restart
with(*Gym*) :

Formler der bliver brugt:

Formel for kanonskud

$y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t$

Formel for den lodrette hastighed i kanonkuglens start position, her kan man finde den vandrette hastighed, altså y aksens hastighed, hvis man har vinklen og den samlede hastighed. Hvis den hastigheden for den lodrette akse skal findes bruges der $Cos(\theta)$ i stedet for $Sin(\theta)$

$v_{0y} = v_0 \cdot Sin(\theta)$

Formel for strækning, her kan man finde strækning, hvis man har tiden og hastigheden

$s_k = v_{0y} \cdot t$

Eksempel opgave - beregninger i et kanonskud

Når man skal beregne for eksempel hastighed, tiden eller strækning for et kanonskud, skal man bruge formlerne for bevægelser i 2-dimensionelle plan. Formlen for kanonskudet ser sådan ud:

$y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t$

y har en konstant acceleration på $(-g)$ hvor g er tyngdeacceleration der er $9.82\ \frac{m}{s^2}$

$y = \frac{1}{2} \cdot (-9.82)\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t$

For at finde strækningen skal man sætte y lig med 0 for det er der i eksempelvis et kanonskud at kanonkuglen rammer jorden igen.

$0 = \frac{1}{2} \cdot (-9.82)\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t$

Nu sidder man fast hvis ikke man ved hastigheden på kanonkuglen, så jeg angiver i at vinklen kuglen skyder er 40 grader og den skyder med en fart på 20 $\frac{m}{s}$

Farten på de 20 $\frac{m}{s}$ er den samlede fart for både y og x så derfor er vi nød til at finde den specifikke fart for y aksen, det gør vi med brug af sinus til vinklen siden vi har brug for den hosliggende katete:

$v_{0y} = v_0 \cdot Sin(\theta)$

derefter sætte man det ind i formlen og sætter tal ind

$0 = \frac{1}{2} \cdot (-9.82)\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + v_0 \cdot Sin(\theta) \cdot t$

$0 = \frac{1}{2} \cdot (-9.82)\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 20\ \frac{m}{s} \cdot Sin(40) \cdot t$

Nu når man kun har en ubekendt t kan man beregne tiden det tager for at y rammer 0

$solve\left(0 = \frac{1}{2} \cdot (-9.82) \cdot t^2 + 20 \cdot Sin(40) \cdot t\right) = 0., 2.618279468$

Som man kan se er der to løsninger for ligningen. Det er fordi at kanonkuglen start ved y koordinatet 0 og ved start er der selvfølgelig gået 0 sekunder. Kan vi så konkludere at det tager cirka 2.62 sekunder for kanonkuglen at lande på y koordinatet 0.

Nu når man har tiden det tager og farten kan man beregne strækningen kanonkuglen skyder:

$s_k = v_0 \cdot Sin(\theta) \cdot t$

$s_k := 20 \frac{m}{s} \cdot Sin(40) \cdot 2.62 s = 33.68207075 m$

Nu ved vi så at kanonkuglen har skudt 33.68 m langt

En anden opgave ville være at kanonen er forhøjet og skal ramme noget længere nede. I det tilfælde vil man i stedet for at sætte y til 0 vil man sætte det til for eksempel K 10 hvis kanon er 10 m forhøjet man sætter den selvfølgelig i plus hvis den er sænket i stedet for. Eksempel med forhøjet kanonkugle nedenunder:

$-10 = \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2 + v_0 \cdot Sin(\theta) \cdot t$

Nu vil man gerne have beregnet hvor kanonkuglens højeste punkt. Her er formlen for hastighed i y-aksens retning

$v_y = (-g) \cdot t + v_{0y}$

Når kanonkuglen har ramt sit højeste punkt vil y retningen gå fra at gå opad til at gå nedad. Derfor vil hastigheden af y's retning være 0 ved kanonkuglens højeste punkt.

$0 = (-g) \cdot t + v_{0y}$

Så sættes der tal ind fra tidligere

$0 = (-9.82) \frac{m}{s^2} \cdot t_{top} + 20 \frac{m}{s} \cdot Sin(40)$

$solve(0 = (-9.82) \cdot t_{top} + 20 \cdot Sin(40)) = 1.309139734$

Nu ved man så at tiden, når kanonkuglen er højest, er cirka 1.309 sekunder. Nu kan vi så bruge formlen fra sidst og sætte tiden ind

$y_{maks} = \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t_{top}{}^2 + v_{0y} \cdot t_{top}$

$y_{maks} = \frac{1}{2} \cdot (-9.82) \cdot 1.309^2 + 20 \cdot Sin(40) \cdot 1.309 = y_{maks} = 8.414987910$

Nu er der beregnet at kanonkuglens højeste punkt er 8.415 meter

Eksempel opgave - beregning af vores forsøg

restart

$with(Gym):$

Vi vil gerne se, om vores observerede tal fra forsøget matcher hvad vi ville kunne regne os til.

Vi observerede en strækning på $2.33\,m$ og en tid til at ramme jorden til $1.416\,s$, fra en kanon med en 45 graders vinkel og 0.25m fra jorden.

$s := 2.33:$

$t := 1.416:$

$h := 0.25:$

$\alpha := 45:$

Vi udregner starthastigheden på den vandrette akse ud fra strækningen og tid.
$s = v_{0x} \cdot t$

$v_{0x} := solve(s = t \cdot v, v) = 1.645480226$

Og dividerer den med cosinus af vinklen for at finde starthastigheden's skalar værdi.

$$v_0 := \frac{v_{0x}}{Cos(\alpha)} = 2.327060453$$

Derefter ganger vi med sinus til vinklen for at finde starthastighedens y-komponent.

$v_{0y} := v_0 \cdot Sin(\alpha) = 1.645480226$

Vi kender formlen for skrå kast:

$$y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + h$$

I vores tilfælde er vores acceleration tyngdeaccelerationen.
Hvis vi sætter y=0, og løser for tid, finder vi så hvor lang tid det burde tage for et skrå kast med 2.32m/s ved 45 grader ved 25cm starthøjde og tyngdekræft

$$ta := solve\left(0 = -\frac{1}{2} \cdot 9.82 \cdot ta^2 + v_{0y} \cdot ta + h, ta\right) = 0.4486233364, -0.1134949808$$

Det regner vi så ud til at være $0.44\,s$, hvilket er en markant fejlmargin på ca. $1\,s$, som ikke giver mening, da vi så skulle have observeret vores mål til at være langt fra hvad de var.
Vi kunne ikke just regne ud hvorfor dette sker.