5.5 Approximationssatz von Runge

Erinnerung: (Weierstrass) Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann existiert eine Folge von Polynomen
$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$
so dass $p_n \to \varphi$, $n \to \infty$, gleichmässig auf $[a,b]$

Schon gesehen: (Übung 3) kann nicht direkt auf Funktionen
$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \Omega \subset \mathbb{C},$$
verallgemeinert werden, denn gleichmässige Grenzwerte holomorpher Funktionen sind holomorph (Satz 5.2).

<u>Frage</u>: Wann können wir holomorphe Funktionen auf kompakten Mengen durch Polynome approximieren?

<u>Bsp.</u>: Sei $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph
Dann hat f eine Darstellung als Potenzreihe
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
welche auf allen kompakten $K \subset\subset B_R(0)$ gleichmässig konvergiert. Die Teilsummen $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ sind also Polynome, welche $f(z)$ auf K gleichmässig approximieren

Gegen-Bsp: Betrachte $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

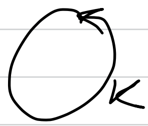
$$z \mapsto 1/z$$

Obige Frage?

Sei K die Einheitskreislinie $K = \{|z| = 1\}$,

dann gilt

$$\int_K f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0$$



Allerdings gilt für jedes Polynom $P(z)$

$$\int_K P(z)\,dz = 0.$$

Satz 5.7 ("Satz von Runge")

Sei f holomorph in einer Umgebung einer kompakten Menge $K \subset\subset \mathbb{C}$.

(i) Dann kann f auf K gleichmässig durch eine Folge von rationalen Funktionen approximiert werden. Das heisst:

$\exists$ Polynome $P_n, Q_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

so dass $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \to f(z)$ glm. auf K, $n \to \infty$.

Ausserdem liegen die Nullstellen von Q_n ausserhalb von K.

(ii) Falls K^c zusammenhängend, dann kann f durch eine Folge von Polynomen glm. auf K approximiert werden

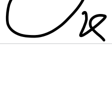
(d.h. (i) gilt mit $Q_n \equiv 1$.)

Bemerkung:

1) $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ sind global definiert. K kann aber mehrere Zusammenhangskomponenten haben, auf denen f unabhängig definiert ist.

$K = K_1 \cup K_2$

2) $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$; $K = \{|z|=1\}$



Zum Beweis des Satzes beginnen wir mit einer Beobachtung:

Lemma 5.8

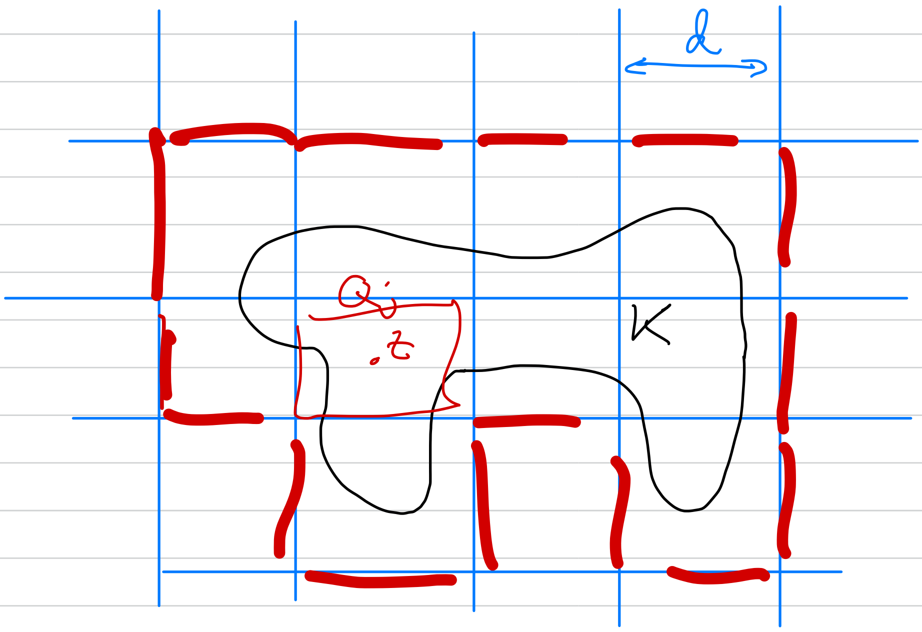
Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, Ω offen.

Für $K \subset\subset \Omega$ kompakt existiert eine endliche Anzahl von Geradensegmenten $\gamma_1, \dots, \gamma_N \subset \Omega \setminus K$, so dass

$$\forall z \in K \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

Beweis:

Sei $d < \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$, und unterteile $\mathbb{C}$ in Quadrate mit Seitenlänge d, parallel der Achsen. Seien $\{Q_1, \dots, Q_M\} = \mathcal{Q}$ die Quadrate, welche K schneiden.



Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ die Seiten von Quadraten in $\mathcal{Q}$, die nur zu einem Rechteck in $\mathcal{Q}$ gehören.

Dank der Wahl von δ gilt, dass $\gamma_n \in \Omega$,

aber $\gamma_n \cap K = \emptyset$, $n \in \{1, \dots, N\}$.

Sei $z \in K \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{M} \partial Q_n\right)$, dann gilt es ein $Q_j \in \mathcal{O}$

und
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & m = j \\ 0, & m \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{M} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

für alle $z \in K \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{M} \partial Q_m\right)$

Hierbei verschwinden Integrale über angrenzende Seiten, und daher gilt
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Dank Stetigkeit gilt dies für alle $z \in K$. $\square$

Um Satz 5.7 (i) zu zeigen genügt es also, die Integrale
$$\int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$
gleichmässig auf kompakten Mengen zu approximieren.

Lemma 5.9

Für jedes Geradensegment $\gamma \subset \Omega \setminus K$ gibt es eine Folge rationaler Funktionen mit Singularitäten ausserhalb von K, welche das Integral

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

auf K glm. approximieren.

Beweis:

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Parametrisierung.
(Hierbei können wir $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$ konstant wählen.)

Es gilt

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_0^1 \underbrace{\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z}\, \gamma'(t)}_{F(z,t)}\, dt$$

Da $\gamma(I) \cap K = \emptyset$, $z \in K$ ist die Funktion

$$z \mapsto F(z,t) \text{ holomorph,}$$

und auf der kompakten Menge $K \times [0,1]$ gleichmässig stetig.

Wir können wie im Beweis von Satz 5.4 argumentieren:

$$\int_0^1 F(z,t)\, dt \quad \text{kann gleichmässig auf } K$$

durch eine Riemann-Summe approximiert werden:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} F\left(z, \frac{k}{N}\right) = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N} \frac{f(\gamma(\frac{k}{N}))}{\gamma(\frac{k}{N}) - z} \gamma'\left(\frac{k}{N}\right)}_{\text{Folge rationaler Funktionen mit Singularitäten ausserhalb von } K.}$$

$$= \int_0^1 F(z,t)\,dt$$

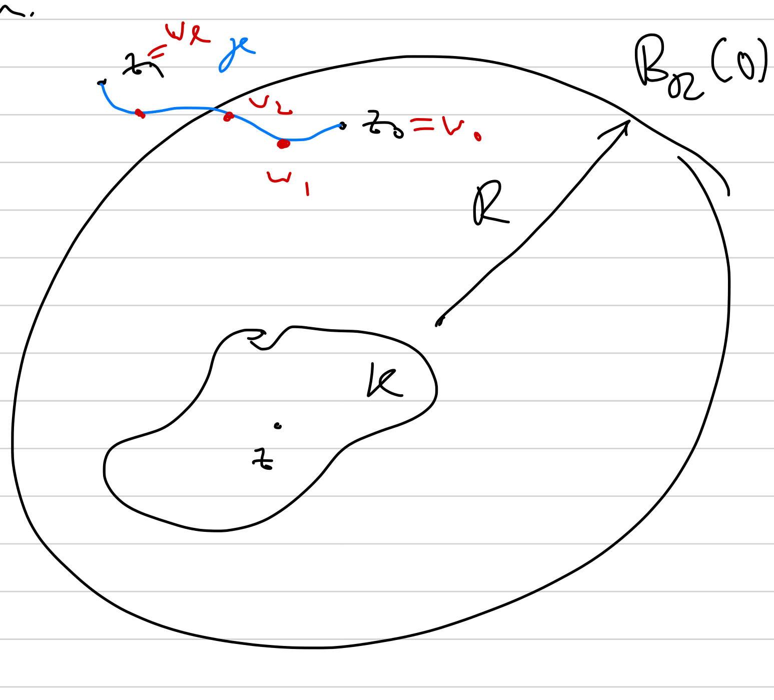
$\square$

Lemma 5.10

Falls K^c zusammenhängend und $z_0 \notin K$, dann kann die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$$

auf K gleichmässig durch Polynome approximiert werden.



Beweis:

Sei $B_R(0) \supset K$ für $R > 0$ genügend gross.

Schritt 1: Wähle $z_1 \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)$. Dann gilt für $z \in K$

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1}\,\frac{1}{1-z/z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

auf K gleichmäßig konvergent.

Insbesondere können auch

$$\frac{1}{(z-z_1)^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

auf K glm. durch Polynome approximiert werden.

Schritt 2: $\frac{1}{z-z_0}$ kann auf K glm. durch Polynome in $\frac{1}{z-z_1}$ approximiert werden.

Hierfür benutzen wir den Zusammenhang von K^c.

Seien $z_0, z_1 \in K^c$ gegeben. Dann $\exists$ eine Kurve $\gamma : [0,1] \to K^c$ mit $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$.

Dann gilt

$$\rho := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \gamma) > 0,$$

da K kompakt.

Seien $\{w_1, \dots, w_\ell\}$ Punkte von γ so dass

$$w_0 = z_0, \quad w_\ell = z_1$$

und $|w_j - w_{j+1}| < \rho$, $\quad 0 \le j \le \ell - 1$.

Seien $w, w' \in \gamma$, $|w - w'| < \rho$,

dann gilt

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w'} \frac{1}{1 - \frac{w-w'}{z-w'}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-w')^n}{(z-w')^{n+1}}$$

also kann $\frac{1}{z-w}$

glm. auf K durch Polynome in $\frac{1}{z-w'}$

approximiert werden.

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-w_0} \xrightarrow[\text{durch}]{\text{approx.}} \frac{1}{z-w_1} \xrightarrow[\text{durch}]{\text{approx}} \frac{1}{z-w_2}$$

$$\longrightarrow \dots \longrightarrow \frac{1}{z-w_\ell} = \frac{1}{z-z_1}$$

$\square$