Komplexe und Harmonische Analysis WS2023

Simon Garger - simon.garger@gmail.com

7. Oktober 2023, Wien

Inhaltsverzeichnis

Komplexe Analysis

Bemerkung. Im Folgenden wird immer $z_k = x_k + iy_k = r_k \cdot e^{i\theta_k}$ gelten. Außerdem wird im Allgemeinen Ω eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ sein.

1 Grundlagen

Definition 1.1 (Komplexe Zahlen):
Wir definieren den komplexen Zahlenkörper als die Menge

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$$

Dabei bezeichnet i die komplexe Einheit mit $i^2 = -1$. Man nennt $x = \mathfrak{Re}(z)$ den Realteil und $y = \mathfrak{Im}(z)$ den Imaginärteil. Der Betrag einer komplexen Zahl wird geschrieben durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wir definieren $\bar{z} := x - iy$ als das komplex Konjugierte von z.

Proposition 1.2:
Die komplexen Zahlen erfüllen folgende Rechenregeln:

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
   (Interpretation: Vektoraddition)
2. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
   (Interpretation: Streckung und Drehung)
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|z|^2 = z\bar{z} \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Definition 1.3:
Da $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ gilt, können wir die topologischen Eigenschaften von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$ übertragen und werden auch im Weiteren öfter die komplexen Zahlen mit der zweidimensionalen Zahlenebene identifizieren. Weiter werden wir eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ meist mit Ω bezeichnen. Wir erhalten damit:

1. Die komplexen Zahlen sind vollständig, es konvergiert also jede Cauchy-Folge.
2. Eine Folge konvergiert in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn Real- und Imaginärteil konvergieren und genau dann, wenn es eine Cauchy-Folge ist.
3. Das Innere von Ω ist $\Omega^\circ\colon = \{a | \exists B_r\colon a \in B_r \subset \Omega\}$
4. Wir nennen Ω kompakt, sofern die Menge beschränkt und abgeschlossen ist.
5. Wir nennen Ω offen (abgeschlossen) zusammenhängend, wenn für Ω_1, Ω_2 offen (abgeschlossen) gilt:
$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \wedge \quad \emptyset = \Omega_1 \cap \Omega_2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 = \emptyset \quad \vee \quad \Omega_2 = \emptyset$$
6. Wir nennen eine Funktion f stetig, wenn gilt:
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z)$$

2 Holomorphie

Definition 2.1:
Sei $z_0 \in \Omega$, dann nennen wir f holomorph (komplex differenzierbar) in z_0 falls
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$
existiert.

Eine Funktion heißt auf Ω holomorph, wenn sie in jedem Punkt $z \in \Omega$ holomorph ist oder einfach "ganz", falls sie für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph ist.

Beispiel. Beispiele für holomorphe Funktionen sind:

- Konstante Funktionen
- Potenzfunktionen
- Polynomfunktionen
- Potenzreihen

Hingegen ist $f(z) = \bar{z}$ nicht holomorph, da
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$
und der letzte Term existiert nicht (für h reell 1 für h rein imaginär -1).

Proposition 2.2 (Cauchy-Riemann Gleichungen):
Sei f eine auf Ω holomorphe Funktion. Identifizieren wir nun $f(z) = u(z) + iv(z)$, wobei $u, v\colon \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind, so gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Beweis. Wir definieren für ein beliebiges $x + iy = z_0 \in \Omega$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) =: a + ib$$

Nun differenzieren wir nur partiell (der obige Limes beschreibt ja eine beliebige Nullfolge, also können wir auch die entlang der Achsen betrachten), indem wir die obige u, v Identifikation und $h = (h_1, h_2)$ verwenden:

$$\begin{aligned} a + ib &= \lim_{h_1\to 0} \frac{f(z_0 + h_1) - f(z)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1\to 0} \frac{u(z_0 + h_1) + iv(z_0 + h_1) - u(z_0) - iv(z_0)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1\to 0} \frac{u(z_0 + h_1) - u(z_0)}{h_1} + \lim_{h_1\to 0} \frac{i(v(z_0 + h_1) - v(z_0))}{h_1} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a, b) \end{aligned}$$

Genauso finden wir:

$$\begin{aligned} a + ib &= \lim_{h_2\to 0} \frac{f(z_0 + ih_2) - f(z_0)}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2\to 0} \frac{u(z_0 + ih_2) + iv(z_0 + ih_2) - u(z_0) - iv(z_0)}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2\to 0} \frac{u(z_0 + ih_2) - u(z_0)}{ih_2} + \lim_{h_2\to 0} \frac{i(v(z_0 + ih_2) - v(z_0))}{ih_2} \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{aligned}$$

Damit folgt (unter Berücksichtigung von $\frac{1}{i} = -i$):

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$
$$b = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

Bemerkung. F ist reell differenzierbar in $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \exists J_f(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, sodass für $H = (h_1, h_2)$

$$\lim_{\|H\| \to 0} \frac{F(z_0 + H) - F(z_0) - J_f(z_0)H}{\|H\|} = 0$$

gilt. Dabei geht es nur um die Länge von H und nicht wie bei der Holomorphie um die Existenz des Grenzwertes in allen Richtungen.

Beispiel. Die Funktion, die komplex konjugiert, entspricht im reellen:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung ist schon linear, also ist sie insbesondere reell differenzierbar.

Proposition 2.4:
f holomorph $\Rightarrow F$ reell differenzierbar mit $|\det J_f(x_0, y_0)| = |f'(z_0)|^2$

Beweis. f holomorph impliziert

$$f(z + h) = f(z) + f'(z)h + hR(h)$$

mit $R(h) \to 0$ für $h \to 0$.

$$J_f \cdot H = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx}h_1 + \frac{du}{dy}h_2 \\ \frac{dv}{dx}h_1 + \frac{dv}{dy}h_2 \end{pmatrix}$$

Nun identifizieren wir $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$:

$$= \left(\frac{du}{dx}h_1 + \frac{du}{dy}h_2\right) + i\left(\frac{dv}{dx}h_1 + \frac{dv}{dy}h_2\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1 + ih_2)$$

Wobei die letzte Gleichheit aus den Cauchy-Riemann Gleichungen folgt.

Gesamt erhalten wir damit wie gewünscht:

$$|\det J_f| = \left|\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right| = \left|\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \left(\frac{du}{dy}\right)^2\right| = \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|^2 = |f'|^2$$

Satz 2.5:
Sei F reell differenzierbar mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

mit u, $v \in C^1(\Omega)$, dann ist f auch holomorph.

Beweis. Wir wollen zeigen: $\exists a \in \mathbb{C}$ sodass

$$f(z+h) - f(z) - ah = hR(h)$$

mit $R(h) \to 0$ für $h \to 0$.

Wir finden:

$$u(z+h) - u(z) = \frac{du}{dx}h_1 + \frac{du}{dy}h_2 + h_1 R_u^1(h_1) + h_2 R_u^2(h_2)$$

und auch

$$v(z+h) - v(z) = \frac{dv}{dx}h_1 + \frac{dv}{dy}h_2 + h_1 R_v^1(h_1) + h_2 R_v^2(h_2)$$

Mit Cauchy-Riemann folgt die Behauptung. Wir definieren mit diesen:

$$a\colon = \frac{du}{dx} + i\left(-\frac{du}{dy}\right)$$

Denn damit erhalten wir:

$$f(z+h) - f(z) - ah = u(z+h) - u(z) + i(v(z+h) - v(z)) - \left(\frac{du}{dx} + i\left(-\frac{du}{dy}\right)\right)h$$
$$= \frac{du}{dx}h_1 + \frac{du}{dy}h_2 + R_u h + i\left(\frac{dv}{dx}h_1 + \frac{dv}{dy}h_2 + R_v h\right) - \frac{du}{dx}h_1 - \frac{du}{dy}h_2 - i\left(-\frac{du}{dy}h_1 + \frac{du}{dx}h_2\right)$$
$$= h_1 R_u^1(h_1) + h_2 R_u^2(h_2) + h_1 R_v^1(h_1) + h_2 R_v^2(h_2) =: hR(h)$$

Dabei geht $R(h)$ natürlich wie gewünscht gegen 0 für $h \to 0$, weil die $R_i^j(h_k)$ alle gegen 0 gehen.

3 Potenzreihen

Definition 3.1:
Eine Potenzreihe ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$.

Absolute Konvergenz bedeutet

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n < \infty$$

Beispiel.

(i) geoemtrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
konvergiert auf $B_1(0) = \{|z| < 1\}$ und dort gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Denn es gilt:

$$(1-z)\sum_{n=0}^{N} z^n = (1 - z^{N+1}) \to 1 \qquad (\text{für } N \to \infty)$$

(ii) Die Exponentialreihe:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Satz 3.2:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gegeben, dann existiert ein $0 \leq R \leq +\infty$ "Konvergenzradius", sodass

(i) $|z| < R$, dann konvergiert die Folge absolut

(ii) $|z| > R$, dann divergiert die Folge

Es gilt

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{mit} \quad L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

Für $L = 0$ definieren wir $R = \infty$ und für $L = \infty$ $R = 0$.

Bemerkung. Das Verhalten auf dem Rand $B_R(0) = \{|z| = R\}$ kann kompliziert sein. Hier kann es eine Mischung aus Konvergenz und Divergenz geben.

e^z konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$.

Äquivalent ist das Quotientenkriterium (Übung 5).

Bei diesen Beweisen ändert sich verhältnismäßig wenig im Umstieg von reell auf komplex, da wir über absolute Konvergenz, also Konvergenz reeller Zahlen reden.

Beweis.

1. $L = 0 \Rightarrow R = \infty$:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists N > 0,\ \exists 0 \leq r < 1,\ \forall n > N\colon |a_n||z|^n = (a_n^{1/n}|z|)^n < r^n$$

   Daraus folgt:

$$\sum_{n=N}^{M} |a_n||z|^n < \sum_{n=N}^{M} r^n < \sum_{n^N}^{\infty} < \infty$$

2. $L = \infty \Rightarrow R = 0$:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists N,\ (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}},\ r > 1,\ \forall n_k > N\colon |a_{n_k}||z|^n \geq r > 1$$

   damit divergiert die Reihe.

3. $0 < L < \infty$: Sei $R = \frac{1}{L}$ und $|z| < R$. Dann gilt

$$\exists \varepsilon > 0,\ 0 \leq r < 1\colon (L + \varepsilon)|z| = r < 1$$

   Damit folgt:

$$\exists N,\ \forall n \geq N\colon |a_n|^{1/n} \leq L + \varepsilon$$

   Damit befinden wir uns wieder im Fall des ersten Unterpunkts und können somit wieder die Konvergenz innerhalb von R beschließen.

4. Ist andererseits $|z| > R$, dann folgt:

$$\exists \varepsilon > 0,\ r > 1\colon (L - \varepsilon)|z| = r > 1$$

   Es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass:

$$\exists N,\ \forall k \geq N\colon |a_{n_k}|^{1/n_k} > L - \varepsilon$$

   Damit folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n_k}||z|^{n_k} > \sum_{k=0}^{\infty} r^{n_k}$$

   wobei nun der letzte Term divergiert.

Satz 3.3:

Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definiert eine innerhalb ihres Konvergenzradius R holomorphe Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Außerdem gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

und $f'(z)$ konvergiert absolut auf $B_R(0)$.

Bemerkung. f und f' haben den gleichen Konvergenzradius, da $\sqrt[n]{n} = 1$. Insbesondere folgt, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius unendlich oft komplex differenzierbar sind.

Beispiel.

1. e^z ist ganz mit
$$\frac{\partial}{\partial z}(e^z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

2. Die trigonometrischen Funktionen sin und cos sind ganz:
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\Rightarrow \qquad e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

Beweis. Sei $f(z) = S_N(z) + E_N(z)$ mit $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ und $E_N(z) = f(z) - S_N(z)$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$.

In der vorigen Bemerkung wurde bereits erwähnt, dass der Konvergenzradius von g gleich dem von f, also R ist.

Wir folgern:

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) &= \frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - g(z) + \frac{E_N(z+h) - E_N(z)}{h} \\ &= \frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - S_N'(z) + S_N'(z) - g(z) + \frac{E_N(z+h) - E_N(z)}{h}\end{aligned}$$

Per Definition gilt:
$$\lim_{h\to 0} \frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - S_N'(z) = 0$$

Weiter gilt, weil die Potenzreihe auf dem Konvergenzradius konvergiert:

$$\lim_{N\to\infty} S_N' - g(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = 0$$

Zuletzt sehen wir noch:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|E_N(z+h) - E_N(z)|}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z+h)^n - a_n z^n|}{|h|} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \to 0$$

für $N \to \infty$.