Beispiel 1. *Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Begründe:*

(a) Die Abbildung $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto x^5y^4 - ix^4y^5$ *ist holomorph.*

(b) Die Abbildung $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto e^y - ie^x$ *ist holomorph.*

(c) Die Abbildung $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin\left(z^4|z|^2\right)$ *ist holomorph.*

(d) Falls $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorph ist, so sind dies auch* $g_1(z) := \overline{f(z)}, g_2(z) := f(\bar{z})$ *und* $g_3(z) := \overline{f(\bar{z})}$.

Wir finden:

(a) Wir prüfen die Cauchy-Riemann Gleichungen, dabei gilt $u(x + iy) = x^5y^4, v(x + iy) = -x^4y^5$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4y^4 \neq -5x^4y^4 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

(b) Wir prüfen die Cauchy-Riemann Gleichungen, dabei gilt $u(x+iy) = e^y, v(x+iy) = -e^x$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \neq e^x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

(c) Wäre die Funktion holomorph auf $\mathbb{C}$ so müsste ihr Integral über eine geschlossene Kurve verschwinden. Wir betrachten hierfür die Kurven

$$\gamma_1 : (0, \pi) \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}, \gamma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$$

und finden damit:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \sin\left(z^4|z|^2\right)\, dz + \int_{\gamma_2} \sin\left(z^4|z|^2\right)\, dz &= \int_0^\pi \sin\left(e^{4it}\right) ie^{it}\, dt + \underbrace{\int_{-1}^1 \sin(t^6), dt}_{=:r\in\mathbb{R}} \\
&= i\int_0^\pi \frac{e^{4it} - e^{-4it}}{2i} e^{it}\, dt + r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{5it} - e^{-3it}\, dt + r \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5i}e^{5it} + \frac{1}{3i}e^{-3it}\right]_0^\pi + r \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5i} - \frac{1}{3i} - \frac{1}{5i} - \frac{1}{3i}\right) + r \\
&= r + i\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \neq 0
\end{aligned}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

Geht leichter mit Ableitung nach $\bar{z}$. Nochmal anschauen, nich ganz verstanden.

(d) $g_1(z)$ und $g_2(z)$ sind im Allgemeinen nicht holomorph, wie man an dem Beispiel $f(z) = z$ sieht. Für $g_3(z)$ hingegen finden wir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g_3(z+h) - g_3(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}}\right)} = \overline{f'(\bar{z})}$$

Also ist die Funktion holomorph.

Beispiel 2. *Sei*

$$\alpha(t) := \begin{cases} 1 - e^{it}, & t \in [0, 2\pi], \\ -1 + e^{-it}, & t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Skizziere die durch α parametrisierte Kurve und berechne das Kurvenintegral

$$\int_\alpha z e^{z^2} dz$$

Die Kurve entspricht einem "8er", also zuerst ein Kreis um $(1, 0)$ der mit positiver Orientierung durchlaufen wird und dann ein Kreis um $(-1, 0)$ der mit negativer Orientierung durchlaufen wird.

Da ze^{z^2} und $\alpha(0) = 1 - e^{i0} = 0 = -1 + e^{-i4\pi} = \alpha(4\pi)$ ist die Kurve geschlossen und die Funktion holomorph. Damit ist das gegebene Integral 0.

Oder Stammfunktion raten.

Beispiel 3. *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $R \subset \mathbb{C}$ ein solides Rechteck und $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine bijektive C^1 Funktion mit $\varphi(R) \subset \Omega$. Zeige: Parametrisiert γ den Rand von $\varphi(R)$, so gilt*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Wir adaptieren den Beweis von Goursat für Rechtecke. Dafür unterteilen wir unser Rechteck $R^{(0)}$ mit positiver Orientierung und $d^{(0)}$ und $u^{(0)}$ für Durchmesser und Umfang. Wir verbinden nun gegenüberliegende Mittelpunkte um so 4 neue Rechtecke zu konstruieren. Eines dieser Rechtecke $R^{(1)}$ erfüllt

$$\left|\int_{R^{(0)}} f(z)dz\right| = \left|\int_{R_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{R_2^{(1)}} f(z)dz + \int_{R_3^{(1)}} f(z)dz + \int_{R_4^{(1)}} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{R^{(1)}} f(z)dz\right|$$

Weiter gilt $d^{(1)} = \frac{1}{2}d^{(0)}$ und $p^{(1)} = \frac{1}{2}p^{(0)}$.

Nach Proposition 1.4 finden wir einen eindeutigen Punkt z_0 der in $\lim_{n\to\infty} R^{(n)}$ liegt. Mit f holomorph finden wir somit $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)$. $f(z_0)$ sowie $f'(z_0)(z - z_0)$ haben als konstante bzw. lineare Funktion Stammfunkionen, also gilt

$$\int_{R^{(n)}} f(z)dz = \int_{R^{(n)}} \psi(z)(z - z_0)dz$$

Nun muss natürlich im Rechteck $R^{(n)}$ $|z - z_0| \leq d^{(n)}$ gelten. Somit haben wir:

$$\left|\int_{R^{(n)}} f(z)dz\right| \leq \sup_{z \in R^{(n)}} |\psi(z)| d^{(n)} p^{(n)} \leq \varepsilon_n 4^{-n} d^{(0)} p^{(0)}$$

Gesamt gilt damit:

$$\left|\int_{R^{(0)}} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{R^{(n)}} f(z)dz\right| \leq \varepsilon_n d^{(0)} p^{(0)}$$

Für $n \to \infty$ geht $\varepsilon_n \to 0$.

φ bijektiv, stetig, kompakt, also Homoömorphismus. Also bildet der Rand von R auf den Rand von $\varphi(R)$.
φ außerdem Lipschitzstetig, weil wir auf einem kompakten Intervall arbeiten. Dadurch kann man Umfang und Durchmesser mit L abschätzen.
Dann Beweis von Goursat, jeweils mit L.

Beispiel 4. *Berechne die folgenden Integrale:*

(a) Für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_C z^n dz$$

wobei C ein im Ursprung zentrierter, positiv orientierter Kreis ist.

(b) Für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_C z^n dz$$

wobei C der positiv orientierte Rand einer Kreisscheibe $\partial B_R(z)$ ist mit $0 < R < |z|$.

(c) Für $0 < a < r < b$:

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz,$$

wobei $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ mit positiver Orientierung.

(a) Weil C geschlossen und z^n holomorph für $n \geq 0$ ist, verschwindet das Integral in diesen Fällen. Wenn $n < 0$ finden wir mit der Parametrisierung $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$

$$\int_C z^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n rie^{it}\, dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\, dt$$

Im Fall $n = -1$ ergibt diese Integral $i2\pi$, andernfalls erhalten wir $\left[\frac{ir^{n+1}e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = 0$

(b) Alle gegebenen Funktionen sind Zusammensetzungen holomorpherfunktionen (deren Quotient nirgendwo verschwindet), also ist das Integral jeweils 0. Für $n \neq -1$ finden wir die Stammfunktion $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$, da der Kreis eine geschlossene Kurve ist, finden wir (mit einer beliebigen Parametrisierung von z_0 nach z_0):

$$\int_C z^n dz = F(z_0) - F(z_0) = 0$$

Nun behandeln wir den Fall $n = -1$. Dafür nehmen wir die Kurve $\varphi : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}, t \mapsto z + R \cdot e^{it}$. Damit finden wir:

$$\int_C z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z + R \cdot e^{it}} \cdot Rie^{it}\, dt = \int_{z+R}^{z+R} \frac{1}{u}\, du = 0$$

(c) Wir parametrisieren die Kurve mit $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ und finden damit:

$$
\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz &= \int_C -\frac{1}{(b-a)(z-a)} dz + \int_C \frac{1}{(b-a)(z-b)} dz \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\int_C \frac{1}{z-a}\, dz + \int_C \frac{1}{b-z}\, dz\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\int_C \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\, dz + \int_C \frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\, dz\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\int_C \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\, dz + \int_C \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n\, dz\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_C \frac{1}{z^{n+1}}\, dz + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b^{n+1}}\int_C z^n\, dz\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\pi})^{n+1}} rie^{i\pi}\, dt + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b^{n+1}}\int_0^{2\pi} (re^{i\pi})^{n+1} rie^{i\pi}\, dt\right) \\
&= \frac{i}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \int_0^{2\pi} e^{-itn}\, dt + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\, dt\right) \\
&= \frac{i}{a-b}\left(2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{-1}{in}[e^{-itn}]_0^{2\pi} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^{n+1}\frac{1}{i(n+1)}[e^{-it(n+1)}]_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{a-b}
\end{aligned}
$$

Funktioniert auch mit der Cauchy-Integralformel.

Beispiel 5. *Sei f holomorph auf $\Omega \subset \mathbb{C}$, und $T \subset \Omega$ ein Dreieck dessen Inneres auch in Ω enthalten ist. Gemäss Satz von Goursat gilt dann, dass*

$$\int_T f(z)dz = 0.$$

Beweise dies mittels Satz von Green unter der zusätzlichen Annahme, dass die Ableitung f' stetig ist.

Der Satz von Green besagt:

$$\int_T F\, dx + G\, dy = \int_{\text{Inneres von } T}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dxdy$$

Wir bezeichnen im Folgenden das Innere des Dreiecks mit T°
Wir schreiben nun $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sowie $dz = dx + idy$:

$$\int_T f(z)dz = \int_T (u+iv)(dx+idy) = \int_T u\, dx - v\, dy + i\int_T u\, dy + v\, dx$$

Mit dem Satz von Green:

$$= \iint_{T^\circ}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_{T^\circ}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0$$

Wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Cauchy-Riemann-Gleichungen gilt.