Rumgeometri project

Gruppe Simon From, Theis Pieter, Mikkel Kongsted
Fag: Matematik
Afleveringsdato: 10/05/2023

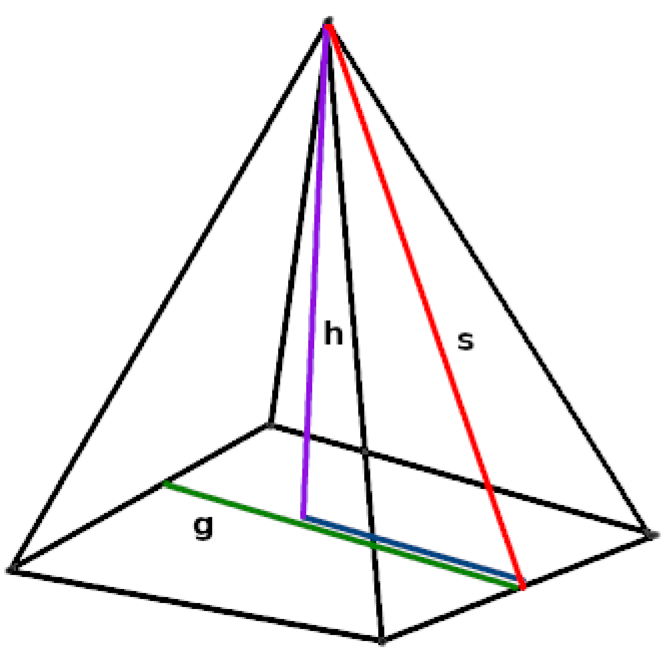
Formål

At opnå forståelse for beregning af volumen og overfladeareal af rumlige figurer

Teori

I rumgeometri regner man rumfang/volume og overfladeareal af figurer. Formlerne man bruger til dette afhænger af de figurer man regner på. Formlerne man bruger bygger ofte på cirkler og retvinklede trekanter.

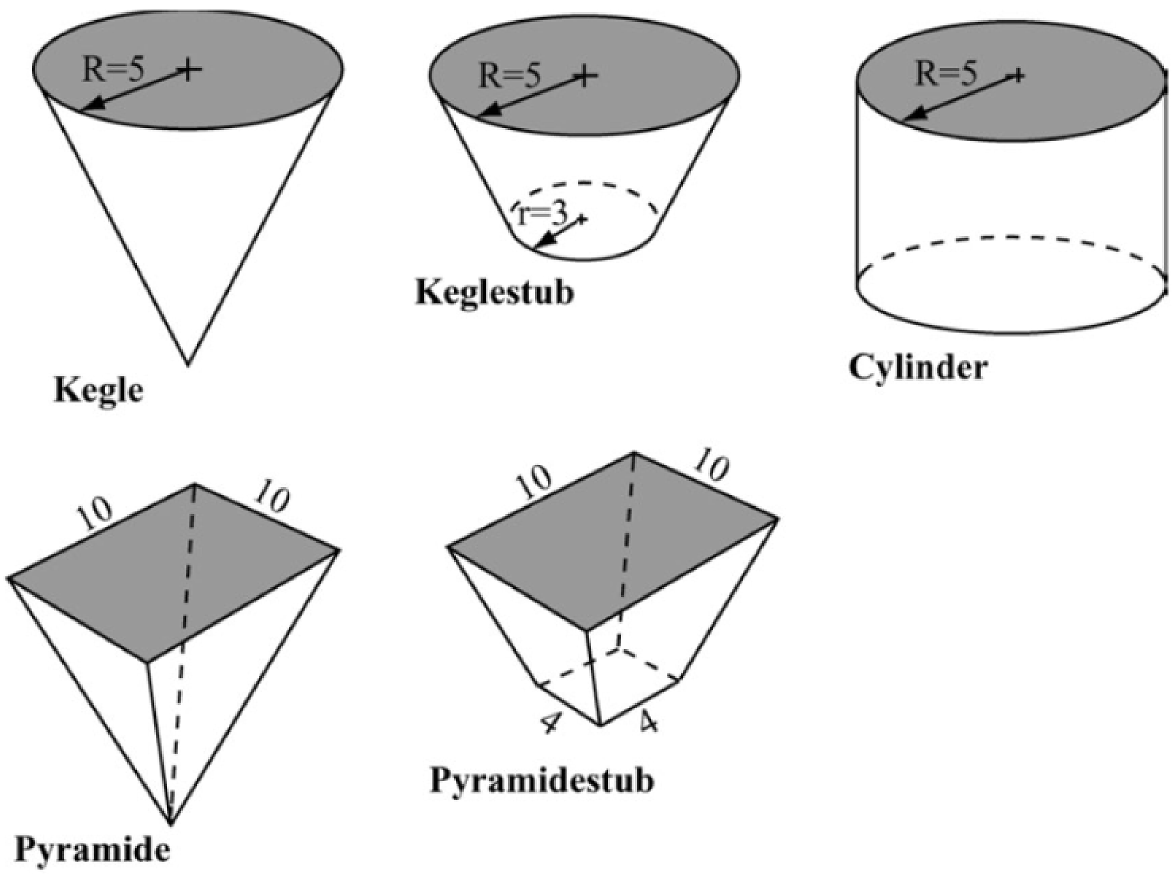
Hvis vi tager eksemplet af at regne overfladearealet af en 4-pyramide. Bunden er en kvadret, så der ville man bruge g^2, hvor g er længden af grundfladesiderne, til at finde arealet. For at finde arealet af siderne, skal man huske at de er trekanter, så man kan bruge formlen for arealet af en trekant $\frac{s \cdot g}{2}$, hvor s er højden på trekanten. For at finde s bruger vi pythagures, som siger $s = \sqrt{h^2 \cdot \left(\frac{g}{2}\right)^2}$, her halveres g, da det er længden fra midten af grunfladen ud til siden.



Når man regner med flere forskellige slags figurer kombineret, lægger man dem til hindanden, og/eller trækker fra, så man får de rigtige rumfang og overfladearealet.

Opgaven

Herunder er et billede af en kegle, en keglestub, en cylinder, en pyramide og en pyramidestub. De grå områder er åbninger. Rumfanget er hver beholder/figur skal være 0,4 liter. Målene på beholderne er angivet i cm.



Tegning: Peter Hansen

Liter til kubikcentimeter

$$V = 0.4\,L = \frac{0.4}{0.001}\,cm^3 = 400\,cm^3$$

$$V := 400:$$

Vi går ud fra at overfladearealerne skal være arealet af de yderlige overflader.

Kegle

$$r_{kegle} := 5:$$

$$V_{kegle} = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3}:$$

$h_{kegle} = \frac{V \cdot 3}{\pi \cdot r^2}$:

$h_{kegle} := \frac{V \cdot 3.}{\pi \cdot r_{kegle}^{\ 2}}$ = 15.27887453

$h_{kegle} \cdot cm$ = 15.27887453 cm

Denne formel regner den arealet af den krumme overflade, men ikke toppen, da den ikke er med.

$A_{kegle} = \pi \cdot r \cdot s$:

s_{kegle} er sidelængden.

$s_{kegle} = \sqrt{h^2 + r^2}$:

$s_{kegle} := \sqrt{h_{kegle}^{\ 2} + r_{kegle}^{\ 2}}$ = 16.07619379

$A_{kegle} := \pi \cdot r_{kegle} \cdot s_{kegle}$ = 252.5242616

$A_{kegle} \cdot cm^2$ = 252.5242616 cm^2

Keglestub

$r_{keglestub} := 5$:

$R_{keglestub} := 3$:

$V_{keglestub} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r^2 + R^2 + r \cdot R)$:

$h_{keglestub} = \frac{V}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r^2 + R^2 + r \cdot R)}$:

$h_{keglestub} := \frac{V}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r_{keglestub}^{\ 2} + R_{keglestub}^{\ 2} + r_{keglestub} R_{keglestub})} \cdot 1.$ = 7.795344150

$h_{keglestub} \cdot cm$ = $h_{keglestub*}$ cm

Denne formel regner arealet af den krumme overfladeog bunden, men ikke toppen, da den ikke er med.

$A_{keglestub} = \mathrm{O} + G$:

$\mathrm{O}_{keglestub} = \pi \cdot (r_{keglestub} + R_{keglestub}) \cdot a$:

$a_{keglestub} = \sqrt{h^2 + (R\,\mathrm{K}\;r)^2}$:

$a_{keglestub} := \sqrt{h_{keglestub}^{\ 2} + (R_{keglestub}\,\mathrm{K}\;r_{keglestub})^2}$ = 8.047818985

$\mathrm{O}_{keglestub} := \pi \cdot (r_{keglestub} + R_{keglestub}) \cdot a_{keglestub}$ = 202.2637520

$G_{keglestub} = r^2 \cdot \pi$:

$G_{keglestub} := R_{keglestub}^{\ 2} \cdot \pi$ = $9\,\pi$

$A_{keglestub} := \mathrm{O}_{keglestub} + G_{keglestub}$ = 230.5380859

$A_{keglestub} \cdot cm^2$ = 230.5380859 cm^2

Cylinder

$r_{cylinder} := 5. :$

$V_{cylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h :$

$h_{cylinder} = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} :$

$h_{cylinder} := \frac{V}{r_{cylinder}^{\ 2} \cdot \pi} = 5.092958178$

$h_{cylinder} cm = 5.092958178\, cm$

Denne formel regner arealet af den krumme overflade og bunden af cylinderen, toppen er ikke med.

$A_{cylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h :$

$A_{cylinder} := r_{cylinder}^{\ 2} \cdot \pi \cdot h_{cylinder} = 400.0000000$

$A_{cylinder} \cdot cm^2 = 400.0000000\, cm^2$

Pyramide

$V_{pyramide} = \frac{g^2 \cdot h}{3} :$

$h_{pyramide} = \frac{V \cdot 3}{g^2} :$

$g_{pyramide} := 10 :$

$h_{pyramide} := \frac{V \cdot 3}{g_{pyramide}^{\ 2}} = 12$

$h_{pyramide} \cdot cm = 12\, cm$

Denne formel regner overfladearealet af alle siderne på en 4-sidet pyramide, bunden er ikke med.

$A_{pyramide} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot g :$

$s_{pyramide}$ er sidelængden.

$s_{pyramide} = \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2} :$

$s_{pyramide} := \sqrt{\left(\frac{g_{pyramide}}{2}\right)^2 + h_{pyramide}^{\ 2}} = 13$

$A_{pyramide} := 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot s_{pyramide} \cdot g_{pyramide} = 260$

$A_{pyramide} \cdot cm^2 = 260\, cm^2$

Pyramidestub

$$V_{pyramidestub} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(G + g + \sqrt{G \cdot g}\right):$$

$$h_{pyramidestub} = \frac{V}{\frac{1}{3} \cdot \left(G + g + \sqrt{G \cdot g}\right)}:$$

Disse er arealet af de kvadratiske grundfladerne på pyramidestubben.

$G_{pyramidestub} := 10.^2$ = 100.

$g_{pyramidestub} := 4.^2$ = 16.

$$h_{pyramidestub} := \frac{V}{\frac{1}{3} \cdot \left(G_{pyramidestub} + g_{pyramidestub} + \sqrt{G_{pyramidestub} \cdot g_{pyramidestub}}\right)} =$$

7.692307692

$h_{pyramidestub} \cdot cm \cdot 1.$ = 7.692307692 cm

Denne formel regner overfladearealet af siderne og bunden på en 4-sidet pyramidestub.

$$A_{pyramidestub} = g + 2\left(\sqrt{G} + \sqrt{g}\right) \cdot \sqrt{h^2 + \frac{G}{4} + \frac{g}{4} \text{ K } \frac{\sqrt{g \cdot G}}{2}}:$$

$$A_{pyramidestub} := g_{pyramidestub} + 2\left(\sqrt{G_{pyramidestub}} + \sqrt{g_{pyramidestub}}\right) \cdot \sqrt{{h_{pyramidestub}}^2 + \frac{G_{pyramidestub}}{4} + \frac{g_{pyramidestub}}{4} \text{ K } \frac{\sqrt{g_{pyramidestub} \cdot G_{pyramidestub}}}{2}}$$

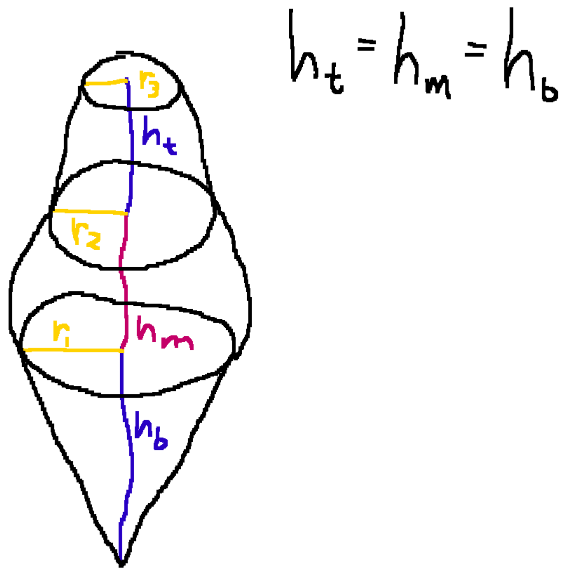
= 247.1850612

$A_{pyramidestub} \cdot cm^2$ = 247.1850612 cm^2

Opgave 2

restart

Her er vores skitse:



r_1 på vores figur er r_{bund} i vores beregninger, r_2 er r_{midt} i vores beregninger, og r_3 er r_{top} i vores beregninger.

Milliliter til kubikcentimeter
$1\ cm^3 = 1\ ml$

Volumen af figuren
Vi ved, at den samlede volume af figuren skal være mindst 80 ml, som er det samme som 80 cm^3 og maks 82 ml, som er det samme som 82 cm^3, dvs:

$$V = V_{bund} + V_{midte} + V_{top} \wedge 80\ cm^3 \le V \le 82\ cm^3 :$$

Højde

Alle delfigurer i figuren skal have den samme højde
$h = h_{bund} = h_{midte} = h_{top} :$

Volume

Da toppen af figuren er en keglestub, bruger vi formlen for volumen af en keglestub til at finde V_{top}

$$V_{top} := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left({r_{midt}}^2 + {r_{top}}^2 + r_{midt} \cdot r_{top} \right) :$$

Da midten af figuren er en kugleskiven, bruger vi formlen for volume af kugleskive til at finde V_{midt}

$$V_{midte} := \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(3\,r_{bund}^{\ 2} + 3\,r_{top}^{\ 2} + h^2\right):$$

Og da bunden af figuren er en kegle, bruger vi formlen for volume af en kegle til at finde V_{bund}

$$V_{bund} := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot r_{bund}^{\ 2}:$$

Vi sætter de 3 volume formler sammen i en funktion

$$V_{figur}(h, r_{midt}, r_{top}, r_{bund}) := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot r_{midt}\left(r_{midt}^{\ 2} + r_{top}^{\ 2} + r_{midt} \cdot r_{top}\right) + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(3\,r_{bund}^{\ 2} + 3\,r_{top}^{\ 2} + h^2\right) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot r_{bund}^{\ 2}:$$

Og sætter tal ind indtil vi finder noget der passer med, at $80 \leq V \leq 82$

$$V := V_{figur}(2.5, 4.5, 3, 2) = 81.48505946$$

Vores figur ender med at have en højde på $2.5\,cm$ per delfigur, så altså $7.5\,cm$ i alt siden der er 3 delfigurer, en cirkulær kontaktflade med radius af $2\,cm$ mellem midte og bund, en cirkulær kontaktflade med radius på $4.5\,cm$ mellem midte og top og en radius på toppen af figuren på $3\,cm$. Vores figur har en samlet volume på cirka $81.485\,cm^3$ eller $81.485\,ml$