Abiturvorbereitung Mathematik

Simon Fredrich

2020-2021

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werde ich den Stoff der 12. und 13. Klasse des Bereiches Mathematik zusammenfassen und mit Beispielen ausführen. Es handelt sich um den Mathematik Leistungskurs.

Kapitel 1

Integralrechnung

1.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Ist f eine im $I[a;b]$ stetige Funktion und F eine zu f gehörende Stammfunktion so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.1}$$

1.1.1 Beispiel

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} \tag{1.2}$$

Mit $C = -2$:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2\right) = \frac{8}{3} \tag{1.3}$$

1.2 Integrationsregeln

Das Ermitteln unbestimmter Integrale.

1.2.1 Potenzregel

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \wedge \quad n \neq -1 \quad \wedge \quad n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad C \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Beispiele

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C \tag{1.5}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}^{\frac{3}{2}} + C \tag{1.6}$$

$$\int a dx = ax + C \tag{1.7}$$

$$\int 0 dx = C \tag{1.8}$$

1.2.2 Summenregel

1.2.3 Faktorregel

1.2.4 lineare Kettenregel/Substitution

1.3 Die Integralfunktion

Dem bestimmten Integral kann bei Veränderung der oberen Integrationsgrenze b genau eine Zahl zugeordnet werden.

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \tag{1.9}$$

Dies ist das bestimmte Integral zur oberen Grenze b.

1.4 Stammfunktionen

Eine differenzierbare Funktion F, für die gilt $F'(x) = f(x)$ heißt Stammfunktion von f.
$\Longrightarrow$ Integralfunktionen sind Stammfunktionen
Die *Menge* aller Stammfunktionen einer Funktion f heißt *unbestimmtes Integral* von f.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \wedge \quad C \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

1.4.1 Beispiele

1. $f(x) = 6x$
   $F_1(x) = 3x^2$
   $F_2(x) = 3x^2 + 4$
   $F_3(x) = 3x^2 - 5$

2. $f(x) = 7$
   $F_1(x) = 7x$
   $F_2(x) = 7x + 16$
   $F_3(x) = 7x - 3$

1.4.2 Satz

F_1 und F_2 sind Stammfunktionen von f, dann ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion. Das heißt F_1 und F_2 unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.

1.4.3 Beweis

F_1 und F_2 sind Stammfunktionen von f.
$\Longrightarrow\ F_1' = f$ und $F_2' = f$
$\Longrightarrow\ F_1' - F_2' = 0$
$\Longrightarrow\ (F_1 - F_2)' = 0$
Eine Funktion, deren Ableitung null ist, ist eine Konstante.
$\Longrightarrow\ F_1 - F_2 = C$