Beispiel 1.

(i) *Seien $f : S^1 \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodische Funktion $g(x) := f(e^{ix})$. Zeigen Sie, dass f stetig ist, genau dann wenn g stetig ist.*

(ii) *Zeigen Sie, dass für jede 2π-periodische und stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion $f : S^1 \to \mathbb{C}$ existiert, mit $g(x) = f(e^{ix})$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.*

(Hier, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.)

Ist f stetig, so ist g als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Ist hingegen g stetig und $z_n \to z$ eine Konvergente Folge auf S^1. Dann finden wir eine Folge $\theta_n \to \theta$ mit $e^{i\theta_n} = z_n$ und $e^{i\theta} = z$. Denn nehmen wir an, das wäre nicht der Fall, dann würden wir eine Teilfolge θ_{n_k} finden, die nicht gegen θ sondern gegen $\tilde{\theta}$ (mit $\theta \neq \tilde{\theta} \mod 2\pi$) konvergiert (weil S^1 kompakt ist). Dann gilt aber $|z_{n_k} - z| = \left|e^{i\theta_{n_k}} - e^{i\theta}\right| \nrightarrow 0$. Damit finden wir nun für die Folge z_n:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(e^{i\theta_n}) = \lim_{n\to\infty} g(\theta_n) = g(\theta) = f(e^{i\theta}) = f(z)$$

Also haben wir auch die Umkehrung gezeigt.

Wir betrachten g für den zweiten Unterpunkt zuerst nur auf $[-\pi, \pi]$. Dann definieren wir f durch $f(z) = f(e^{i\theta}) := g(\theta)$. Dabei schreiben wir z immer mit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Sei nun $\alpha := \theta + 2k\pi$ beliebig:

$$g(\alpha) = g(\theta + 2k\pi) = g(\theta) = f(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta} \cdot e^{2k\pi}) = f(e^{i\alpha})$$

Also erfüllt unser f die Bedingung $g(x) = f(e^{ix})$. Weiter wissen wir, aus Punkt 1, dass f stetig ist.

Beispiel 2. *Betrachten Sie die 2π-periodische ungerade Funktion, die auf $[0, \pi]$ durch $f(x) = x(\pi - x)$ definiert ist.*

(i) *Zeichnen Sie den Graphen von f.*

(ii) *Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von f und zeigen Sie, dass:*

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k\geq 1 \text{ ungerade}} \frac{\sin(kx)}{k^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Wir zeichnen die Funktion im Intervall $[0, \pi]$ und setzen sie zuerst ungerade und dann periodisch fort. Damit erhalten wir Nun bestimmen wir die Fourierkoeffizienten für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
2\pi \hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{0} x(\pi + x)e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} x(\pi - x)e^{-inx}dx \\
&= \int_{-\pi}^{0} \pi x e^{-inx}dx + \int_{-\pi}^{0} x^2 e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} \pi x e^{-inx}dx - \int_{0}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \pi x e^{-inx}dx + \int_{-\pi}^{0} x^2 e^{-inx}dx - \int_{0}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx
\end{aligned}$$

Wir berechnen die zugehörigen Stammfunktionen durch partielles Integrieren:

$$\int \pi x e^{-inx}dx = \frac{\pi x e^{-inx}}{-in} - \frac{\pi}{-in}\int e^{-inx}dx = \frac{\pi x e^{-inx}}{-in} + \frac{\pi}{n^2}e^{-inx}$$

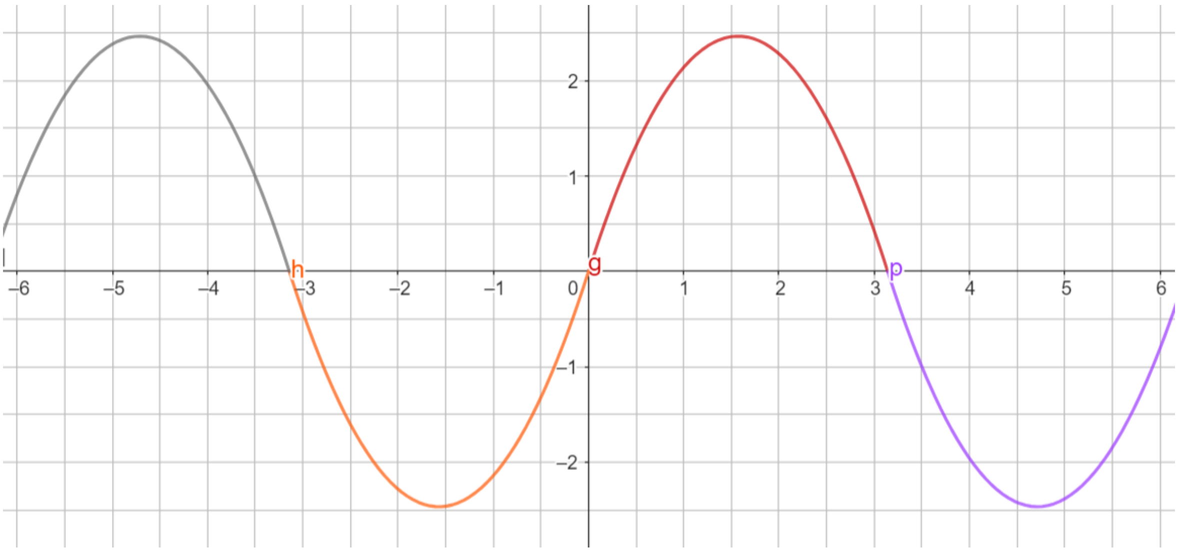

Figure 1: f(x)

und

$$\int x^2 e^{-inx} dx = \frac{x^2 e^{-inx}}{-in} - \frac{2}{-in}\int x e^{-inx} dx = \frac{x^2 e^{-inx}}{-in} + \frac{2}{in}\cdot\frac{xe^{-inx}}{-in} + \frac{2}{in}\cdot\frac{1}{n^2}e^{-inx}$$

Wir setzen die Grenzen ein:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \pi x e^{-inx} dx + \int_{-\pi}^{0} x^2 e^{-inx} dx - \int_{0}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx \\
&= \frac{\pi^2 e^{-in\pi}}{-in} + \frac{\pi e^{-in\pi}}{n^2} + \frac{\pi^2 e^{-in\pi}}{-in} - \frac{\pi e^{-in\pi}}{n^2} + \\
&\frac{2}{in^3} + \frac{\pi^2 e^{in\pi}}{in} + \frac{2\pi e^{in\pi}}{n^2} - \frac{2e^{in\pi}}{in^3} + \\
&\frac{\pi^2 e^{in\pi}}{in} - \frac{2\pi e^{in\pi}}{n^2} - \frac{2e^{-in\pi}}{in^3} + \frac{2}{in^3} \\
&= -\frac{4i}{n^3} + \frac{4ie^{-in\pi}}{n^3} = \frac{4i((-1)^n - 1)}{n^3}
\end{aligned}$$

Also gilt $\hat{f}(n) = \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3}$.

Für $n = 0$ finden wir hingegen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} \pi x dx + \int_{-\pi}^{0} x^2 dx - \int_{0}^{\pi} x^2 dx \\
&= \frac{\pi}{2}(\pi^2 - \pi^2) - \frac{1}{3}\pi^3 + \frac{1}{3}\pi^3 = 0
\end{aligned}$$

Da die Funktion stetig und periodisch ist, konvergiert die Fourierreihe gegen f. Damit haben wir insgesamt (mit $\mathbb{Z}^-$ für negative ganze Zahlen und $\mathbb{Z}^+$ für positive):

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} e^{inx} \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^-} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} e^{inx} + \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} e^{inx} \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{-\pi n^3} e^{-inx} + \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} e^{inx} \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} (e^{inx} - e^{-inx}) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} (e^{inx} - e^{-inx}) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+,\ \text{ungerade}} \frac{-4i}{\pi n^3} (e^{inx} - e^{-inx}) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+,\ \text{ungerade}} \frac{8}{\pi n^3} \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\
&= \frac{8}{\pi} \sum_{\mathbb{Z}^+,\ \text{ungerade}} \frac{\sin(nx)}{n^3}
\end{aligned}$$