

Abiturvorbereitung Mathematik

Simon Fredrich

2020-2021

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werde ich den Stoff der 12. und 13. Klasse des Bereiches Mathematik zusammenfassen und mit Beispielen ausführen. Es handelt sich um den Mathematik Leistungskurs.

Kapitel 1

Integralrechnung

1.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Ist f eine im $I[a; b]$ stetige Funktion und F eine zu f gehörende Stammfunktion so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1.1)$$

1.1.1 Beispiele

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} \quad (1.2)$$

Mit $C = -2$ kämen wir auf das gleiche Ergebnis:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2 \right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2 \right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2 \right) = \frac{8}{3} \quad (1.3)$$

1.2 Integrationsregeln

Das Ermitteln unbestimmter Integrale.

1.2.1 Potenzregel

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \wedge \quad n \neq -1 \quad \wedge \quad n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad C \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Beispiele

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C \quad (1.5)$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} + C \quad (1.6)$$

$$\int a dx = ax + C \quad (1.7)$$

$$\int 0 dx = C \quad (1.8)$$

1.2.2 Summenregel

Man kann eine Summe gliedweise integrieren.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) \quad (1.9)$$

Beispiele

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 2x^{10} - 80x^2) dx \\ = \int x^3 dx + \int 2x^{10} dx - \int 80x^2 dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{11}x^{11} - \frac{80}{3}x^3 + C \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}) dx = \int x^{\frac{1}{2}} + \int x^{\frac{1}{3}} dx \\ = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt{x^4} + C \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.2.3 Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Integrieren erhalten.

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx \quad \wedge \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (1.12)$$

Beispiele

1.
$$\int 14x^8 dx = 14 \int x^8 dx = 14 \cdot \frac{1}{9}x^9 + C$$
2.
$$\begin{aligned} \int (14x^8 + 5x^9) dx &= 14 \cdot \int x^8 dx + 5 \cdot \int x^9 dx = 14 \cdot \frac{1}{9}x^9 + 5 \cdot \frac{1}{10}x^{10} + C \\ &= \frac{14}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^{10} + C \end{aligned}$$

1.2.4 lineare Kettenregel/Substitution

Für $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ gilt:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) \quad (1.13)$$

Beispiele

1.
$$\int (5x + 1)^2 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} (5x + 1)^3 = \frac{(5x + 1)^3}{15} + C$$
2.
$$\int (18x + 144)^6 dx = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{7} (5x + 1)^7 = \frac{(18x + 144)^7}{126} + C$$

1.2.5 Exponentielle Integration

Folgende Ableitungsregeln sind in diesem Zusammenhang wichtig:

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x \quad (1.14)$$

Es ergeben sich im Umkehrschluss folgende Regeln:

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (1.15)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C \quad (1.16)$$

Beispiele

1.
$$\int e^{-2x} dx = \frac{1}{-2} e^{-2x} + C$$
2.
$$\int \left(\frac{5}{2} e^{-4x} \right) dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{-4} \cdot e^{-4x} + C = -\frac{5}{8} e^{-4x} + C$$

1.2.6 Trigonometrische Integration

Folgende Ableitungsregeln sind in diesem Zusammenhang wichtig:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (1.17)$$

Daraus ergeben sich im Umkehrschluss folgende Regeln:

$$\int (\sin x) dx = -\cos x + C \quad (1.18)$$

$$\int (\cos x) dx = \sin x + C \quad (1.19)$$

Beispiele

1.
$$\int 4 \sin(2x) dx = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + C = -2 \cdot \cos(2x) + C$$
2.
$$\int 4 \cos(2x) dx = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + C = 2 \cdot \sin(2x) + C$$

1.3 Die Integralfunktion

Dem bestimmten Integral kann bei Veränderung der oberen Integrationsgrenze b genau eine Zahl zugeordnet werden.

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \quad (1.20)$$

Dies ist das bestimmte Integral zur oberen Grenze b .

1.4 Stammfunktionen

Eine differenzierbare Funktion F , für die gilt $F'(x) = f(x)$ heißt Stammfunktion von f .

\implies Integralfunktionen sind Stammfunktionen

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f heißt *unbestimmtes Integral* von f .

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \wedge \quad C \in \mathbb{R} \quad (1.21)$$

1.4.1 Beispiele

1. $f(x) = 6x$
 $F_1(x) = 3x^2$
 $F_2(x) = 3x^2 + 4$
 $F_3(x) = 3x^2 - 5$
2. $f(x) = 7$
 $F_1(x) = 7x$
 $F_2(x) = 7x + 16$
 $F_3(x) = 7x - 3$

1.4.2 Satz

F_1 und F_2 sind Stammfunktionen von f , dann ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion. Das heißt F_1 und F_2 unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.

1.4.3 Beweis

F_1 und F_2 sind Stammfunktionen von f .

$\implies F'_1 = f$ und $F'_2 = f$

$\implies F'_1 - F'_2 = 0$

$\implies (F_1 - F_2)' = 0$

Eine Funktion, deren Ableitung null ist, ist eine Konstante.

$\implies F_1 - F_2 = C$