Abiturvorbereitung Mathematik

Simon Fredrich

2020-2021

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werde ich den Stoff der 12. und 13. Klasse des Bereiches Mathematik zusammenfassen und mit Beispielen ausführen. Es handelt sich um den Mathematik Leistungskurs.

Kapitel 1

Gebrochen-rationale Funktionen

1.1 Polstellen und Asymptoten

Eine Funktion f mit $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ bei der Z und N Polynome sind und $N(x) \neq 0$ ist, heißt *rationale* Funktion. Die maximale Definitionsmenge ist $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{x | N(x) = 0\}$.

f ist *ganzrational*, wenn f auf $\mathbb{D}_f$ als Polynom darstellbar ist $\left(f(x) = \frac{g(x)}{1}\right)$. Anschaulich heißt das, dass der Graph von f nur Löcher im Funktionsgraphen hat. f ist jedoch *gebrochen-rational*, wenn:

1. Grad von $Z(x) <$ Grad von $N(x) \implies$ *echt* gebrochen-rational

2. Grad von $Z(x) >$ Grad von $N(x) \implies$ *unecht* gebrochen-rational

In beiden Fällen lässt sich mir der Polynomdivision der ganzrationale und echt gebrochen-rationale Anteil feststellen.

1.2 Beispiele

1. $$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 26x - 19}{x - 5}$$

   $$\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 5\}$$

   $$Z(5) = -49 \neq 0$$

$$N(5) = 0$$

$x = 5$ ist keine Nullstelle des Zählerpolynoms, weshalb man den Linearfaktor $(x - 5)$ im Zähler nicht abspalten kann. f ist *gebrochen-rational*. Zählergrad $3 >$ Nennergrad 1. Die Funktion ist also *unecht* gebrochen.

$$(x^3 - x^2 - 26x - 19) : (x - 5) = x^2 + 4x - 6 - \frac{49}{x - 5}$$

ganzrationaler Anteil
echt gebrochen-rationaler Anteil

2.

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x + 2}$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\{-2\}$$

$$Z(-2) = 0$$

$$N(-2) = 0$$

Im Zähler kann der Linearfaktor $(x + 2)$ abgespalten werden. f ist demnach *ganzrational*.

$$(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x + 2) = x^2 + 2x - 3$$

ganzrationaler Anteil

Das durch die Definitionslücke veruhrsachte Loch im Graphen von f kann geschlossen werden.

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

Kapitel 2

Integralrechnung

2.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Ist f eine im $I[a;b]$ stetige Funktion und F eine zu f gehörende Stammfunktion so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.1}$$

2.1.1 Beispiele

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} \tag{2.2}$$

Mit $C = -2$ kämen wir auf das gleiche Ergebnis:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2\right) = \frac{8}{3} \tag{2.3}$$

2.2 Integrationsregeln

Das Ermitteln unbestimmter Integrale.

2.2.1 Potenzregel

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \wedge \quad n \neq -1 \quad \wedge \quad n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad C \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

Beispiele

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C \tag{2.5}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}^{\frac{3}{2}} + C \tag{2.6}$$

$$\int a dx = ax + C \tag{2.7}$$

$$\int 0 dx = C \tag{2.8}$$

2.2.2 Summenregel

Man kann eine Summe gliedweise integrieren.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) \tag{2.9}$$

Beispiele

$$\begin{aligned} &\int (x^3 + 2x^{10} - 80x^2) dx \\ &\quad = \int x^3 dx + \int 2x^{10} dx - \int 80x^2 dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{11}x^{11} - \frac{80}{3}x^3 + C \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}) dx = \int x^{\frac{1}{2}} + \int x^{\frac{1}{3}} dx \\ &\quad = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + \frac{3}{4}\sqrt{x}^4 + C \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2.3 Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Integrieren erhalten.

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx \quad \wedge \quad (a \in \mathbb{R}) \tag{2.12}$$

Beispiele

1. $$\int 14x^8 dx = 14 \int x^8 dx = 14 \cdot \frac{1}{9} x^9 + C$$

2. $$\begin{aligned} \int (14x^8 + 5x^9) dx = 14 \cdot \int x^8 dx + 5 \cdot \int x^9 = 14 \cdot \frac{1}{9} x^9 + 5 \cdot \frac{1}{10} x^{10} + C \\ = \frac{14}{9} x^9 + \frac{1}{2} x^{10} + C \end{aligned}$$

2.2.4 lineare Kettenregel/Substitution

Für $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ gilt:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) \tag{2.13}$$

Beispiele

1. $$\int (5x+1)^2 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} (5x+1)^3 = \frac{(5x+1)^3}{15} + C$$

2. $$\int (18x+144)^6 dx = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{7} (5x+1)^7 = \frac{(18x+144)^7}{126} + C$$

2.2.5 Exponentielle Integration

Folgende Ableitungsregeln sind in diesem Zusammenhang wichtig:

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x \tag{2.14}$$

Es ergeben sich im Umkehrschluss folgende Regeln:

$$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C \tag{2.15}$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C \tag{2.16}$$

Beispiele

1.
$$\int \mathrm{e}^{-2x} dx = \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + C$$

2.
$$\int \left(\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-4x}\right) dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{-4} \cdot \mathrm{e}^{-4x} + C = -\frac{5}{8}\mathrm{e}^{-4x} + C$$

2.2.6 Trigonometrische Integration

Folgende Ableitungsregeln sind in diesem Zusammenhang wichtig:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \tag{2.17}$$

Daraus ergeben sich im Umkehrschluss folgende Regeln:

$$\int (\sin x) dx = -\cos x + C \tag{2.18}$$

$$\int (\cos x) dx = \sin x + C \tag{2.19}$$

Beispiele

1.
$$\int 4\sin(2x) dx = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + C = -2 \cdot \cos(2x) + C$$

2.
$$\int 4\cos(2x) dx = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + C = 2 \cdot \sin(2x) + C$$

2.3 Die Integralfunktion

Dem bestimmten Integral kann bei Veränderung der oberen Integrationsgrenze b genau eine Zahl zugeordnet werden.

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \tag{2.20}$$

Dies ist das bestimmte Integral zur oberen Grenze b.

2.4 Stammfunktionen

Eine differenzierbare Funktion F, für die gilt $F'(x) = f(x)$ heißt Stammfunktion von f.
$\Longrightarrow$ Integralfunktionen sind Stammfunktionen
Die *Menge* aller Stammfunktionen einer Funktion f heißt *unbestimmtes Integral* von f.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \wedge \quad C \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

2.4.1 Beispiele

1. $f(x) = 6x$
   $F_1(x) = 3x^2$
   $F_2(x) = 3x^2 + 4$
   $F_3(x) = 3x^2 - 5$

2. $f(x) = 7$
   $F_1(x) = 7x$
   $F_2(x) = 7x + 16$
   $F_3(x) = 7x - 3$

2.4.2 Satz

F_1 und F_2 sind Stammfunktionen von f, dann ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion. Das heißt F_1 und F_2 unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.

2.4.3 Beweis

F_1 und F_2 sind Stammfunktionen von f.
$\Longrightarrow$ $F_1' = f$ und $F_2' = f$
$\Longrightarrow$ $F_1' - F_2' = 0$
$\Longrightarrow$ $(F_1 - F_2)' = 0$
Eine Funktion, deren Ableitung null ist, ist eine Konstante.
$\Longrightarrow$ $F_1 - F_2 = C$