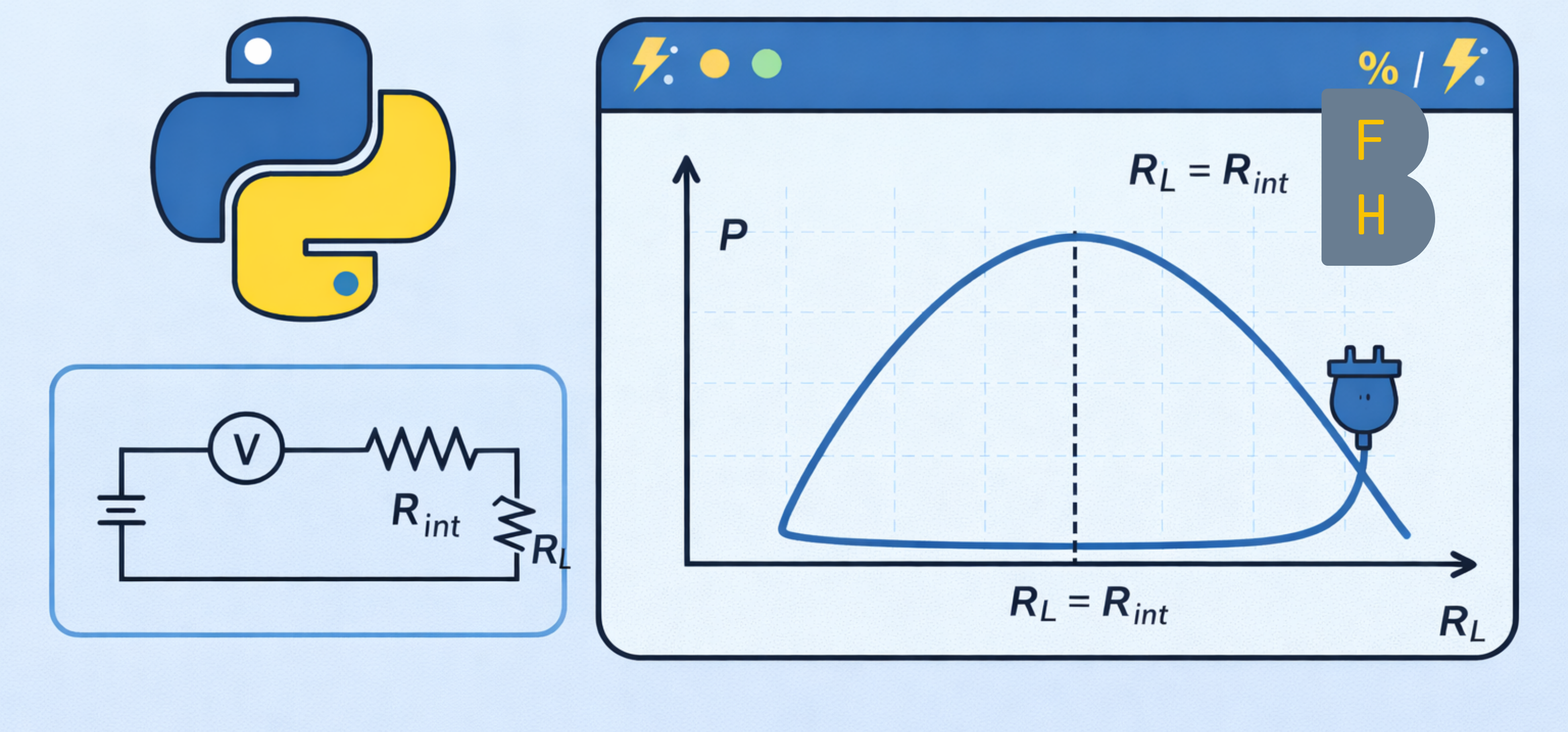

Projekt 2 mit Python

BZG1101a Analysis 1, Herbstsemester 2025/2026
Bericht

Simon Eisele

Version 1.0 vom 4. Januar 2026

- Technik und Informatik
- Elektrotechnik und Informationstechnologie

Inhaltsverzeichnis

1 Problem 1

1.1 Teil 1 - Leistungsanpassung einer Spannungsquelle

In einem ersten Teil wird die maximale Leistung analysiert, die eine Spannungsquelle an einen Lastwiderstand abgeben kann (Leistungsanpassung). Die Schaltung dazu ist in Abbildung 1 dargestellt.

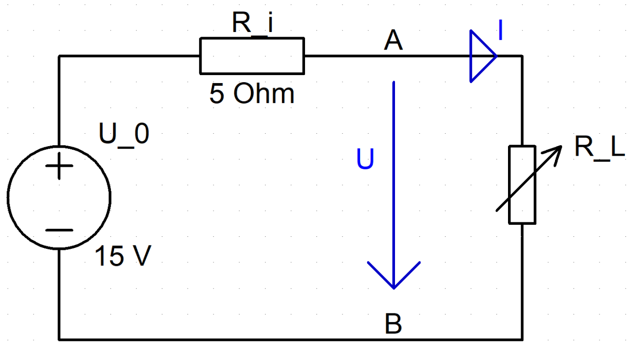

Abbildung 1: Schaltung der Leistungsanpassung (Spannungsquelle)

Für die Berechnungen werden folgende Werte der Spannungsquelle angenommen:

$$U_0 = 15\,\mathrm{V}$$
$$R_\mathrm{i} = 5\,\Omega$$

1.1.1 Herleitung der Leistung

Die elektrische Leistung am Lastwiderstand R_L wird gemäss Schaltung aus Abbildung 1 wie folgt berechnet:

$$P = U \cdot I \tag{1}$$

Die Spannung U und der Strom I können in Abhängigkeit der Leerlaufspannung U_0 und der beiden Widerstände R_i und R_L dargestellt werden. Die entsprechenden Formeln ergeben sich aus dem Spannungsteiler, sowie dem Ohmschem Gesetz:

$$U = U_0 \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \tag{2}$$
$$I = \frac{U_0}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \tag{3}$$

Ersetzt man in Gleichung 1 U und I durch die gefundenen Äquivalente, so erhält man die Formel für den Leistungsverlauf von P in Abhängigkeit des Widerstands R_L.

$$P(R_\mathrm{L}) = U_0^2 \frac{R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2} \tag{4}$$

1.1.2 Maximale Leistung

Um den Punkt der maximalen Leistung zu bestimmen, muss diese Gleichung nach R_L abgeleitet und gleich null gesetzt werden. Dazu wenden wir die Quotientenregel an.

$$f'(x) = c \cdot \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} c &= U_0^2 \\ u(x) &= R_\mathrm{L} \\ u'(x) &= 1 \\ v(x) &= (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 \\ v'(x) &= 2R_\mathrm{i} + 2R_\mathrm{L} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Ableitung wie folgt:

$$P'(R_\mathrm{L}) = U_0^2 \frac{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 - R_\mathrm{L}(2R_\mathrm{i} + 2R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^4} \tag{6}$$

Durch Ausmultiplizieren und Wegkürzen folgt:

$$P'(R_\mathrm{L}) = U_0^2 \frac{(R_\mathrm{i} - R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^3} \tag{7}$$

Da der Nenner in jedem Fall positiv ist, muss der Zähler null sein. Daraus folgt der Lastwiderstand R_L bei maximaler Leistung:

$$(R_\mathrm{i} - R_\mathrm{L}) = 0 \tag{8}$$

$$R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L} \tag{9}$$

Durch Einsetzen von $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ in die zweite Ableitung $P''(R_\mathrm{L})$ wird kontrolliert, ob es sich beim gefundenen Ergebnis wirklich um ein Maximum handelt.

$$P''(R_\mathrm{L}) = -\frac{2U_0^2}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^3} < 0 \tag{10}$$

Da die zweite Ableitung $P''(L)$ bei $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ kleiner als 0 ist, bestätigt dies ein Maximum.

Durch Einsetzen von $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ in Gleichung 4 lässt sich eine Formel für die Bestimmung der maximalen Leistung P_0 herleiten:

$$P_0 = \frac{U_0^2}{4R_\mathrm{i}} \tag{11}$$

Setzen wir die gegebenen Werte ein, erhalten wir die folgende maximale Leistung der Spannungsquelle aus Abbildung 1:

$$P_0 = \frac{15\,\mathrm{V}^2}{4 \cdot 5\,\Omega} = \underline{\underline{11.25\,\mathrm{W}}}$$

1.1.3 Normierte Leistung

Eine Spannungsquelle ist gegeben durch ihre maximale Leistung P_0 und ihren Innenwiderstand R_i. Aus Gleichung 11 lässt sich folgende Beziehung aufstellen:

$$U_0 = 2\sqrt{P_0 R_\mathrm{i}} \tag{12}$$

Das Verhältnis zwischen aktueller Leistung P und maximaler Leistung P_0 ergibt demnach:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{U_0^2 \frac{R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{L})^2}}{\frac{U_0^2}{4R_\mathrm{i}}} \tag{13}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{4R_\mathrm{i}R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{L})^2} \tag{14}$$

Durch Teilen des Nenners und des Zählers auf der rechten Seite der Gleichung durch R_i^2 ergibt sich folgende Beziehung:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\frac{4R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}}{\left(1+\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}\right)^2} \tag{15}$$

Wenn wir jetzt $\frac{P}{P_0} = p$ und $\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}} = r$ setzen, erhalten wir:

$$p(r) = \frac{4r}{(1+r)^2} \tag{16}$$

Diese Formel gibt die normierte Leistung (P im Verhältnis zu P_0) in Bezug zum Verhältnis des Lastwiderstands R_L zum Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle an. Die Normierung erleichtert die Analyse, da sie den Leistungsverlauf unabhängig von den konkreten Spannungs- und Widerstandswerten beschreibt. Der entsprechende Graph ist in Abbildung 2 dargestellt.

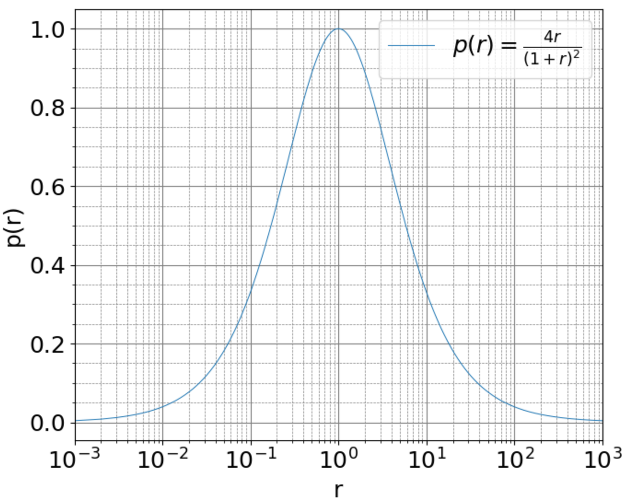

Abbildung 2: Normierte Leistung in Bezug zum Verhältnis der Widerstände (Spannungsquelle)

Der logarithmisch dargestellte Graph ist symmetrisch um $r = 1$, also $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$. Die Leistung für $R_\mathrm{L} = \frac{1}{2}R_\mathrm{i}$ entspricht genau der Leistung bei $R_\mathrm{L} = 2R_\mathrm{i}$. Prozentual reziproke Abweichungen des

Lastwiderstands R_L vom Innenwiderstand R_i nach oben und unten führen zu gleichen prozentualen Leistungseinbussen.

1.1.4 Normierte Spannung

Wir betrachten noch einmal Gleichung 2 und teilen beide Seiten durch U_0, sowie auf der rechten Seite den Nenner und den Zähler durch R_i. Daraus folgt:

$$\frac{U}{U_0} = \frac{\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}}{1 + \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}} \tag{17}$$

Wenn wir jetzt $\frac{U}{U_0} = u$ und erneut $\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}} = r$ setzen, erhalten wir:

$$u(r) = \frac{r}{1 + r} \tag{18}$$

Wir erhalten also die normierte Spannung (U im Verhältnis zu U_0) in Bezug zum Verhältnis des Lastwiderstands R_L zum Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle. Der entsprechende Graph ist in Abbildung 3 dargestellt.

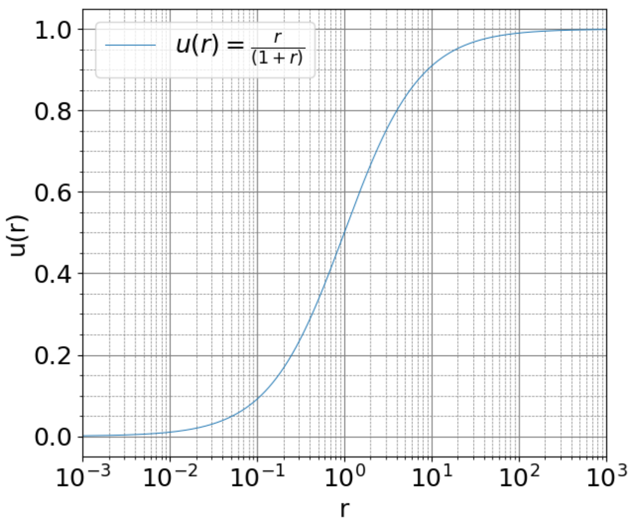

Abbildung 3: Normierte Spannung in Bezug zum Verhältnis der Widerstände

Der logarithmisch dargestellte Graph ist punktsymmetrisch um $r = 1, u = 0.5$, also $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$. Die Spannungsabnahme, wenn $R_\mathrm{L} = \frac{1}{2}R_\mathrm{i}$, entspricht exakt der Spannungszunahme, wenn $R_\mathrm{L} = 2R_\mathrm{i}$. Wird der Lastwiderstand R_L gegenüber dem Innenwiderstand R_i um einen Faktor vergrössert, bzw. um den reziproken Faktor verkleinert, so ändert sich die normierte Spannung um denselben Betrag, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen.

1.2 Teil 2 - Leistungsanpassung einer Stromquelle

Im zweiten Teil wird die maximale Leistung analysiert, die eine Stromquelle an einen Lastwiderstand abgeben kann (Leistungsanpassung). Die Schaltung dazu ist in Abbildung 4 dargestellt.

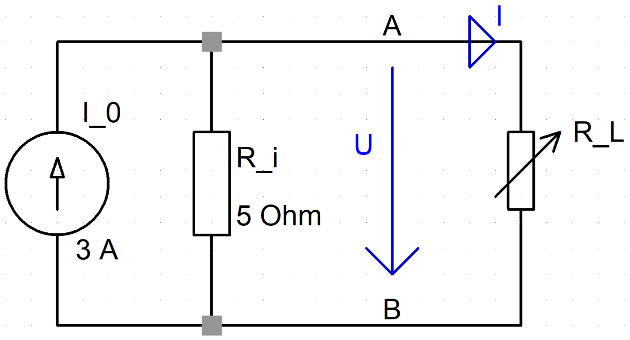

Abbildung 4: Schaltung der Leistungsanpassung (Stromquelle)

Für die Berechnungen werden folgende Werte der Stromquelle angenommen:

$$I_0 = 3\,\mathrm{A}$$
$$R_\mathrm{i} = 5\,\Omega$$

1.2.1 Herleitung der Leistung

Die elektrische Leistung am Lastwiderstand R_L wird gemäss Schaltung aus Abbildung 4 wie folgt berechnet:

$$P = U \cdot I \tag{19}$$

Die Spannung U und der Strom I können in Abhängigkeit der Leerlaufspannung U_0 und der beiden Widerstände R_i und R_L dargestellt werden. Die entsprechenden Formeln ergeben sich aus dem Stromteiler, sowie dem Ohmschem Gesetz:

$$U = I_0 \frac{R_\mathrm{i} \cdot R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \tag{20}$$

$$I = I_0 \frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \tag{21}$$

Ersetzt man in Gleichung 19 U und I durch die gefundenen Äquivalente, so erhält man die Formel für den Leistungsverlauf von P in Abhängigkeit des Widerstands R_L.

$$P(R_\mathrm{L}) = I_0^2 R_\mathrm{i}^2 \frac{R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2} \tag{22}$$

1.2.2 Maximale Leistung

Um den Punkt der maximalen Leistung zu bestimmen, muss diese Gleichung nach R_L abgeleitet und gleich null gesetzt werden. Dazu wenden wir die Quotientenregel an.

$$f'(x) = c \cdot \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} c &= I_0^2 R_\mathrm{i}^2 \\ u(x) &= R_\mathrm{L} \\ u'(x) &= 1 \\ v(x) &= (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 \\ v'(x) &= 2R_\mathrm{i} + 2R_\mathrm{L} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Ableitung wie folgt:

$$P'(R_\mathrm{L}) = I_0^2 R_\mathrm{i}^2 \frac{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 - R_\mathrm{L}(2R_\mathrm{i} + 2R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^4} \tag{24}$$

Durch Ausmultiplizieren und Wegkürzen folgt:

$$P'(R_\mathrm{L}) = I_0^2 R_\mathrm{i}^2 \frac{(R_\mathrm{i} - R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^3} \tag{25}$$

Da der Nenner in jedem Fall positiv ist, muss der Zähler null sein. Daraus folgt der Lastwiderstand R_L bei maximaler Leistung:

$$R_\mathrm{i} - R_\mathrm{L} = 0 \tag{26}$$

$$R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L} \tag{27}$$

Durch Einsetzen von $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ in die zweite Ableitung $P''(R_\mathrm{L})$ wird kontrolliert, ob es sich beim gefundenen Ergebnis wirklich um ein Maximum handelt.

$$P''(R_\mathrm{L}) = -\frac{2I_0^2 R_\mathrm{i}^2}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^3} < 0 \tag{28}$$

Da die zweite Ableitung $P''(L)$ bei $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ kleiner als 0 ist, bestätigt dies ein Maximum.

Durch Einsetzen von $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$ in Gleichung 22 lässt sich eine Formel für die Bestimmung der maximalen Leistung P_0 herleiten:

$$P_0 = I_0^2 \frac{R_\mathrm{i}}{4} \tag{29}$$

Setzen wir die gegebenen Werte ein, erhalten wir die folgende maximale Leistung der Stromquelle aus Abbildung 4:

$$P_0 = 3\,\mathrm{A}^2 \frac{5\,\Omega}{4} = \underline{\underline{11.25\,\mathrm{W}}}$$

Die maximale Leistung P_0 der Stromquelle entspricht also der Leistung der äquivalenten Spannungsquelle, welche in Unterabschnitt 1.1 berechnet wurde.

1.2.3 Normierte Leistung

Eine Stromquelle ist gegeben durch ihre maximale Leistung P_0 und ihren Innenwiderstand R_i. Aus Gleichung 29 lässt sich folgende Beziehung aufstellen:

$$I_0 = 2\sqrt{\frac{P_0}{R_\mathrm{i}}} \tag{30}$$

Das Verhältnis zwischen aktueller Leistung P und maximaler Leistung P_0 ergibt demnach:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{I_0^2 \frac{R_\mathrm{i}^2 \cdot R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{L})^2}}{I_0^2 \frac{R_\mathrm{i}}{4}} \tag{31}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{4R_\mathrm{i}R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{L})^2} \tag{32}$$

Durch Teilen des Nenners und des Zählers auf der rechten Seite der Gleichung durch R_i^2 ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\frac{4R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}}{\left(1+\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}\right)^2} \tag{33}$$

Wenn wir jetzt $\frac{P}{P_0} = p$ und $\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}} = r$ setzen, erhalten wir:

$$p(r) = \frac{4r}{(1+r)^2} \tag{34}$$

Diese Formel gibt die normierte Leistung (P im Verhältnis zu P_0) in Bezug zum Verhältnis des Lastwiderstands R_L zum Innenwiderstand R_i der Stromquelle an. Die Normierung erleichtert die Analyse, da sie den Leistungsverlauf unabhängig von den konkreten Strom- und Widerstandswerten beschreibt. Der entsprechende Graph ist in Abbildung 5 dargestellt.

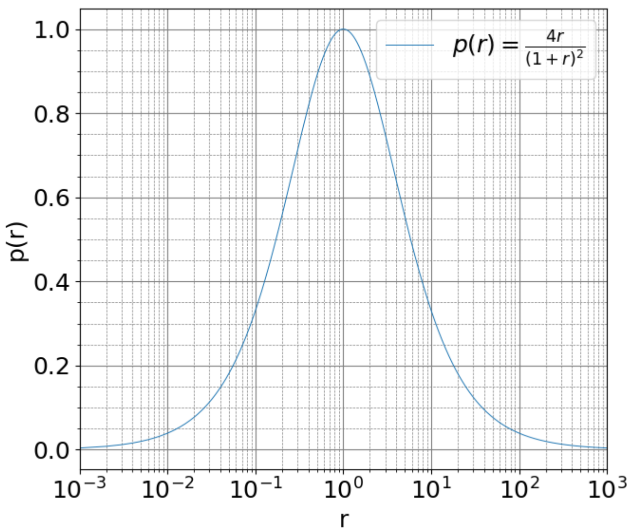

Abbildung 5: Normierte Leistung in Bezug zum Verhältnis der Widerstände (Stromquelle)

Der logarithmisch dargestellte Graph ist symmetrisch um $r = 1$, also $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$. Die Leistung für $R_\mathrm{L} = \frac{1}{2}R_\mathrm{i}$ entspricht genau der Leistung bei $R_\mathrm{L} = 2R_\mathrm{i}$. Prozentual reziproke Abweichungen des Lastwiderstands R_L vom Innenwiderstand R_i nach oben und unten führen zu gleichen prozentualen Leistungseinbussen.

Die Stromquelle verhält sich also bezüglich der Leistung in Bezug zu den Widerständen R_i und R_L genau gleich wie die äquivalente Spannungsquelle. (Vgl. Unterabschnitt 1.1)

1.2.4 Normierter Strom

Wir betrachten noch einmal Gleichung 21 und teilen beide Seiten durch I_0, sowie auf der rechten Seite den Nenner und den Zähler durch R_i. Daraus folgt:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}} \tag{35}$$

Wenn wir jetzt $\frac{I}{I_0} = i$ und erneut $\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}} = r$ setzen, erhalten wir:

$$i(r) = \frac{1}{1 + r} \tag{36}$$

Wir erhalten also den normierten Strom (I im Verhältnis zu I_0) in Bezug zum Verhältnis des Lastwiderstands R_L zum Innenwiderstand R_i der Stromquelle. Der entsprechende Graph ist in Abbildung 6 dargestellt.

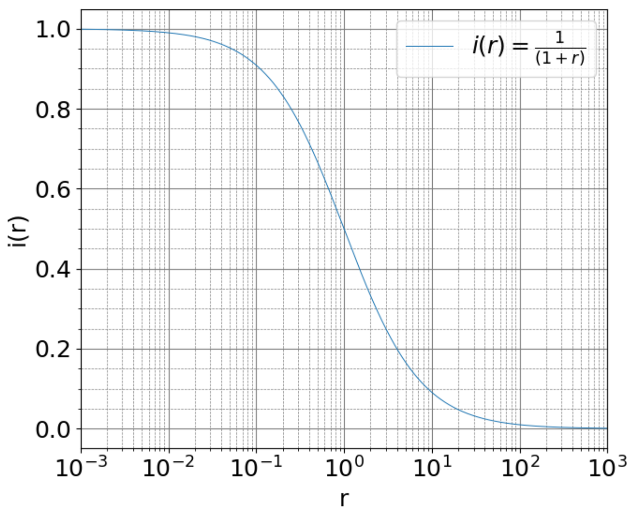

Abbildung 6: Normierter Strom in Bezug zum Verhältnis der Widerstände

Der logarithmisch dargestellte Graph ist Punktsymmetrisch um $r = 1, i = 0.5$, also $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$. Die Stromzunahme, wenn $R_\mathrm{L} = \frac{1}{2}R_\mathrm{i}$, entspricht exakt der Stromabnahme, wenn $R_\mathrm{L} = 2R_\mathrm{i}$. Wird der Lastwiderstand R_L gegenüber dem Innenwiderstand R_i um einen Faktor vergrössert, bzw. um den reziproken Faktor verkleinert, so ändert sich der normierte Strom um denselben Betrag.

Wie in Unterunterabschnitt 1.1.4 ersichtlich, ergeben der normierte Strom und die normierte Spannung zusammen an jedem Punkt eins. Nimmt also die normierte Spannung ab, so nimmt der normierte Strom zu und umgekehrt. (Vgl. Abbildung 3)

2 Problem 2

2.1 Übung

Wir betrachten folgende Funktion:

$$f(x) = cos(2x^3 + 1)e^{x-1} \tag{37}$$

Eine Funktion f lässt sich als Summe zweier Funktionen g und h schreiben:

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{38}$$

wobei:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}(gerade) \tag{39}$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}(ungerade) \tag{40}$$

Wenden wir dies auf unsere Funktion f an, so erhalten wir folgende zwei Teilfunktionen:

$$g(x) = \frac{e{-1}}{2}\left(\cos(2x^3 + 1)e^{x} + \cos(-2x^3 + 1)e^{-x}\right) \tag{41}$$

$$h(x) = \frac{e^{-1}}{2}\left(\cos(2x^3 + 1)e^{x} - \cos(-2x^3 + 1)e^{-x}\right) \tag{42}$$

Die beiden Teilfunktionen sind in Abbildung 7 und Abbildung 8 ersichtlich.

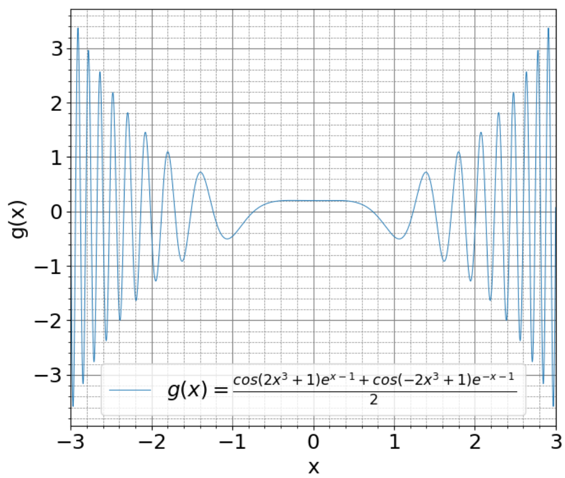

Abbildung 7: Funktion $g(x)$ (gerade)

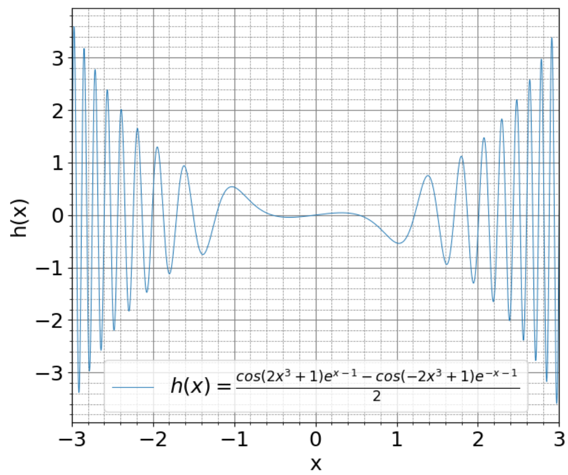

Abbildung 8: Funktion $h(x)$ (ungerade)

Die Summe der beiden Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ ist in Abbildung 9 dargestellt. Rechts daneben in Abbildung 10 ist die originale Funktion ersichtlich.

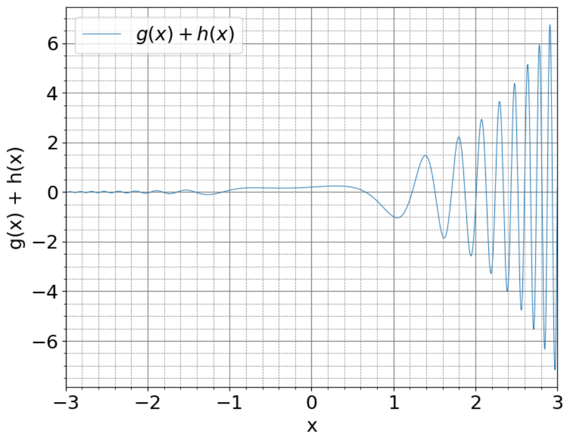

Abbildung 9: Funktion $g(x) + h(x)$

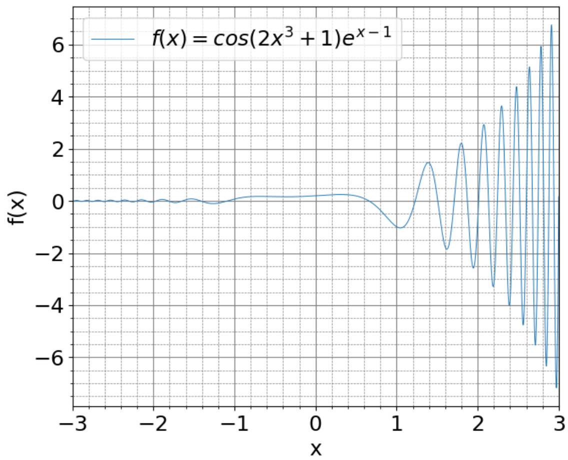

Abbildung 10: Originalfunktion $f(x)$

Die Funktion $f(x)$ lässt sich eindeutig in eine gerade und eine ungerade Funktion zerlegen. Die grafische Darstellung bestätigt, dass die Summe dieser beiden Teilfunktionen ($g(x)$ und $h(x)$) exakt der ursprünglichen Funktion $f(x)$ entspricht.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis