universität wien

Deckblatt für digitale schriftliche Prüfungen

Angaben zur Prüfung (von der Lehrveranstaltungsleitung auszufüllen)

Lehrveranstaltung/Prüfung (LV-Nummer, Bezeichnung):
2020W 250019-1 Komplexe Analysis

Lehrveranstaltungsleiter*in: Professor Olivia Constantin

Prüfungsbeginn: 02.02.2021, 11:00 Uhr Prüfungsende: 02.02.2021, 13:10 Uhr

Digitaler Ort der Prüfung (Link zum Moodle-Raum): https://moodle.univie.ac.at/course/view.php?id=186790

Erreichbarkeit während der Prüfung:

Technische Notfälle: StudienServiceCenter +43-1-4277-50403

Technische Probleme und Fragen: Roman Kostal (Videokonferenz)

Nur für Inhaltliche Fragen: Prof. Olivia Constantin +43-660-727-1882

Angaben zur Studierenden / zum Studierenden

Familienname(n), Vorname(n), Matrikelnummer:

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A Studienrichtung lt. Studienblatt:

Studienrechtliche Hinweise für Studierende

Nachzulesen auch unter https://studienpraeses.univie.ac.at/infos-zum-studienrecht/pruefungen/digitales-pruefen/ (dieser Bereich darf nicht verändert werden)

- Sie müssen korrekt zu dieser Prüfung angemeldet sein und die Voraussetzungen für diesen Antritt erfüllen.
- Der Prüfungsmodus wurden Ihnen vor der Prüfung kommuniziert. Mit ordnungsgemäßer Anmeldung zur Prüfung haben Sie den Prüfungsmodus akzeptiert. Dieser Antritt wird auf die Gesamtzahl der Prüfungsantritte dieser Prüfung dazugezählt.
- Sie erklären eidesstattlich mit der Teilnahme an dieser Prüfung, dass Sie diese Prüfung selbständig, ohne Hilfe Dritter und ohne unerlaubte Hilfsmittel ablegen.
  - Ihre Prüfung kann zur Kontrolle einer Plagiatsprüfung unterzogen werden.
  - Innerhalb der Beurteilungsfrist von vier Wochen kann die*der Prüfer*in auch mündliche Nachfragen zum Stoffgebiet der Prüfung vornehmen. Dies kann auch stichprobenartig erfolgen.
  - Werden unerlaubte Hilfsmittel verwendet und/oder die Prüfung nicht selbständig geschrieben, wird die Prüfung nicht beurteilt und mit einem X im Sammelzeugnis dokumentiert.
- Wird die Prüfung ohne Angabe eines wichtigen Grundes abgebrochen oder innerhalb des vorgegebenen Zeitraumes nicht auf Moodle hochgeladen, wird die Prüfung mit „nicht genügend“ beurteilt. Bei technischen Problemen wenden Sie sich sofort an die Lehrveranstaltungsleitung oder die Prüfungsaufsicht.

Als Deckblatt für Ihre Abgabe schreiben Sie bitte auf ein leeres Blatt in Ihrer eigenen Handschrift die oben erwähnte Informationen und Folgendes,: „Ich erkläre eidesstattlich mit der Teilnahme an dieser Prüfung, dass ich diese Prüfung selbständig, ohne Hilfe Dritter ablege. Datum, Unterschrift“.

Darunter Ihren Studierendenausweis legen und alles einscannen/abfotografieren.

Dann bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer schreiben, und Ihre Antworten übersichtlich nummerieren.

Komplexe Analysis (WS 2020/21) Termin: 2. Februar 2021

mindestens 50 % der Punkte müssen für eine positive Note erreicht werden

$\boxed{1}$ *(25 Punkte)*

$\boxed{\text{1A}}$ (a) Finde alle auf $D_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \ : |z| < 1\}$ holomorphe Funktionen f mit

$$\left|f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = \sup_{|z|<1} |f(z)|. \quad \textit{(kurze Begründung erforderlich!)}$$

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Gibt es nichtkonstante holomorphe Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, sodass $|f|$ ein (lokales) Minimum in U hat? *(KEINE Begründung erforderlich!)*

$\boxed{\text{1B}}$ (i) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f lokal um jedes $z \in U$ in einer Potenzreihe entwickelbar?*(KEINE Begründung erforderlich!)*

(ii) Ist jede $C^\infty(\mathbb{R})-$Funktion lokal um jedes $x \in \mathbb{R}$ in einer Potenzreihe entwickelbar? *(kurze Begründung erforderlich!)*

(iii) Hat jede $C^\infty(\mathbb{R})-$Funktion f eine holomorphe Erweiterung (d.h. es existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \subseteq U$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$)? *(kurze Begründung erforderlich!)*

$\boxed{2}$ *(15 Punkte)* Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n} z^{2n}$.

$\boxed{3}$ *(15 Punkte)* Sei $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Bestimme

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z}{(z+1)(z+3)}\, dz\,.$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{2\pi z}}{(z+i)^3}\, dz;$

$\boxed{4}$ *(15 Punkte)* Verwenden Sie Methoden aus der komplexen Analysis um das folgende Integral zu berechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\cos t}\, dt.$$

$\boxed{5}$ *(15 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie die Art der Singularitäten der Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z-3}}$.

(b) Finden Sie alle holomorphe Funktionen $g : D_1(0) \to \mathbb{C}$ mit

$$g\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{n+3}{5n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \ge 2,$$

wobei $D_1(0) := \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$

$\boxed{6}$ *(15 Punkte)* Finden Sie alle ganzen Funktionen f (d.h. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$) mit der Eigenschaft

$$|f(z)| \le |\cos z| \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Hinweis. Verwenden Sie einen bekannten Satz über ganze Funktionen.