Beispiel 1. *Zeige dass für $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}$$

wobei $\cosh(z) := \frac{e^z+e^{-z}}{2}$. *(Hinweis: Benutze den Residuensatz für eine geeignete Rechteck-Kontour und die Periodizität von $e^{\pi z}$.)*

Sei $f(z) := \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{\cosh(\pi z)}$. Zuerst bemerken wir, dass der Nenner genau dann verschwindet, wenn $e^z = -e^{-z} \Rightarrow e^{2\pi z} = -1$ gilt. Somit muss $2\pi z = i\pi \mod 2\pi$. Wir betrachten nun das Rechteck auf der x-Achse von $-R$ bis R und mit der Höhe bis $2i$. Die einzigen Pole in diesem Rechteck sind $z_1 = i/2$ und $z_2 = 3i/2$. Die Residuen dieser Pole sind:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{2e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} \\ &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{2e^{\pi z}e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}(e^{\pi z}-e^{2\pi z_1}e^{-\pi z})} \\ &= \lim_{z\to z_1} 2e^{-2\pi i z\xi}e^{\pi z}\frac{z-z_1}{e^{2\pi z}-e^{2\pi z_1}} \\ &= 2e^{-2\pi i z_1\xi}e^{\pi z_1}\frac{1}{2\pi e^{2\pi z_1}} = \frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}\end{aligned}$$

Somit hat f erstens einen einfachen Pol und wir haben auch gleich das Residuum. Genauso finden wir:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{2e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} \\ &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{2e^{\pi z}e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}(e^{\pi z}-e^{2\pi z_2}e^{-\pi z})} \\ &= \lim_{z\to z_2} 2e^{-2\pi i z\xi}e^{\pi z}\frac{z-z_2}{e^{2\pi z}-e^{2\pi z_2}} \\ &= 2e^{-2\pi i z_2\xi}e^{\pi z_2}\frac{1}{2\pi e^{2\pi z_2}} = -\frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}\end{aligned}$$

Für die rechte Seitenfläche finden wir mit $z = R + iy$ mit $0 \leq y \leq 2$:

$$\frac{|e^{-2\pi i z\xi}|}{|\cosh(\pi z)|} \leq \frac{2e^{4\pi|\xi|}}{||e^{\pi z}| - |e^{-\pi z}||} = \frac{2e^{4\pi|\xi|}}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}} \to 0$$

Genauso finden wir für die linke Seitenfläche:

$$\frac{|e^{-2\pi i z\xi}|}{|\cosh(\pi z)|} \leq \frac{2e^{4\pi|\xi|}}{||e^{\pi z}| - |e^{-\pi z}||} = \frac{2e^{4\pi|\xi|}}{e^{-\pi R} - e^{\pi R}} \to 0$$

Nun bemerken wir, dass die Funktion entlang der y-Achse "periodisch" ist. Denn es gilt:

$$f(z+2i) = \frac{e^{4\pi\xi}e^{-2\pi i z\xi}}{\frac{e^{z\pi+2\pi i}+e^{-(z\pi+2\pi i)}}{2}} = e^{4\pi\xi}f(z)$$

Gesamt haben wir also bis jetzt:

$$\int_R f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)}dx - e^{4\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)}dx = 2\pi i\left(\frac{e^{\pi\xi}}{\pi i} - \frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}\right) = 2(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)}dx = \frac{-2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi})}{1-e^{4\pi\xi}} = \frac{-2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi})}{-e^{2\pi\xi}(e^{2\pi\xi}-e^{-2\pi\xi})} = \frac{2(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi})}{(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi})(e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi})} =$$

Damit haben wir wie gewünscht:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)}dx = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}$$

Beispiel 2. *Berechne das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx, \quad a > 0.$$

Wir können faktorisieren:

$$(z^2+a^2)^2 = (z-ia)^2(z+ia)^2$$

Wir haben also zwei Pole, jeweils mit Ordnung 2. Wir berechnen das Residuum vom Pol ia:

$$\begin{aligned}
\text{res}_{ia} f(z) &= \lim_{z\to ia} \frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}(z-ia)^2 f(z) \\
&= \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+ia)^2} \\
&= \lim_{z\to ia} \frac{2z(z+ia)^2 - 2(z+ia)z^2}{(z+ia)^4} \\
&= \frac{2ia(-4a^2)+4ia^3}{16a^4} \\
&= \frac{-ia^3}{4a^4} = -\frac{i}{4a}
\end{aligned}$$

Nun integrieren wir über den oberen Halbkreis von $-R$ bis R. Dabei wählen wir die Parametriesierung $\gamma_R : t \mapsto Re^{it}$ mit $t \in [0,\pi]$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \bigg| &\int_0^\pi \frac{R^2e^{2it}iRe^{it}}{(R^2e^{2it}+a^2)^2}\,dt \\
&= \int_0^\pi \frac{R^3e^{3it}i}{R^4e^{4it}+2R^2e^{2it}a^2+a^4}\,dt \\
|\cdot| \Rightarrow &\leq \int_0^\pi \frac{R^3}{R^4-2R^2-a^4}dt \\
&= \frac{\pi R^3}{R^4-2R^2a^2-a^4} \to 0
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz haben wir somit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx = 2\pi i\left(-\frac{i}{4a}\right) = \frac{\pi}{2a}$$

Beispiel 3. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und injektiv. Zeige: dann existieren $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$ so dass $f(z) = az+b$. (Hinweis: Betrachte $z \mapsto f(1/z)$ und untersuche die isolierte Singularität in $z = 0$.)*

Nehmen wir an es wäre eine hebbare Singularität. Dann wäre $f(1/z)$ um 0 beschränkt, also wäre $f(z)$ außerhalb eines bestimmen Radius beschränkt. Damit ist f aber beschränkt und ganz und damit konstant, was ein Widerspruch zur Injektivität ist.

Nehmen wir nun an es ist eine essentielle Singularität. Dann liegt das Bild von $f(1/z)$ einer Umgebung von 0 dicht in $\mathbb{C}$. Damit ist das Bild von f dicht außerhalb eines Radius. Nun wählen wir $f^{-1}(B_\varepsilon(z))$ (offen) für ein z im inneren Kreis. Da das Bild außerhalb des Radius dicht ist, widerspricht das der injektivität. Gebietstreu weil injektiv und stetig? Eher über Bilder als über Urbilder argumentieren?

Also hat $f(1/z)$ einen Pol bei $z = 0$. Nun schreiben wir:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \Rightarrow \quad f(1/z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$$

Nach Theorem 1.2, müssen fast alle a_n verschwinden. Also ist $f(z)$ ein Polynom. Dieses Polynom muss Grad 1 haben, denn ein Polynom mit Grad 0 ist nicht injektiv und ein Polynom mit Grad $n > 1$ hat entweder mehrere verschiedene Nullstellen (nicht injektiv) oder zumindest eine mit Vielfachheit $k > 1$. Ist allerdings $f(z) = (x - z_0)^k$, dann finden wir mit zwei verschiedenen k-ten Einheitswurzeln r_1 und r_2:

$$f(z_0 + r_1) = f(z_0 + r_2) = 1$$

Beispiel 4. *Nullstellen zählen:*

(a) *Bestimme die Anzahl Nullstellen (mit Vielfachheiten) von* $z \mapsto z^7 - 5z^3 + 7$ *auf* $1 < |z| < 2$, *und von* $z \mapsto z^8 - 3z^2 + 1$ *auf* $|z| > 1$.

(b) *Zeige: Das Polynom* $P(z) := z^4 + 6z + 3$ *hat 4 Nullstellen in* $B_2(0)$. *Eine davon liegt in* $B_1(0)$, *die restlichen drei in* $B_2(0) \backslash B_1(0)$.

Wir verwenden Rouches Theorem:

(a) Für $|z| = 2$

$$|f(z) - z^7| = |-5z^3 + 7| \leq 47 < 128 = |z^7|$$

Also haben wir als 7 Nullstellen innerhalb des Kreises mit Radius 2. Weiter finden wir mit $|z| = 1$:

$$|f(z) - 7| = |z^7 - 5z^3| \leq 6 < 7$$

Deshalb sind innerhalb des Einheitskreises gleich viele Nullstellen wie von $g(z) = 7$, also keine.

Für die zweite Funktion sehen wir auf dem Einheitskreis:

$$|f(z) + 3z^2| = |z^8 + 1| \leq 2 < 3 = |-3z^2|$$

Somit haben wir zwei Nullstellen innerhalb des Einheitskreises.

(b) Zuerst sehen wir für $|z| = 2$:

$$|P(z) - z^4| = |6z + 3| \leq 9 < 16 = |z^4|$$

Für $z = 1$ sehen wir genauso:

$$|P(z) - 6z| = |z^4 + 4| \leq 5 < 6 = |6z|$$

was das Gewünschte zeigt.

Beispiel 5. *Klassifizere die isolierten Singularitäten und bestimme (wo relevant) die Residuen für*

(a) $\frac{1-\cos(z)}{z^2}$,

(b) $e^{\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}$,

(c) $\left(z^2+1\right)^{-n}, n \in \mathbb{N}$,

(d) $(z+2)\sin\left((z+2)^{-1}\right)$,

(e) $\frac{g(z)}{1+z^n}$ *mit g ganz,*

(f) $\frac{4z}{(z^2+2az+1)^2}$ *mit $a > 1$.*

(a) Wir finden:

$$\frac{1-\cos(z)}{z^2} = \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} \to \frac{1}{2}$$

Also ist die Singularität hebbar, denn durch Umformungen sehen wir, dass jede Folge gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

(b) Entlang der Folge $\frac{1}{n}$ sehen wir:

$$e^n - n \to \infty$$

Also ist es keine hebbare Singularität.
Wir entwickeln wieder die Potenzreihe

$$e^{1/z} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} - \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

Wäre es ein Pol vom Grad n könnten wir z^{-n} herausheben und dann müsste die Reihe holomorph sein. Das ist sie offensichtlich nicht, also ist es eine essentielle Singularität. Gilt allgemeiner, wenn man zB $e^{1/z} - \frac{1}{z} = f(z)$, dann muss $f(z) + \frac{1}{z}$ auch eine essentielle Singularität sein.

(c) Wir haben diesmal Singularitäten bei $\pm i$. Wir finden:

$$\frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$$

Beide Pole sind somit n-fach. Wir bestimmen die Residuen:

$$\begin{aligned}
\text{res}_i f &= \lim_{z\to i} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}(z+i)^{-n} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(n\cdot(n+1)\cdots(2n-2))\cdot(z+i)^{-(n+n-1)} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}(-1)^{n-1}(z+i)^{-(2n-1)} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}(-1)^{n-1}(2i)^{-(2n-1)}
\end{aligned}$$

Genauso finden wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{-i} f &= \lim_{z\to -i} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}(z-i)^{-n} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(n\cdot(n+1)\cdots(2n-2))\cdot(z-i)^{-(n+n-1)} \\
&= \lim_{z\to -i} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}(-1)^{n-1}(z-i)^{-(2n-1)} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}(-1)^{-n+1}(2i)^{-(2n-1)}
\end{aligned}$$

(d) Wir schreiben als Potenzreihe:

$$(z+2)\sin((z+2)^{-1}) = (z+2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{-(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{-2n}}{(2n+1)!}$$

Mit der gleichen Arumentation von b sehen wir, dass es sich um eine essentielle Singularität handeln muss.

(e) Offensichtlich ist die Singularität für $g(z) = 0$ hebbar. Die Nullstellen des Nenners sind die Punkte $z_j = e^{\frac{i\pi+2\pi ij}{n}}$ mit $j = 0, 1, \ldots, n-1$. z_j ist genau dann hebbar, wenn $g(z_j) = 0$ (nicht so trivial) gilt und sonst ein einfacher Pol. Nehmen wir an $g(z_j) \neq 0$, dann gilt:

$$\mathrm{res}_{z\to z_j}\frac{g(z)}{1+z^n} = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)\frac{g(z)}{1+z^n} = \lim_{z\to z_j}\frac{g(z)}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1}(z-z_i)} = \frac{g(z_j)}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1}(z_j-z_i)}$$

(f) Zuerst bestimmen wir die Pole:

$$(z^2+2az+1)^2 = (z+a-\sqrt{a^2-1})^2(z+a+\sqrt{a^2-1})^2$$

Also haben wir zwei Pole mit Ordung 2. Damit finden wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}} &= \lim_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}} \frac{d}{dz}\frac{4z}{(z+a+\sqrt{a^2-1})^2} \\
&= \lim_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}} \frac{4(z+a+\sqrt{a^2-1})^2 - 8z(z+a+\sqrt{a^2-1})}{(z+a+\sqrt{a^2-1})^4} \\
&= \frac{16(a^2-1) - 16\sqrt{a^2-1}(-a+\sqrt{a^2-1})}{16(a^2-1)^2} = \frac{1}{a^2-1} - \frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{(a^2-1)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Für den anderen Pol finden wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{z\to -a-\sqrt{a^2-1}} &= \lim_{z\to -a-\sqrt{a^2-1}} \frac{d}{dz}\frac{4z}{(z+a-\sqrt{a^2-1})^2} \\
&= \lim_{z\to -a-\sqrt{a^2-1}} \frac{4(z+a-\sqrt{a^2-1})^2 - 8z(z+a-\sqrt{a^2-1})}{(z+a-\sqrt{a^2-1})^4} \\
&= \frac{16(a^2-1) + 16\sqrt{a^2-1}(-a-\sqrt{a^2-1})}{16(a^2-1)^2} = \frac{1}{a^2-1} + \frac{-a-\sqrt{a^2-1}}{(a^2-1)^{3/2}}
\end{aligned}$$