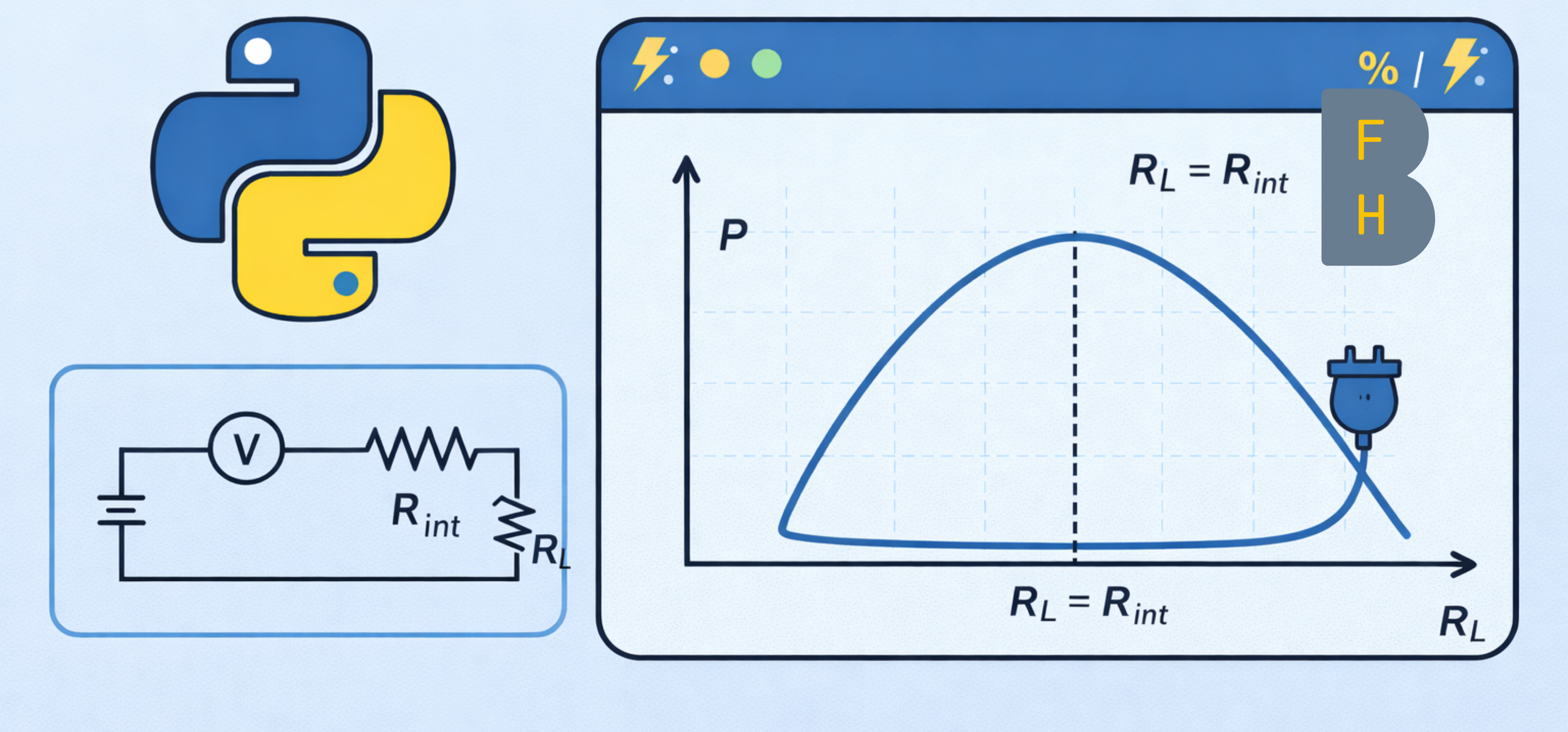

Projekt 2 mit Python

BZG1101a Analysis 1, Herbstsemester 2025/2026
Bericht

Simon Eisele

Version 1.0 vom 9. Januar 2026

- Technik und Informatik
- Elektrotechnik und Informationstechnologie

Inhaltsverzeichnis

1 Problem 1

1.1 Teil 1 - Leistungsanpassung einer Spannungsquelle

In einem ersten Teil wird die maximale Leistung analysiert, die eine Spannungsquelle an einen Lastwiderstand abgeben kann (Leistungsanpassung). Die Schaltung dazu ist in Abbildung 1 dargestellt.

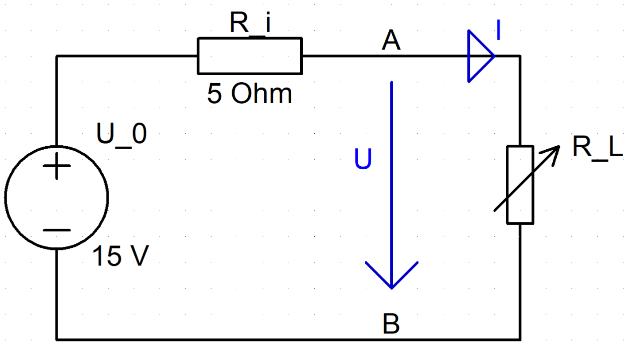

Abbildung 1: Schaltung der Leistungsanpassung (Spannungsquelle)

Für die Berechnungen werden folgende Werte der Spannungsquelle angenommen:

$$U_0 = 15\,\mathrm{V}$$
$$R_\mathrm{i} = 5\,\Omega$$

1.1.1 Herleitung der Leistung

Die elektrische Leistung am Lastwiderstand R_L wird gemäss Schaltung aus Abbildung 1 wie folgt berechnet:

$$P = U \cdot I \tag{1}$$

Die Spannung U und der Strom I können in Abhängigkeit der Leerlaufspannung U_0 und der beiden Widerstände R_i und R_L dargestellt werden. Die entsprechenden Formeln ergeben sich aus den Formeln für den Spannungsteiler, sowie dem ohmschen Gesetz:

$$U = U_0 \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \tag{2}$$
$$I = \frac{U_0}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \tag{3}$$

Ersetzt man in Gleichung 1 U und I durch die gefundenen Äquivalente, so erhält man die Formel für den Leistungsverlauf von P in Abhängigkeit des Widerstands R_L.

$$P(R_\mathrm{L}) = U_0^2 \frac{R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2} \tag{4}$$

1.1.2 Maximale Leistung

Zur Bestimmung der Extremstellen der Leistungsfunktion $P(R_\mathrm{L})$ wird die erste Ableitung gebildet und gleich null gesetzt. Dazu wird die Quotientenregel angewendet.

$$f'(x) = c \cdot \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} c &= U_0^2 \\ u(x) &= R_\mathrm{L} \\ u'(x) &= 1 \\ v(x) &= (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 \\ v'(x) &= 2R_\mathrm{i} + 2R_\mathrm{L} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die erste Ableitung wie folgt:

$$P'(R_\mathrm{L}) = U_0^2 \frac{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 - R_\mathrm{L}(2R_\mathrm{i} + 2R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^4} \tag{6}$$

Durch Ausmultiplizieren und Wegkürzen folgt:

$$P'(R_\mathrm{L}) = U_0^2 \frac{(R_\mathrm{i} - R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^3} \tag{7}$$

Da der Nenner in jedem Fall positiv ist, muss der Zähler null sein. Daraus folgt folgende Beziehung für den Lastwiderstand R_L bei maximaler Leistung:

$$(R_\mathrm{i} - R_\mathrm{L}) = 0 \tag{8}$$

$$R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L} \tag{9}$$

Zur Klassifikation der Extremstelle wird die zweite Ableitung $P''(R_\mathrm{L})$ betrachtet.

$$P''(R_\mathrm{L}) = -\frac{2U_0^2}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^3} < 0 \tag{10}$$

Da die zweite Ableitung $P''(L)$ bei $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ kleiner als 0 ist, handelt es sich um ein Maximum.

Durch Einsetzen von $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ in Gleichung 4 lässt sich eine Formel für die Bestimmung der maximalen Leistung P_0 herleiten:

$$P_0 = \frac{U_0^2}{4R_\mathrm{i}} \tag{11}$$

Setzen wir die gegebenen Werte ein, erhalten wir die folgende maximale Leistung der Spannungsquelle aus Abbildung 1:

$$P_0 = \frac{(15\,\mathrm{V})^2}{4 \cdot 5\,\Omega} = \underline{\underline{11.25\,\mathrm{W}}}$$

1.1.3 Normierte Leistung

Durch Kombination von Gleichung 4 und Gleichung 11 ergibt sich folgende Beziehung für das Verhältnis von aktueller Leistung P zur maximalen Leistung P_0:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{U_0^2 \frac{R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{L})^2}}{\frac{U_0^2}{4R_\mathrm{i}}} \tag{12}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{4R_\mathrm{i}R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{L})^2} \tag{13}$$

Durch Teilen des Nenners und des Zählers auf der rechten Seite der Gleichung durch R_i^2 erhalten wir:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\frac{4R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}}{\left(1+\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}\right)^2} \tag{14}$$

Wenn wir jetzt $\frac{P}{P_0} = p$ und $\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}} = r$ setzen, ergibt sich:

$$p(r) = \frac{4r}{(1+r)^2} \tag{15}$$

Diese Formel gibt die normierte Leistung (P im Verhältnis zu P_0) in Bezug zum Verhältnis des Lastwiderstands R_L zum Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle an. Die Normierung erleichtert die Analyse, da sie den Leistungsverlauf unabhängig von den konkreten Spannungs- und Widerstandswerten beschreibt. Der entsprechende Graph ist in Abbildung 2 dargestellt. Die Achsen entsprechen dabei folgenden Beziehungen:

$$x - Achse = r = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}$$
$$y - Achse = p = \frac{P}{P_0}$$

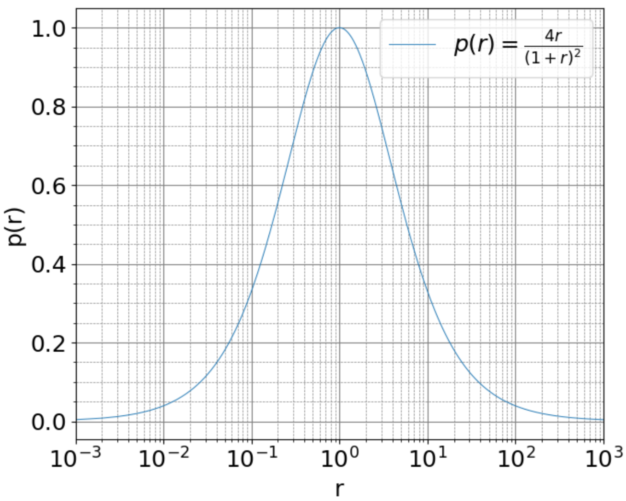

Abbildung 2: Normierte Leistung in Bezug zum Verhältnis der Widerstände (Spannungsquelle)

Der logarithmisch dargestellte Graph ist symmetrisch um $r = 1$, also $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$. Die Leistung für $R_\mathrm{L} = \frac{1}{2}R_\mathrm{i}$ entspricht genau der Leistung bei $R_\mathrm{L} = 2R_\mathrm{i}$. Reziproke Änderungen des Lastwiderstands R_L vom Innenwiderstand R_i nach oben und unten führen zu identischen relativen Leistungseinbussen.

1.1.4 Normierte Spannung

Wir betrachten noch einmal Gleichung 2 und teilen beide Seiten durch U_0, sowie auf der rechten Seite den Nenner und den Zähler durch R_i. Somit folgt:

$$\frac{U}{U_0} = \frac{\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}}{1 + \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}} \tag{16}$$

Setzt man $\frac{U}{U_0} = u$ und erneut $\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}} = r$ setzen, erhalten wir:

$$u(r) = \frac{r}{1 + r} \tag{17}$$

Wir erhalten also die normierte Spannung (U im Verhältnis zu U_0) in Bezug zum Verhältnis des Lastwiderstands R_L zum Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle. Der entsprechende Graph ist in Abbildung 3 dargestellt. Die Achsen entsprechen dabei folgenden Beziehungen:

$$x - Achse = r = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}$$
$$y - Achse = u = \frac{U}{U_0}$$

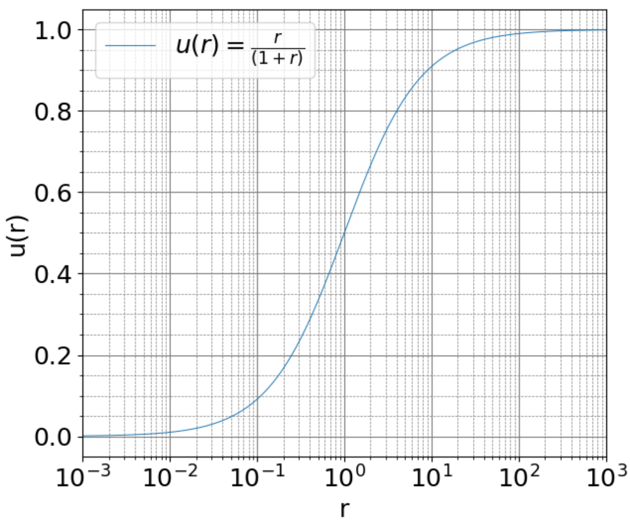

Abbildung 3: Normierte Spannung in Bezug zum Verhältnis der Widerstände

Der logarithmisch dargestellte Graph ist punktsymmetrisch um $(r = 1, u = 0.5)$, also $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$. Die Spannungsabnahme, wenn $R_\mathrm{L} = \frac{1}{2}R_\mathrm{i}$, entspricht exakt der Spannungszunahme, wenn $R_\mathrm{L} = 2R_\mathrm{i}$. Wird der Lastwiderstand R_L gegenüber dem Innenwiderstand R_i um einen Faktor vergrössert, bzw. um den reziproken Faktor verkleinert, so ändert sich die normierte Spannung um denselben

Betrag, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen.

1.2 Teil 2 - Leistungsanpassung einer Stromquelle

Im zweiten Teil wird die maximale Leistung analysiert, die eine Stromquelle an einen Lastwiderstand abgeben kann (Leistungsanpassung). Die Schaltung dazu ist in Abbildung 4 dargestellt.

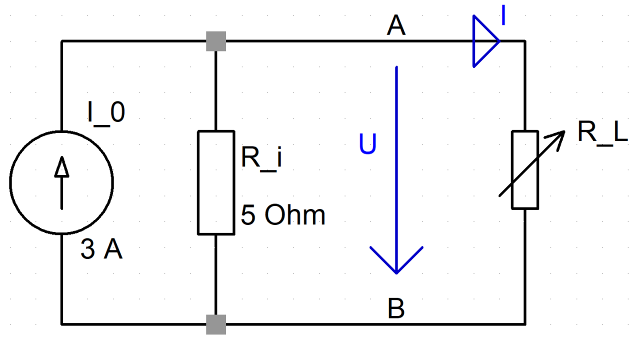

Abbildung 4: Schaltung der Leistungsanpassung (Stromquelle)

Für die Berechnungen werden folgende Werte der Stromquelle angenommen:

$$I_0 = 3\,\mathrm{A}$$
$$R_\mathrm{i} = 5\,\Omega$$

1.2.1 Herleitung der Leistung

Die elektrische Leistung am Lastwiderstand R_L wird gemäss Schaltung aus Abbildung 4 wie folgt berechnet:

$$P = U \cdot I \tag{18}$$

Die Spannung U und der Strom I können in Abhängigkeit der Leerlaufspannung U_0 und der beiden Widerstände R_i und R_L dargestellt werden. Die entsprechenden Formeln ergeben sich aus den Formeln für den Spannungsteiler, sowie dem ohmschen Gesetz:

$$U = I_0 \frac{R_\mathrm{i} \cdot R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \tag{19}$$
$$I = I_0 \frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \tag{20}$$

Ersetzt man in Gleichung 18 U und I durch die gefundenen Äquivalente, so erhält man die Formel für den Leistungsverlauf von P in Abhängigkeit des Widerstands R_L.

$$P(R_\mathrm{L}) = I_0^2 R_\mathrm{i}^2 \frac{R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2} \tag{21}$$

1.2.2 Maximale Leistung

Zur Bestimmung der Extremstellen der Leistungsfunktion $P(R_\mathrm{L})$ wird die erste Ableitung gebildet und gleich null gesetzt. Dazu wird die Quotientenregel angewendet.

$$f'(x) = c \cdot \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} c &= I_0^2 R_\mathrm{i}^2 \\ u(x) &= R_\mathrm{L} \\ u'(x) &= 1 \\ v(x) &= (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 \\ v'(x) &= 2R_\mathrm{i} + 2R_\mathrm{L} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die erste Ableitung wie folgt:

$$P'(R_\mathrm{L}) = I_0^2 R_\mathrm{i}^2 \frac{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 - R_\mathrm{L}(2R_\mathrm{i} + 2R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^4} \tag{23}$$

Durch Ausmultiplizieren und Wegkürzen folgt:

$$P'(R_\mathrm{L}) = I_0^2 R_\mathrm{i}^2 \frac{(R_\mathrm{i} - R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^3} \tag{24}$$

Da der Nenner in jedem Fall positiv ist, muss der Zähler null sein. Daraus folgt folgende Beziehung für den Lastwiderstand R_L bei maximaler Leistung:

$$(R_\mathrm{i} - R_\mathrm{L}) = 0 \tag{25}$$

$$R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L} \tag{26}$$

Zur Klassifikation der Extremstelle wird die zweite Ableitung $P''(R_\mathrm{L})$ betrachtet.

$$P''(R_\mathrm{L}) = -\frac{2I_0^2 R_\mathrm{i}^2}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^3} < 0 \tag{27}$$

Da die zweite Ableitung $P''(R_\mathrm{L})$ bei $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ kleiner als 0 ist, handelt es sich um ein Maximum.

Durch Einsetzen von $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ in Gleichung 21 lässt sich eine Formel für die Bestimmung der maximalen Leistung P_0 herleiten:

$$P_0 = I_0^2 \frac{R_\mathrm{i}}{4} \tag{28}$$

Setzen wir die gegebenen Werte ein, erhalten wir die folgende maximale Leistung der Stromquelle aus Abbildung 4:

$$P_0 = (3\,\mathrm{A})^2 \cdot \frac{5\,\Omega}{4} = \underline{\underline{11.25\,\mathrm{W}}}$$

Die maximale Leistung P_0 der Stromquelle entspricht also der Leistung der äquivalenten Spannungsquelle, welche in Unterabschnitt 1.1 berechnet wurde.

1.2.3 Normierte Leistung

Durch Kombination von Gleichung 21 und Gleichung 28 ergibt sich folgende Beziehung für das Verhältnis von aktueller Leistung P zu maximaler Leistung P_0:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{I_0^2 \frac{R_\mathrm{i}^2 \cdot R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{L})^2}}{I_0^2 \frac{R_\mathrm{i}}{4}} \tag{29}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{4R_\mathrm{i}R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{L})^2} \tag{30}$$

Durch Teilen des Nenners und des Zählers auf der rechten Seite der Gleichung durch R_i^2 erhalten wir:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\frac{4R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}}{\left(1+\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}\right)^2} \tag{31}$$

Wenn wir jetzt $\frac{P}{P_0} = p$ und $\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}} = r$ setzen, ergibt sich:

$$p(r) = \frac{4r}{(1+r)^2} \tag{32}$$

Diese Formel gibt die normierte Leistung (P im Verhältnis zu P_0) in Bezug zum Verhältnis des Lastwiderstands R_L zum Innenwiderstand R_i der Stromquelle an. Die Normierung erleichtert die Analyse, da sie den Leistungsverlauf unabhängig von den konkreten Strom- und Widerstandswerten beschreibt. Der entsprechende Graph ist in Abbildung 5 dargestellt. Die Achsen entsprechen dabei folgenden Beziehungen:

$$x-Achse = r = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}$$

$$y-Achse = p = \frac{P}{P_0}$$

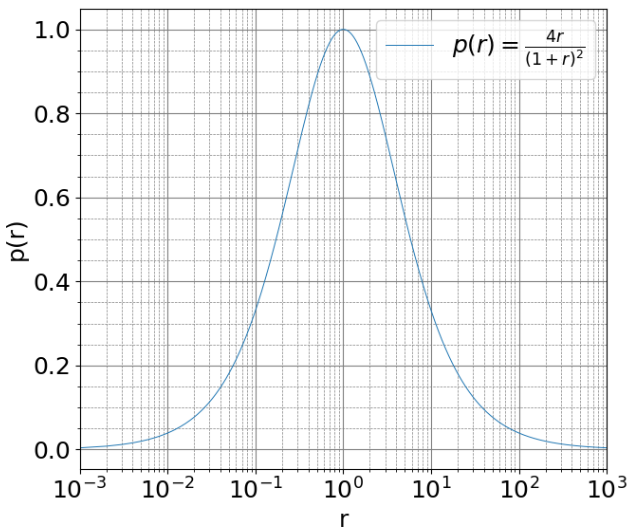

Abbildung 5: Normierte Leistung in Bezug zum Verhältnis der Widerstände (Stromquelle)

Der logarithmisch dargestellte Graph ist symmetrisch um $r = 1$, also $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$. Die Leistung für $R_\mathrm{L} = \frac{1}{2}R_\mathrm{i}$ entspricht genau der Leistung bei $R_\mathrm{L} = 2R_\mathrm{i}$. Reziproke Änderungen des Lastwiderstands R_L vom Innenwiderstand R_i nach oben und unten führen zu identischen relativen Leistungseinbussen.

Die Stromquelle verhält sich also bezüglich der Leistung in Bezug zu den Widerständen R_i und R_L genau gleich wie die äquivalente Spannungsquelle. (Vgl. Unterabschnitt 1.1)

1.2.4 Normierter Strom

Wir betrachten noch einmal Gleichung 20 und teilen beide Seiten durch I_0, sowie auf der rechten Seite den Nenner und den Zähler durch R_i. Somit folgt:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}} \tag{33}$$

Setzt man $\frac{I}{I_0} = i$ und erneut $\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}} = r$ setzen, erhalten wir:

$$i(r) = \frac{1}{1 + r} \tag{34}$$

Wir erhalten also den normierten Strom (I im Verhältnis zu I_0) in Bezug zum Verhältnis des Lastwiderstands R_L zum Innenwiderstand R_i der Stromquelle. Der entsprechende Graph ist in Abbildung 6 dargestellt.

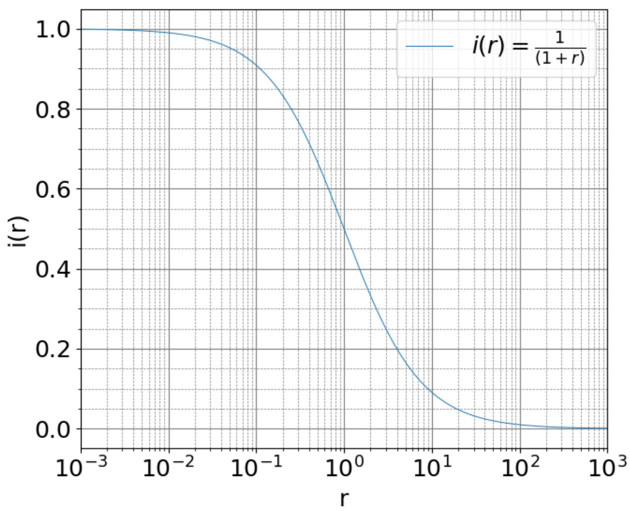

Abbildung 6: Normierter Strom in Bezug zum Verhältnis der Widerstände

Der logarithmisch dargestellte Graph ist punktsymmetrisch um $(r = 1, i = 0.5)$, also $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$. Die Stromzunahme, wenn $R_\mathrm{L} = \frac{1}{2}R_\mathrm{i}$, entspricht exakt der Stromabnahme, wenn $R_\mathrm{L} = 2R_\mathrm{i}$. Wird der Lastwiderstand R_L gegenüber dem Innenwiderstand R_i um einen Faktor vergrössert, bzw. um den reziproken Faktor verkleinert, so ändert sich der normierte Strom um denselben Betrag.

Wie in Unterunterabschnitt 1.1.4 ersichtlich, ergibt die Summe des normierten Stroms und der normierten Spannung an jedem Punkt 1. Nimmt die normierte Spannung ab, so nimmt der normierte Strom zu und umgekehrt. (Vgl. Abbildung 3 und Abbildung 6)

2 Problem 2

2.1 Übung

Wir betrachten folgende Funktion:

$$f(x) = cos(2x^3 + 1)e^{x-1} \tag{35}$$

Eine Funktion f lässt sich als Summe zweier Teilfunktionen g und h schreiben:

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{36}$$

wobei:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} (gerade) \tag{37}$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} (ungerade) \tag{38}$$

Wenden wir dies auf unsere Funktion f an, so erhalten wir folgende zwei Teilfunktionen:

$$g(x) = \frac{e{-1}}{2} \left(\cos\left(2x^3 + 1\right) e^x + \cos\left(-2x^3 + 1\right) e^{-x}\right) \tag{39}$$

$$h(x) = \frac{e^{-1}}{2} \left(\cos\left(2x^3 + 1\right) e^x - \cos\left(-2x^3 + 1\right) e^{-x}\right) \tag{40}$$

Die beiden Teilfunktionen sind in Abbildung 7 und Abbildung 8 ersichtlich.

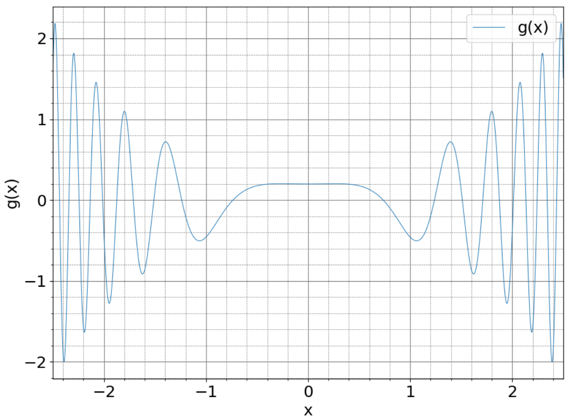

Abbildung 7: Funktion $g(x)$ (gerade)

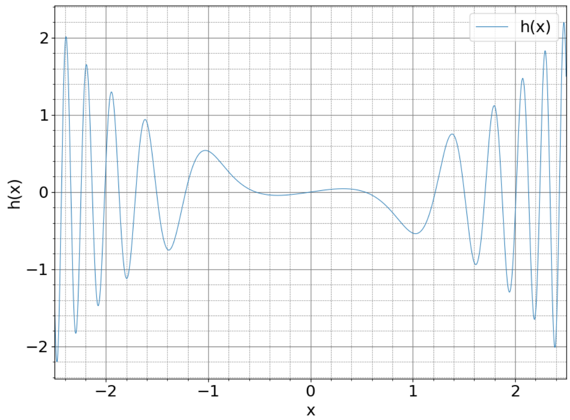

Abbildung 8: Funktion $h(x)$ (ungerade)

Die Summe der beiden Teilfunktionen $g(x)$ und $h(x)$ ist in Abbildung 9 dargestellt. Rechts daneben in Abbildung 10 ist die originale Funktion ersichtlich.

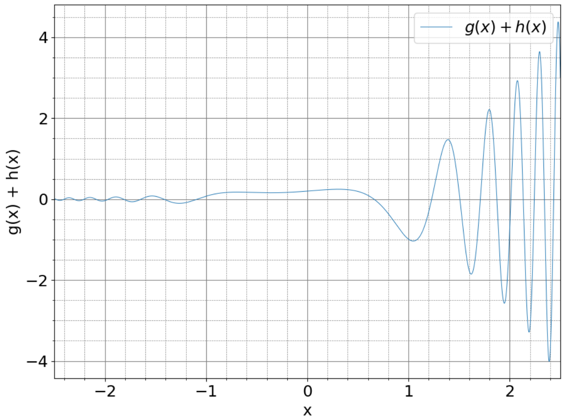

Abbildung 9: Funktion $g(x) + h(x)$

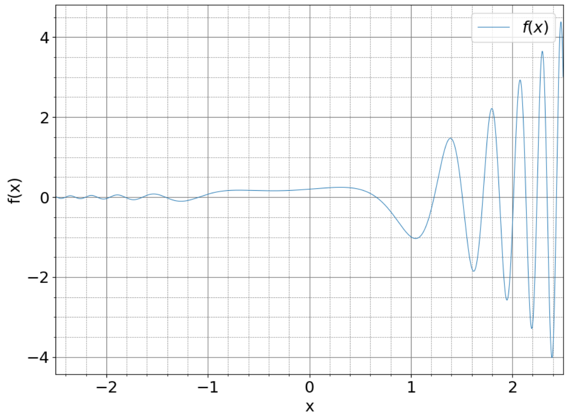

Abbildung 10: Originalfunktion $f(x)$

Die Funktion $f(x)$ lässt sich eindeutig in eine gerade und eine ungerade Funktion zerlegen. Die grafische Darstellung bestätigt, dass die Summe dieser beiden Teilfunktionen ($g(x)$ und $h(x)$) exakt der ursprünglichen Funktion $f(x)$ entspricht.

Damit die Addition der beiden Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ zu $f(x)$ besser ersichtlich ist, wurden die drei Funktionen zusammen auf einem Graphen in Abbildung 11 dargestellt.

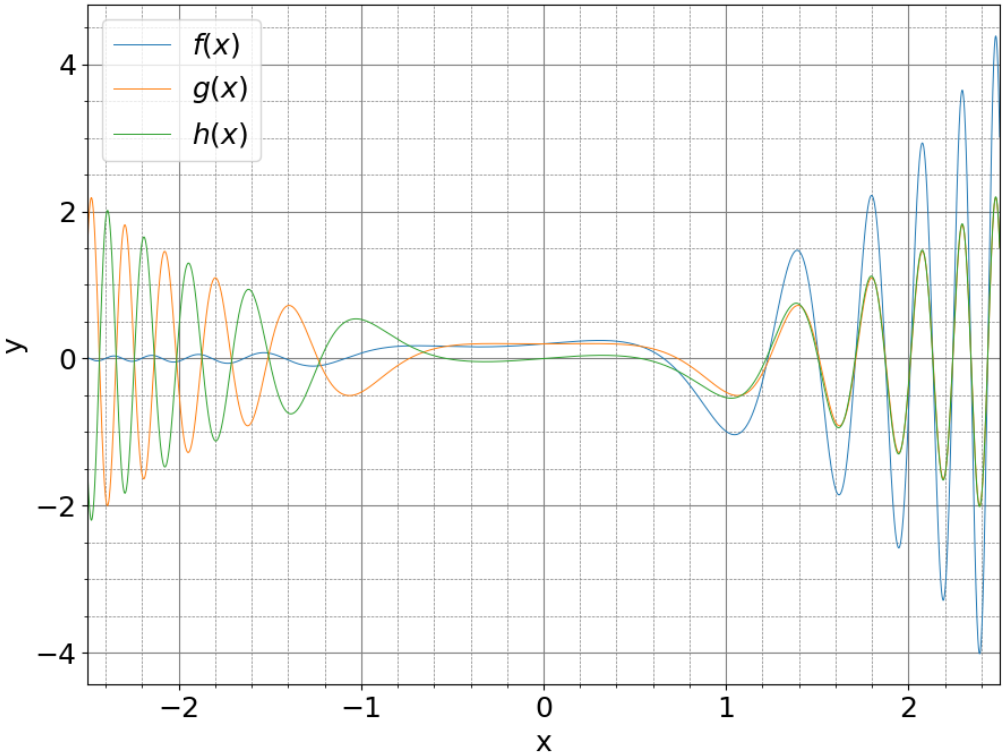

Abbildung 11: Addition der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ zu $f(x)$

Abbildungsverzeichnis