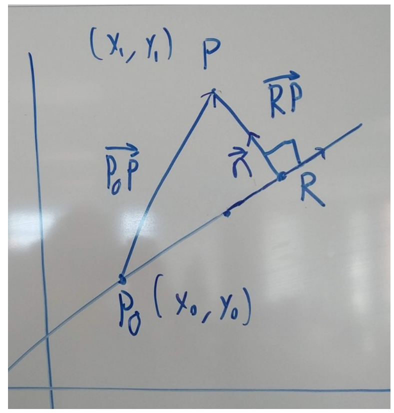
Simon From Jakobsen

Bevis af afstandsformlen

$$|\overrightarrow{RP}|=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

Jeg vil nu bevise at man kan bruge denne formel, til at regne distancen mellem et punkt og en linje.



Her har vi

- en linje defineret som $y=ax+b$
- punktet P , som er defineret som (x_1, y_1)
- punktet P_0 , som er defineret som (x_0, y_0)
- punktet R
- Normalvektoren $\hat{n}$ til linjen
- Vektoren $\overrightarrow{P_0P}$
- Vektoren $\overrightarrow{RP}$

Vi vil gerne regne afstanden mellem linjen og P .

For at finde afstanden, skal vi først finde normalvektoren $\hat{n}$ til linjen.
Siden vi kan definere ligningen som:

$$y=ax+b \Rightarrow 0=ax+by+c$$

Kan vi definere $\hat{n}$ som:

$$\hat{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

hvor a og b stammer fra $0=ax+by+c$

Så finder vi vektoren $\overrightarrow{P_0P}$, som er længden mellem P_0 og P :

$$\overrightarrow{P_0P}=\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \end{pmatrix}$$

Nu skal vi finde vektoren $\overrightarrow{RP}$, det gør vi ved at finde $\overrightarrow{P_0P}$'s projection på $\hat{n}$:

$$|\overrightarrow{RP}|=|\overrightarrow{P_0P_n}|=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\cdot\hat{n}|}{|\hat{n}|}$$

$$|\overrightarrow{RP}|=\frac{xa_1-ax_0+by_1-by_0}{|\hat{n}|}$$

Så hvis vi sammenligner dette med linjens formel:

$$0=ax+by+c$$

Kan vi se at $-ax_0$ kan gå ud med ax og $-by_0$ går ud med by hvis vi også lægger c til:

$$|\overrightarrow{RP}|=\frac{xa_1+by_1+c}{|\hat{n}|}$$

Og så siden længden af en vektor er:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

Kan vi omskrive formlen til:

$$|\overrightarrow{RP}|=\frac{xa_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Og derved er det bevist.