Simon From Jakobsen 20ia

Bevis af formlen for skalarprodukt

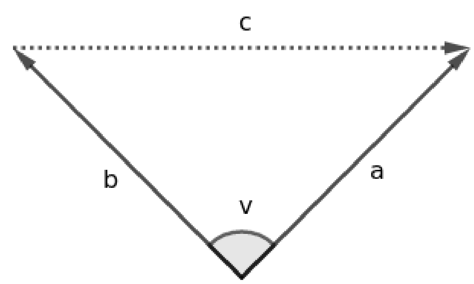
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + b_y a_y$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v)$$

Jeg vil nu bevise, at vi kan bruge de førnævnte formler, til at regne vektoren $\vec{c}$.

Jeg vil starte med at representere de 2 vektorer, som en trekant. Dette vil jeg gøre, ved at indføre en tredje vektor $\vec{c}$.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

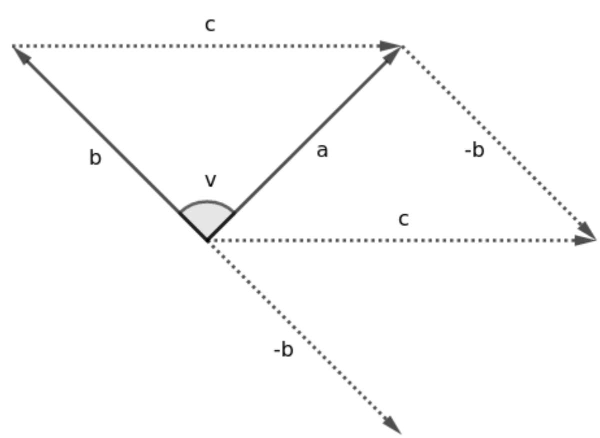


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} = \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$



Siden vi nu arbejder med en trekant, kan vi bruge nu sammenligne vores problem, med cosinus relationerne:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(v)$$

Og vi kan bruge værdierne: $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$, $c = |\vec{c}|$ og $v = v$. Så får vi:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)$$.

Dette vil jeg gerne reducere, så udtrykket bliver simplere. Vi starter med at ophæve det negative fortegn:

$$|\vec{c}| + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v) + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)$$

$$|\vec{c}|+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$$

Og isolerer $2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)$ på venstre side:

$$|\vec{c}|+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)-|\vec{c}|=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|$$

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|$$

Så flytter vi 2-tallet, for at få division istedet:

$$\frac{2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)}{2}=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|}{2}$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|}{2}$$

Så ved at skrive vektorerne i deres kordinater, kan vi reducere venstre side endnu mere:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

$$|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2$$

$$\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|}{2}$$

Og som vist tidligere, kunne vi skrive $\vec{c}$ som:

$$|\vec{c}|=|\begin{pmatrix} a_x-b_x \\ a_y-b_y \end{pmatrix}|$$

$$|\vec{c}|^2=(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2$$

$$\frac{(a_x^2+a_y^2)+(b_x^2+b_y^2)-((a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2)}{2}$$

Så kan vi bruge kvadratsætningen:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2+b^2-2ab$$

Og bruge den til vores udregning:

Simon From Jakobsen 20ia

$$(a_x - b_x)^2 = a_x^2 + b_x^2 - 2\,a_x\,b_x$$

$$\frac{(a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) - (a_x^2 + b_x^2 - 2\,a_x\,b_x + a_{¿} + b_y^2 - 2\,a_y\,b_y)}{2}$$

Ophæve parenteserne:

$$\frac{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - a_x^2 - b_x^2 + 2\,a_x\,b_x - a_y^2 - b_y^2 + 2\,a_y\,b_y}{2}$$

Så fjerne vi alle udtryk der bliver udlignet.

$$\frac{2\,a_x\,b_x + 2\,a_y\,b_y}{2}$$

Så ophæver vi divisionen:

$$a_x\,b_x + a_y\,b_y$$

Og nu kan vi så set at:

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v) = a_x\,b_x + a_y\,b_y$$

Og derved har vi bevist, at:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x\,b_x + b_y\,a_y$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)$$