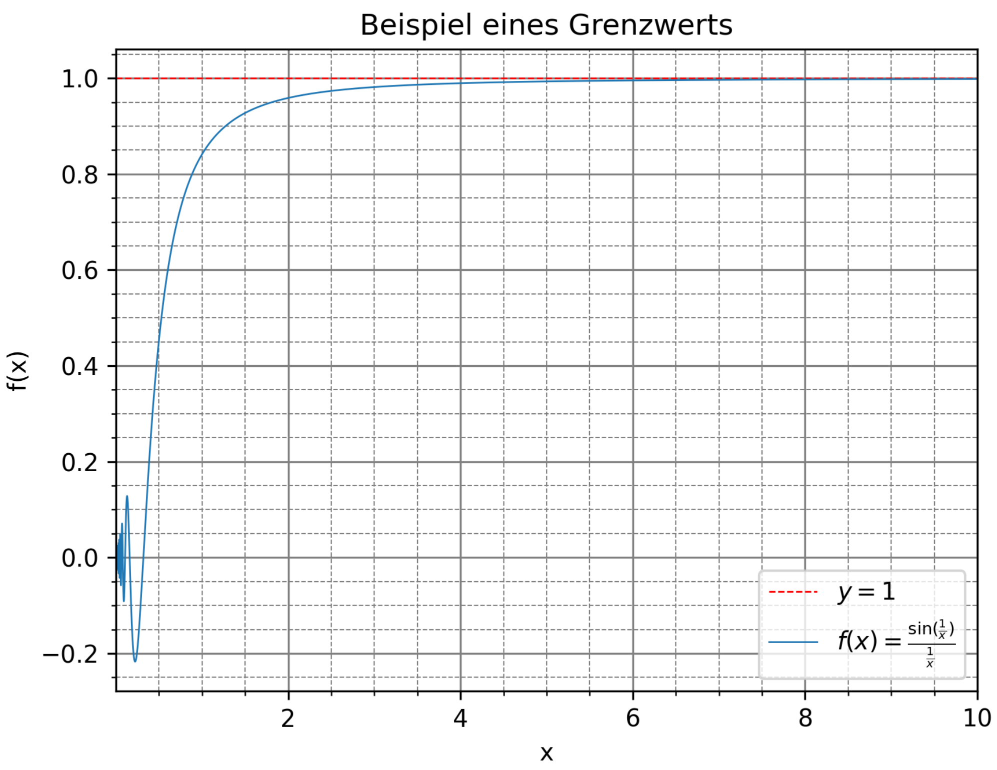

Abbildung 1: Darstellung einer Funktion mit Grenzwert

2 Logarithmische Skala

In der zweiten Übung geht es um die Darstellung von Graphen einer Kurve in unterschiedlichen Skalen. Dazu plotten wir jeweils die Funktion

$$f(x) = 3x^2 \tag{2}$$

im Intervall $(0, 10]$. 0 wird hier absichtlich ausgeschlossen, da $\log_{10}(0)$ nicht definiert ist.

2.1 Darstellung linear-linear

Als erstes wird die Funktion mit linear skalierter X- und Y-Achse dargestellt. Wie in Abbildung 2 ersichtlich, führt dies zu einer quadratischen Funktion.

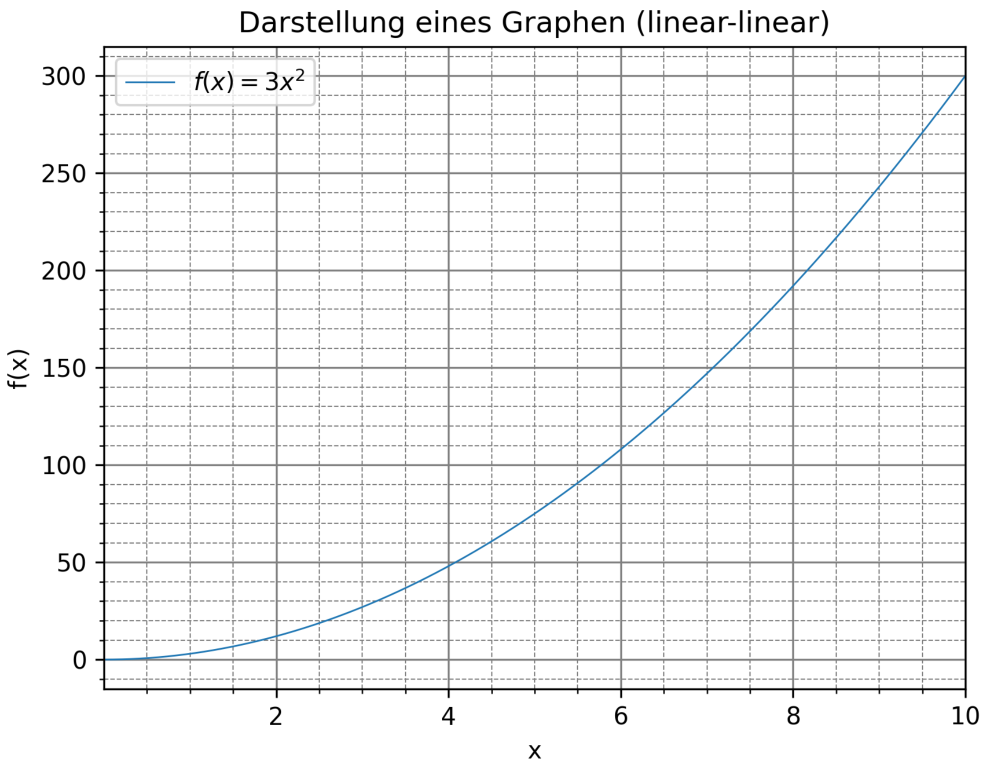

Abbildung 2: Darstellung einer Funktion mit linearer X- und Y-Achse

2.2 Darstellung log-linear

In einem zweiten Schritt wird die Funktion mit logarithmisch skalierter X-Achse dargestellt. In Python kann dazu der Befehl *semilogx()* verwendet werden. Dieser skaliert die X-Achse logarithmisch ($\log_{10}$), während er die Y-Achse linear belässt. Wie in Abbildung 3 ersichtlich, erscheint die Kurve exponentiell (enstspricht dem Verhalten einer Exponentialfunktion).

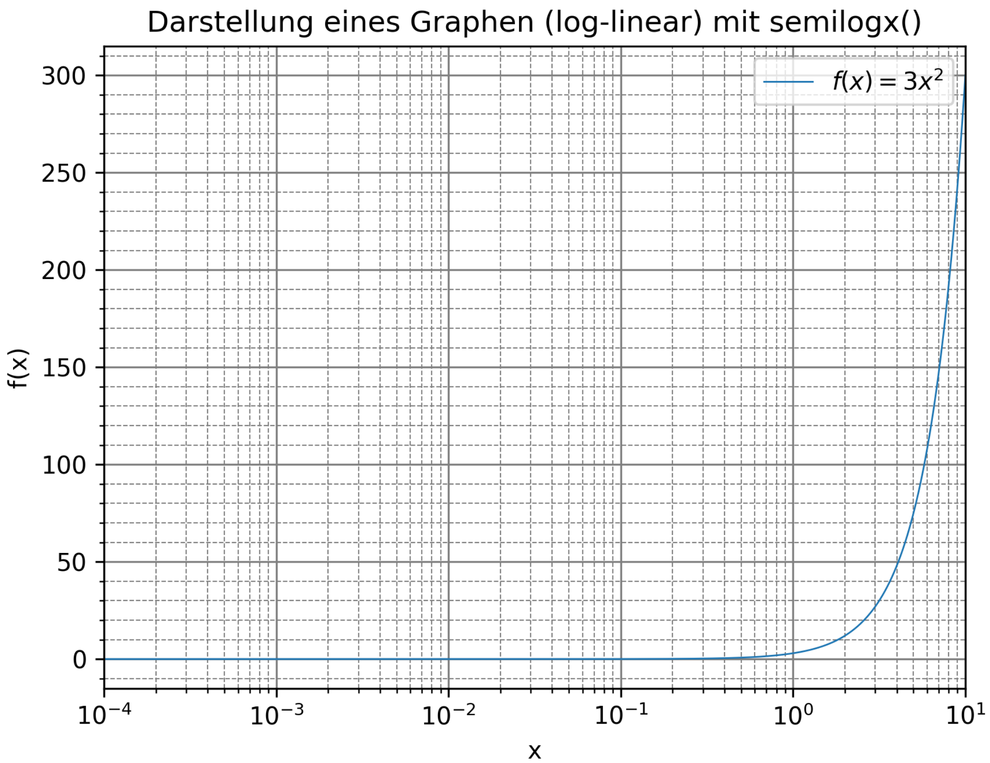

Abbildung 3: Darstellung einer Funktion mit logarithmischer X- und linearer Y-Achse (Mit dem Befehl *semilogx()*)

Die gleiche Kurve lässt sich auch durch „manuelle“ Skalierung der X-Achse erreichen, in dem wir

$$u = \log_{10}(x)$$

setzen und anschliessend auf der Horizontalachse u darstellen. Die Kurve wird dadurch zwar verschoben, es entsteht aber die gleiche Form einer Exponentialkurve wie mit *semilogx()*.

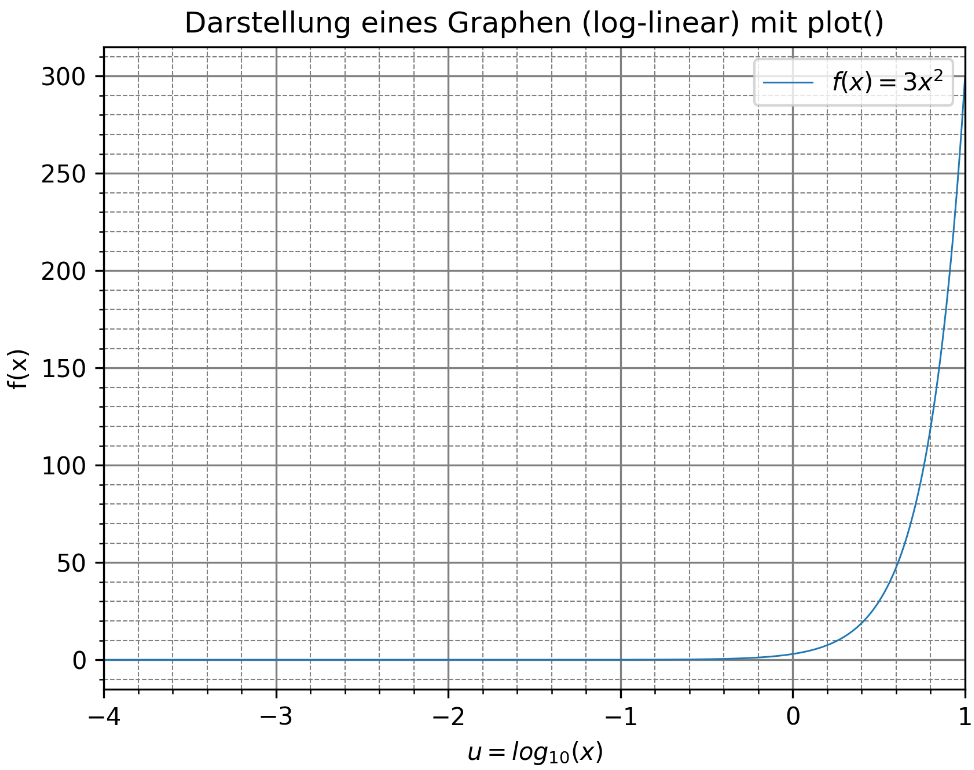

Abbildung 4: Darstellung einer Funktion mit logarithmischer X- und linearer Y-Achse (Mit dem Befehl *plot()*)

2.3 Darstellung log-log

Als letztes wird die Funktion mit logarithmisch skalierter X- und Y-Achse dargestellt. In Python kann dazu der Befehl *loglog()* verwendet werden. Dieser skaliert beide Achsen logarithmisch ($\log_{10}$). Wie in Abbildung 5 ersichtlich, führt dies zu einer Geraden, da Potenzfunktionen im log-log-Diagramm linear werden.

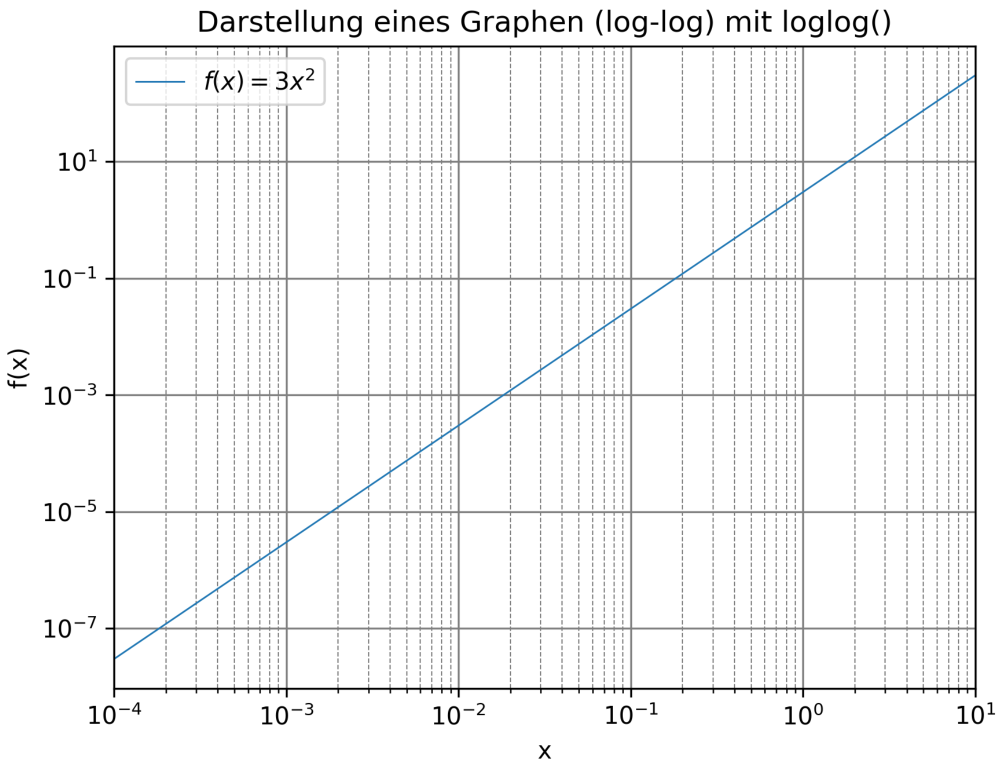

Abbildung 5: Darstellung einer Funktion mit logarithmischer X- und Y-Achse (Mit dem Befehl loglog())

Auch hier lässt sich die gleiche Kurve wieder durch „manuelle" Skalierung der X- und Y-Achse erreichen, in dem wir

$$u = \log_{10}(x) \text{ und } v = \log_{10}(f(x)) = \log_{10}(y)$$

setzen. Anschliessend tragen wir u auf der horizontalen und v auf der vertikalen Achse auf. Dadurch entsteht ebenfalls eine lineare Funktion.

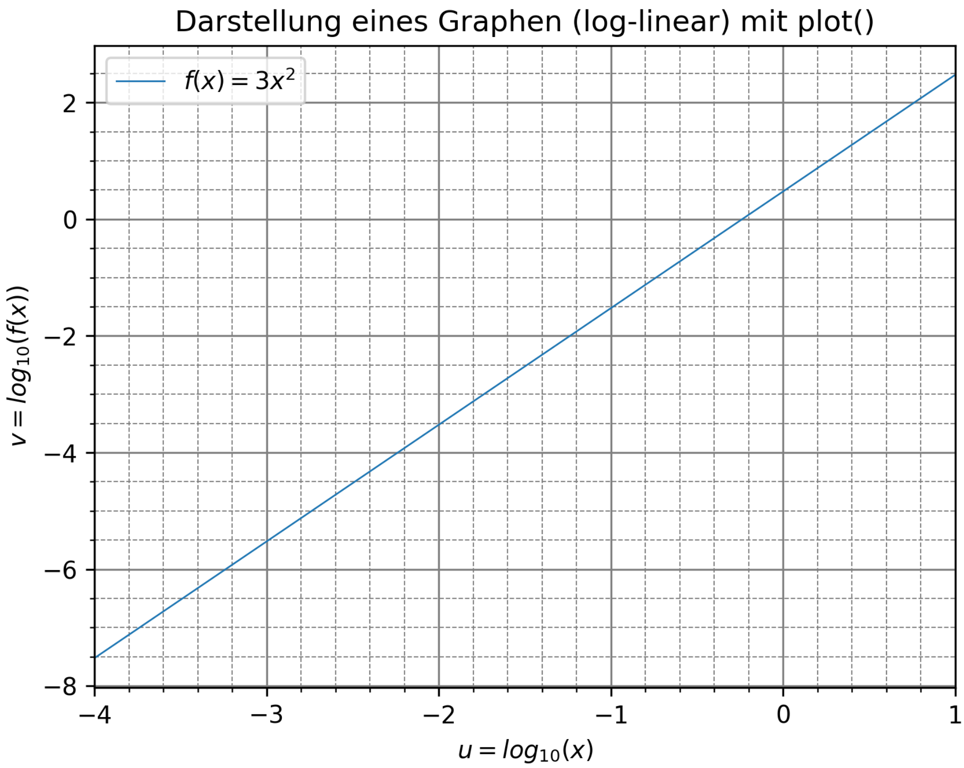

Abbildung 6: Darstellung einer Funktion mit logarithmischer X- und Y-Achse (Mit dem Befehl plot())

Durch Einsetzen und Umformen lässt sich die Funktion dieser Geraden bestimmen:

$$\begin{aligned} v &= \log_{10}(f(x)) \\ &= \log_{10}(3x^2) \\ &= 2\log_{10}(x) + \log_{10}(3) \\ &= 2u + \log_{10}(3) \end{aligned}$$

Die Gerade hat also eine Steigung von 2 und einen Y-Achsenabschnitt bei $y = \log_{10}(3)$.

3 Ableitung

In Übung 3 geht es um die Annäherung der Ableitung. Die Ableitung einer Funktion kann allgemein mit folgendem Grenzwert bestimmt werden:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Mit dieser Formel nähert man sich dem Punkt der Ableitung von nur einer Seite an. Man rechnet also die Steigung der Funktion zwischen dem Punkt, an welchem man die Ableitung ermitteln möchte und einem zweiten Punkt, welcher um h verschoben ist. Um sich dem genauen Wert der Ableitung an einem Punkt noch schneller zu nähern, kann man folgende Formel verwenden:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{h}$$

Hiermit rechnet man also die Steigung zwischen zwei Punkten, welche einmal $\frac{h}{2}$ vor dem Punkt der zu ermittelnden Ableitung um einmal $\frac{h}{2}$ dahinter liegen. Da hier beide Seiten des Punktes betrachtet werden, heben sich Fehler teilweise gegenseitig auf. Daher liefert diese Methode bereits bei grösserem h eine deutlich präzisere Annäherung.

3.1 Annäherung der Ableitung von sin(x)

Um dies an einem praktischen Beispiel zu untersuchen, versuchen wir die Ableitung von $\sin x$ durch die oben genannten Formeln zu bestimmen. Die korrekte Ableitung von $\sin x$ ist wie folgt:

$$\sin' x = \cos x$$

Um den Unterschied und die Funktion der beiden Varianten der Annäherung zur Ableitung zu zeigen, wurden die verschiedenen Kurven im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit jeweils immer kleiner werdendem h geplottet. Auf den fünf Abbildungen ist deutlich ersichtlich, dass sich beide Varianten bei kleinem h immer mehr an die korrekte Ableitung annähern, wobei aber die zweite Variante jeweils näher an der korrekten Ableitung liegt.

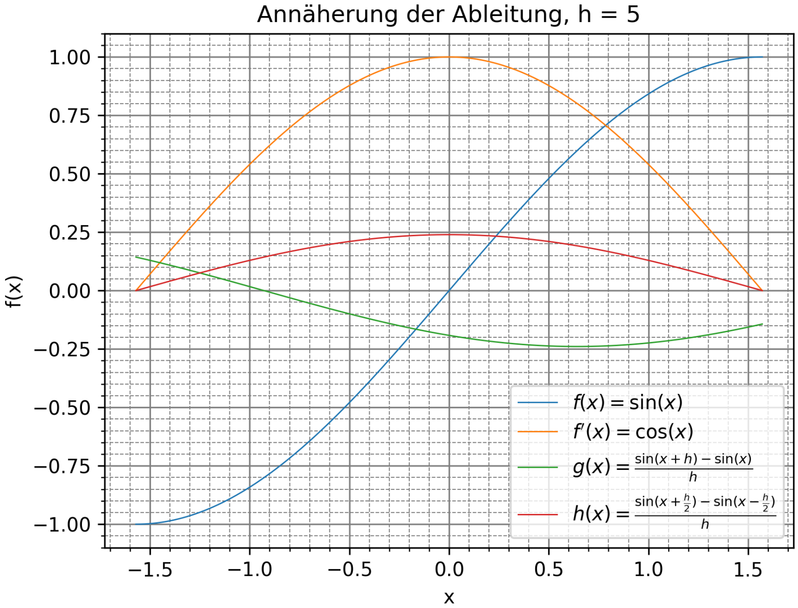

Abbildung 7: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 1: h = 5

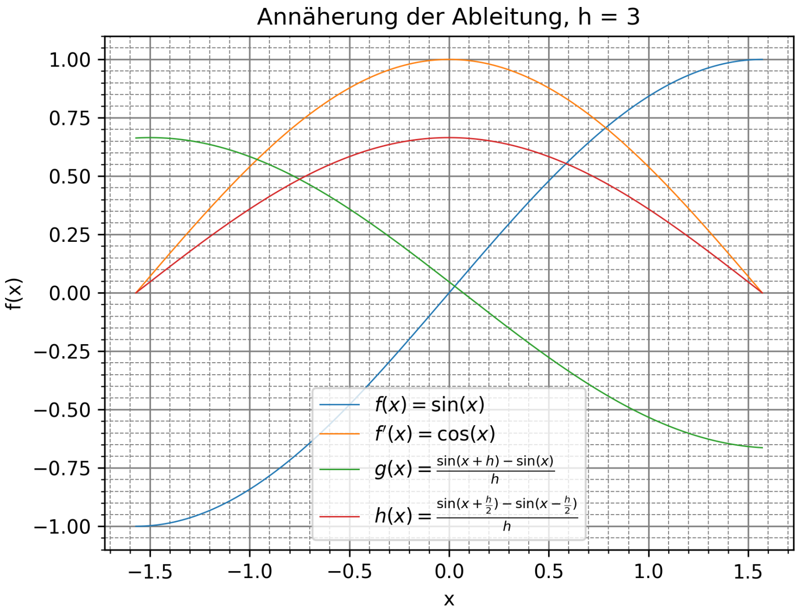

Abbildung 8: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 2: h = 3

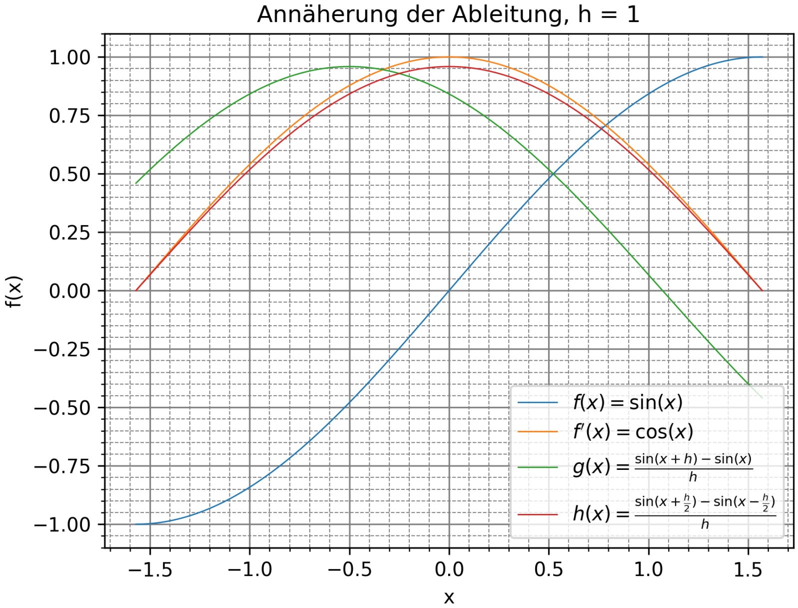

Abbildung 9: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 3: h = 1

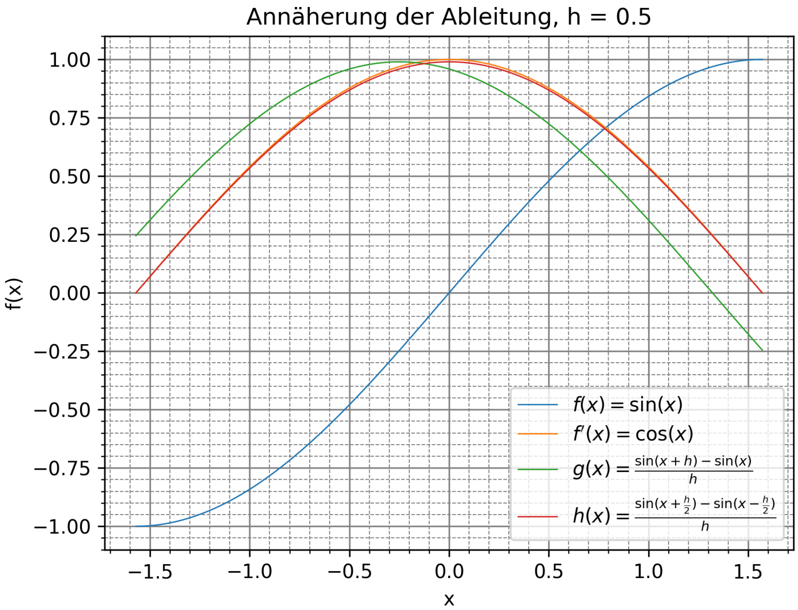

Abbildung 10: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 4: h = 0.5

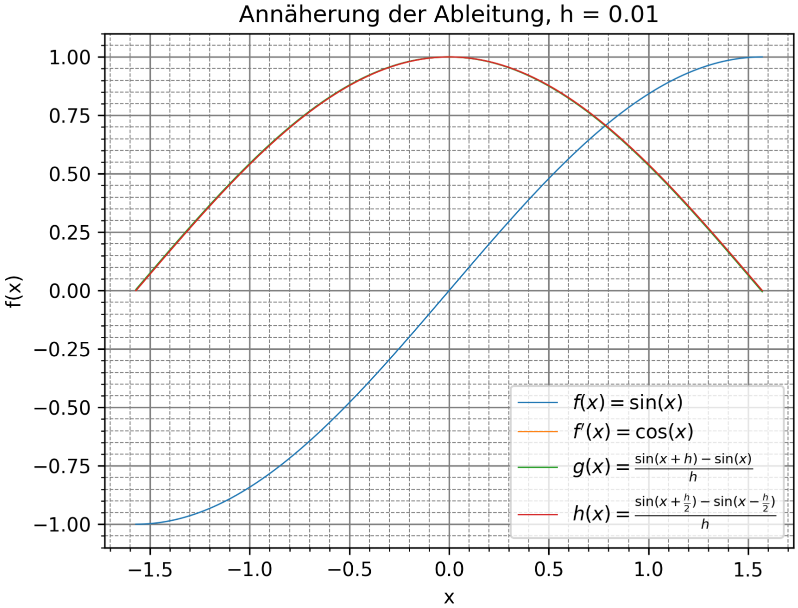

Abbildung 11: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 5: h = 0.01

Abbildungsverzeichnis