BEGLEITNOTIZEN ZU “KOMPLEXE UND HARMONISCHE ANALYSIS” (VO 250018, 2023W)

JOSÉ LUIS ROMERO

Beweis von Satz 4

Beweis. Die Reihe konvergiert punktweise, weil

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty.$$

Zur Erinnerung: absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz.

(i)

$$\Big|f(x) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\Big| = \Big|\sum_{n:|n|>N} a_n e^{-inx}\Big| \leq \sum_{n:|n|>N} |a_n|.$$

Daher ist die Konvergenz gleichmäßig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert N_0, so dass $\sum_{n:|n|>N} |a_n| < \varepsilon$ für $N > N_0$ und daher

$$\Big|f(x) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\Big| < \varepsilon$$

für $N > N_0$.

(ii) Die Funktionen $S_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ sind stetig und $S_N \to f$ *gleichmäßig* für $N \to \infty$. Dann ist f stetig. Ebenso

$$f(x+2\pi) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in(x+2\pi)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx} = f(x).$$

(iii) Wir rechnen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \begin{cases} 2\pi & n = 0 \\ \frac{e^{inx}}{in}\Big]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0 & n \neq 0 \end{cases} = 2\pi\delta_{n=0}.$$

Tippfehler und Korrekturen senden Sie bitte an: jose.luis.romero@univie.ac.at.

Da die Konvergenz *gleichmäßig* ist, kann man Integration und unendliche Summation austauschen:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}e^{-imx}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}e^{-imx}\,dx \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} a_n \int_{-\pi}^{\pi} a_n e^{i(n-m)x}\,dx \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} a_n 2\pi\delta_{n=m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n 2\pi\delta_{n=m} = 2\pi a_m.\end{aligned}$$

Genauso mit $\int_0^{2\pi}$. □

Beispiel 6

Berechnung.

$$2\pi\hat{f}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0.$$

Für $n \neq 0$ integrieren wir nach Teilen:

$$\begin{aligned}2\pi\hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = x\frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\,dx \\ &= \frac{\pi(-1)^n - (-\pi)(-1)^n}{-in} = \frac{2\pi}{-in}(-1)^n = \frac{2\pi}{in}(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 7

Berechnung. Sei $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Wir schreiben $w^t := e^{itx}$ und berechnen

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} w^n = \sum_{n=0}^{N} w^n + \sum_{n=-N}^{-1} w^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} w^n + \sum_{n=1}^{N} (w^{-1})^n = \sum_{n=0}^{N} w^n + w^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} (w^{-1})^n \\
&= \frac{1 - w^{N+1}}{1 - w} + w^{-1} \frac{1 - w^{-N}}{1 - w^{-1}} \\
&= \frac{1 - w^{N+1}}{1 - w} - \frac{1 - w^{-N}}{1 - w} \\
&= \frac{w^{-N} - w^{N+1}}{1 - w} = \frac{w^{N+1} - w^{-N}}{w - 1} \\
&= \frac{w^{1/2}(w^{N+1/2} - w^{-N-1/2})}{w^{1/2}(w^{1/2} - w^{-1/2})} \\
&= \frac{2i \cdot \mathrm{Im}(w^{N+1/2})}{2i \cdot \mathrm{Im}(w^{1/2})} = \frac{\sin\big((N+1/2)x\big)}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Für $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt auch die Formel, weil die Funktionen stetig sind. □

Beispiel 8

Berechnung. Wir schreiben $w = re^{ix}$. Dann $|w| = r < 1$ und

$$\begin{aligned}
P_r(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{w}^n \\
&= \frac{1}{1 - w} + \frac{\overline{w}}{1 - \overline{w}} = \frac{(1 - \overline{w}) + \overline{w}(1 - w)}{(1 - w)(1 - \overline{w})} \\
&= \frac{1 - |w|^2}{1 - 2\mathrm{Re}(w) + |w|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 9

Beweis. Wir nehmen an: $\hat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Schritt 1. Wir nehmen an: $x_0 = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_0) \geq 0$. Wir wollen zeigen, dass $f(0) = 0$.

Wir nehmen an, dass $f(x_0) > 0$ und versuchen einen Widerspruch herzuleiten.

Sei p ein trigonometrisches Polynom, $p(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{-inx}$. Dann

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x)\,dx = \sum_{n=-N}^{N} a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \sum_{n=-N}^{N} a_n 2\pi \hat{f}(n) = 0. \tag{1}$$

Da f bei 0 stetig ist, existiert $\delta \in (0, \pi/2)$, so dass

$$f(x) > f(0)/2, \qquad \text{für } |x| < \delta.$$

Da $0 \leq \cos(\delta) < 1$, existiert $\varepsilon > 0$, so dass

$$\varepsilon + \cos(\delta) < 1 - \varepsilon/2.$$

Für $|x| \geq \delta$ gilt $\cos(x) \leq \cos(\delta) < 1$. Daher

$$\varepsilon + \cos(x) < \varepsilon + \cos(\delta) < 1 - \varepsilon/2, \qquad \text{für } |x| \geq \delta.$$

Andererseits

$$-(\varepsilon + \cos(x)) = -\cos(x) - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon < 1 - \varepsilon/2.$$

Daher

$$|\varepsilon + \cos(x)| < 1 - \varepsilon/2, \qquad \text{wenn } |x| \geq \delta.$$

Endlich sei $\eta \in (0, \delta)$, so dass

$$\varepsilon + \cos(x) \geq 1 + \varepsilon/2, \qquad \text{für } |x| < \eta.$$

Zusammenfassend

$$\begin{cases} \varepsilon + \cos(x) \geq 1 + \varepsilon/2, & \text{für } |x| < \eta, \\ \varepsilon + \cos(x) \geq 0, & \text{für } \eta \leq |x| < \delta, \\ |\varepsilon + \cos(x)| < 1 - \varepsilon/2, & \text{für } |x| \geq \delta. \end{cases}$$

Sei $p_k(x) := \big(\varepsilon + \cos(x)\big)^k$. Dann

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)p_k(x)\,dx \geq \int_{-\eta}^{\eta} f(x)p_k(x)\,dx \geq \frac{f(0)}{2} \cdot (1 + \varepsilon/2)^k \cdot 2\eta \to \infty,$$

für $k \to \infty$. Anderseits

$$\left| \int_{\delta < |x| \leq \pi} f(x)p_k(x)\,dx \right| \leq (1 - \varepsilon/2)^k \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \to 0,$$

für $k \to \infty$. Daher

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p_k(x)\,dx = \int_{-\delta}^{\delta} f(x)p_k(x)\,dx + \int_{\delta < |x| \leq \pi} f(x)p_k(x) \to \infty,$$

für $k \to \infty$. Dies widerspricht (1).

Schritt 2. Wenn $x_0 = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x_0) \leq 0$, argumentieren wir mit $-f$, weil $\widehat{(-f)}(n) = -\hat{f}(n)$ und folgern $-f(0) = 0$.

Schritt 3. Wir nehmen an: $x_0 = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Wir stellen Folgendes fest

$$2\pi \cdot \hat{\bar{f}}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{-inx}\, dx = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\, dx} = 2\pi \overline{\hat{f}(-n)} = 0.$$

Daher sind $f + \bar{f}, i(f - \bar{f}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig bei 0, 2π-periodisch und mit verschwindenden Fourier-Koeffizienten. Nach Schritt 1 und 2,

$$(f + \bar{f})(0) = i(f - \bar{f})(0) = 0,$$

und folglich $f(0) = 0$.

Schritt 4. Wir nehmen nicht mehr an, dass $x_0 = 0$. Sei $g(x) := f(x + x_0)$. Dann ist g 2π-periodisch, integrierbar, stetig bei 0 und

$$2\pi \cdot \hat{g}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + x_0) e^{-inx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in(x - x_0)}\, dx = e^{inx_0} \hat{f}(n) = 0.$$

Nach Schritt 3 ist $f(x_0) = g(0) = 0$. □

Beweis von Korollar 10

Beweis. Wir wenden den Satz 9 auf $f - g$ an. □

Beweis von Korollar 11

Beweis. Sei $g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$, wobei nach dem Satz 4 die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert. Weiter gilt $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ nach dem Satz 4 und nach dem Korollar 10 gilt $f \equiv g$. □

Beweis von Satz 12

Beweis. Für $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
2\pi \hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{-in} e^{-inx}\right] dx \\
&= \left[f(x) \frac{1}{-in} e^{-inx}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{1}{-in} e^{-inx}\, dx \\
&= \frac{2\pi}{in} \widehat{f'}(n),
\end{aligned}$$

wobei der Ausdruck in Klammern verschwindet, weil f periodisch ist.

Für $n = 0$,

$$2\pi \widehat{f'}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0.$$

$\square$

Beweis von Korollar 13

Beweis. Nach dem Satz 12

$$\widehat{f''}(n) = in\widehat{f'}(n) = (in)^2 \hat{f}(n) = -n^2 \hat{f}(n).$$

Daher, für $n \neq 0$,

$$|\hat{f}(n)| = \frac{1}{n^2}\left|\widehat{f''}(n)\right| = \frac{1}{2\pi n^2}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-inx}\, dx\right| \leq \frac{1}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx \leq \frac{C}{n^2},$$

mit $C := \max_{[-\pi,\pi]} |f''|$. $\square$

Beweis von Korollar 14

Beweis. Nach dem Korollar 13, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. Wir verwenden den Satz 4 und den Satz 9. $\square$

Beweis von Lemma 17

Beweis. Sei $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig mit $\|f - h\|_1 < \varepsilon/2$. Sei $\eta_n : [-\pi, \pi] \to [0, 1]$ stetig mit

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \pi - 2/n \\ 0 & |x| \in (\pi - 1/n, \pi]. \end{cases}$$

(Beispielsweise kann man eine stückweise lineare Funktion wählen.) Dann

$$\begin{aligned} 2\pi\|h - h\cdot\eta_n\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|(1-\eta_n)(x)\, dx \\ &\leq \int_{[\pi-2/n,\pi]\cup[-\pi,-\pi+2/n]} |h(x)|\, dx \leq \frac{4}{n}\|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Sei $g_0 := h \cdot \eta_n$ mit n so, dass $\|h - g_0\|_1 < \varepsilon/2$. Dann $\|f - g_0\|_1 < \varepsilon$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(x + 2n\pi) := g_0(x)$, mit $x \in [-\pi, \pi)$. Da $g_0(-\pi) = g_0(\pi) = 0$, ist g stetig (überzeugen Sie sich selbst!). $\square$

Beweis von Lemma 19

Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx} &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy e^{inx}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)}\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_N(x-y)\,dy = (f * D_N)(x).\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 20

Beweis. **(i)**. Nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)e^{-inx}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy\,e^{-inx}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy\,e^{-iny}e^{-in(x-y)}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)e^{-in(x-y)}\,dx\Big]e^{-iny}\,dy\\ &\overset{x\mapsto x+y}{=} \hat{g}(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy = \hat{g}(n)\,\hat{f}(n).\end{aligned}$$

Die Verwendung von Fubini ist gerechtfertigt, weil

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)g(x-y)e^{-iny}e^{-in(x-y)}|\,dx\,dy &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)||g(x-y)|\,dx\,dy\\ &\le 2\pi\|g\|_\infty\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\,dy < \infty.\end{aligned}$$

(ii). **Schritt 1**. Wir nehmen an, dass f stetig ist. Da $[-\pi,\pi]$ kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig. Daher

$$\begin{aligned}(f*g)(x+h)-(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x+h-y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy \\ &\overset{y\mapsto y+h}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(y+h)g(x-y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy \\ &\overset{f,g \text{ periodisch}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y+h)g(x-y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(y+h)-f(y)]g(x-y)\,dy\end{aligned}$$

und

$$|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)| \leq \sup_{y\in[-\pi,\pi]} |f(y+h)-f(y)|\,\|g\|_\infty \longrightarrow 0, \qquad \text{für } h\to 0.$$

Schritt 2. Für allgemein integrierbares f existiert (nach dem Lemma 17) eine Folge von periodischen und stetigen Funktionen $(f_n)_{n\geq 1}$, so dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_n(x)|\,dx \longrightarrow 0, \qquad \text{wenn } h\to 0.$$

Daher

$$\begin{aligned}|(f*g)(x)-(f_n*g)(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(y)-f_n(y)]g(x-y)\,dy\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)-f_n(y)|\,dy \longrightarrow 0, \qquad \text{für } h\to 0.\end{aligned}$$

Darum konvergiert $(f_n*g)_n$ nach $f*g$ gleichmäßig. Nach dem Schritt 1 ist jede f_n*g stetig und daher ist f stetig. □

Beweis von Satz 21

Beweis. Teil (i) und (ii) sind klar. Für (iii),

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy \\ &\overset{y\mapsto -y}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)g(x+y)\,dy \\ &\overset{y\mapsto y-x}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\,dy = (g*f)(x).\end{aligned}$$

Für (iv) benutzen wir Fubini:

$$\begin{aligned}
f*(g*h)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g*h)(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\int_{-\pi}^{\pi} g(w)h(x-y-w)\,dw\,dy \\
&\overset{w\mapsto w-y}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\int_{-\pi}^{\pi} g(w-y)h(x-w)\,dw\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(w-y)\,dy\,h(x-w)\,dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(w)h(x-w)\,dw = [(f*g)*h](x).
\end{aligned}$$

Fubini kann tatsächlich benutzen werden, weil

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\int_{-\pi}^{\pi}|g(w-y)||h(x-w)|\,dw\,dy \leq (2\pi)^2\,\|f\|_\infty\,\|g\|_\infty\,\|h\|_\infty < \infty.$$

□

Beweis von Satz 23

Beweis. **(i)**. Nach (G1),

$$\begin{aligned}
(f*K_n)(x_0)-f(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-y)K_n(y)\,dy - f(x_0) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0-y)-f(x_0)]K_n(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Nach (G2) existiert $M>0$, so dass für alle $n\geq 1$ gilt $\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,dy \leq M$. Daher gilt für $\delta>0$:

$$\begin{aligned}
&|(f*K_n)(x_0)-f(x_0)| \leq \\
&\quad \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta}|f(x_0-y)-f(x_0)||K_n(y)|\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}|f(x_0-y)-f(x_0)||K_n(y)|\,dy \\
&\quad \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{|y|<\delta}|f(x_0-y)-f(x_0)|\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,dy + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}|K_n(y)|\,dy \\
&\quad \leq \frac{M}{2\pi}\sup_{|y|<\delta}|f(x_0-y)-f(x_0)| + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}|K_n(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f bei $x = x_0$ stetig ist, existiert $\delta > 0$, so dass

$$\sup_{|y|<\delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| < \varepsilon \frac{\pi}{M}.$$

Nach (G3) existiert n_0, so dass für $n \geq n_0$,

$$\frac{\|f\|_\infty}{\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| \, dy < \varepsilon/2.$$

Daher gilt für $n \geq n_0$

$$|(f * K_n)(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(ii) Wenn f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, ist f gleichmäßig stetig, weil f periodisch ist. Dann kann $\delta > 0$ gleichmäßig gewählt werden und folglich auch n_0. □

Beweis von Satz 27

Beweis. **Schritt 1**. Mit der Schreibweise $w^t := e^{itx}$ erinnern wir uns an folgende Formel

$$D_N(x) = \frac{w^{N+1} - w^{-N}}{w - 1}.$$

Dahers

$$\begin{aligned}
NF_N(x) &= \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = (w-1)^{-1} \Big[\sum_{k=0}^{N-1} w^{k+1} - \sum_{k=0}^{N-1} w^{-k} \Big] \\
&= (w-1)^{-1} \Big[w \sum_{k=0}^{N-1} w^k - w^{1-N} \sum_{k=0}^{N-1} w^k \Big] \\
&= (w-1)^{-2} \Big[w(w^N - 1) - w^{1-N}(w^N - 1) \Big] \\
&= (w^{1/2} - w^{-1/2})^{-2} w^{-1} \big[w^{N+1} - 2w + w^{1-N} \big] \\
&= (w^{1/2} - w^{-1/2})^{-2} \big[w^{N/2} - w^{-N/2} \big]^2 \\
&= \Big[\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \Big]^2.
\end{aligned}$$

Schritt 2. Wir zeigen, dass die Folge $(F_N)_{N \geq 1}$ eine gute Folge ist. Bezüglich (G1),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) \, dx = \frac{1}{N} \sum_{M=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_M(x) \, dx = 1$$

(G2) folgt aus (G1), weil $F_N \geq 0$. Für (G3) sei $\delta > 0$. Dann

$$c_\delta := \inf_{\delta<|x|\leq\pi} [\sin(x/2)]^2 > 0$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\delta<|x|\leq\pi} |F_N(x)|\,dx &= \frac{1}{N}\int_{\delta<|x|\leq\pi} \left[\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right]^2 dx \\ &\leq \frac{1}{N}\frac{2\pi}{c_\delta} \longrightarrow 0, \qquad \text{für } N\to\infty.\end{aligned}$$

□

Beweis von Korollar 28

Beweis. Direkt von Satz 23 und Satz 27. □

Beweis von Lemma 29

Beweis.

$$NF_N(x) := \sum_{M=0}^{N-1} D_M(x) = \sum_{M=0}^{N-1}\sum_{k=-M}^{M} e^{ikx} = \sum_{M=0}^{N-1}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_{k,M}e^{ikx},$$

wobei

$$a_{k,M} = \begin{cases} 1, & |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases}. \tag{2}$$

Daher

$$NF_N(x) := \sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\sum_{M=0}^{N-1} a_{k,M}e^{ikx} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\sum_{M=|k|}^{N-1} 1\,e^{ikx} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N-|k|)e^{ikx}.$$

□

Beweis von Korollar 30

Beweis. Nach dem Satz 20 ist $f * F_N$ stetig und

$$(\widehat{f * F_N})(n) = \hat{f}(n)\,\widehat{F_N}(n) = \begin{cases} \frac{N-|n|}{N}\,\hat{f}(n), & |n| \leq N-1 \\ 0, & |n| \geq N \end{cases}.$$

Da die Fourier Koeffizienten von $f * F_N$ summierbar sind (und $f * F_N$ stetig ist), gilt

$$f * F_N(x) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \big(1 - \tfrac{|n|}{N}\big) \hat{f}(n) e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Beweis von Satz 33

Beweis. Für $r \in (0,1)$ und integrierbare f:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} |\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} < \infty.$$

Dem Satz 4 zufolge ist $A_r(f)$ stetig und

$$\widehat{A_r(f)}(n) = r^{|n|} \hat{f}(n).$$

Andererseits ist $f * P_n$ nach dem Satz 20 und

$$\widehat{f * P_r}(n) = \hat{f}(n) \widehat{P_r}(n) = r^{|n|} \hat{f}(n).$$

Das heißt, $f * P_r$ und $A_r(f)$ haben dieselbe Fourier Koeffizienten, und beide Funktionen sind stetig. Nach dem Satz 9 sind $f * P_r \equiv A_r(f)$. $\square$

Beweis von Satz 34

Beweis. Nach dem Beispiel 8,

$$P_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.$$

Bezüglich (G1)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\, dx = \widehat{P_r}(0) = 1.$$

Zweitens für $0 < r < 1$,

$$1 - 2r\cos(x) + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1 - \cos(x)) \geq 0.$$

Daher $P_r(x) \geq 0$ und (G2) folgt aus (G1).

Bezüglich (G3) sei $\delta > 0$. Dann

$$c_\delta := \inf_{\delta \leq |x| \leq \pi} 1 - \cos(x) > 0$$

und daher

$$\inf_{\delta \leq |x| \leq \pi} (1-r)^2 + 2r(1-\cos(x)) \geq 2c_\delta r.$$

Daher,

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |P_r(x)|\, dx \leq 2\pi \frac{(1-r)^2}{2c_\delta r} \longrightarrow 0, \text{ für } r \to 1^-.$$

□

Beweis von Korollar 35

Beweis. Direkt von Satz 23 und Satz 34. (Wir verwenden die Charakterisierung der Konvergenz anhand von Folgen). □

Beweis von Satz 36

Beweis. Da die Folge von Kernen gut ist, existiert $M > 0$ so dass,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(x)|\, dx \leq M, \qquad N \geq 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und (nach dem Lemma 17) g periodisch und stetig mit

$$\|f - g\|_1 < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3M}, \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

Nach dem Satz 23 existiert N_0, so dass

$$\|g * K_N - g\|_1 \leq \|g * K_N - g\|_\infty < \varepsilon/3, \qquad N \geq N_0.$$

Sei $N \geq N_0$. Dann, nach Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\|f * K_N - f\|_1 &\leq \|f * K_N - g * K_N\|_1 + \|g * K_N - g\|_1 + \|f - g\|_1 \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - g(y)||K_N(x-y)|\, dy\, dx + \frac{2}{3}\varepsilon \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - g(y)| \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(x-y)|\, dx \right] dy + \frac{2}{3}\varepsilon \\
&\leq M\|f - g\|_1 + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Korollar 37

Beweis. Nehmen wir an, dass $\hat{f}(n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann sind die Cesàro Durchschnitte auch null: $C_N(f) = 0$, $N \geq 0$. Nach den Sätzen 27 und 36 gilt

$$\|f\|_1 = \lim_N \|f\|_1 = \lim_N \|f - C_N(f)\|_1 = 0$$

und daher ist f fast überall Null. $\square$

Beweis von Korollar 38

Beweis. Sei $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz 4 ist g stetig und $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Nach dem Korollar 37 ist $f = g$ fast überall. $\square$

Beweis von Satz 39

Beweis. **Schritt 1**. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(e^{ix})$. Dann ist h 2π-periodisch und stetig. Wir betrachten $A_r(h)$, d.h., die Abel-Durchschnitte der Fourier Reihe von h.

Sei

$$g(re^{ix}) = \begin{cases} \hat{h}(0), & r = 0, \\ A_r(h)(x), & 0 < r < 1, \\ f(e^{ix}) = h(x), & r = 1, \end{cases}.$$

Dann ist g wohldefiniert, weil A_r 2π-periodisch ist – c.f. Übungsblatt. Konkret gilt

$$g(re^{ix}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{h}(n)r^{|n|}e^{inx}, \qquad 0 \leq r < 1,$$

und $g = f$ auf S^1 nach der Definition.

Schritt 2. Für $z = re^{ix}$ mit $0 \leq r < 1$ schreiben wir

$$g(z) = \hat{h}(0) + \sum_{n\geq 1} \hat{h}(n)z^n + \sum_{n\geq 1} \hat{h}(-n)\overline{z^n}.$$

Da h reellwertig ist, gilt $\hat{h}(-n) = \overline{h}(n)$ und

$$\begin{aligned} g(z) &= \hat{h}(0) + \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} \\ &= \hat{h}(0) + 2\mathrm{Re}[\varphi(z)], \end{aligned}$$

wobei $\varphi(z) = \sum_{n\geq 1} \hat{h}(n)z^n$. Da h stetig ist, gilt $\sup_n |\hat{h}(n)| < \infty$ und φ ist auf $\mathbb{D}$ holomorph.

Deswegen ist g auf $\mathbb{D}$ unendlich differenzierbar und $\Delta g = 0$ auf $\mathbb{D}$.

Schritt 3. Wir müssen noch zeigen, dass g auf jeden $z \in S^1$ stetig ist. Sei $\{z_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{D}$ mit $z_n \to z$. Mittels eines um z stetigen Arguments schreiben wir $z_n = r_n e^{ix_n}$ und $z = e^{ix}$ mit $r_n \to 1$ und $x_n \to x$.

Für groß genug n ist $r_n > 0$ und

$$g(z_n) - g(z) = \begin{cases} h(x_n) - h(x), & \text{wenn } r_n = 1 \\ A_{r_n}(h)(x_n) - h(x), & \text{wenn } r_n < 1 \end{cases}.$$

Folglich

$$|g(z_n) - g(z)| \leq \begin{cases} |h(x_n) - h(x)|, & \text{wenn } r_n = 1 \\ |A_{r_n}(h)(x_n) - h(x_n)| + |h(x_n) - h(x)|, & \text{wenn } r_n < 1 \end{cases}. \tag{3}$$

Nach der Stetigkeit von f gilt $|h(x_n) - h(x)| \to 0$ für $n \to \infty$. Wenn $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $r_n = 1$ für $n \geq n_0$, dann ist klar, dass $|g(z_n) - g(z)| \to 0$ für $n \to \infty$. Nehmen wir an, dass die Menge $\{r_n : n \geq 1\} \cap \mathbb{D}$ unendlich ist. Dann kann man $\{r_n : n \geq 1\} \cap \mathbb{D} = \{r_{n_k} : k \geq 1\}$ schreiben, wobei $(r_{n_k})_{k \geq 1}$ eine Teilfolge von $(r_n)_{n \geq 1}$ ist. Da $A_{r_{n_k}}(h) \to h$ gleichmäßig konvergiert für $k \to \infty$, gilt

$$\left|A_{r_{n_k}}(h)(x_{n_k}) - h(x_{n_k})\right| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} \left|A_{r_{n_k}}(h)(y) - h(y)\right| \to 0.$$

Andererseits kann (3) so geschrieben werden:

$$|g(z_n) - g(z)| \leq |h(x_n) - h(x)| + \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \notin \{n_k : k \geq 1\} \\ \left|A_{r_{n_k}}(h)(x_{n_k}) - h(x_{n_k})\right|, & \text{wenn } n = n_k \end{cases}.$$

Daraus folgt, dass $|g(z_n) - g(z)| \to 0$ für $n \to \infty$ (überzeugen Sie sich!).

Schritt 4. (Eindeutigkeit) Sei g_2 eine andere Lösung und $q(z) := g(z) - g_2(z)$. Dann ist $q : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ stetig, $q \equiv 0$ auf S^1 und $\Delta q = 0$ auf $\mathbb{D}$.

Sei $Q : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\mathrm{Re}[Q] = q$. Nach dem Maximumprinzip gilt für $r < 1$:

$$\max_{|z| \leq r} e^{q(z)} = \max_{|z| \leq r} |e^{Q(z)}| = \max_{|z| = r} |e^{Q(z)}| = \max_{|z| = r} e^{q(z)}.$$

Da q stetig ist, folgt daraus, dass

$$\max_{|z| \leq 1} e^{q(z)} = \max_{|z| = 1} e^{q(z)} = 1,$$

und $q(z) \leq 0$. Wir argumentieren ähnlich mit $-q$ und finden, dass $q \equiv 0$. Daher, $g \equiv g_2$. $\square$

Beweis von Lemma 40

Beweis. Seien $z := \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_l \rangle e_k$ und $y \in W$. Wir stellen fest, dass $\langle x - z, e_k \rangle = 0$ für jedes $k = 1, \dots, n$. Da $y - z \in W$, folgt daraus, dass $\langle x - z, y - z \rangle = 0$ und

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - z) - (y - z)\|^2 \\ &= \|x - z\|^2 - \langle x - z, y - z \rangle - \langle y - z, x - z \rangle + \|(y - z)\|^2 \\ &= \|x - z\|^2 + \|(y - z)\|^2 \geq \|x - z\|^2. \end{aligned}$$

Daher

$$\inf_{y \in W} \|x - y\|^2 \leq \|x - z\|^2 \leq \inf_{y \in W} \|x - y\|^2.$$

□

Beweis von Satz 41

Beweis. **Schritt 1**. Seien $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset L^2([-\pi, \pi])$ die trigonometrische Funktionen

$$e_n(x) := e^{inx}$$

und $\mathcal{P}_N = \left\{ \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n : c_n \in \mathbb{C} \right\}$ die Menge aller trigonometrischen Polynome mit Grad $\leq N$. Wir stellen fest, dass $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ orthonormal ist. Die partielle Fourier-Summen von f ist

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n \rangle e_n$$

und

$$\|S_N(f)\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} \hat{f}(n) \overline{\hat{f}(m)} \langle e_n, e_m \rangle = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2.$$

Schritt 2. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig und periodisch mit $\|f - g\|_2 < \varepsilon/2$.

Wir betrachten die Cesàro Durchschnitte der Fourier Reihe von g. Dann existiert $N_0 \in \mathbb{Z}$, so dass für $N \geq N_0$ gilt $\|g - C_N(g)\|_\infty < \varepsilon/2$. Folglich

$$\|g - C_N(g)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - C_N(g)(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \|g - C_N(g)\|_\infty^2 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Für $N \geq N_0$ gilt $C_N(g) \in \mathcal{P}_N$. Nach dem Lemma 40

$$\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - C_N(g)\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - C_N(g)\|_2 < \varepsilon.$$

Schritt 3. Wir stellen fest, dass für $n = -N, \dots, N$

$$\langle f - S_N(f), e_n \rangle = \hat{f}(n) - \hat{f}(n) = 0.$$

Daher sind $f - S_N(f)$ und S_N orthogonal und

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \|S_N(f)\|_2^2 + \|f - S_N f\|_2^2 \\ &= \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 + \|f - S_N f\|_2^2. \end{aligned}$$

Da $\|f - S_N f\|_2^2 \to 0$, gilt $\lim_n \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$. □

Beweis von Satz 44

Beweis. Wir erinnern uns, dass

$$S_N(f)(x_0) = f * D_N(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y) D_N(y)\, dy.$$

Da der Dirichlet Kern D_N

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = 1$$

erfüllt, gilt

$$\begin{aligned} S_N(f)(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - y) - f(x_0)] D_N(y)\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - y) - f(x_0)] \frac{\sin((N + 1/2)y)}{\sin(y/2)}\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin((N + 1/2)y)\, dy, \end{aligned}$$

wobei

$$g(y) = \frac{f(x_0 - y) - f(x_0)}{\sin(y/2)} = \frac{f(x_0 - y) - f(x_0)}{y} \frac{y}{\sin(y/2)}, \qquad y \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\},$$

und $g(0) := 0$.

Da f bei x_0 Lipschitz ist, ist g beschränkt und insbesondere in $L^2([-\pi, \pi])$. Weiter

$$\begin{aligned} S_N(f)(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \frac{1}{2i} \left[e^{i(N+1/2)y} - e^{-i(N+1/2)y} \right] dy \\ &= \frac{1}{2i} \widehat{g_1}(-N) - \frac{1}{2i} \widehat{g_2}(N), \end{aligned}$$

wobei $g_1(y) = e^{iy/2}g(y)$ und $g_2(y) = e^{-iy/2}g(y)$. Diese Funktionen erfüllen

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{g_j}(n)\right|^2 = \|g_j\|_2^2 = \|g\|_2^2 < \infty, \qquad j = 1, 2.$$

Insbesondere $\widehat{g_j}(n) \to 0$ für $n \to \pm\infty$. Daher $S_N(f)(x_0) - f(x_0) \to 0$. $\square$

Beweis von Satz 44

Beweis. Sei $x_0 \in (-\pi, \pi)$ und $\delta := \pi - |x_0|$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Wenn $|x - x_0| < \delta$, dann $|x| \leq |x_0| + |x - x_0| < \pi$. Daher $f(x) = x$, $f(x_0) = x_0$ und

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|.$$

Wenn $|x - x_0| \geq \delta$, dann

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\pi \leq \frac{2\pi}{\delta}|x - x_0|.$$

Wir nehmen $C := \max\{1, \frac{2\pi}{\delta}\}$. $\square$

Beweis von Korollar 46

Beweis. Wir stellen fest,

$$S_N(f)(x_0) = S_N(g)(x_0) + S_N(f - g)(x_0)$$

und $f - g$ ist Lipschitz bei x_0. In der tat existiert $\delta > 0$ mit $f(x) - g(x) = 0$, für $|x - x_0| < \delta$. Daher,

$$\big|[f(x) - g(x)] - [f(x_0) - g(x_0)]\big| = |f(x) - g(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}{\delta}|x - x_0|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Wir verwenden den Satz 44. $\square$

Beweis von Satz 24

Beweis. **Schritt 1**. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Sägezahnfunktion, d.h., f ist 2π-periodisch und $f(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$. Nach dem Beispiel 6

$$f(x) \sim \sum_{n\neq 0} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}.$$

Wir stellen fest, dass $|f(x)| \leq \pi$, $x \in \mathbb{R}$.

Die Abel-Durchschnitte

$$A_r(f)(x) = (f * P_r)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{inx} \tag{4}$$

erfüllt

$$|A_r(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| P_r(x-y)\, dy \leq \pi \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y)\, dy = \pi.$$

Behauptung. Die partielle Fouriersumme

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} i\frac{(-1)^n}{n} e^{inx}. \tag{5}$$

ist auch (unabhängig von N) beschränkt, i.e.,

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \max_{N\geq 0} |S_N(f)(x)| < \infty.$$

Beweis der Behauptung: wir vergleichen (4) und (5):

$$S_N(f)(x) - A_r(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1-r^{|n|}\right)\hat{f}(n)e^{inx} - \sum_{|n|>N} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{inx}$$

und benutzen die Abschätzungen

$$|n||\hat{f}(n)| \leq 1$$
$$0 \leq 1 - r^{|n|} = (1-r)(1+r+\ldots+r^{|n|-1}) \leq |n|(1-r).$$

Daher

$$\begin{aligned}|S_N(f)(x) - A_r(f)(x)| &\leq \sum_{n=-N}^{N} (1-r)|n||\hat{f}(n)| + \sum_{|n|>N} r^{|n|}\frac{1}{|n|}\\ &\leq (1-r)(2N+1) + \frac{1}{N}\frac{2}{1-r}.\end{aligned}$$

Die Abschätzung gilt für jedes $0 < r < 1$. Wir setzen $r = 1 - 1/N$ ein und folgern daraus, dass

$$|S_N(f)(x) - A_r(f)(x)| \leq \frac{2N+1}{N} + 2 \leq 5.$$

Daher,

$$|S_N(f)(x)| \leq |S_N(f)(x) - A_r(f)(x)| + |A_r(f)(x)| \leq 5 + \pi.$$

Schritt 2. Sei

$$S_N^-(f)(x) = \sum_{n=-N}^{-1} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}, \qquad S_N^+(f)(x) = \sum_{n=1}^{N} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}.$$

Dann ist $S_N^-(f) + S_N^+(f) = S_N(f)$ beschränkt. Aber

$$|S_N^+(f)(\pi)| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\, dx = \log(N+1) \geq \log(N).$$

Ähnlich $|S_N^-(f)(\pi)| \geq \log(N)$.

Schritt 3. Sei $N_k = 3^{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$g(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} g_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \text{ mit}$$
$$g_k(x) = e^{i2N_k x} S_{N_k}(f)(x).$$

Da $\sup_{x\in\mathbb{R}, N\in\mathbb{N}} |S_N f(x)| < \infty$, konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig. In der Tat,

$$\left| g(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} e^{iN_k x} S_{N_k}(f)(x) \right| \leq (5+\pi) \sum_{k>n} \frac{1}{k^2}.$$

Da jede $S_{N_k}(f)$ stetig und periodisch ist, ist auch g stetig und periodisch.

Schritt 4. Wir zeigen, dass $\nexists \lim_N S_N(g)(\pi) \in \mathbb{R}$. Wir stellen fest, dass

$$g_k(x) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} \hat{f}(n) e^{i(n+2N_k)x} = \sum_{n=N_k}^{3N_k} \hat{f}(n - 2N_k) e^{inx}.$$

Daher

$$S_{2N_k}(g_k)(x) = \sum_{n=N_k}^{2N_k} \hat{f}(n-2N_k) e^{inx} = e^{i2N_k x} \sum_{n=-N_k}^{0} \hat{f}(n) e^{inx} = e^{i2N_k x} S_{N_k}^-(f)(x)$$

und

$$|S_{2N_k}(g_k)(\pi)| = |S_{N_k}^-(f)(\pi)| \geq \log(N_k). \tag{6}$$

Wenn $j < k$, dann $2N_j = 23^{2^j} < 3^{2^k} = N_k$ und

$$S_{2N_j}(g_k) = 0, \qquad j < k. \tag{7}$$

Wenn $j > k$, dann $2N_j = 23^{2^j} > 3^{2^k+1} = 3N_k$ und $S_{2N_j}(g_k) = g_k$, so dass

$$\left| S_{2N_j}(g_k)(x) \right| \leq 5 + \pi \qquad j > k. \tag{8}$$

Aus (6), (7) und (8) folgt es, dass

$$\begin{aligned}\left|S_{2N_j}(g)(\pi)\right| &= \Big|\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^2}S_{2N_j}(g_k)(\pi)\Big| \geq \frac{1}{j^2}|S_{2N_j}(g_j)(\pi)| - \sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k^2}|S_{2N_j}(g_k)(\pi)| \\ &\geq \frac{1}{j^2}\log(N_j) - (5+\pi)\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} \\ &= \frac{2^j}{j^2}\log(3) - (5+\pi)\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} \to \infty, \qquad \text{für } j\to\infty.\end{aligned}$$

Deshalb $\nexists \lim_N S_N(g)(\pi) \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: $h(x) := g(x+\pi)$ ist stetig, periodisch und die partielle Fourier Summe bei $x = 0$,

$$S_N(h)(0) = S_N g(\pi),$$

ist nicht konvergent. □

Beweis von Satz 49

Beweis. **(i)**

$$\widehat{T_a f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i(x+a)\xi}\,dx = e^{-2\pi i a\xi}\hat{f}(\xi).$$

(ii)

$$\widehat{M_a f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i a x}e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x(\xi-a)}\,dx = \hat{f}(\xi-a).$$

(iii)

$$\widehat{D_a f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(ax)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = a^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i\frac{y}{a}\xi}\,dy = a^{-1}\hat{f}(\xi/a).$$

□

Beweis von Lemma 50

Beweis. Sei $g \in C_c(\mathbb{R})$ (d.h., g ist stetig mit kompakten Träger) und $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| \leq 1$. Dann

$$\begin{aligned}\|f - f(\cdot+y)\|_p &\leq \|f-g\|_p + \|g - g(\cdot+y)\|_p + \|g(\cdot+y) - f(\cdot+y)\|_p \\ &= 2\|f-g\|_p + \|g-g(\cdot+y)\|_p.\end{aligned}$$

Sei $L > 0$ so, dass $|g(x)| = 0$ für $|x| > L$. Dann

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - g(x+y)|^p \, dx$$

$$= \int_{-(L+1)}^{L+1} |g(x) - g(x+y)|^p \, dx \leq (2L+2)^p \sup_{x \in [-(L+1), L+1]} |g(x) - g(x+y)|^p.$$

Aus der Stetigkeit von g folgt, dass $\|g - g(\cdot + y)\|_p \to 0$, $y \to 0$. Daher,

$$\limsup_{y \to 0} \|f - f(\cdot + y)\|_p \leq 2\|f - g\|_p.$$

Da $C_c(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$ dicht liegt, folgt, dass $\lim_{y \to 0} \|f - f(\cdot + y)\|_p = 0$. □

Beweis von Lemma 52

Beweis. **(i)**

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^k \left| \tfrac{d^j}{dx^j} f'(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^k \left| \tfrac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} f(x) \right| < \infty$$

(ii) Durch ein induktives Argument reicht es aus, $p(x) = x$. Wir stellen Folgendes fest

$$\tfrac{d^j}{dx^j}[x f(x)] = \sum_{n=0}^{j} \binom{n}{j} \tfrac{d^{j-n}}{dx^{j-n}} x \tfrac{d^n}{dx^n} f(x)$$

und $\frac{d^{j-n}}{dx^{j-n}} x \in \{0, 1, x\}$. Daher $|\frac{d^{j-n}}{dx^{j-n}} x| \leq 1 + |x|$. Für $k, j \in \mathbb{N}$ sei

$$C_{k,j} := \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^k \left| \tfrac{d^j}{dx^j} f(x) \right|.$$

Dann

$$\begin{aligned}
(1 + |x|)^k \left| \tfrac{d^j}{dx^j}[x f(x)] \right| &\leq \sum_{n=0}^{j} \binom{n}{j} (1 + |x|)^{k+1} \left| \tfrac{d^n}{dx^n} f(x) \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{j} \binom{n}{j} C_{k+1,n} < \infty,
\end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck unabhängig von x ist. □

Beispiel 53

Beweis. Seien $j, k \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$\tfrac{d^j}{dx^j} \Phi(x) = p_j(x) \Phi(x),$$

wobei p_j ein algebraisches Polynom ist. Deshalb existiert $N \in \mathbb{N}$ und $K > 0$, so dass

$$|p_j(x)| \leq K(1 + |x|)^N, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Daher,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^k\left|\tfrac{d^j}{dx^j}\Phi(x)\right| \le K\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^{N+k}\Phi(x) < \infty.$$

$\square$

Beweis von Satz 54

Beweis. **(i)** Wir lassen $R>0$ und integrieren nach Teilen:

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} f'(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx &= f(x)e^{-2\pi ix\xi}\Big]_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^{R} f(x)(-2\pi i\xi)e^{-2\pi ix\xi}\,dx\\ &= f(x)e^{-2\pi ix\xi}\Big]_{x=-R}^{x=R} + 2\pi i\xi\int_{-R}^{R} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx.\end{aligned}$$

Da $f\in\mathcal{S}$, gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ und $\widehat{f'}(\xi)=2\pi i\xi\,\hat{f}(\xi)$ folgt.

(ii) Für $0\neq|h|<1$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big[\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)\big]-\widehat{Pf}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\frac{e^{-2\pi ihx}-1}{h}+2\pi ix\right]e^{-2\pi ix\xi}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\left[\frac{e^{-2\pi ihx}-1}{hx}+2\pi i\right]e^{-2\pi ix\xi}\,dx.\end{aligned}$$

Wenn wir eine Taylor-Entwicklung und großes und kleines t getrennt betrachten, sehen wir, dass eine Konstante $C>0$ existiert, so dass,

$$|e^{-2\pi it}-1+2\pi it|\le Ct^2, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Daher (mit $t=hx$),

$$\left|\frac{1}{h}\big[\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)\big]-\widehat{Pf}(\xi)\right|\le C|h|\int_{\mathbb{R}}|x|^2|f(x)|\,dx.$$

Da $f\in\mathcal{S}$, ist das vorherige Integral endlich und wir lassen $h\to 0$.

(iii). Seien $k,j\in\mathbb{N}_0$. Dann

$$\begin{aligned}|\xi|^k\left|\frac{d^j}{d\xi^j}\hat{f}(\xi)\right| &= (2\pi)^{-k}|2\pi i\xi|^k\left|\widehat{P^jf}(\xi)\right|\\ &= (2\pi)^{-k}\left|\widehat{\frac{d^k}{d\xi^k}[P^jf]}(\xi)\right| \le (2\pi)^{-k}\left\|\frac{d^k}{d\xi^k}[P^jf]\right\|_1.\end{aligned}$$

Da $f \in \mathcal{S}$, ist auch $\frac{d^k}{d\xi^k}[P^j f] \in \mathcal{S} \subset L^1$ und

$$(1+|\xi|)^k \left| \frac{d^j}{d\xi^j} \hat{f}(\xi) \right| \leq C_k(1+|\xi|^k) \left| \frac{d^j}{d\xi^j} \hat{f}(\xi) \right| \leq C_k' \left(\left\| P^j f \right\|_1 + \left\| \frac{d^k}{d\xi^k}[P^j f] \right\|_1 \right),$$

wobei C_k und C_k' Konstanten sind, die nur von k abhängen. $\square$

Beweis von Satz 55

Beweis. **Schritt 1**. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\hat{\Phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1. \tag{9}$$

Zur Berechnung verwenden wir Polarkoordinaten und Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx \right]^2 &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dx\, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} 2\pi r\, dr \\
&= -e^{-\pi r^2} \Big]_{r=0}^{r=\infty} = 1,
\end{aligned}$$

und (9) folgt.

Schritt 2. Wir stellen fest, dass $i\frac{d}{dx}\Phi(x) = -2\pi i x\, \Phi(x) = P(\Phi)(x)$. Nach dem Satz 54 ist $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und gilt

$$\frac{d}{d\xi}\hat{\Phi}(\xi) = \widehat{P\Phi}(\xi) = i\widehat{\Phi}'(\xi) = -2\pi\xi\, \hat{\Phi}(\xi).$$

Sei $F(\xi) := \hat{\Phi}(\xi)e^{\pi\xi^2}$. Dann ist $F(0) = 1$ nach dem Schritt 1 und

$$\begin{aligned}
F'(\xi) &= \left[\tfrac{d}{d\xi}\hat{\Phi}(\xi)\right] e^{\pi\xi^2} + \hat{\Phi}(\xi) 2\pi\xi\, e^{\pi\xi^2} \\
&= \left(\left[\tfrac{d}{d\xi}\hat{\Phi}(\xi)\right] + 2\pi\xi\ \hat{\Phi}(\xi) \right) e^{\pi\xi^2} = 0.
\end{aligned}$$

Deshalb ist $F \equiv 1$ und $\Phi(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$. $\square$

Beweis von Bemerkung 58

Beweis. Wir ändern Variablen und lernen, dass

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y+x)g(-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy = (g * f)(x).\end{aligned}$$

□

Beweis von Lemma 59

Beweis. **Schritt 1**. Wir zeigen, dass

$$(f * g)' = f' * g. \tag{10}$$

Wir stellen fest, dass $f' * g$ wohl definiert ist, weil $f' \in L^\infty$ und $g \in L^1$. Seien $x, h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$. Dann

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\big[(f * g)(x+h) - (f * g)(x)\big] - (f' * g)(x) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{h}\big(f(x+h-y) - f(x-y)\big) - f'(x-y)\right] g(y)\,dx.\end{aligned}$$

Da f'' beschrankt ist, existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leq C|h|^2, \qquad x, h \in \mathbb{R}.$$

Daher,

$$\left|\frac{1}{h}\big[(f * g)(x+h) - (f * g)(x)\big] - (f' * g)(x)\right| \leq C|h| \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dx.$$

Da g integrierbar ist, geht die rechte Seite der letzten Abschätzung auf 0, wenn h auf 0 geht, und (10) folgt.

Schritt 2. Da f' auch eine Schwartz-Funktion ist, schließen wir daraus durch Induktion, dass $f * g$ unendlich differenzierbar ist, und

$$(f * g)^{(j)} = f^{(j)} * g, \qquad j \geq 1.$$

Sei $k \geq 1$. Wir zeigen, dass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^k |(f^{(j)} * g)(x)| < \infty.$$

Wir benutzen die Abschätzung

$$(1 + |x|) \leq (1 + |x-y|)(1 + |y|), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

und schätzen die Faltungen wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(1+|x|)^k |(f^{(j)} * g)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}} (1+|x-y|)^k |f^{(j)}(x-y)| (1+|y|)^k |g(y)|\, dy \\
&\le \sup_{z\in\mathbb{R}} (1+|z|)^k |f^{(j)}(z)| \ \cdot \ \int_{\mathbb{R}} (1+|y|)^k |g(y)|\, dy < \infty,
\end{aligned}
$$

wobei der letzte Ausdruck unabhängig von x ist. (Zum Schluss nehmen wir $\sup_x$ auf beiden Seiten).

Schritt 3. Nehmen wir an, dass $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und stellen Folgendes fest. Für $k \ge 0$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^k |g(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^{k+2} |g(x)| (1+|x|)^{-2}\, dx \\
&\le \sup_{y\in\mathbb{R}} (1+|y|)^{k+2} |g(y)| \ \cdot \ \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^{-2}\, dx < \infty.
\end{aligned}
$$

Wir können daher den ersten Teil des Satzes anwenden. □

Beweis von Satz 60

Beweis. Wir möchten Fubini verwenden, um Folgendes zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y)\, dy\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} g(x-y) e^{-2\pi i \xi (x-y)}\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} \Big[\int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-2\pi i \xi (x-y)}\, dx \Big]\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} \Big[\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx \Big]\, dy \\
&= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

Fubini kann verwenden werden, weil

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \big| f(y) e^{-2\pi i \xi y} \big| \, \big| g(x-y) e^{-2\pi i \xi (x-y)} \big|\, dy\, dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \Big[\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\, dx \Big]\, dy \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \Big[\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx \Big]\, dy \\
&\quad = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.
\end{aligned}
$$

□

Beweis von Lemma 64

Beweis. **(G1)**

$$\int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x)\,dx = \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} K(x/\varepsilon)\,dx = \int_{\mathbb{R}} K(y)\,dy = 1.$$

(G2)

$$\int_{\mathbb{R}} |K_\varepsilon(x)|\,dx = \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} |K(x/\varepsilon)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |K(y)|\,dy < \infty.$$

(G3) Sei $\delta > 0$. Dann

$$\int_{|x|>\delta} K_\varepsilon(x)\,dx = \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{|x|>\delta} K(x/\varepsilon)\,dx = \int_{|y|>\frac{\delta}{\varepsilon}} K(y)\,dy \to 0,$$

für $\varepsilon \to 0^+$, weil $\delta/\varepsilon \to \infty$. □

Beweis von Satz 63

Beweis. **Schritt 1**. Wir betrachten zunächst $p = 1$. Wir bezeichnen

$$M := \sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}} |K_\varepsilon(x)|\,dx.$$

Nach dem Lemma 50 existiert $\delta > 0$, so dass

$$\sup_{|y|<\delta} \|f - f(\cdot - y)\|_1 < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Sei $\varepsilon_0 > 0$, so dass für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ gilt

$$2\|f\|_1 \int_{y:|y|>\delta} |K_\varepsilon(y)|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Da $\int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(y)\,dy = 1$, gilt Folgendes nach Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \big|f * K_\varepsilon(x) - f(x)\big|\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} [f(x-y) - f(x)] K_\varepsilon(y)\,dy \Big|\,dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,dx\,|K_\varepsilon(y)|\,dy \\
&\le \int_{|y|\le\delta} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,dx\,|K_\varepsilon(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,dx\,|K_\varepsilon(y)|\,dy \\
&\le \sup_{|y|<\delta} \|f - f(\cdot - y)\|_1 \int_{\mathbb{R}} |K_\varepsilon(y)|\,dy + 2\|f\|_1 \int_{y:|y|>\delta} |K_\varepsilon(y)|\,dy \\
&\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies beweist Behauptung (i) mit $p = 1$.

Schritt 2. Wenn $p = 2$, ändern wir das Argument wie folgt. Wir stellen zunächst fest, dass $f * K_\varepsilon$ wohldefiniert ist, weil $f \in L^2$ und $K_\varepsilon \in L^\infty \cap L^1 \subset L^2$. Wir verwenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und schätzen

$$\begin{aligned}
\big|f * K_\varepsilon(x) - f(x)\big| &\le \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)||K_\varepsilon(y)|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)||K_\varepsilon(y)|^{1/2}|K_\varepsilon(y)|^{1/2}\,dy \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^2|K_\varepsilon(y)|\,dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_\varepsilon(y)|\,dy\right)^{1/2} \\
&\le M^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^2|K_\varepsilon(y)|\,dy\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Wir gehen nun wie in Schritt 1 vor:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \big|f * K_\varepsilon(x) - f(x)\big|^2\,dx \\
&\quad\le M \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^2\,dx\,|K_\varepsilon(y)|\,dy \\
&\quad\le \int_{|y|\le\delta}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^2\,dx\,|K_\varepsilon(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^2\,dx\,|K_\varepsilon(y)|\,dy \\
&\quad\le \sup_{|y|<\delta} \|f - f(\cdot - y)\|_2^2 \int_{\mathbb{R}} |K_\varepsilon(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta}\int_{\mathbb{R}} 2(|f(x-y)|^2 + |f(x)|^2)\,dx\,|K_\varepsilon(y)|\,dy \\
&\quad\le M \sup_{|y|<\delta} \|f - f(\cdot - y)\|_2^2 + 4\|f\|_2^2 \int_{y:|y|>\delta} |K_\varepsilon(y)|\,dy,
\end{aligned}$$

und die Schlussfolgerung folgt wie zuvor. Dies beweist Behauptung (i) mit $p = 2$.

Schritt 3. Für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\big|f * K_\varepsilon(x) - f(x)\big| &\le \int_{\mathbb{R}} \big|f(x-y) - f(x)\big|\,\big|K_\varepsilon(y)\big|\,dy \\
&\le \int_{|y|\le\delta} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\varepsilon(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\varepsilon(y)|\,dy \\
&\le M \sup_{|y|\le\delta} |f(x-y) - f(x)| + 2\|f\|_\infty \int_{|y|>\delta} |K_\varepsilon(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

Behauptung (ii) folgt nun mit der üblichen Argumentation. $\square$

Beweis von Lemma 64

Beweis. Wir möchten den Satz von Fubini benutzen und berechnen:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi i yx}\,dy\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y)\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i yx}\,dx\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y)\hat{f}(y)\,dy.\end{aligned}$$

Fubini ist gerechtfertigt, weil

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)||g(y)e^{-2\pi i yx}|\,dy\,dx\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)||g(y)|\,dx\,dy = \|f\|_1\,\|g\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

$\square$

Beweis von Satz 65

Beweis. Sei $\Phi(x) := e^{-\pi x^2}$ die Gauß-Funktion und $\Phi^\varepsilon(x) := \Phi(\varepsilon x)$. Dann

$$\widehat{\Phi^\varepsilon}(\xi) = \varepsilon^{-1}\Phi(\xi/\varepsilon), \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

und $\widehat{\Phi^\varepsilon}(\xi) = \widehat{\Phi^\varepsilon}(-\xi)$. Mit der Notation von Satz 49 und nach dem Lemma 64 gilt

$$\begin{aligned}f * \widehat{\Phi^\varepsilon}(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{\Phi^\varepsilon}(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{\Phi^\varepsilon}(y-x)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{M_x\Phi^\varepsilon}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)M_x\Phi^\varepsilon(\xi)\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\Phi^\varepsilon(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi.\end{aligned}$$

Nach dem Satz 63 gilt $f * \widehat{\Phi^\varepsilon} \to f$ in L^1 für $\varepsilon \to 0^+$.

Anderseits,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\Phi^\varepsilon(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi\right| \le \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\left(1-\Phi^\varepsilon(\xi)\right)\,d\xi$$

Um zu sehen, dass das letzte Integral gegen Null konvergiert, kann man den Satz der dominierten Konvergenz oder das folgende, einfachere Argument verwenden. Sei $\delta > 0$ und

$L > 0$ mit $\int_{|\xi|>L} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi < \delta/2$. Dann

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\,(1 - \Phi^{\varepsilon}(\xi))\; d\xi \\
&\qquad \le \int_{|\xi|>L} |\hat{f}(\xi)|\,(1 - \Phi^{\varepsilon}(\xi))\; d\xi + \int_{|\xi|\le L} |\hat{f}(\xi)|\,(1 - \Phi^{\varepsilon}(\xi))\; d\xi \\
&\qquad \le \int_{|\xi|>L} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi + (1 - \Phi^{\varepsilon}(L)) \int_{|\xi|\le L} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi \\
&\qquad \le \delta/2 + \left(1 - e^{-\pi\varepsilon^2 L^2}\right) \|\hat{f}\|_1.
\end{aligned}$$

Daher existiert $\varepsilon_0 > 0$, so dass, für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ der letzte Ausdruck kleiner als δ ist.

Wir schließen daraus, dass für $\varepsilon \to 0^+$ gilt $f * \widehat{\Phi^{\varepsilon}} \to f$ in L^1 und

$$f * \widehat{\Phi^{\varepsilon}} \to g(x) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi,$$

gleichmäßig. Insbesondere, konvergieren die Beschränkungen $f * \widehat{\Phi^{\varepsilon}}_{|[-L,L]}$ gegen $f_{|[-L,L]}$ und gegen $g_{|[-L,L]}$ in $L^1([-L,L])$ für jedes $L > 0$. Daher sind $f = g$ fast überall gleich auf jedem Intervall $[-L, L]$ und folglich gilt $f = g$ fast überall.

Wir stellen fest, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi = \widehat{S\hat{f}}(x),$$

wobei $S\hat{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$. Wenn $f \in \mathcal{S}$, dann sind $\hat{f} \in \mathcal{S}$ und $S\hat{f} \in \mathcal{S}$. Die Gleichheit $f = \widehat{S\hat{f}}$ gilt dann nicht nur fast überall, sondern auch auf jedem Punkt. $\square$

Beweis von Satz 66

Beweis. Sei $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. Dann ist $f^* \in \mathcal{S}$ und $\widehat{f^*}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. Nach dem Satz 60 ist $f * f^* \in \mathcal{S}$ und

$$\widehat{f * f^*}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Satz 65 gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} (\widehat{f * f^*})(\xi) e^{2\pi i 0 \xi}\, d\xi \\
&= (f * f^*)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) f^*(0 - x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis von Lemma 68

Beweis. Seien $f \in L^p(\mathbb{R})$ mit $p = 1, 2$ und $\varepsilon > 0$.

Sei $f_R(x) := f(x)1_{|x|\leq R}$ — d.h., $f_R(x) = 0$ für $|x| > R$ und $f_R(x) = f(x)$ für $|x| \leq$. Dann

$$\|f - f_R\|_p^p = \int_{|x|>R} |f(x)|^p \, dx \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty,$$

weil $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty$. Daher existiert $R > 0$ mit $\|f - f_R\|_p < \varepsilon/2$.

Seien $K(x) = e^{-\pi x^2}$ und $K_\delta(x) := \delta^{-1}K(x/\delta)$. Nach dem Lemma 62 und dem Satz 63 gilt

$$\|f_R * K_\delta - f_R\|_p \to 0 \qquad \text{für } \delta \to 0^+.$$

Wir können daher $\delta > 0$ wählen mit $\|f_R * K_\delta - f_R\|_p < \varepsilon/2$ und

$$||f - (f_R * K_\delta)||_p \leq \|f - f_R\|_p + \|f_R * K_\delta - f_R\|_p < \varepsilon. \tag{11}$$

Wir wollen Lemma 59 anwenden, um daraus zu schließen, dass $f_R * K_\delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dazu überprüfen wir Folgendes: für $k \geq 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^k |f_R(x)| \, dx \leq (1 + R)^k \int_{-R}^{R} |f(x)| \, dx < \infty.$$

Wenn $p = 1$, ist die letzte Behauptung klar. Wenn $p = 2$, folgt aus Cauchy-Schwarz, dass

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R} |f(x)| \, dx &= \int_{-R}^{R} |f(x)| \cdot 1 \, dx \\ &\leq \left(\int_{-R}^{R} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-R}^{R} 1 \, dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{2R} \|f\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erfüllt die Schwartz-Funktion $f_R * K_\delta$ Schätzung (11) und die gewünschte Folge kann gefunden werden. $\square$

Beweis von Satz 69

Beweis. **(i)** Wir schreiben $\mathcal{F}f = \hat{f}$ und $\mathcal{F}^{-1}f = \check{f}$ (onhe anzunehmen, dass $\mathcal{F}$ invertierbar ist) und $Sf(x) = f(-x)$. Nach dem Satz 65 gilt

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f] = f, \qquad f \in \mathcal{S}.$$

Anderseits sind $\mathcal{F}S = \mathcal{F}^{-1}$ und $S\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}$. Daher

$$f = SSf = S\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}Sf = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f, \qquad f \in \mathcal{S}.$$

(ii) Wir betrachten $\mathcal{S}$ mit der L^2-Norm. Die isometrische Abbildung $\mathcal{F}$ ist auf der dichten Menge $\mathcal{S}$ definiert und kann durch Stetigkeit eindeutig erweitert werden:

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}).$$

Das Bild $\mathcal{F}(L^2)$ ist dicht, weil es $\mathcal{S}$ enthält, und auch geschlossen, weil die Abbildung isometrisch ist. $\square$

Beweis von Satz 70

Beweis. Seien $f \in C[0,1]$ und $\varepsilon > 0$.

Wir erweitern f zu einer stetigen Funktion : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset [-1,2]$, d.h., $f(x) = 0$ für $x \notin [-1,2]$. Dies kann beispielsweise dadurch geschehen, dass f eine Linie auf der Menge $[-1,2] \setminus [0,1]$ ist.

Seien $K(x) = e^{-\pi x^2}$ und $K_\delta(x) := \delta^{-1} K(x/\delta)$. Da f gleichmäßig stetig ist, können wir nach dem Lemma 62 und dem Satz 63 $\delta > 0$ wählen mit

$$\|f * K_\delta - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \varepsilon/2.$$

Sei das Taylor-Polynom von K_δ mit Grad N.

Wir stellen fest, dass $f * Q_N$ wohldefiniert ist, da $f \in C_c$ und Q_N stetig sind. Darüber hinaus

$$\|f - f * Q_N\|_{L^\infty([0,1])} \leq \|f - f * K_\delta\|_{L^\infty([0,1])} + \|f * (K_\delta - Q_N)\|_{L^\infty([0,1])}.$$

Einerseits ist $\|f - f * K_\delta\|_{L^\infty([0,1])} \leq \|f * K_\delta - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \varepsilon/2$. Andererseits gilt für $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
|f * (K_\delta - Q_N)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|(K_\delta - Q_N)(x-y)|\,dy \\
&= \int_{-1}^{2} |f(y)|\,|(K_\delta - Q_N)(x-y)|\,dy \\
&\leq \sup_{z \in [-2,2]} |(K_\delta - Q_N)(z)| \int_{-1}^{2} |f(y)|\,dy,
\end{aligned}$$

wobei wir festgestellt haben, dass wenn $x \in [0,1]$ und $y \in [-1,2]$, dann $x - y \in [-2,2]$. Da K_δ analytisch konvergiert

$$\sup_{z \in [-2,2]} |(K_\delta - Q_N)(z)| \to 0, \qquad \text{für } N \to \infty$$

und wir können N wählen, sodass $\|f * (K_\delta - Q_N)\|_{L^\infty([0,1])} < \varepsilon$. Für diese Wahl von N haben wir dann, dass

$$\|f - f * Q_N\|_{L^\infty([0,1])} < \varepsilon.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $f * Q_N$ ein Polynom ist. Dazu schreiben wir $Q_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ und

$$\begin{aligned}
(f * Q_N)(x) &= \sum_{n=0}^N a_n \int_{\mathbb{R}} f(y)(x-y)^n \, dy \\
&= \sum_{n=0}^N a_n \int_{-1}^2 f(y)(x-y)^n \, dy \\
&= \sum_{n=0}^N a_n \int_{-1}^2 f(y) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \, dy \\
&= \sum_{n=0}^N a_n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot \int_{-1}^2 f(y) y^{n-j} \, dy \cdot x^j \in \mathbb{C}[x].
\end{aligned}$$

(Abschließend stellen wir fest, dass der Beweis ein Polynom mit reellen Koeffizienten liefert, wenn f reelle Werte sind). □

Beweis von Satz 71

Beweis. Wir integrieren nach Teilen und erhalten

$$\begin{aligned}
1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \, dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R |\psi(x)|^2 \, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R \left[\tfrac{d}{dx} x\right] |\psi(x)|^2 \, dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(x \, |\psi(x)|^2 \Big]_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^R x \, \tfrac{d}{dx} \left[\psi(x) \cdot \overline{\psi(x)}\right] dx \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(x \, |\psi(x)|^2 \Big]_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^R x \left(\psi'(x) \cdot \overline{\psi(x)} + \psi(x) \cdot \overline{\psi'(x)}\right) dx \right) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} x \left(\psi'(x) \cdot \overline{\psi(x)} + \psi(x) \cdot \overline{\psi'(x)}\right) dx \\
&= -2 \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{Re}\left[\psi'(x) \cdot \overline{\psi(x)}\right] dx,
\end{aligned}$$

weil $f \in \mathcal{S}$.

Aus Cauchy-Schwarz folgt, dass

$$
\begin{aligned}
1 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x|\, |\psi(x)|\, |\psi'(x)|\, dx \\
&\leq 2 \left[\int_{\mathbb{R}} x^2 \, |\psi(x)|^2 \, dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 \, dx \right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Schließlich gilt nach Satz 59 und Plancherel, dass

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi'}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |2\pi i \xi|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi = 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi.
\end{aligned}
$$

Wenn wir diese Gleichungen und Ungleichungen kombinieren, kommen wir zu dem Schluss, dass

$$
\begin{aligned}
1 &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 \, |\psi(x)|^2 \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 \, dx \\
&= 16\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 \, |\psi(x)|^2 \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi,
\end{aligned}
$$

wie gewünscht.

Wenn schließlich Gleichheit im Unschärfeprinzip gilt, muss die Cauchy-Schwarz-Ungleichung tatsächlich eine Gleichheit sein. Das bedeutet, dass $\gamma \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$
\psi'(x) = \gamma x \psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.
$$

Die einzige Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$
\psi(x) = \alpha e^{\frac{\gamma}{2} x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.
$$

(Wir haben dies tatsächlich im Beweis des Satzes 55 gezeigt).

Ebenso muss die Ungleichung

$$
-2 \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{Re}\big[\psi'(x) \cdot \overline{\psi(x)}\big] \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |x|\, |\psi(x)|\, |\psi'(x)|\, dx,
$$

tatsächlich eine Gleichheit sein, und daraus schließen wir, dass

$$
x\overline{\psi(x)}\psi'(x) = |\alpha|^2 \gamma 2 x^2 e^{2\mathrm{Re}[\gamma] x^2} \in (-\infty, 0],
$$

und folglich, dass $\gamma \in (-\infty, 0]$. Außerdem kann γ nicht 0 sein, weil $\psi \in \mathcal{S}$. Wir setzen $\beta = -\gamma/2$. Schließlich folgt $|\alpha|^2 = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}$ aus der Tatsache, dass $\|\psi\|_2 = 1$. $\square$

Beweis — nach Adolf Hurwitz (1859 – 1919).

Schritt 1. Wir parametrisieren die Kurve nach Bogenlänge neu. Seien $L := L_\gamma$ und $\varphi : [a,b] \to [0,L]$ so gegeben:

$$\varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Dann ist φ streng steigend, $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = L$, und

$$\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0. \tag{12}$$

Wir betrachten $\gamma \circ \varphi^{-1} : [0,L] \to \mathbb{R}$. Dann

$$L_{\gamma\circ\varphi^{-1}} = \int_0^L \|[\gamma \circ \varphi^{-1}]'(t)\|\, dt = \int_0^L \|\gamma'(\varphi^{-1}(t))\| |[\varphi^{-1}]'(t)|\, dt = \int_a^b \|\gamma'(s)\|\, ds = L_\gamma$$

und

$$\begin{aligned} 2A_{\gamma\circ\varphi^{-1}} &= \Big| \int_0^L \big([x\circ\varphi^{-1}](t)[y\circ\varphi^{-1}]'(t) - [y\circ\varphi^{-1}](t)[x\circ\varphi^{-1}]'(t) \big)\, dt \Big| \\ &= \Big| \int_0^L \big([x\circ\varphi^{-1}](t)[y'\circ\varphi^{-1}](t) - [y\circ\varphi^{-1}](t)[x'\circ\varphi^{-1}](t) \big)\, [\varphi^{-1}]'(t)\, dt \Big| \\ &= \Big| \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\, dt \Big| = 2A_\gamma. \end{aligned}$$

Da $\gamma(t) = [\gamma\circ\varphi^{-1}](\varphi(t))$, gilt

$$\gamma'(t) = [\gamma\circ\varphi^{-1}]'(\varphi(t))\, \varphi'(t).$$

Aus (12) folgt es, dass $\|[\gamma\circ\varphi^{-1}]'(s)\| = 1$ für $s \in \varphi([a,b]) = [0,L]$.

Deshalb können wir γ durch $\gamma\circ\varphi^{-1}$ ersetzen und annehmen, dass $[a,b] = [0,L]$ und

$$\|\gamma'(t)\| = 1. \tag{13}$$

Schritt 2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $L = 2\pi$. In der Tat gilt

$$L_{\lambda\gamma} = \lambda L_\gamma, \qquad A_{\lambda\gamma} = \lambda^2 A_\gamma, \qquad \lambda > 0.$$

Schritt 3. Wir erweitern $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch. Dann ist γ einmal stetig differenzierbar. Seien

$$x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}, \qquad y(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{int}.$$

Dann

$$x'(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} ina_n e^{int}, \qquad y'(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} inb_n e^{int}.$$

Nach (13) und Parseval gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[x'(t)^2 + y'(t)^2\right] dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|^2\, dt = 1. \tag{14}$$

Anderseits

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}A_\gamma &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\, dt\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} [x(t)\overline{y'(t)} - y(t)\overline{x'(t)}]\, dt\right| \\
&= \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[(-i)na_n\overline{b_n} - (-i)nb_n\overline{a_n}\right]\right| \\
&\le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\left|a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n}\right| \\
&\le \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2|n||a_n||b_n|.
\end{aligned}$$

Wir benutzen, dass $|n| \le n^2$ und $2|a_n||b_n| \le |a_n|^2 + |b_n|^2$ und folgern daraus, dass

$$\frac{1}{\pi}A_\gamma \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = 1.$$

Daher

$$A_\gamma \le \pi = \frac{(2\pi)^2}{4\pi} = \frac{L_\gamma^2}{4\pi}.$$

Schritt 4. Nehmen wir an, dass $A_\gamma = \frac{L_\gamma^2}{4\pi} = \pi$. Dann gilt $2|n||a_n||b_n| = n^2(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ für $n \in \mathbb{Z}$. Da $|n| < n^2$ für $|n| \ge 2$, ist $a_n = b_n = 0$. Weiter

$$1 = \left|a_{-1}\overline{b_{-1}} - b_{-1}\overline{a_{-1}}\right| + \left|a_1\overline{b_1} - b_1\overline{a_1}\right| \tag{15}$$

und

$$|a_n| = |b_n|,$$

weil

$$(|a_n| - |b_n|)^2 = |a_n|^2 + |b_n|^2 - 2|a_n||b_n| = 0.$$

Da x, y reellwertig sind, gilt

(16) $$a_{-1} = \overline{a_1}, \qquad b_{-1} = \overline{b_1}.$$

Weiter gilt nach (14)

$$1 = |a_{-1}|^2 + |a_1|^2 + |b_{-1}|^2 + |b_1|^2 = 4|a_1|^2.$$

Wir schreiben

$$a_1 = \frac{1}{2}e^{i\alpha}, \qquad b_1 = \frac{1}{2}e^{i\beta}.$$

Dann

$$\begin{aligned} x(t) &= a_{-1}e^{-it} + a_0 + a_1e^{it} = a_0 + \cos(\alpha + t), \\ y(t) &= b_{-1}e^{-it} + b_0 + b_1e^{it} = b_0 + \cos(\beta + t). \end{aligned}$$

Aus (15) und (16) folgt, dass

$$1 = 2\left|a_1\overline{b_1} - b_1\overline{a_1}\right| = \left|\mathrm{Im}[e^{i(\alpha-\beta)}]\right| = |\sin(\alpha - \beta)|.$$

Daher, ist $\cos(\alpha - \beta) = 0$ und

$$\begin{aligned} \cos(\beta + t) &= \cos(\beta - \alpha + \alpha + t) = \cos(\beta - \alpha)\cos(\alpha + t) - \sin(\beta - \alpha)\sin(\alpha + t) \\ &= \pm\sin(\alpha + t). \end{aligned}$$

Deshalb parametrisiert

$$x(t) = a_0 + \cos(\alpha + t), \qquad y(t) = b_0 \pm \sin(\beta + t)$$

einen Kreis (im oder gegen den Uhrzeigersinn). □

Beweis von Satz 73

Beweis.
Schritt 1. Sei $0 \le a < b < 1$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodisch mit

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in (a, b) \\ 0 & x \in [0, 1) \setminus (a, b) \end{cases}.$$

Dann ist $h(x) = 1$ genau dann wenn, $\langle x \rangle \in (a, b)$. Wir stellen fest,

$$\sum_{k=1}^{n} h(\alpha k) = \#\{k : \langle \alpha k \rangle \in (a, b), 1 \le k \le n\}$$

und wir müssen beweisen, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(\alpha k) \to \int_0^1 h(x)\,dx = b-a, \qquad \text{für } n\to\infty. \tag{17}$$

Schritt 2. Sei $f(x)=e^{2\pi i m x}$ - mit $m\in\mathbb{Z}$ - eine Exponentialfunktion. Wir zeigen, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k\alpha) \to \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{für } n\to\infty. \tag{18}$$

Der Fall $m=0$ ist klar. Für $m\neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k\alpha) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{2\pi i m\alpha}\right)^k \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{1-\left(e^{2\pi i m\alpha}\right)^{n+1}}{1-\left(e^{2\pi i m\alpha}\right)}-1\right] \longrightarrow 0, \qquad \text{für } n\to\infty,\end{aligned}$$

während

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{e^{2\pi i m x}}{2\pi i m}\Bigg]_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Wir schließen daraus, dass (18) auch für jedes trigonometrische Polynom $f(x)=\sum_{m=-N}^{N} a_m e^{2\pi i m x}$ gilt.

Schritt 3. Wir zeigen, dass (18) für jede stetige Funktion f gilt.

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 1-periodisch und stetig und $\varepsilon>0$. Nach dem Satz von Féjer (Korollar 28) (mit $f(x/2\pi)$) existiert ein (1-periodisches) trigonometrisches Polynom p, so dass $\|f-p\|_\infty < \varepsilon/3$.

Nach dem Schritt 2 existiert n_0, so dass für $n\geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(k\alpha) - \int_0^1 p(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Daher,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k\alpha) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \\
&\le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big[f(k\alpha)-p(k\alpha)\big]\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(k\alpha) - \int_0^1 p(x)\,dx\right| + \left|\int_0^1 \big[p(x)-f(x)\big]\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(k\alpha)-p(k\alpha)| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(k\alpha) - \int_0^1 p(x)\,dx\right| + \int_0^1 |p(x)-f(x)|\,dx < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Schritt 4. Seien $\varepsilon > 0$ und $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise linear und 1-periodisch mit

$$f_1 \le h \le f_2$$

$$b - a - \varepsilon \le \int_0^1 f_1(x)\,dx \le \int_0^1 f_2(x)\,dx \le b - a + \varepsilon.$$

Dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_1(k\alpha) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(k\alpha) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_2(k\alpha)$$

und nach dem Schritt 3

$$b - a - \varepsilon \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(k\alpha) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(kx) \le b - a + \varepsilon.$$

Wir lassen $\varepsilon \to 0^+$ und erhalten (17). $\square$