Matematik A Prøve
Simon From Jakobsen
20ia
21/3 2024

Opgave 1

Den afledede funktion er defineret følgende:

$f'(x) = 1.5 \cdot x^3 \cdot y$

Vi skal finde hældningen for kurven i punktet $\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Siden den afledede funktion, altså den differentierede funktion fortæller hældningen for funktionen, sætter vi værdierne for x og y ind i den aflede funktion for at få hældningen.

$1.5 \cdot 2^3 \cdot \frac{1}{4} = 3.000000000$

Vi kan derefter definere linjelementet som $\left(2; \frac{1}{4}; 3\right)$.

Opgave 2

a)

Vi kan få vektoren mellem 2 vektorer. Denne findes ved at trække den ene fra den anden. Vi får oplyst 2 punkter. Disse punkter kan omdannes til vektorer, ved at tage vektoren fra origo til punktet:

restart

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 2.3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 8.6-0 \\ -3.25-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6 \\ -3.25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 8.6 - 0 \\ -3.25 - 0 \\ 0 - 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6 \\ -3.25 \\ -2.3 \end{bmatrix}$$

b)

For at gøre dette, skal vi have 2 retningsvektorer. Vi mangler en retningsvektor mellem enten A og T eller A og B. Vi bruger resultatet fra ovenstående opgave.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 8.6 \\ -3.25 \\ -2.3 \end{bmatrix}$$

Parameterfremstilling i opgaveformuleringen beskriver linjen mellem B og T. For at definere planet, tilføjer vi $\overrightarrow{AB}$ ganget med en parameter.

$$\alpha : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6 \\ -3.25 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 6.2 \\ 6.5 \\ 13.2 \end{bmatrix} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 8.6 \\ -3.25 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 6.2 \\ 6.5 \\ 13.2 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 8.6 \\ -3.25 \\ -2.3 \end{bmatrix}$$

c)

Vi antager B er det nederste punkt af figuren og T er det øverste. Dvs. højden er afstanden mellem B og T på z-aksen. Vi kender koordinaterne til B. For at finde z-koordinatet til T, skal vi finde z-koordinatet af skæringspunktet mellem linjen l og planen β. Dette kan vi gøre ved at løse ligningen til β med x- og y-koordinaterne fra retningsvektoren af linjen l.

$$\beta : 14\,x - 64\,y - 38\,z + 87.6 = 0$$

$$l : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6 \\ -3.25 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 6.2 \\ 6.5 \\ 13.2 \end{bmatrix}$$

$x = 6.2$

$y = 6.5$

$14\,x - 64\,y - 38\,z + 87.6 = 0 \Rightarrow 38\,z = 14\,x - 64\,y + 87.6 \Rightarrow z = \dfrac{14\,x - 64\,y + 87.6}{38}$

$z := \dfrac{14 \cdot 6.2 - 64 \cdot 6.5 + 87.6}{38} = -6.357894737$

z-koordinatet ligger i skæringspunktet mellem linjen l og planen β, hvilket også ligger i T. Derfor er $z = -6.357894737$ højden på taget.

Opgave 3

restart
with(*plots*) :

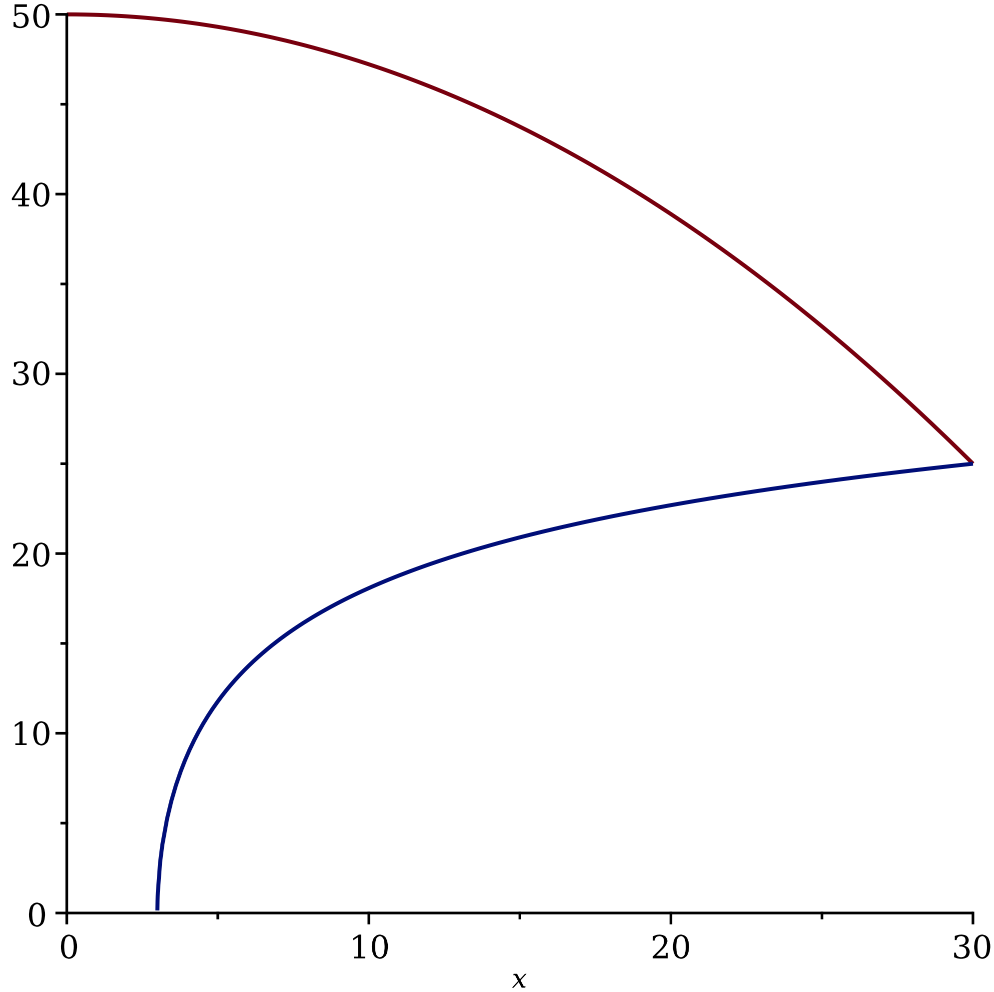
$f(x) := -\dfrac{1}{36}x^2 + 50:$

f gælder når $x \in [0; 30]$

$g(x) := 25 \cdot \sqrt{\dfrac{\ln\left(\frac{1}{3}x\right)}{\ln(10)}}\ :$

g gælder når $x \in [3; 30]$

$display([plot(f(x), x = 0..30), plot(g(x), x = 3..30)])$



a)

Vi antager at højden h er fra fra $y=0$ og op ad y-aksen. Dvs. vi skal finde maksimumværdien af f. Vi kan, ved at aflæse funktionen tegnet, se at kurven enten har ingen eller et enkelt ekstremapunkt som også er maksimum.

Vi kan undersøge om der er et ekstremapunkt, ved at kigge på, hvor kurvens stigning er nul, dvs. der hvor den skifter retning. Dette gør vi ved at differentierer funktionen, så vi kan regne hældningen, og løse hvor hældningen er nul.

$$f'(x) = (f(x))' = -\frac{x}{18}$$

$$-\frac{x}{18} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$fsolve(f'(x) = 0) = 0.$$

Siden $f'(x) = 0$, når $x = 0$ betyder det, at dette er det højeste punkt. Vi kan derfor regne højden ved at sætte den udregnde lokation på x-aksen ind i funktionen.

$f(0)$ = 50

Højden er derfor $50\,cm$.

b)

Dette gør vi, ved at løse ligningen af den differentierede funktion lig hældningen.

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{x}{18} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 9$$

$$fsolve\left(f'(x) = -\frac{1}{2}\right) = 9.$$

Vi ved nu at $x = 9\,cm$. Vi finder y ved at sætte x-værdien ind i funktionen.

$f(9.)$ = 47.75000000

Vi kan derfor se at punktet ligger i $(9, 47.75)$.

c)

For at renge rumfanget af lampen, kan vi starte med at regne rumfanget af f roteret om y-aksen i dets relevante interval. Dette gøres med denne formel:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot x \, dx$$

$$V_f := 2. \cdot \pi \cdot \int_0^{30} f(x) \cdot x \, dx = 1.060287521\ 10^5$$

Vi kan derefter regne rumfanget af g roteret om y-aksen.

$$V_g := 2. \cdot \pi \cdot \int_{3.}^{30} g(x) \cdot x \, dx = 61672.12556$$

Vi finder derefter rumfanget ved at trække V_g fra V_f da V_g er rumfanget under figuren.

$$V := V_f - V_g = 44356.62654$$

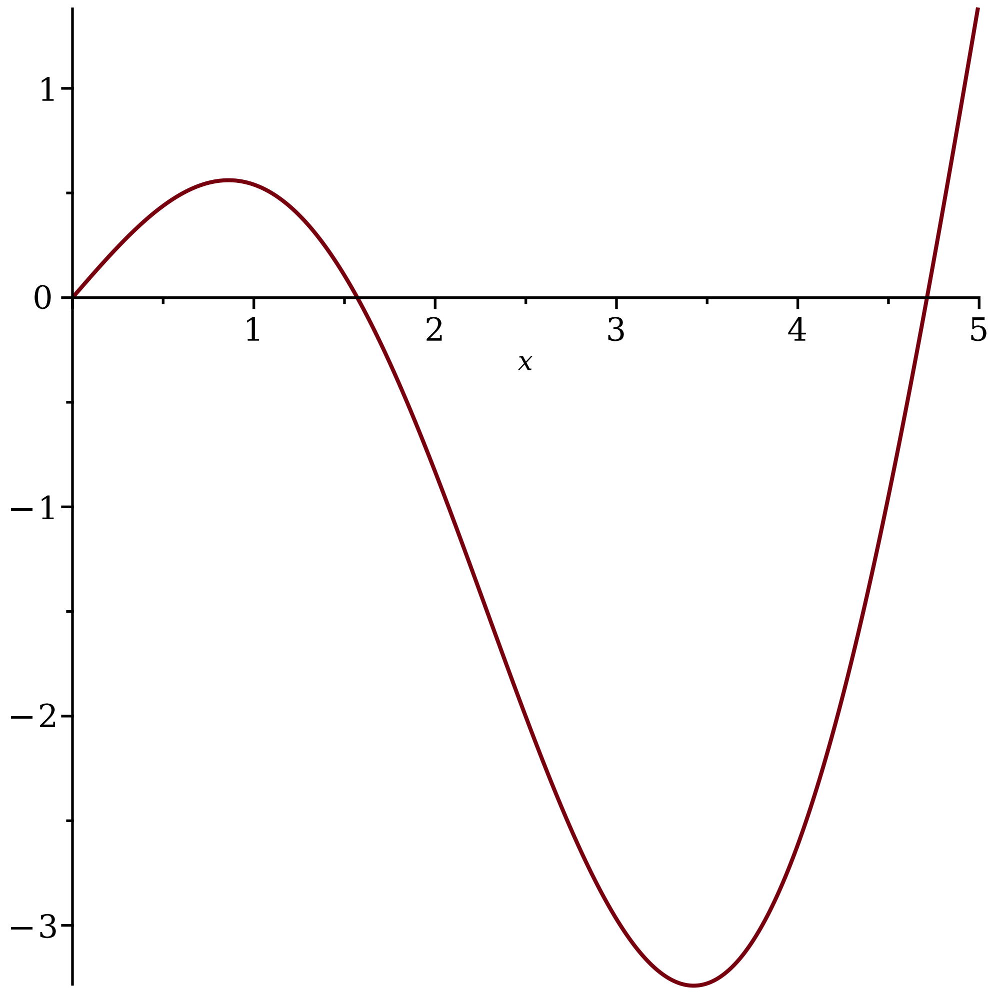
Vi kan derved se, at rumfanget er $V = 44356.62654\ cm^3$.

Opgave 4

$restart$
$with(plots):$
$with(Gym):$

$f(x) := x \cdot \cos(x):$ når $0 \leq x \leq 5$

$plot(f(x), x = 0..5)$



a)

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Svaret er $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

b)

Vi starte med at afgrænse M_2, altså dets interval af funktion. Siden X-aksen afgrænser de 2 områder, kan vi gøre dette, ved at finde skæringspunkterne X-aksen, altså når $y = 0$, i intervallet.

$$intervalsolve(f(x) = 0, x = 0..5) \ = \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Vi kan aflæse når vi tegner grafen, at $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ afgrænser M_1 og $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ afgrænser M_2. Vi kan nu finde rumfanget af f roteret om x-aksen i intervallet der afgrænser M_2. Dette gøres med denne formel.

$$V = \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 \, dx$$

$$V_{M_2} := \int_{\frac{\pi}{2.}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x))^2 \, dx \ = 16.00966837$$

Vi kan derfor se at rumfanget af M_2 roteret om x-aksen er $V_{M_2} \ = 16.00966837$.

c)

Vi regner areal ved at integrere funktion i det relevante interval. Siden M_2 er under x-aksen, får vi en negativ værdi; et areal kan ikke være negativt. Vi skal have det samlede areal, så vi regner integralen af M_1 og M_2 seperat og lægger deres absolutte værdier sammen.

$$A_{M_1} := \left| \int_{0.}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx \right| \ = 0.5707963268$$

$$A_{M_2} := \left| \int_{\frac{\pi}{2.}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \, dx \right| \ = 6.283185307$$

$$A := A_{M_1} + A_{M_2} \ = 6.853981634$$

Vi kan derfor se at det totale areal af M_1 og M_2 er $A \ = 6.853981634$.