Introduktion

For at finde arealet under en kurve, dvs. en funktion, bruger man integration. I denne opgave vil vi bruge integration til geometriske arealberegninger. Vi vil også bruge integration til rumlige beregninger af en figur.

Teori

Hvad er integralregning?

Integralregning er det omvendte af differentialregning.

I integralregning er man givet en funktion, som allerede er en differentieret funktion.
Med integralregning ønsker vi at finde stamfunktionen (F(x)), vores givne funktion er 'stammet' fra, efter evt. differentiering.
Når man integrerer for eksempel f(x) bliver det til stamfunktionen altså F(x). Hvis man integrere f'(x) bliver det til f(x). Differentiere man F(x) bliver det til f(x).

Hvad er bestemt og ubestemt integral?

Et bestemt integral og et ubestemt integral er to forskellige begreber inden for integrering.

Et ubestemt integral, også kendt som en antiderivativ, er den omvendte operation til differentiation. Hvis du har en funktion f(x) og finder dens ubestemte integral, får du stamfunktionen. Denne nye stamfunktionen kaldes den ubestemte integrale af f(x).

Symbolerne, der bruges til at angive et ubestemt integral, er ! (integraltegn) og dx (differential). Så hvis du skal finde det ubestemte integral af f(x), skrives det som ! f(x) dx.

Et bestemt integral bruges til at beregne det samlede areal af en funktion over et bestemt interval. Det bestemte integral giver den numeriske værdi af arealet mellem funktionen og x-aksen over det angivne interval. Hvis man for eksempel tager $F(4)$, vil man få arealet af stamfunktionen fra intervalet af $[0;4]$

Over- og undersummer

Hvis vi har arealet A under en kurve f kan vi approximere det ved at tage hhv. undersummen eller oversummen. Undersummen bliver lidt mindre end selve summen og oversummen bliver lidt større end summen.

De to formler O_f(oversum) U_f(undersum) passer kun til aftagende kurver. Hvis kurven er stigende vil formlerne være omvendt.

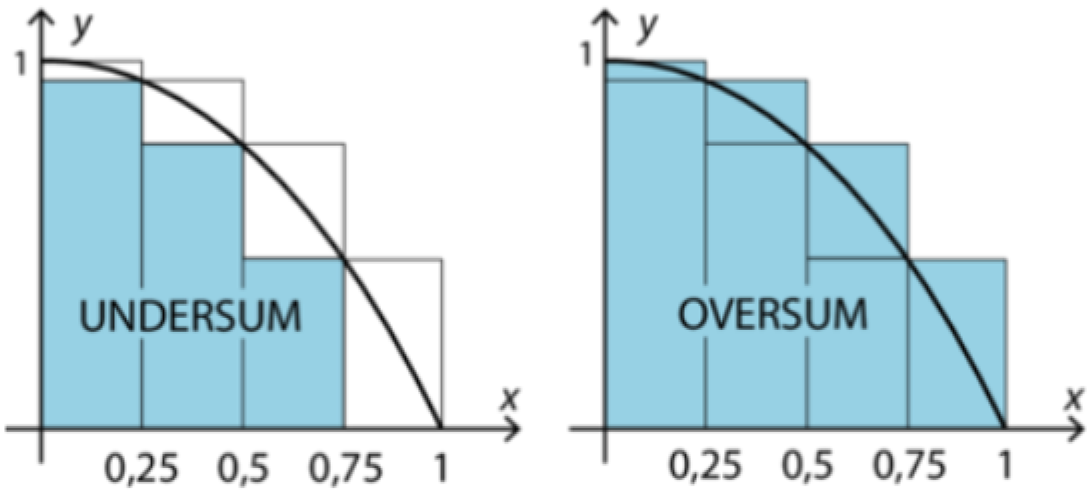
$$O_f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i - 1) \cdot \Delta x \approx A$$

$$U_f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \approx A$$

Det gælder i begge formler at når n går mod uendelig, vil resulatet være lig med summen, da Δx vil være uendelig lille, altså kurven bliver delt op i uendelig små dele.

$$\lim_{n\to\infty}(O_f) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = A$$

$$\lim_{n\to\infty}(U_f) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = A$$

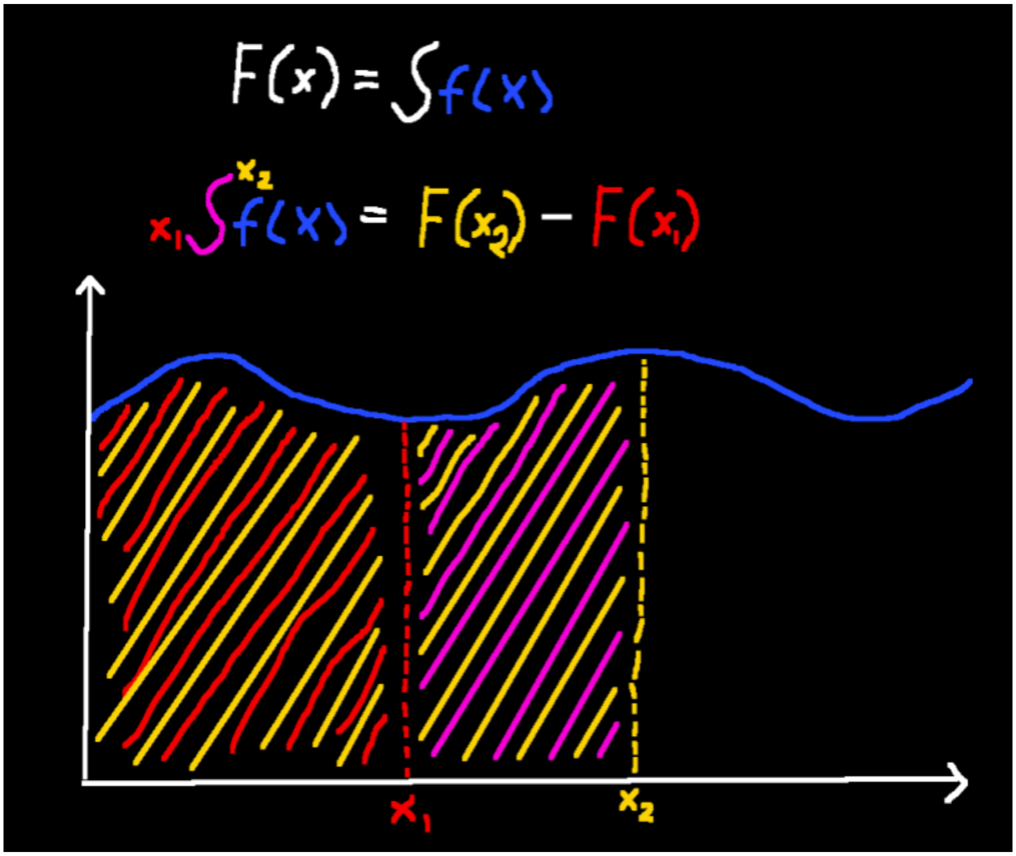


Infinitesimalregningens fundamentalsætning

Infinitesimalregningens fundamentalsætning er en formel for hvordan udregner den bestemte integrale, uden at bruge grænseværdier.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Hvis man for eksempel vil finde for intervalet $[4;9]$, vil man minus intervalet $[0;9]$ med intervalet $[0;4]$. Det vil ende ud i, at man finder intervalet fra $[4;9]$



Regneregler

Når man vil differentiere en funktionsforeskrift, fx $f(x)$ til $f'(x)$, bruger man et sæt regler, som siger hvordan det skal gøres. Disse regler ser sådan ud:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
$a \cdot x + b$	a
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$e^{k \cdot x}$	$k \cdot e^{k \cdot x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\tan^2(x)+1$

Disse regler kan bevises med følgende formel:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Dette er definitionen på differentiring. Den finder hældningen på et punkt, altså den afledte funktion, ved at tage hældningen mellem 2 punkter, $f(x_0)$ og $f(x_0 - \Delta x)$ og flytter punkterne uendelig tæt på hinanden.

Når man differentiere mere kompliserede forskrifter, kommer man ud for, at der er udtryk der skal differentieres inde i andre udtryk der skal differentieres. Hertil gælder følgende regler.

Regneregler i differentialregning	Betegnelse
(1) $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$	Sumregel
(2) $(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x)$	Differensregel
(3) $(k\cdot f)'(x) = k\cdot f'(x)$	Konstantregel
(4) $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	Produktregel
(5) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	Divisionsregel
(6) $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$	Differentiation af sammensat funktion

Integrering af pr. definition det omvendte af differentiering. Dvs. for at integrere en funktionsforskrift, også kaldet at finde stamfunktionen, integrerer man den. Eksempelvis $f(x)$ til $F(x)$. Dette gøres på samme måde som differentiering, bare omvendt. Dvs man bruger følgende regler.

$f(x)$	$F(x)$
0	k
k	$k\cdot x$
x	$\frac{1}{2}x^2$
$x^a\ (a\neq -1)$	$\frac{1}{a+1}\cdot x^{a+1}$
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}\cdot x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert$

$f(x)$	$F(x)$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}\cdot a^x$
e^x	e^x
$e^{k\cdot x}$	$\frac{1}{k}\cdot e^{k\cdot x}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\ln(x)$	$x\cdot\ln(x)-x$

Disse regler bevises med integrationsprøven, hvor man bruger differentiering for at tjekke, det er det samme man kommer frem til.

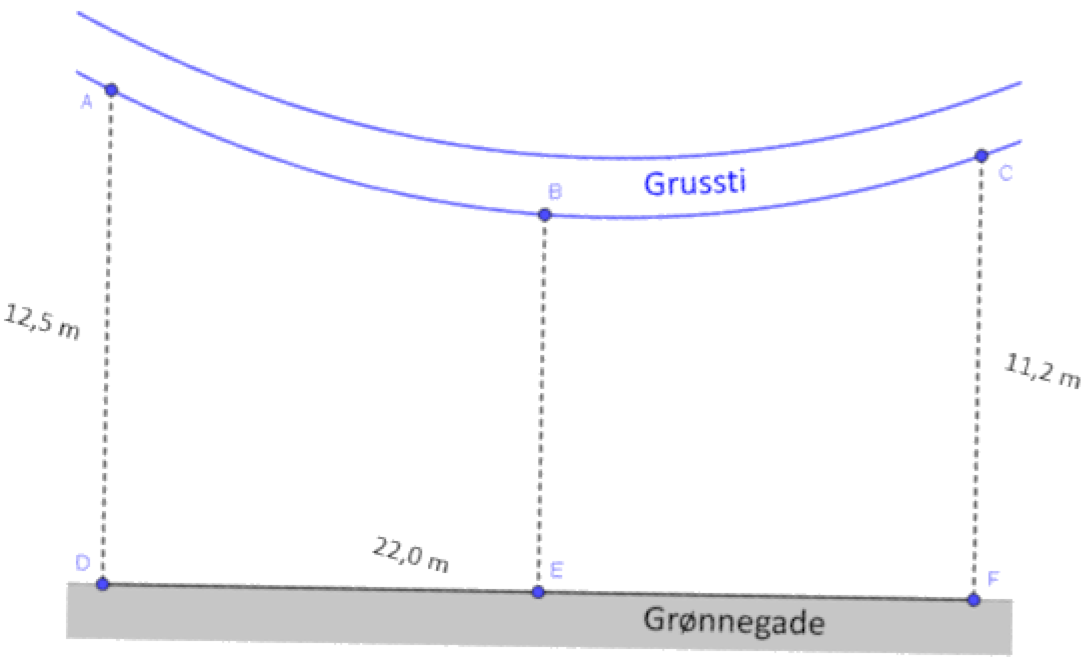
Når man integrerer, lægger man en konstant til forskriften. Denne kalder man ofte k eller C. Dette er fordi man ikke kender skæringen på Y-aksen i et ubestemt integrale, som er det man får, når man integrerer en funktionsforskrift.

Areal beregning

$restart$
$with(Gym)$:
Error, invalid input: with expects its 1st argument, pname, to be of type {`module`, package}, but received Gym
$with(plots)$:

a) Bestem hvor stort et areal, der skal sås græs på, når det er afgrænset af vejen, stien og linjerne AD og CF.

Hvis vi sætter figuren op som en graf, hvor D ligger i $(0, 0)$ og linjen DEF ligger på x aksen og linjen AD ligger på y aksen, lidt ligesom dette:



Ved vi så at hvis vi gerne vil finde arealet der afgrænses af DF, AD, CF og grusstien, skal vi bare finde integralet af funktionen der danner den nederste linje af stien i figuren i intervallet 0 til 22

For at gøre det, skal vi finde funktionsforskriften for funktionen der danner den nederste linje af stien i figuren.

Da der er 3 punkter på linjen, og vi ved at en andengradsligning har forskriften

$ax^2 + bx + c = y$, og vi gerne vil finde ud af a, b og c, kan vi så sætte de tre punkters x og y komponenter ind i formlen, som giver os tre ligninger med 3 ubekendte, som vi kan løse.

Vi kan yderligere aflæse fra grafen at:
1. Punktet $A = (0, 12.5)$
2. Punktet $C = (22, 11.2)$
Og ud fra informationer i opgaven vide at:
3. Punktet E ligger halvvejs mellem D og F på x aksen, da DF har en længde på 22 meter betyder det at E må ligge i $(11, 0)$, og linjen BE har en længde på 9.5 meter. Da E ligger på x-aksen og linjen BE er parallel med y aksen, kan vi se at $B = (11, 9.5)$

Nu hvor vi har tre punkter kan vi så sætte ligningerne op og løse dem:

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 12.5 \wedge a \cdot 11^2 + b \cdot 11 + c = 9.5 \wedge a \cdot 22^2 + b \cdot 22 + c = 11.2$$

Vi finder c:
$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 12.5 \Rightarrow c = 12.5$$

Vi finder a:
$$a \cdot 11^2 + b \cdot 11 + 12.5 = 9.5 \Rightarrow b \cdot 11 = -a \cdot 11^2 - 3 \Rightarrow b = -a \cdot 11 - \frac{3}{11}$$
$$a \cdot 22^2 + \left(-a \cdot 11 - \frac{3}{11}\right) \cdot 22 + 12.5 = 11.2 \Rightarrow a \cdot 484 - a \cdot 242 - \frac{66}{11} + 12.5 = 11.2$$
$$\Rightarrow 242 \cdot a = 11.2 + 6 - 12.5 \Rightarrow a = \frac{4.7}{242}$$

Vi finder b:

$$\frac{4.7}{242} \cdot 11^2 + b \cdot 11 + 12.5 = 9.5 \Rightarrow 11 \cdot b = 9.5 - 12.5 - \frac{4.7}{242} \cdot 11^2 \Rightarrow b = -\frac{5.35}{11}$$

Vi ved derfor at funktionsforskriften for funktionen der beskriver den nederste linje af stien må være

$$y = \frac{4.7}{242} x^2 + \left(-\frac{5.35}{11}\right) \cdot x + 12.5$$

Vi kan evt. også tjekke efter ved at sætte punkterne ind i forskriften og se om det giver y:

$$A_y = \frac{4.7}{242} \cdot 0^2 + \left(-\frac{5.35}{11}\right) \cdot 0 + 12.5 = A_y = 12.5$$
$$B_y = \frac{4.7}{242} \cdot 11^2 + \left(-\frac{5.35}{11}\right) \cdot 11 + 12.5 = B_y = 9.500000000$$

$$C_y = \frac{4.7}{242} 22^2 + \left(-\frac{5.35}{11} \right) \cdot 22 + 12.5 \; = \; C_y = 11.20000000$$

Derfor ved vi det er forskriften for linjen.

Vi finder så stamfunktionen for linjen:

$$y = ax^2 + bx + c = y \Rightarrow a \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 \right) + b \cdot \left(\frac{1}{2} \, x^2 \right) + c \cdot x + k \Rightarrow v = \left(\frac{4.7}{242} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 \right) + \left(-\frac{5.35}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \, x^2 \right) + 12.5 \cdot x + k$$

Og minuser værdien for stamfunktionen når $x = 0$ og $x = 22$ for at finde værdien i intervallet 0 til 22:
Her dropper vi implicit k siden de går ud med hinanden når man minusser k med k:

$$græsareal = \left(\frac{4.7}{242} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} 22^3 \right) + \left(-\frac{5.35}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \, 22^2 \right) + 12.5 \cdot 22 - \left(\left(\frac{4.7}{242} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} 0^3 \right) + \left(-\frac{5.35}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \, 0^2 \right) + 12.5 \cdot 0 \right)$$
$$= \; græsareal = 226.2333333$$

Vi kan evt. tjekke efter med maple:

$$\int_0^{22} \frac{4.7}{242} x^2 + \left(-\frac{5.35}{11} \right) \cdot x + 12.5 \, \mathrm{d}x \; = \; 226.2333333$$

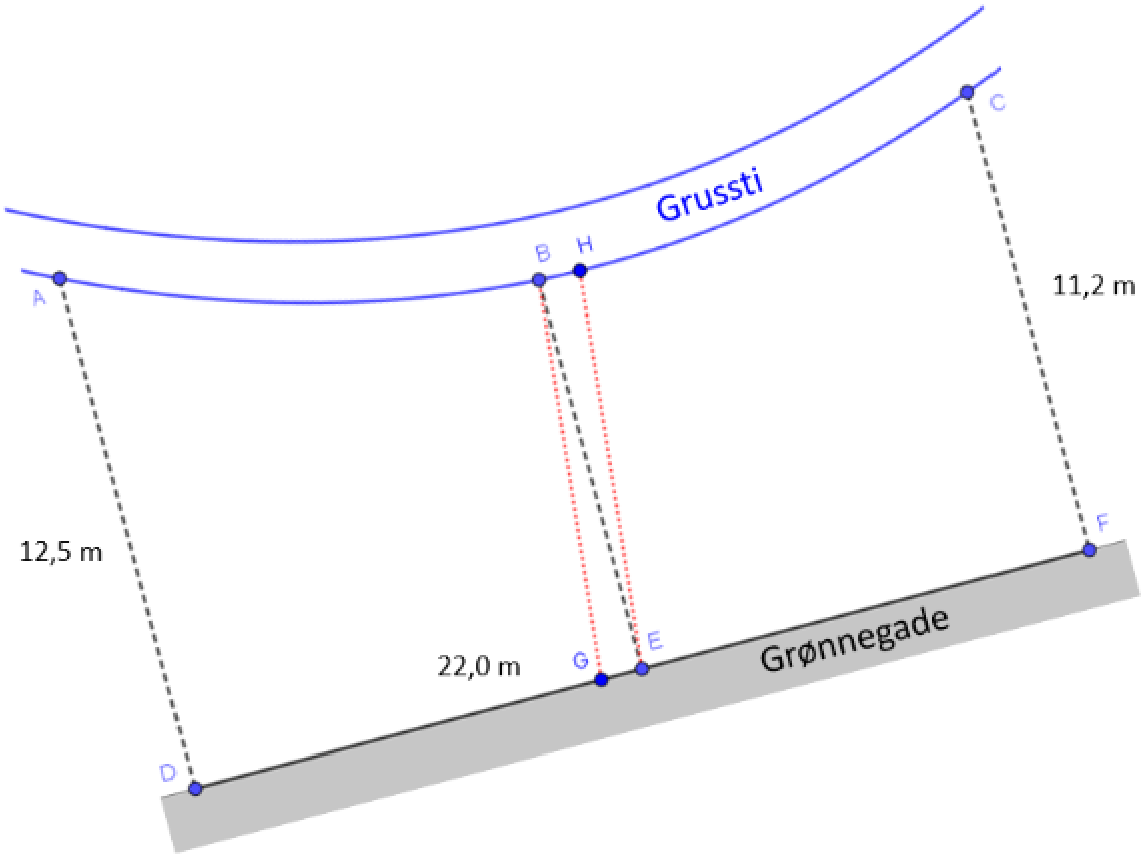
Derfor må græsarealet være $226.23 \, m^2$

b) Arkitekten vil have en sti med en bredde på 1 meter og en centerlinje langs BE, og vi vil gerne vide det resterende græsareal, derfor kan vi bare tage integralet i intervallet af x af centrum hhv. plus og minus en halv meter på hver side for at finde arealet af den nye sti, og trække det fra vores samlede græsareal. Dvs.

$$stiareal = \int_{11 - 0.5}^{11 + 0.5} \frac{4.7}{242} x^2 + \left(-\frac{5.35}{11} \right) \cdot x + 12.5 \, \mathrm{d}x \; = \; stiareal = 9.501618457$$
$$græsareal = 226.23 - 9.50$$
$$græsareal = 216.73 \tag{1}$$

Derfor ville det nye græsareal efter stien er blevet lagt ind $216.73 \, m^2$

c) Arkitekten er dog ikke helt tilfreds med formen af stien, og forslår i stedet sådan et design:



Hvor G har en distance af $1\,m$ fra punktet E, og ligger på linjen DE, dvs.
$G = (10, 0)$
Stien har en bredde af $1\,m$ gennem det hele.
Eftersom distancen mellem GB og EH altid er det samme, må de være paralelle, og man kan derfor udregne funktionsforskriften således:

Vi ved at det for en liniær funktion kan beskrives som $y = ax + b$ hvor
$a = hældningskoefficient = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ og b er en konstant.

Vi udregner hældningskoefficienten ved at tage $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Vi ved at Δx mellem G og E og dermed G og B er 1, så vi ved derfor hældningen til funktionen må være $\frac{B_y}{1} = 9.5$.
Vi kan derefter udregne konstanten da vi nu kender a og et x og et y af et punkt på linjen ved at løse for b
$k_{GB} := solve(0 = 9.5\cdot(10) + k) = -95.$
$k_{EH} := solve(0 = 9.5\cdot(11) + k) = -104.5000000$

De to linjer GB og EH kan så beskrives som $GB(x) = 9.5\,x - 95$ og
$EH(x) = 9.5\,x - 104.5$

Med EH kan vi så finde frem til H, da vi nu har to ligninger med to ubekendte, x og y:

$solve\left(\left\{\frac{4.7}{242}x^2+\left(-\frac{5.35}{11}\right)\cdot x+12.5=y, 9.5\,x-104.5=y\right\}\right)$ =

$\{x=11.99583319, y=9.460415284\}, \{x=502.1956563, y=4666.358735\}$

Vi ved derfor punktet at $H=(11.96, 9.46)$

Vi kan så bruge integrale til at udregne arealet under GB mellem G og B, arealet under EH mellem E og H og arealet under grusstien mellem E og H. Logisk set må arealet af stien være arealet under GB + arealet under grusstien minus arealet under EH.

Dvs.

$$stiareal=\int_{10}^{11}9.5\,x-95\,\mathrm{d}x+\int_{11}^{11.96}\left(\frac{4.7}{242}x^2+\left(-\frac{5.35}{11}\right)\cdot x+12.5\right)\mathrm{d}x-\int_{11}^{11.96}(9.5\,x-104.5)\,\mathrm{d}x$$

= $stiareal=9.470898540$

Og så gør vi bare det samme som vi gjorde sidst, nu hvor vi har stiens areal:

$græsareal=226.23-9.47$ = $græsareal=216.76$

Som så er vores svar.

Ved indvielsen af det nye byggeri blev der afsløret en skulptur i det grønne område. Figuren er 25 cm
bred. Et tværsnit af skulpturen er vist under. Det er lavet ud fra kurverne for to funktioner f og g,
når tværsnittet roteres om y-aksen.

$f(x):=-0.5\cdot\cos(2\,x)+0.5:$

$f(x)$ = $-0.5\cos(2\,x)+0.5$

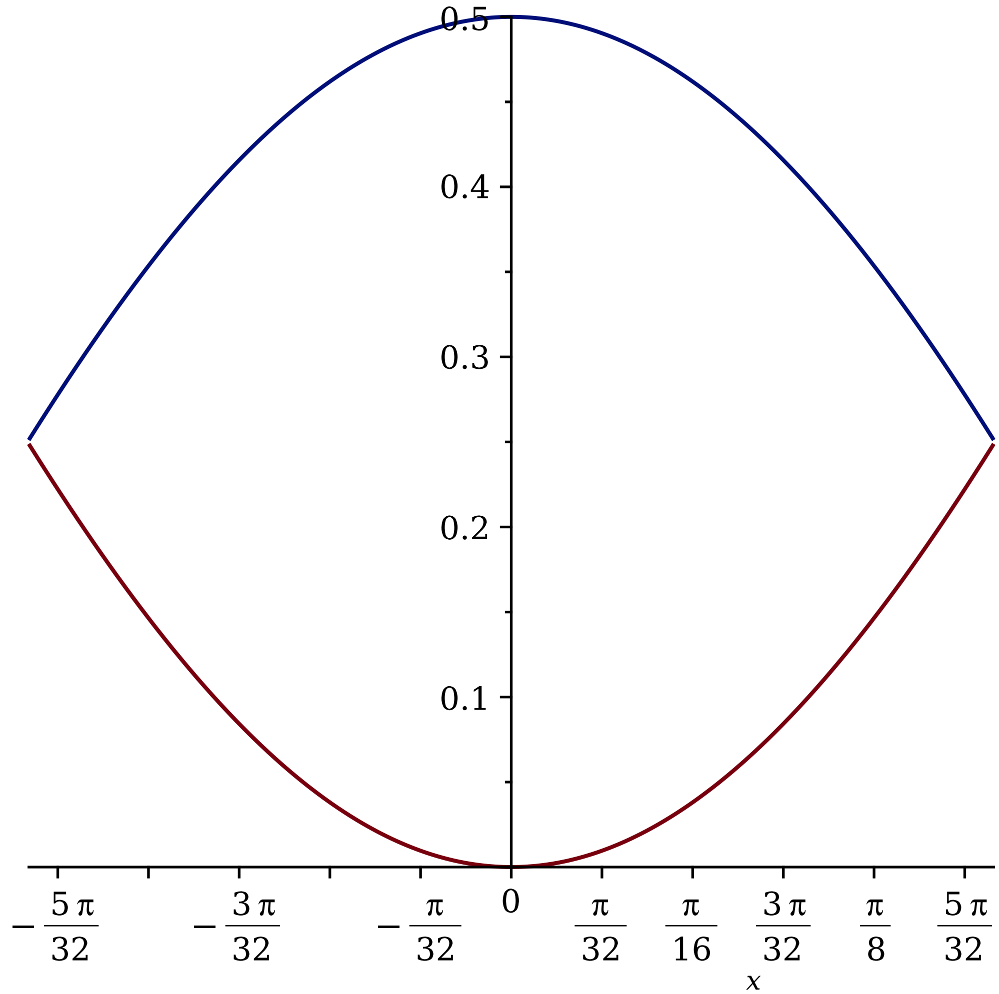
$g(x):=0.5\cdot\cos(2\,x):$

$g(x)$ = $0.5\cos(2\,x)$

$P_f:=plot\left(f(x), x=-\frac{\pi}{6}..\frac{\pi}{6}\right):$

$P_g:=plot\left(g(x), x=-\frac{\pi}{6}..\frac{\pi}{6.}\right):$

$display(P_f, P_g)$



Vi ved at formlen for volumen af et omdregningslegeme når roteret rundt om y-aksen er $V = 2 \cdot \pi \cdot \int_{x1}^{x2} f(x) \cdot x \, dx$ Vi kender at x1 skal være 0, men vi kender ikke x2.

Derfor vil vi gerne finde x hvor $f = g$ i intervallet $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Det gør vi således:

$$intervalsolve\left(f(x) = g(x), 0 .. \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$intervalsolve\left(-0.5\cos(2x) + 0.5 = 0.5\cos(2x), 0 .. \frac{\pi}{2}\right)$$

Vi kan derfor se at intervallet vi bruger derfor må være $[0; 0.524]$, og kan derfor udregne volumen.

Vi skal dog også huskere at skalere radius til den 12.5 cm, eftersom at den fulde bredde er 25cm må radius være det halve. Det gør vi ved at tage radiusen som en procent, dvs. gange radius med $\frac{1}{0.524}$ for at normalisere den, og derefter gange med vores ønskede radius, 12.5, hvilket er det samme som at gange med $\frac{12.5}{0.524}$.

Det gør vi så 3 gange for højde, længde og bredde, altså $\left(\frac{12.5}{0.524}\right)^3$

Vi kan så bruge formlen for rumfanget mellem to grafer, hvor vi ganger med vores skaleringskonstant:

$$V := \left(\frac{12.5\,cm}{0.524}\right)^3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{0.524} (g(x) - f(x)) \cdot x \,\mathrm{d}x = 2830.544672\,cm^3$$

Det betyde rumfanget må være $2830.5\,cm^3$, og vi kan derfor hurtigt udregne massen af skulpturen ved at gange med densiteten af materialet, i vores tilfælde granit.

$$m = V \cdot 2.75 \cdot \frac{g}{cm^3} = 7783.997848\,g$$

Derfor må massen af skulpturen være $7784.00\,g$

Vi gør meget af det samme for overfladearealet, bare at vi selvfølgelig skal bruge formlen for overfladeareal af en omdrejningslegeme roteret rundt om y aksen, og gange med 2 gange, for længde og bredde:

$$OA = OA_f + OA_g = \left(\frac{12.5\,cm}{0.524}\right)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{0.524} x \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x + \left(\frac{12.5\,cm}{0.524}\right)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{0.524} x \cdot \sqrt{1 + g'(x)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left(\frac{12.5\,cm}{0.524}\right)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(\int_0^{0.524} x \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{0.524} x \cdot \sqrt{1 + g'(x)^2}\,\mathrm{d}x\right) = 1170.074196\,cm^2$$

Derfor må overfladearealet af skulpturen være $1170.07\,cm^2$

Diskussion & Konklusion

I dette projekt brugte vi Integralregning til at finde et areal af en græsplæne, der skal sås græs på, når det er afgrænset af vejen, stien og linjerne AD og CF, som vi så fik areal til $226.23\,m^2$.
Så var der behov for en sti mellem vejen og den allerede anlagte grussti den nye sti skule være 1 meter bred og have centerlinje langs linjen BE, de regnede vi ogs ud med integralregning som vi fik til $216.73\,m^2$.
Så blev der forslået en anden sti. Den nye sti skal have samme bredde over alt, og ved brug af integralregning fik vi stien til $9.471\,m^2$ som vi bare subtraktere fra afgrænset af vejen, stien og linjerne AD og CF $226.23\,m^2$ som den nye græsplæne areal bliver til $216.76\,m^2$.

Vi synes $226.23\,m^2$ er en realistisk størrelse for grasarealet, da det er flere metre på hver led, men alligevel ikke fx på størrelse med en fodboldbane. Vi synes $9.471\,m^2$ er realistisk for vejen, da den er ca. 10 meter lang og 1 meter bred.

Så skulle der være en figur i plænen. Figuren er 25 cm bred. Et tværsnit af skulpturen er vist under. Det er lavet ud fra kurverne for to funktioner f og g, når tværsnittet roteres om y-aksen.
Rumfanget beregnede vi med integration, med rotering af en funktion om y-aksen. De givede funktioner beskriver ikke skulpturen i skala, derfor har vi skaleret resultatet. Vi fik rumfanget af figuren fik vi til $2830.5\,cm^3$, og vi kan derfor hurtigt udregne massen af skulpturen ved at gange med densiteten af materialet på 2,75 g/cm3, i vores tilfælde granit .
Så må massen af skulpturen være $7784.00\,g$

Dette synes vi giver god mening, da en stenskulptur der ca. er i størrelse man kan bære i 2 hænder, godt kunne veje ca. 7-8 kg.

Vi skulle bestemme overfladearealet af hele skulpturen og se bort fra, at skulpturen skal stå på en sokkel.
Vi gør meget af det samme for overfladearealet, bare at vi bruger formlen for overfladeareal af en omdrejningslegeme roteret rundt om y-aksen: Vi regnede overfladearealet af skulpturen til $1170.07\,cm^2$. Dette synes vi giver mening, da vi synes en kvadratmeter ca. er i den størrelse.

I konklusionen kan vi fastslå, at integrationsregning var effektiv til at beskrive areal af kurved-græsplæne.
Resultaterne viser, overfladeareal af græsplænen, stien og figuren