Projekt Avedøreværket
Vektorer i rummet

4/3 2024
Maksim og Simon From

Formål

Anvende vektorer til at bestemme koordinater og parameterfremstillinger for linjer og planer.
Beregne vinkler mellem forskellige geometriske elementer i rummet.
Anvende krydsprodukter til at bestemme normalvektorer til planer.
Opstille ligninger for planer ud fra punkter og normalvektorer.
Anvende disse koncepter til at finde skæringslinjer mellem planer og beregne arealer af rumlige figurer.

Teori - Vektorer i rummet

Vektorer i rummet kan beskrives som en udvidelse af vektorer i planet. I planet benytter man ofte vektorer til at beregne linje og punkter. I rummet tilføjer man også planet som noget at regne på. Istedet for 2 dimensioner; xy-akser, har vi nu 3 dimensioner; xyz-akser.

Punkt

Ligesom i planet kan punkter i rummet beskrives med sted-vektorer. Dette er vektorer der går fra origo $\mathrm{O} = [0, 0, 0]$ til et punkt $P = [x, y, z]$ og beskrives følgende:

$$\overrightarrow{OP} = P - \mathrm{O} = \langle x - 0, y - 0, z - 0 \rangle = \langle x, y, z \rangle$$

Længde af vektor

Ligesom i planet beregnes med Pythagures' sætning.

$$\vec{v} = \langle x, y, z \rangle$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2}^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Enhedsvektor

Enhedsvektoren rummet er lignende enhedsvektoren i planet, da man kan regne den ved at dividere alle komponenter i en vektor med dens længde.

Prikprodukt

Kaldes også skalarprodukt.

For at regne prikproduktet af 2 vektorer, gør man følgende:

$$\vec{a} = \langle x_a, y_a, z_a \rangle$$

$$\vec{b} = \langle x_b, y_b, z_b \rangle$$

$$\vec{a} \,.\, \vec{b} = \langle x_a, y_a, z_a \rangle . \langle x_b, y_b, z_b \rangle = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

Prikproduktet er et skalarværdi (dvs. et tal), som vi fx kan bruge til at sige noget om vektorernes vinkel mellem hinanden.

Vinkel mellem 2 vektorer

Til at beregne vinklen v mellem 2 vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bruger man denne formel:

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \,.\, \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Projektion

For at regne vektoren $\vec{a}$'s projektion på $\vec{b}$, kaldet $\overrightarrow{a_b}$ kan man bruge følgende:

$$|\overrightarrow{a_b}| = |\vec{a}| \cdot \cos(v)$$

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Og med enhedsvektoren $\overrightarrow{e_b}$ kan man regne den på følgende måde:

$$\overrightarrow{a_b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \overrightarrow{e_b} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

Linjens parameterfremstilling

For at beskrive en linje i rummet tager man udgangspunkt i et punkt og giver en retning. Dette kan man gøre en parameterfremstilling:

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \cdot \langle a, b, c \rangle$$

I dette tilfælde er punktet

$\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ (ofte P_0) og hældningen $\langle a, b, c \rangle$, hvilket kaldes retningsvektoren (ofte $\vec{r}$).

t er parameteren, som gør fremskrivningen til en linje, da den beskriver punkter i linjen.

I planet skærer alle linjer mindst 1 akse, i rummet er det samme ikke guarenteret. Parameterfremstilling tager højde for dette.

For at undersøge om et punkt er i linjen, splitter man opstillingen op i 3 lininger af de 3 komponenter:

$$x = x_0 + t \cdot a$$

$$y = y_0 + t \cdot b$$

$$z = z_0 + t \cdot c$$

Så løser man en af liningerne med punktets koordinater, for at finde frem til t. Hvis t kan findes, og kan bruges til at finde de andre komponenter med de 2 andre ligninger, er punktet på linjen.

Hvis man har 1 eller 2 af koordinaterne af et punkt, kan man bruge samme metode til at finde det sidste koordinat med liningerne.

Man kan finde frem til linjes parameterfremstilling ud fra 2 punkter, ved at bruge det ene punkt som punkt og finde vektoren mellem punkterne som retningsvektor.

Planets parameterfremstilling

For at beskrive et plan i rummet bruger kan vi samme fremstillingen som ved linjen, bare denne gang med 2 retningensvektorer. Dette er fordi 2 linjer der skærer hinanden (dvs. skærer hinanden i et punkt; fremstillingens punkt) som sådan beskriver et plan, så lægge de ikke er parallelle.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \cdot \langle a_1, b_1, c_1 \rangle + s \cdot \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$$

Hvad der gælder for linjens parameterfremstilling, gælder også for planets.

Krydsprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y), (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z), (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \rangle$$

Planet på normalform

Normalform ser sådan ud:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

Som man kan komme frem til fra parameterfremstillingen

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \cdot \langle a_1, b_1, c_1 \rangle + s \cdot \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$$

$$\vec{n} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \times \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$$

$P = \langle x_1, y_2, z_3 \rangle$ - Vilkårligt punkt i planet

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = a_{\vec{n}} \cdot (x_1 - x_0) + b_{\vec{n}} \cdot (y_1 - y_0) + c_{\vec{n}} \cdot (z_1 - z_0) = 0$$

Som kan omskrives til:

$$a_{\vec{n}} \cdot x_1 - a_{\vec{n}} \cdot x_0 + b_{\vec{n}} \cdot y_1 - b_{\vec{n}} \cdot y_0 + c_{\vec{n}} \cdot z_1 - c_{\vec{n}} \cdot z_0 = 0$$

Som kan omskrives til:

$$a_{\vec{n}} \cdot x_1 + b_{\vec{n}} \cdot y_1 + c_{\vec{n}} \cdot z_1 - a_{\vec{n}} \cdot x_0 - b_{\vec{n}} \cdot y_0 - c_{\vec{n}} \cdot z_0 = 0$$

Hvor man kan, siden både P_0 og retningsvektoren er kendt (dvs. regnbare/reducerbare i rigtige eksempler), kan vi forkorte de 3 sidste termer på venstre side:

$$a_{\vec{n}} \cdot x_1 + b_{\vec{n}} \cdot y_1 + c_{\vec{n}} \cdot z_1 + d = 0$$

Lidt pænere ser normalformen sådan ud:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

Det er vigtigt at pointere at $\langle a, b, c \rangle$ udgør planets normalvektor $\vec{n}$.

Vinkel mellem 2 planer

For at regne vinklen skal man istedet regne vinklen af de 2 planers normalvektorer, da deres vinkel vil være den samme.

Løsning

$restart$
$with(Gym):$
a. Bestem koordinaterne til punkt B i grundfladen.

$$A := \langle 40, 0, 0 \rangle = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \langle 0, 40, 0 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kordinater til punkt B er <40,40,0>

$$B := A + C = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. Opstil en parameterfremstilling for den linje, der går gennem B og P.

$P := \langle 20, 20, 80 \rangle$:

$BP := P - B$:

der her er vores parameterfremstilling for den linje, der går gennem B og P

$\langle x, y, z \rangle = \langle P \rangle + t \cdot \langle BP \rangle$:

c.Bestem koordinater til Punkt D.

$\langle x, y, z \rangle = \langle P \rangle + t \cdot \langle BP \rangle$:

efter vi har en bekendt punkt på D som er 38z kan vi finde t

$38 = 0 + t \cdot 80$:

$\frac{80}{80} t = \frac{38}{80.}$

$$t = 0.4750000000 \tag{1}$$

$t := 0.475$

$$t := 0.475 \tag{2}$$

nu kan vi bruge vores parameterfremstilling for den linje, der går gennem B og P til og finde D punkerne <x,y,z>

$x = 40 + t \cdot (-20)$

$$x = 30.500 \tag{3}$$

$y = 40 + t \cdot (-20)$

$$y = 30.500 \tag{4}$$

$z = 0 + t \cdot (80)$

$$z = 38.000 \tag{5}$$

Så punkt D er efter vi sætter vores x,y og z værdier ind:
$punktD := \langle 30.5 , 30.5, 38\rangle$

$$punktD := \begin{bmatrix} 30.5 \\ 30.5 \\ 38 \end{bmatrix} \quad (6)$$

D.opstil en ligning for plan alpha
her finde vi retningvektor som vi skal bruge
$\overrightarrow{AB} := B - A :$
$\overrightarrow{BD} := punktD - B :$
der her er parameterfremstilling for plan alpha
$\langle x, y, z\rangle = A + t\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot \overrightarrow{BD}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.50000000000000\, s + 40 \\ -9.50000000000000\, s + 19. \\ 38.\, s \end{bmatrix} \quad (7)$$

fordi vi har prameterfremstilling for plan alpha kan vi finde dens ligning
først finder vi normalvektor ved og krydse de 2 retningvektor

$\overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD} :$

$P_0 := A :$ $\begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$P := \langle x, y, z\rangle$

$\overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}} = \langle a, b, c\rangle$

$\overrightarrow{P_0P}\cdot\overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}} = a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z - a\cdot x_0 - b\cdot y_0 - c\cdot z_0$

$\overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[1]\cdot x_{\mathrm{alpha}} + \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[2]\cdot y_{\mathrm{alpha}} + \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[3]\cdot z_{\mathrm{alpha}} - \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[1]\cdot P_0[1] - \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[2]\cdot P_0[2] - \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[3]\cdot P_0[3] = 0$

$$1520.\, x_\alpha + 380.\, z_\alpha - 60800. = 0 \quad (8)$$

Vi beregner d:

$$d = -a\cdot x_0 - b\cdot y_0 - c\cdot z_0$$

$d := -\overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[1]\cdot P_0[1] - \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[2]\cdot P_0[2] - \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[3]\cdot P_0[3]$

$$d := -60800. \tag{9}$$

så her har vi ligning til plan alpha

$planalpha := x \cdot \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[1] + y \cdot \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[2] + z \cdot \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[3] + d = 0$

$$planalpha := 1520.\, x + 380.\, z - 60800. = 0 \tag{10}$$

e. bregn vinkel mellem en af pyramidestubbens skrå sider grundplan xy
Formel:

$V := \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_a \bullet \vec{n}_p}{|\vec{n}_a| \cdot |\vec{n}_p|}\right)$

$$V := \arccos\left(\frac{\vec{n}_a \bullet \vec{n}_p}{|\vec{n}_a|\, |\vec{n}_p|}\right) \tag{11}$$

vi krydser 2 retning vektor for at få en normal vector fra plan alpha

$\vec{n}_a := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD}$

$$\vec{n}_a := \begin{bmatrix} 1520. \\ 0 \\ 380. \end{bmatrix} \tag{12}$$

vi krydser 2 retning vektor for at få en normal vector fra grundplan xy
først skal vi opfinde nogle normal vector til grundplan xy

$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle + t \cdot \langle 1, 0, 0\rangle + s \cdot \langle 0, 1, 0\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.475000000000000 \\ s \\ 0. \end{bmatrix} \tag{13}$$

$\vec{n}_b := \langle 1, 0, 0\rangle \times \langle 0, 1, 0\rangle$

$$\vec{n}_b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$V := \arccos\left(\frac{\vec{n}_b \bullet \vec{n}_a}{len(\vec{n}_a) \cdot len(\vec{n}_b)}\right)$

$$V := 1.325817664 \tag{15}$$

$V \times \frac{180}{\pi}$

$$75.96375653 \tag{16}$$

vinkel mellem en af pyramidestubbens skrå sider grundplan xy er 1.325817664 radian eller 75.96375653°

f. opstil ligning for plan pi

$F := \langle 40, 28, 0 \rangle$:

$H := \langle 40, 28, 22 \rangle$:

$G := \langle x_g, 28, 25 \rangle$:

planalpha

$$1520.\,x + 380.\,z - 60800. = 0 \tag{17}$$

$1520.\,x + 380.\,\cdot 25 - 60800. = 0$

$$1520.\,x - 51300. = 0 \tag{18}$$

$1520.\cdot\, x = 0 + 51300.$

$$1520.\,x = 51300. \tag{19}$$

$x_g := \dfrac{1520}{1520}\,x = \dfrac{51300.}{1520}$

$$x_g := x = 33.75000000 \tag{20}$$

$G := \langle 33.75, 28, 25 \rangle$

$$G := \begin{bmatrix} 33.75 \\ 28 \\ 25 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Her finder jeg nogle retnings vektorere som jeg vil bruge til og finde parameterfremstilling

$\overrightarrow{FG} := G - F$

$$\overrightarrow{FG} := \begin{bmatrix} -6.25000000000000 \\ 0. \\ 25. \end{bmatrix} \tag{22}$$

$\overrightarrow{FH} := H - F$

$$\overrightarrow{FH} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 22 \end{bmatrix} \tag{23}$$

der her er parameterfremstilling for plan pi

$\langle x, y, z \rangle = F + t\cdot \overrightarrow{FG} + s\cdot \overrightarrow{FH}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.0312500000000 \\ 28. \\ 22\,s + 11.8750000000000 \end{bmatrix} \tag{24}$$

fordi vi har parameterfremstilling for plan pi kan vi finde dens ligning
først finder vi normalvektor ved og krydse de 2 retningvektor
$\overrightarrow{n_\pi} := \overrightarrow{FH} \times \overrightarrow{FG}$

$$\overrightarrow{n_\pi} := \begin{bmatrix} -0. \\ -137.500000000000 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$P_0 := F :$ $\begin{bmatrix} 40 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix}$

$P := \langle x, y, z \rangle$

$\overrightarrow{n_\pi} = \langle a, b, c \rangle$

$\overrightarrow{P_0 P} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - a \cdot x_0 - b \cdot y_0 - c \cdot z_0$

$\overrightarrow{n_\pi}[1] \cdot x_\pi + \overrightarrow{n_\pi}[2] \cdot y_\pi + \overrightarrow{n_\pi}[3] \cdot z_\pi - \overrightarrow{n_\pi}[1] \cdot P_0[1] - \overrightarrow{n_\pi}[2] \cdot P_0[2] - \overrightarrow{n_\pi}[3] \cdot P_0[3] = 0$

$$3850. - 137.500000000000\, y_\pi = 0 \tag{26}$$

Vi beregner d:

$$d = -a \cdot x_0 - b \cdot y_0 - c \cdot z_0$$

$d := -\overrightarrow{n_\pi}[1] \cdot P_0[1] - \overrightarrow{n_\pi}[2] \cdot P_0[2] - \overrightarrow{n_\pi}[3] \cdot P_0[3]$

$$d := 3850. \tag{27}$$

så her har vi ligning til plan pi
$planpi := x \cdot \overrightarrow{n_\pi}[1] + y \cdot \overrightarrow{n_\pi}[2] + z \cdot \overrightarrow{n_\pi}[3] + d = 0$

$$planpi := 3850. - 137.500000000000\, y = 0 \tag{28}$$

g. beregen vinkel mellem plan alpha og plan pi
først skal vi have deres ligningen
$planpi := x \cdot \overrightarrow{n_\pi}[1] + y \cdot \overrightarrow{n_\pi}[2] + z \cdot \overrightarrow{n_\pi}[3] = 0 :$
$planalpha := x \cdot \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[1] + y \cdot \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[2] + z \cdot \overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}[3] = 0 :$
$\overrightarrow{n_{\mathrm{alpha}}}$

$$\begin{bmatrix} 1520. \\ 0 \\ 380. \end{bmatrix} \tag{29}$$

$\overrightarrow{n_{\pi}}$

$$\begin{bmatrix} -0. \\ -137.500000000000 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$V := \arccos\left(\frac{\overrightarrow{n_{\text{alpha}}} \cdot \overrightarrow{n_{\pi}}}{len\left(\overrightarrow{n_{\text{alpha}}}\right) \cdot len\left(\overrightarrow{n_{\pi}}\right)}\right)$$

$$V := 1.570796327 \tag{31}$$

\` \`

$$\text{\` \`} \tag{32}$$

$$V \times \frac{180}{\pi}$$

$$90.00000001 \tag{33}$$

vinkel mellem plan alpha og pi er 90 grader

h. opstil prameterfremstilling for skærings linje mellem alpha og pi planner
Dette kan gøres ved at tage krydsproduktet af de normale vektorer til de to planer.

$\overrightarrow{n_{\pi}}:$

$\overrightarrow{n_{\text{alpha}}}:$

$\overrightarrow{n_{\pi}} \times \overrightarrow{n_{\text{alpha}}}$

$$\begin{bmatrix} -52250. \\ 0. \\ 209000. \end{bmatrix} \tag{34}$$

så parameterfremstilling af skærings linje mellem alpha og pi planner vil se sådan ud

$P\langle x, y, z\rangle = P_0 + t \cdot \overrightarrow{n_{\pi}} \times \overrightarrow{n_{\text{alpha}}}:$

i. bregn arealet af den del af planen, der afgrænder af punkterne F, G og H
først tager vi kryds prudukt af retnings vektor:

$\overrightarrow{FG} := G - F:$

$$\overrightarrow{FG} := \begin{bmatrix} -6.25000000000000 \\ 0. \\ 25. \end{bmatrix} \qquad (35)$$

$\overrightarrow{FH} := H - F:$

$\overrightarrow{FG} \times \overrightarrow{FH}$

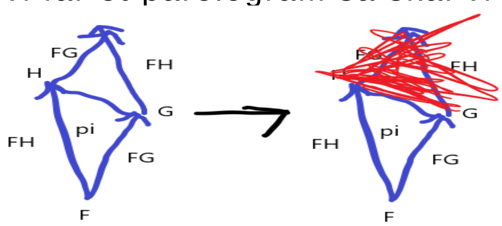
$$\begin{bmatrix} 0. \\ 137.500000000000 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (36)$$

vi kan finde arealet ved at tage kvadratroden af krydsprudukt opfløfted i ^2

$\sqrt{0^2 + (-137.5)^2 + 0^2}$

$$137.5000000 \qquad (37)$$

vi får et parelogram så skal vi dividere resultat med 2 så fi får trekanten



$\frac{137.5000000}{2}$

$$68.75000000 \qquad (38)$$

arealet af den del af planen, der afgrænder af punkterne F, G og H er 68.750

Vurdering

Siden værdierne vi fik var i skalaen 10 til 100, og de fleste af vores svar oftest ikke var mere end fakter 2 udover det, vurdere vi at vores svar er realistiske, i forhold til tallene vi fik udleveret.