**Beispiel 1.** *Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Begründe:*

*(a) Die Abbildung* $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto x^5y^4 - ix^4y^5$ *ist holomorph.*

*(b) Die Abbildung* $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto e^y - ie^x$ *ist holomorph.*

*(c) Die Abbildung* $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin\left(z^4|z|^2\right)$ *ist holomorph.*

*(d) Falls* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorph ist, so sind dies auch* $g_1(z) := \overline{f(z)}, g_2(z) := f(\bar{z})$ *und* $g_3(z) := \overline{f(\bar{z})}$.

Wir finden:

(a) Wir prüfen die Cauchy-Riemann Gleichungen, dabei gilt $u(x + iy) = x^5y^4, v(x + iy) = -x^4y^5$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4y^4 \neq -5x^4y^4 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

(b) Wir prüfen die Cauchy-Riemann Gleichungen, dabei gilt $u(x+iy) = e^y, v(x+iy) = -e^x$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \neq -e^x = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

(c) Der Sinus ist eine Potenzreihe, die überall konvergiert, also ist die Funktion holomorph.

(d) $g_1(z)$ und $g_2(z)$ sind im Allgemeinen nicht holomorph, wie man an dem Beispiel $f(z) = z$ sieht. Für $g_3(z)$ hingegen finden wir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g_3(z+h) - g_3(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z+h}) - \overline{f(\bar{z})}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}}\right)} = \overline{f'(\bar{z})}$$

Also ist die Funktion holomorph.

**Beispiel 2.** *Sei*

$$\alpha(t) := \begin{cases} 1 - e^{it}, & t \in [0, 2\pi], \\ -1 + e^{-it}, & t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

*Skizziere die durch* $\alpha$ *parametrisierte Kurve und berechne das Kurvenintegral*

$$\int_\alpha ze^{z^2} dz$$

Da $ze^{z^2}$ und $\alpha(0) = 1 - e^{i0} = 0 = -1 + e^{-i4\pi} = \alpha(4\pi)$ ist die Kurve geschlossen und die Funktion holomorph. Damit ist das gegebene Integral 0. Wir finden:

$$\int_\alpha ze^{z^2} dz = -i \left( \int_0^{2\pi} (1 - e^{it}) e^{(1-e^{it})^2} e^{it} + \int_{2\pi}^{4\pi} (-1 + e^{-it}) e^{(-1+e^{-it})^2} e^{-it} \right)$$

**Beispiel 3.** *Seien* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph. Sei* $R \subset \mathbb{C}$ *ein solides Rechteck und* $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eine* $C^1$ *Funktion mit* $\varphi(R) \subset \Omega$*. Zeige: Parametrisiert* $\gamma$ *den Rand von* $\varphi(R)$*, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

**Beispiel 4.** *Berechne die folgenden Integrale:*

(a) *Für* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\int_C z^n dz$$

*wobei* $C$ *ein im Ursprung zentrierter, positiv orientierter Kreis ist.*

(b) *Für* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\int_C z^n dz$$

*wobei* $C$ *der positiv orientierte Rand einer Kreisscheibe* $\partial B_R(z)$ *ist mit* $0 < R < |z|$.

(c) *Für* $0 < a < r < b$ *:*

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz,$$

*wobei* $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ *mit positiver Orientierung.*

**Beispiel 5.** *Sei* $f$ *holomorph auf* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, und* $T \subset \Omega$ *ein Dreieck dessen Inneres auch in* $\Omega$ *enthalten ist. Gemäss Satz von Goursat gilt dann, dass*

$$\int_T f(z)dz = 0.$$

*Beweise dies mittels Satz von Green unter der zusätzlichen Annahme, dass die Ableitung* $f'$ *stetig ist.*