Beispiel 1. *Beschreibe die folgenden Punktmengen von $z \in \mathbb{C}$ der komplexen Ebene geometrisch:*

(a) $|z - z_1| = |z - z_2|$ *für vorgegebene* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(b) $\frac{1}{z} = \bar{z}$

(c) $\mathfrak{Re}(az + b) > 0$ *für gegebene* $a, b \in \mathbb{C}$

(d) e^z *für* $0 \leq \mathfrak{Re}(z) \leq 1$ *und* $0 \leq \mathfrak{Im}(z) \leq \pi$

(a) Die Menge ist die Symmetrieachse zwischen z_1 und z_2. Gilt $z_1 = z_2$, so ist die Menge natürlich die gesamte komplexe Ebene.

(b) Wir wissen, dass $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ gilt. Ein Element z_0 liegt also genau dann in der Menge, wenn $|z_0| = 1$ gilt, also ist es der Einheitskreis.

(c)

(d) Mit $z = x + iy, xy \in \mathbb{R}$ finden wir:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^i y$$

e^x ist ein reeller Skalar im Intervall $[0, e]$ und e^{iy} ist eine komplexe Zahl, die auf der oberen Hälfte des Einheitskreises liegt. Zusammengesetzt ist diese Menge also die obere Hälfte der Kreisscheibe um den Ursprung, die Radius e hat.

Beispiel 2. *Seien $s \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gegeben. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $z^n = se^{i\varphi}$, für $n \in \mathbb{N}$? Finde sie.*

Wir schreiben $z^n = re^{i\theta}$. Damit nun die gegebene Gleichung erfüllt wird, muss ein n existieren sodass $r^n = s$, das ist schoneinmal nur möglich, wenn

(i) $t = s = 0$, ist der triviale uninteressante Fall.

(ii) $t = s = 1$, dann erfüllt jedes n die obige Gleichung.

(iii) $0 < t, s < 1$, dann gibt es eine oder keine Lösung.

(iv) $1 < t, s$, dann gibt es eine oder keine Lösung.

Im ersten Fall sind beide Punkte die Nullpunkte und jedes n erfüllt die Gleichung.

Im zweiten Fall gibt es genau dann keine Lösung, wenn es keine Lösung von

$$\varphi = n\theta \mod 2\pi$$

gibt. Andererseits ist jede Lösung der obigen Gleichung auch Lösung des gegebenen Problems.

Angenommen es gibt im dritten Fall ein n, dann ist dieses genau dann eine Lösung der ersten Gleichung, wenn $\varphi = n\theta \mod 2\pi$ gilt.

Im vierten Fall genau wie im dritten Fall.

Beispiel 3. *Sei* $w \in B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *ein Element der Einheitskreisscheibe, und definiere:*

$$F(z) := \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}.$$

Zeige, dass dies eine Abbildung definiert mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $F : B_1(0) \to B_1(0)$, *d.h.* F *bildet die Einheitskreisscheibe auf sich selber ab, und ist holomorph,*

(b) F *vertauscht die Punkte* $0, w \in B_1(0) : F(0) = w, F(w) = 0$,

(c) Für $|z| = 1$ *gilt* $|F(z)| = 1$,

(d) $F : B_1(0) \to B_1(0)$ *ist bijektiv.*

(a) Die Funktion ist eine Selbstabbildung, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{|w - z|}{|1 - \bar{w}z|} < 1 &\Leftrightarrow |w - z|^2 < |1 - \bar{w}z|^2 \\
&\Leftrightarrow (w - z)(\bar{w} - \bar{z}) < (1 - \bar{w}z)(1 - w\bar{z}) \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z < 1 + |w|^2|z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 < 1 + |w|^2|z|^2
\end{aligned}$$

Die Funktion ist holomorph, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{F(z + h)F(z)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{w - z - h}{1 - \bar{w}z - \bar{w}h} - \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{w - z - h - |w|^2 z + \bar{w}z^2 + \bar{w}zh - w + z + |w|^2 z - \bar{w}z^2 + |w|^2 h - \bar{w}zh}{(1 - \bar{w}z - \bar{w}h)(1 - \bar{w}z)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1 + |w|^2}{(1 - \bar{w}z - \bar{w}h)(1 - \bar{w}z)} \\
&= \frac{-1 + |w|^2}{(1 - \bar{w}z)^2}
\end{aligned}$$

(b) Wir finden natürlich:

$$F(0) = \frac{w - 0}{1 - 0} = w \quad \wedge \quad F(w) = \frac{w - w}{1 - \bar{w}w} = 0$$

(c) Sei z mit $|z| = 1$ beliebig:

$$\begin{aligned}
\frac{|w - z|}{|1 - \bar{w}z|} = 1 &\Leftrightarrow |w - z|^2 = |1 - \bar{w}z|^2 \\
&\Leftrightarrow (w - z)(\bar{w} - \bar{z}) = (1 - \bar{w}z)(1 - w\bar{z}) \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z = 1 + |w|^2|z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 = 1 + |w|^2|z|^2 \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + 1 = 1 + |w|^2
\end{aligned}$$

(d) Zuerst beweisen wir die Injektivität:

$$\begin{aligned}
F(z_1) &= F(z_2) \\
\frac{w - z_1}{1 - \bar{w}z_1} &= \frac{w - z_2}{1 - \bar{w}z_2} \\
(w - z_1)(1 - \bar{w}z_2) &= (w - z_2)(1 - \bar{w}z_1) \\
w - |w|^2 z_2 - z_1 + \bar{w}z_1 z_2 &= w - |w|^2 z_1 - z_2 + \bar{w}z_1 z_2 \\
-|w|^2 z_2 + z_2 &= -|w|^2 z_1 + z_1 \\
z_2(1 - |w|^2) &= z_1(1 - |w|^2) \\
z_2 &= z_1
\end{aligned}$$

Sei nun $z_0 \in B_1(0)$ beliebig. Nehmen wir an wir finden ein z mit $F(z) = z_0$:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \\
z_0 &= w - z + \bar{w}zz_0 \\
z_0 - w &= z \underbrace{(\bar{w}z_0 - 1)}_{\neq 0} \\
z &= \frac{z_0 - w}{(\bar{w}z_0 - 1)} = -F(z_0) \in B_1(0)
\end{aligned}$$

Also ist die Funktion bijektiv.

Beispiel 4. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:*

(a) *Sowohl Real- als auch Imaginärteil von f sind harmonische Funktionen. (Erinnerung: Eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt harmoische, falls $g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.)*

(b) *Falls Ω zusammenhängend ist und f nur reelle Werte annimmt, d.h. $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, dann ist f konstant.*

Wir schreiben $f(z) = u(z) + iv(z)$. Wir kennen die Riemann-Cauchy Gleichungen, die gelten, da f holomorph ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Mit dem Satz von Schwarz folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y)$$

Also sind sowohl u und v harmonisch.

Wieder zerlegen wir $f(z) = u(z) + iv(z)$. Wenn f nur reelle Werte annimmt gilt natürlich $\forall z \in \Omega | v(z) = 0$. Der Imaginärteil ist also konstant, damit ist die Ableitung 0 und somit sind auch die partiellen Ableitungen 0. Nach Gültigkeit der Riemann-Cauchy Gleichungen sind auch die partiellen Ableitungen von u gleich 0. Damit ist auch u konstant.

Beispiel 5. *Sei* $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Zeige:*

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < \infty$, *dann gilt* $R = \frac{1}{L}$.

(b) Für jeden Punkt $z_0 \in B_R(0)$ *kann* f *auch als Potenzreihe um* z_0 *geschrieben werden.*