Beispiel 1. *Seien $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$. Zeigen Sie, dass*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

Wir finden mit der Polarisationsformel:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx &= \langle f, g\rangle \\
&= \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f-ig\|^2 - i\|f+ig\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(\|\widehat{f+g}\|^2 - \|\widehat{f-g}\|^2 + i\|\widehat{f-ig}\|^2 - i\|\widehat{f+ig}\|^2) \\
&= \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}
\end{aligned}$$

Die folgende Reihe konvergiert absolut, weil das Skalarprodukt in L^2 stetig ist (?):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}\overline{\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}(m)e^{imx}}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(m)}e^{i(n-m)x}dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(m)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(m)}\delta_{m,n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}
\end{aligned}$$

Beispiel 2. *(Verbesserung von Korollar 14) Beweisen Sie, dass die Fourier-Reihe einer stetig differenzierbaren und periodischen Funktion absolut konvergent ist. (Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Parseval-Identität für die Ableitungsfunktion.)*

Wir wissen aus Satz 12, dass $\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$ gilt.

Da f stetig ist, ist die Funktion integrierbar und damit ist $f' \in L^2$. Damit gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{1}{n}|\hat{f}'(n)| \leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} |\hat{f}'(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < C\|f'(x)\|_{L^2} < \infty$$

Beispiel 3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und C^k (d.h., k-mal stetig differenzierbar). Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\pm\infty} (1+|n|)^k|\hat{f}(n)| = 0.$$

Dies ist eine Verbesserung gegenüber einer vorherigen Übung. (Hint: Verwenden Sie das Riemann-Lebesgue-Lemma.)

Wir beginnen mit einer ähnlichen Abschätzung wie auf Übungsblatt 10:

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{(in)^k} \widehat{f^{(k)}}(n) \right| = \frac{1}{|n|^k} |\widehat{f^{(k)}}(n)|$$

Nun ist nach der Angabe $f^{(k)}(x)$ stetig und damit auf kompakten Intervallen beschränkt. Die Funktion $f^{(k)}(n)$ ist somit integrierbar und nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma (Übungsblatt 11) gilt damit $\widehat{f^{(k)}}(n) \to 0$. Damit bekommen wir:

$$\lim_{n\to\pm\infty} (1 + |n|)^k |\hat{f}(n)| \leq \lim_{n\to\pm\infty} \frac{(1 + |n|)^k}{|n|^k} \left| \widehat{f^{(k)}}(n) \right| = 0$$

Wobei der letzte Schritt aus Riemann-Lebesgue folgt.

Beispiel 4. *Wir werden die Ungleichungen von Wirtinger und Poincaré beweisen, die einen Zusammenhang zwischen die Norm einer Funktion und die ihrer Ableitung herstellen.*

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodisch, stetig und stückweise C^1 (d.h., einmal stetig differenzierbar) mit $\int_0^T f(x)dx = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \left|f'(x)\right|^2 dx$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f(x) = A\sin(2\pi x/T) + B\cos(2\pi x/T)$. (Hint: Wenden Sie Parsevals Identität an.)

(b) Sei f wie oben und g C^1 und T*-periodisch, Zeigen Sie, dass*

$$\left| \int_0^T \overline{f(x)} g(x)dx \right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(x)|^2 dx \int_0^T \left|g'(x)\right|^2 dx.$$

(c) Zeigen Sie, dass für jedes kompakte Intervall $[a, b]$ und jede stetig differenzierbare Funktion f mit $f(a) = f(b) = 0$,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \left|f'(x)\right|^2 dx$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f(x) = A\sin\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$. (Hint: Erweitern Sie f so, dass es bezüglich a ungerade und T-periodisch ist, mit $T = 2(b-a)$, so dass sein Integral über ein Intervall der Länge T null ist.)

Nach dem Beweis für Satz 12 gilt allgemeiner:

$$\begin{aligned} T\hat{f}(n) &= \int_0^T f(x)e^{-\frac{2\pi inx}{T}} dx = \int_0^T f(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{T}{-2\pi in}e^{-\frac{2\pi inx}{T}}\right] dx \\ &= \left[f(x)\frac{T}{-2\pi in}e^{-\frac{2\pi inx}{T}}\right]_0^T - \int_0^T f'(x)\frac{T}{-2\pi in}e^{-\frac{2\pi inx}{T}} dx = \frac{T^2}{-2\pi in}\hat{f'}(n) \\ &\Rightarrow \hat{f}(n) = \frac{T}{2\pi in}\hat{f'}(n) \end{aligned}$$

Weiter sehen wir, dass nach Vorraussetzung

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = 0$$

gilt. Damit bekommen wir:

$$\int_0^T |f(x)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{f}(x)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^2|\hat{f}(x)|^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{f}'(x)|^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(x)|^2 dx$$

Damit Gleichheit gilt müssen alle Fourierkoeffizienten außer $\hat{f}(1)$ und $\hat{f}(-1)$ verschwinden. Damit muss unsere Fourierreihe wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \hat{f}(-1)e^{-\frac{2\pi ix}{T}} + \hat{f}(1)e^{\frac{2\pi ix}{T}} \\ &= \hat{f}(-1)\left(\cos\left(-\frac{2\pi x}{T}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi x}{T}\right)\right) + \hat{f}(1)\left(\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\right) \\ &= (\hat{f}(1) + \hat{f}(-1))\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + i(\hat{f}(1) - \hat{f}(-1))\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \end{aligned}$$

Für den zweiten Unterpunkt sehen wir durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und den ersten Unterpunkt:

$$\left|\int_0^T \overline{f(x)}g(x)dx\right|^2 \leq \int_0^T |f(x)|^2dx \int_0^T |g(x)|^2\,dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(x)|^2dx \int_0^T \left|g'(x)\right|^2 dx$$

[Falsch: g muss man noch anpassen, weil das Integral nicht notwendigerweise verschwindet, $h(x) = g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$]. Wie im Hinweis gegeben betrachten wir die ungerade (bzgl. a) Funktion f auf einem Intervall mit Länge $T = 2(b-a)$. Damit ist das Integral über f auf jedem Intervall mit Länge T gleich 0 und somit können wir die Ungleichung des ersten Punktes anwenden und bekommen damit die erste Behauptung direkt. Gleicheit gilt damit genau dann wenn die Funktion

$$f(x-a) = A\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right) + B\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)$$

Diese Form hat (eigentlich $f(x)$, nur gleich $(x-a)$ geschrieben wegen dem Folgenden.) Diese Funktion ist um $x = 0$ ungerade und damit muss B gleich 0 sein.