Beispiel 1. *Beschreibe die folgenden Punktmengen von $z \in \mathbb{C}$ der komplexen Ebene geometrisch:*

(a) $|z - z_1| = |z - z_2|$ *für vorgegebene* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(b) $\frac{1}{z} = \bar{z}$

(c) $\mathfrak{Re}(az + b) > 0$ *für gegebene* $a, b \in \mathbb{C}$

(d) e^z *für* $0 \leq \mathfrak{Re}(z) \leq 1$ *und* $0 \leq \mathfrak{Im}(z) \leq \pi$

(a) Die Menge ist die Symmetrieachse zwischen z_1 und z_2. Gilt $z_1 = z_2$, so ist die Menge natürlich die gesamte komplexe Ebene.

(b) Wir wissen, dass $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ gilt. Ein Element z_0 liegt also genau dann in der Menge, wenn $|z_0| = 1$ gilt, also ist es der Einheitskreis.

(c) Wir finden:

$$0 < \mathfrak{Re}(az + b) = \mathfrak{Re}(az) + \mathfrak{Re}(b) = \mathfrak{Re}(a)z_1 - \mathfrak{Im}(a)z_2 + \mathfrak{Re}(b)$$

Wenn $a = 0$ gilt, dann löst je nach $\mathfrak{Re}(b)$ ganz $\mathbb{C}$ oder kein einziges z.

Wenn $\mathfrak{Im}(a) = 0$, dann ist es alles rechts von

$$z_1 = -\frac{\mathfrak{Re}(b)}{\mathfrak{Re}(a)}$$

Lösung der Ungleichung.

Wenn $\mathfrak{Im}(a) \neq 0$, dann ist es alles unter

$$z_2 = \frac{\mathfrak{Re}(a)}{\mathfrak{Im}(a)}z_1 + \frac{\mathfrak{Re}(b)}{\mathfrak{Im}(a)}$$

Lösung der Ungleichung.

(d) Mit $z = x + iy, xy \in \mathbb{R}$ finden wir:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

e^x ist ein reeller Skalar im Intervall $[0, e]$ und e^{iy} ist eine komplexe Zahl, die auf der oberen Hälfte des Einheitskreises liegt. Zusammengesetzt ist diese Menge also die obere Hälfte der Kreisscheibe um den Ursprung, die Radius e hat.

Beispiel 2. *Seien* $s \geq 0$ *und* $\varphi \in \mathbb{R}$ *gegeben. Wie viele Lösungen hat die Gleichung* $z^n = se^{i\varphi}$*, für* $n \in \mathbb{N}$*? Finde sie.*

Wir schreiben $z = |z|e^{i\theta}$, womit wir die Gleichung $|z|^n e^{in\theta} = se^{i\varphi}$. Die Lösung dieser Gleichung äquivalent zur Lösung von

$$\begin{aligned} |z|^n &= s \\ n\theta &= \varphi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

sind. Damit bekommen wir die Lösungen:

$$z = s^{1/n} e^{i(\varphi/n + 2k\pi/n)}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

wobei nur $1 \leq k \leq n$ zu unterschiedlichen Lösungen führt, da wir eine Periodizität in den Lösungen haben. Insgesamt sind es also n Lösungen.

Beispiel 3. *Sei $w \in B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ein Element der Einheitskreisscheibe, und definiere:*

$$F(z) := \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}.$$

Zeige, dass dies eine Abbildung definiert mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $F : B_1(0) \to B_1(0)$, d.h. F bildet die Einheitskreisscheibe auf sich selber ab, und ist holomorph,

(b) F vertauscht die Punkte 0, $w \in B_1(0) : F(0) = w, F(w) = 0$,

(c) Für $|z| = 1$ gilt $|F(z)| = 1$,

(d) $F : B_1(0) \to B_1(0)$ ist bijektiv.

(a) Die Funktion ist eine Selbstabbildung, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{|w-z|}{|1-\bar{w}z|} < 1 &\Leftrightarrow |w-z|^2 < |1-\bar{w}z|^2 \\
&\Leftrightarrow (w-z)(\bar{w}-\bar{z}) < (1-\bar{w}z)(1-w\bar{z}) \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z < 1 + |w|^2|z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 < 1 + |w|^2|z|^2
\end{aligned}$$

Die Funktion ist holomorph, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{w-z-h}{1-\bar{w}z-\bar{w}h} - \frac{w-z}{1-\bar{w}z}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{w - z - h - |w|^2 z + \bar{w}z^2 + \bar{w}zh - w + z + |w|^2 z - \bar{w}z^2 + |w|^2 h - \bar{w}zh}{(1-\bar{w}z-\bar{w}h)(1-\bar{w}z)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1 + |w|^2}{(1-\bar{w}z-\bar{w}h)(1-\bar{w}z)} \\
&= \frac{-1+|w|^2}{(1-\bar{w}z)^2}
\end{aligned}$$

(b) Wir finden natürlich:

$$F(0) = \frac{w-0}{1-0} = w \quad \wedge \quad F(w) = \frac{w-w}{1-\bar{w}w} = 0$$

(c) Sei z mit $|z| = 1$ beliebig:

$$\begin{aligned}
\frac{|w-z|}{|1-\bar{w}z|} = 1 &\Leftrightarrow |w-z|^2 = |1-\bar{w}z|^2 \\
&\Leftrightarrow (w-z)(\bar{w}-\bar{z}) = (1-\bar{w}z)(1-w\bar{z}) \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z = 1 + |w|^2|z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 = 1 + |w|^2|z|^2 \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + 1 = 1 + |w|^2
\end{aligned}$$

(d) Zuerst beweisen wir die Injektivität:

$$\begin{aligned}
F(z_1) &= F(z_2) \\
\frac{w - z_1}{1 - \bar{w}z_1} &= \frac{w - z_2}{1 - \bar{w}z_2} \\
(w - z_1)(1 - \bar{w}z_2) &= (w - z_2)(1 - \bar{w}z_1) \\
w - |w|^2 z_2 - z_1 + \bar{w}z_1 z_2 &= w - |w|^2 z_1 - z_2 + \bar{w}z_1 z_2 \\
-|w|^2 z_2 + z_2 &= -|w|^2 z_1 + z_1 \\
z_2(1 - |w|^2) &= z_1(1 - |w|^2) \\
z_2 &= z_1
\end{aligned}$$

Sei nun $z_0 \in B_1(0)$ beliebig. Nehmen wir an wir finden ein z mit $F(z) = z_0$:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \\
z_0 &= w - z + \bar{w}z z_0 \\
z_0 - w &= z \underbrace{(\bar{w}z_0 - 1)}_{\neq 0} \\
z &= \frac{z_0 - w}{(\bar{w}z_0 - 1)} = F(z_0) \in B_1(0)
\end{aligned}$$

Also ist die Funktion bijektiv (sogar selbstinvers).

Beispiel 4. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:*

(a) *Sowohl Real- als auch Imaginärteil von f sind harmonische Funktionen. (Erinnerung: Eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt harmoische, falls $g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.)*

(b) *Falls Ω zusammenhängend ist und f nur reelle Werte annimmt, d.h. $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, dann ist f konstant.*

Wir schreiben $f(z) = u(z) + iv(z)$. Wir kennen die Riemann-Cauchy Gleichungen, die gelten, da f holomorph ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Mit dem Satz von Schwarz (welcher angewendet kann, weil jede holomorphe Funktion unendlich oft diffbar ist) folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)$$

Also sind sowohl u und v harmonisch.

Wieder zerlegen wir $f(z) = u(z) + iv(z)$. Wenn f nur reelle Werte annimmt gilt natürlich $\forall z \in \Omega | v(z) = 0$. Der Imaginärteil ist also konstant, damit ist die Ableitung 0 und somit sind auch die partiellen Ableitungen 0. Nach Gültigkeit der Riemann-Cauchy Gleichungen sind auch die partiellen Ableitungen von u gleich 0. Damit ist auch u konstant.

Beispiel 5. *Sei $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeige:*

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < \infty$, dann gilt $R = \frac{1}{L}$.

(b) Für jeden Punkt $z_0 \in B_R(0)$ kann f auch als Potenzreihe um z_0 geschrieben werden.

(a) Wir wissen, dass eine Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergiert, wenn

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \leq q < 1$$

für fast alle n existiert und dann divergiert, wenn

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \geq 1$$

für fast alle n gilt. Somit finden wir für unsere Potenzreihe:

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|a_{n+1}||z|^{n+1}}{|a_n||z|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z|$$

Für $|z| < R = \frac{1}{L}$ konvergiert die Reihe, denn

$$\exists \varepsilon, N, \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}(L - \varepsilon) =: q < 1$$

und für $|z| > L$ divergiert sie, denn

$$\exists \varepsilon, N, \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| > \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}(L + \varepsilon) \geq 1$$

(b) Sei $|z_0| < R$, dann finden wir mit der binomischen Formel:

$$z^n = (z - z_0 + z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z - z_0)^k$$

wodurch wir

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z - z_0)^k = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z - z_0)^k =: \sum_{k\geq 0} c_k(z - z_0)^k$$

Wir finden natürlich eine offene Umgebung um z_0 auf der diese Reihe konvergiert, da wir z_0 im Inneren des Konvergenzradius gewählt haben.

Beispiel 1. *Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Begründe:*

(a) Die Abbildung $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto x^5y^4 - ix^4y^5$ *ist holomorph.*

(b) Die Abbildung $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto e^y - ie^x$ *ist holomorph.*

(c) Die Abbildung $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin\left(z^4|z|^2\right)$ *ist holomorph.*

(d) Falls $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorph ist, so sind dies auch* $g_1(z) := \overline{f(z)}, g_2(z) := f(\bar{z})$ *und* $g_3(z) := \overline{f(\bar{z})}$.

Wir finden:

(a) Wir prüfen die Cauchy-Riemann Gleichungen, dabei gilt $u(x+iy) = x^5y^4, v(x+iy) = -x^4y^5$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4y^4 \neq -5x^4y^4 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

(b) Wir prüfen die Cauchy-Riemann Gleichungen, dabei gilt $u(x+iy) = e^y, v(x+iy) = -e^x$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \neq e^x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

(c) Wäre die Funktion holomorph auf $\mathbb{C}$ so müsste ihr Integral über eine geschlossene Kurve verschwinden. Wir betrachten hierfür die Kurven

$$\gamma_1 : (0,\pi) \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}, \gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$$

und finden damit:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \sin\left(z^4|z|^2\right)\, dz + \int_{\gamma_2} \sin\left(z^4|z|^2\right)\, dz &= \int_0^\pi \sin\left(e^{4it}\right) ie^{it}\, dt + \underbrace{\int_{-1}^1 \sin(t^6), dt}_{=:r\in\mathbb{R}} \\
&= i\int_0^\pi \frac{e^{4it} - e^{-4it}}{2i} e^{it}\, dt + r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{5it} - e^{-3it}\, dt + r \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5i}e^{5it} + \frac{1}{3i}e^{-3it}\right]_0^\pi + r \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5i} - \frac{1}{3i} - \frac{1}{5i} - \frac{1}{3i}\right) + r \\
&= r + i\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \neq 0
\end{aligned}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

Geht leichter mit Ableitung nach $\bar{z}$. Nochmal anschauen, nich ganz verstanden.

(d) $g_1(z)$ und $g_2(z)$ sind im Allgemeinen nicht holomorph, wie man an dem Beispiel $f(z) = z$ sieht. Für $g_3(z)$ hingegen finden wir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g_3(z+h) - g_3(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}}\right)} = \overline{f'(\bar{z})}$$

Also ist die Funktion holomorph.

Beispiel 2. *Sei*

$$\alpha(t) := \begin{cases} 1 - e^{it}, & t \in [0, 2\pi], \\ -1 + e^{-it}, & t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Skizziere die durch α parametrisierte Kurve und berechne das Kurvenintegral

$$\int_\alpha z e^{z^2} dz$$

Die Kurve entspricht einem "8er", also zuerst ein Kreis um $(1, 0)$ der mit positiver Orientierung durchlaufen wird und dann ein Kreis um $(-1, 0)$ der mit negativer Orientierung durchlaufen wird.

Da ze^{z^2} und $\alpha(0) = 1 - e^{i0} = 0 = -1 + e^{-i4\pi} = \alpha(4\pi)$ ist die Kurve geschlossen und die Funktion holomorph. Damit ist das gegebene Integral 0.

Oder Stammfunktion raten.

Beispiel 3. *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $R \subset \mathbb{C}$ ein solides Rechteck und $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine bijektive C^1 Funktion mit $\varphi(R) \subset \Omega$. Zeige: Parametrisiert γ den Rand von $\varphi(R)$, so gilt*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Wir adaptieren den Beweis von Goursat für Rechtecke. Dafür unterteilen wir unser Rechteck $R^{(0)}$ mit positiver Orientierung und $d^{(0)}$ und $u^{(0)}$ für Durchmesser und Umfang. Wir verbinden nun gegenüberliegende Mittelpunkte um so 4 neue Rechtecke zu konstruieren. Eines dieser Rechtecke $R^{(1)}$ erfüllt

$$\left|\int_{R^{(0)}} f(z)dz\right| = \left|\int_{R_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{R_2^{(1)}} f(z)dz + \int_{R_3^{(1)}} f(z)dz + \int_{R_4^{(1)}} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{R^{(1)}} f(z)dz\right|$$

Weiter gilt $d^{(1)} = \frac{1}{2}d^{(0)}$ und $p^{(1)} = \frac{1}{2}p^{(0)}$.

Nach Proposition 1.4 finden wir einen eindeutigen Punkt z_0 der in $\lim_{n\to\infty} R^{(n)}$ liegt. Mit f holomorph finden wir somit $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)$. $f(z_0)$ sowie $f'(z_0)(z - z_0)$ haben als konstante bzw. lineare Funktion Stammfunkionen, also gilt

$$\int_{R^{(n)}} f(z)dz = \int_{R^{(n)}} \psi(z)(z - z_0)dz$$

Nun muss natürlich im Rechteck $R^{(n)}$ $|z - z_0| \leq d^{(n)}$ gelten. Somit haben wir:

$$\left| \int_{R^{(n)}} f(z)dz \right| \leq \sup_{z \in R^{(n)}} |\psi(z)| d^{(n)} p^{(n)} \leq \varepsilon_n 4^{-n} d^{(0)} p^{(0)}$$

Gesamt gilt damit:

$$\left| \int_{R^{(0)}} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{R^{(n)}} f(z)dz \right| \leq \varepsilon_n d^{(0)} p^{(0)}$$

Für $n \to \infty$ geht $\varepsilon_n \to 0$.

φ bijektiv, stetig, kompakt, also Homoömorphismus. Also bildet der Rand von R auf den Rand von $\varphi(R)$.
φ außerdem Lipschitzstetig, weil wir auf einem kompakten Intervall arbeiten. Dadurch kann man Umfang und Durchmesser mit L abschätzen.
Dann Beweis von Goursat, jeweils mit L.

Beispiel 4. *Berechne die folgenden Integrale:*

(a) *Für $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\int_C z^n dz$$

wobei C ein im Ursprung zentrierter, positiv orientierter Kreis ist.

(b) *Für $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\int_C z^n dz$$

wobei C der positiv orientierte Rand einer Kreisscheibe $\partial B_R(z)$ ist mit $0 < R < |z|$.

(c) *Für $0 < a < r < b$:*

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz,$$

wobei $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ mit positiver Orientierung.

(a) Weil C geschlossen und z^n holomorph für $n \geq 0$ ist, verschwindet das Integral in diesen Fällen. Wenn $n < 0$ finden wir mit der Parametrisierung $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$

$$\int_C z^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n rie^{it}\, dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\, dt$$

Im Fall $n = -1$ ergibt diese Integral $i2\pi$, andernfalls erhalten wir $\left[\frac{ir^{n+1}e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = 0$

(b) Alle gegebenen Funktionen sind Zusammensetzungen holomorpherfunktionen (deren Quotient nirgendwo verschwindet), also ist das Integral jeweils 0. Für $n \neq -1$ finden wir die Stammfunktion $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$, da der Kreis eine geschlossene Kurve ist, finden wir (mit einer beliebigen Parametrisierung von z_0 nach z_0):

$$\int_C z^n dz = F(z_0) - F(z_0) = 0$$

Nun behandeln wir den Fall $n = -1$. Dafür nehmen wir die Kurve $\varphi : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}, t \mapsto z + R \cdot e^{it}$. Damit finden wir:

$$\int_C z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z + R \cdot e^{it}} \cdot Rie^{it}\, dt = \int_{z+R}^{z+R} \frac{1}{u}\, du = 0$$

(c) Wir parametrisieren die Kurve mit $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ und finden damit:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz &= \int_C -\frac{1}{(b-a)(z-a)} dz + \int_C \frac{1}{(b-a)(z-b)} dz \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\int_C \frac{1}{z-a}\, dz + \int_C \frac{1}{b-z}\, dz\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\int_C \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\, dz + \int_C \frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\, dz\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\int_C \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n dz + \int_C \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n dz\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_C \frac{1}{z^{n+1}}\, dz + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b^{n+1}}\int_C z^n\, dz\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\pi})^{n+1}} rie^{i\pi}\, dt + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b^{n+1}}\int_0^{2\pi} (re^{i\pi})^{n+1} rie^{i\pi}\, dt\right) \\
&= \frac{i}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \int_0^{2\pi} e^{-itn}\, dt + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\, dt\right) \\
&= \frac{i}{a-b}\left(2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{-1}{in}[e^{-itn}]_0^{2\pi} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^{n+1}\frac{1}{i(n+1)}[e^{-it(n+1)}]_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{a-b}
\end{aligned}$$

Funktioniert auch mit der Cauchy-Integralformel.

Beispiel 5. *Sei f holomorph auf $\Omega \subset \mathbb{C}$, und $T \subset \Omega$ ein Dreieck dessen Inneres auch in Ω enthalten ist. Gemäss Satz von Goursat gilt dann, dass*

$$\int_T f(z)dz = 0.$$

Beweise dies mittels Satz von Green unter der zusätzlichen Annahme, dass die Ableitung f' stetig ist.

Der Satz von Green besagt:

$$\int_T F\, dx + G\, dy = \int_{\text{Inneres von } T}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dxdy$$

Wir bezeichnen im Folgenden das Innere des Dreiecks mit T°
Wir schreiben nun $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sowie $dz = dx + idy$:

$$\int_T f(z)dz = \int_T (u+iv)(dx+idy) = \int_T u\, dx - v\, dy + i\int_T u\, dy + v\, dx$$

Mit dem Satz von Green:

$$= \iint_{T^\circ}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_{T^\circ}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0$$

Wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Cauchy-Riemann-Gleichungen gilt.

Beispiel 1. *Benutze Kurvenintegrale in der komplexen Ebene, um das Integral*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

zu berechnen.

Wir wählen die Funktion $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$.
Wir berechnen das Integral einer geschlossenen Kurve, die aus einem großen Halbkreis mit Radius R, zwei Geraden Strecken von $-R$ bis $-\varepsilon$ bzw. ε bis R und einem kleinen Halbkreis mit Radius ε. Dafür gilt:

$$0 = \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_\varepsilon^R f(x)dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$$

Wir bestimmen die einzelnen Integrale und fangen mit den geraden Strecken an:

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_\varepsilon^R f(x)dx &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx \\
&= \int_R^\varepsilon \frac{e^{-iu}}{-u} - du + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx \\
&= -\int_\varepsilon^R \frac{e^{-iu}}{u}du + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx \\
&= \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx \\
&= 2i\int_\varepsilon^R \frac{\sin(x)}{x}dx
\end{aligned}$$

Die Wahl unserer Funktion war als sinnvoll, weil so das Integral der beiden Strecken annähernd dem gesuchten Integral entspricht.

Nun berechnen wir das Integral über den großen Halbkreis und parametrisieren diesen dafür mit $\gamma_R : t \mapsto Re^{it}, t \in [0, \pi]$. Damit gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it}dt = i\int_0^\pi e^{iR(\cos(t)+i\sin(t))}dt = i\int_0^\pi e^{iR\cos(t)}e^{-R\sin(t)}dt$$

Nun gilt $|e^{R\cos(t)}| = 1$ und $e^{-R\sin(t)} \to 0$ für $R \to \infty$ f.s. Also ergibt das obige Integral den Wert 0, wenn R gegen ∞ geht.

Nun berechnen wir noch das Integral über den kleinen Halbkreis. Dafür parametrisieren wir wie folgt: $\gamma_\varepsilon : t \mapsto \varepsilon e^{it}, t \in [\pi, 0]$ und finden damit:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it}dt = i\int_\pi^0 e^{i\varepsilon e^{it}}dt \to -i\pi$$

für $\varepsilon \to 0$. Nun gilt also gesamt (für $R \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$):

$$0 = 2i\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx - i\pi \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 2. *Zeige, dass*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

(Hinweis: Betrachte $z \mapsto e^{-z^2}$ auf einem Kreissektor mit Winkel $\frac{\pi}{4}$.)

Wir legen den Kreissektor entlang der x-Achse auf und erhalten somit drei Teilkurven, die zusammen eine geschlossene Kurve ergeben:

$$\gamma_1 : t \mapsto t, t \in [0, R]; \qquad \gamma_2 : t \mapsto Re^{it}, t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]; \qquad \gamma_3 : t \mapsto te^{i\frac{\pi}{4}}, t \in [R, 0]$$

Wir berechnen die Integrale von e^{-z^2} über diese Kurven und finden damit:

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-t^2} dt \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Für $R \to \infty$.

$$\int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz = \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{i2t}} iRe^{it} dt = iR \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos(2t)} e^{-iR^2\sin(2t)} e^{it}$$

Betragsmäßig ist diese Integral kleiner gleich $\frac{\pi}{4} Re^{-R^2} \to 0$ für $R \to \infty$.

$$\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = -\int_0^R e^{-t^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}} dt = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-it^2} dt = -e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^R \cos(-t^2) dt + i \int_0^R \sin(-t^2) \right)$$

Wir nutzen nun, dass der Cosinus gerade und der Sinus ungerade ist. Anschließend setzen wir zusammen:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \int_0^R \cos(t^2) dt - i \int_0^R \sin(t^2)$$

Durch vergleichen von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten folgt das Behauptete.

Beispiel 3. *Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige: Dann gilt*

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2} \sup_{z,w \in B_1(0)} |f(w) - f(z)|.$$

Zuerst finden wir mit der Cauchy-Integralformel:

$$\begin{aligned}
2f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta - \int_{\partial B_1(0)} \frac{f(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta - \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta) - f(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta
\end{aligned}$$

Nun können wir die gleichen Abschätzungen wie bei den Cauchy-Ungleichungen durchführen (für $R < 1$):

$$\begin{aligned}
2|f'(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta) - f(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it}) - f(-Re^{it})}{(Re^{it})^2} iRe^{it} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \left| f(Re^{it}) - f(-Re^{it}) \right| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi R} \cdot 2\pi \cdot \sup_{w,z \in B_1(0)} |f(w) - f(z)| = \frac{1}{R} \sup_{w,z \in B_1(0)} |f(w) - f(z)|
\end{aligned}$$

Wäre nun $2|f'(0)| > \sup_{w,z\in B_1(0)} |f(w)-f(z)|$, könnten wir ein $\varepsilon > 0$ finden, sodass $2|f'(0)| - \varepsilon > \sup_{w,z\in B_1(0)} |f(w)-f(z)|$ auch gilt. Diesen Fall können wir aber mit der oben erhaltenen Ungleichung zum Widerspruch führen, indem wir $R = 1 - \frac{\varepsilon}{2|f'(0)|}$ wählen und oben einsetzen.

Beispiel 4. *Zeige oder widerlege: Für jedes stetige $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ gibt es eine Folge von komplexen Polynomen $P_n(z)$ die gleichmäßig gegen f konvergieren wenn $n \to \infty$.*
(Zum Kontext: Jede reelle, stetige Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf dem Einheitsintervall kann gleichmässig durch Polynome approximiert werden (Satz von Weierstrass).)

Betrachten wir die Funktion $f(z) = \bar{z}$ und eine beliebige Folge $P_n(z)$ von Polynomen, die gleichmäßig gegen $P(z)$ konvergiert. Da Polynome holomorphe Funktionen sind, konvergieren diese nach Satz 5.2 gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmege gegen eine holomorphe Funktion. Somit ist P holomorph und damit $P \neq f$. Da die Folge beliebig war, ist die Aussage widerlegt.

Beispiel 5. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz. Zeige: Falls es ein $M > 0$ gibt so dass $\mathfrak{Re}(f(z)) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f konstant.*

Da f ganz ist, ist auch $e^{f(z)}$ ganz und wir finden:

$$|e^{f(z)}| = |e^{u(z)+iv(z)}| = |e^{u(z)} e^{iv(z)}| = |e^{\mathfrak{Re}(f(z))}| \leq e^M$$

Nach Liouville ist also $e^{f(z)}$ konstant, das ist wiederrum äquivalent mit $f(z)$ konstant.

Beispiel 1. *Seien $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, holomorphe Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$, welche auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmässig gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergieren. Aus der Vorlesung wissen wir, dass f dann holomorph ist. Zeige ausserdem, dass sogar die Folgen der k-ten Ableitungen von f gleichmässig gegen die k-te Ableitung von f konvergieren, d.h. $f_n^{(k)} \to f^{(k)} (n \to \infty)$, auf jeder kompakten Teilmenge von Ω.*

Genauer argumentieren mit den Kompakten Mengen!

Wir gehen wie beim Beweis von Satz 5.3 vor. Wieder nehmen wir oBdA an, dass die Folge der Funktionen auf ganz Ω konvergiert, andernfalls können wir es auf jeder kompakten Menge betrachten und zusammenstückeln. Wieder bilden wir Ω_δ, also die Menge, die Ω um einen δ-Streifen verkleinert. Wieder zeigen wir:

$$\sup_{z \in \Omega_\delta} |F^{(k)}| \leq \frac{k!}{\delta^k} \sup_{\zeta \in \Omega} |F(\zeta)|$$

(Denn $F = f_n - f$ führt zum gewünschten Ergebnis, da die rechte Seite dann gegen 0 konvergiert). Wir finden mit der Cauchy-Integralformel:

$$\begin{aligned} |F^{(k)}(z)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_\delta(z)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, d\zeta \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{C_\delta(z)} \frac{|F(\zeta)|}{|(\zeta - z)^{k+1}|} \, d\zeta \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \sup_{\zeta \in \Omega} |F(\zeta)| \frac{1}{\delta^{k+1}} 2\pi\delta \\ &= \frac{k!}{\delta^k} \sup_{\zeta \in \Omega} |F(\zeta)| \end{aligned}$$

Das gilt für alle k und alle δ. Zuletzt lassen wir noch δ gegen 0 gehen und erhalten das Gewünschte.

Beispiel 2. *Benutze Kurvenintegrale in der komplexen Ebene, um das Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx$$

zu berechnen.

Zuerst bemerken wir, dass die Funktion $f(z) := \frac{1}{1+z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ holomorph ist.

Wir berechnen das Kurvenintegral über den oberen Halbkreis mit einem Schlüsselloch bei i.

$$0 = \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{1}{1 + x^2} \, dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) \, dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{1 + x^2} \, dx + \int_{\gamma_R} f(z) \, dz$$

Wobei $\gamma_\varepsilon : t \mapsto \varepsilon e^{-it} + i$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $\gamma_R : t \mapsto Re^{it}$ mit $t \in [0, \pi]$. Die Geraden zum Schlüsselloch wurden bereits weggelassen, da diese im Grenzwert verschwinden. Außerdem haben wir bei γ_ε das Intervall gleich wie im Grenzwert bis 2π zugelassen. Nun berechnen wir die Integrale:

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) \, dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{|Rie^{it}|}{|1 + R^2 e^{2it}|} \, dt \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - 1} \, dt = \frac{R\pi}{R^2 - 1} \to 0$$

für $R \to \infty$.

Weiter finden wir:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon^2 e^{-2it} + 2\varepsilon i e^{-it} - 1} \varepsilon(-i)e^{-it}\,dt = -i\int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{-it} + 2i}\,dt \to -i\frac{1}{2i}2\pi = -\pi$$

Für $\varepsilon \to 0$.

Insgesamt haben wir damit also im Grenzwert von $\varepsilon \to 0$ und $R \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = -\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi$$

Anmekrung aus den Übung: ε muss garnicht gegen 0 gehen. Geht leichter mit Partialbruchzerlegung. Und es geht auch recht cool mit der Cauchy-Integralformel.

Beispiel 3. *Beweise: Das Bild einer nicht-konstanten ganzen Funktion ist dicht in $\mathbb{C}$.*

Nehmen wir an $f(\mathbb{C})$ ist nicht dicht. Dann finden wir ein a, sodass $B_\varepsilon(a) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$. Nun betrachten wir die Funktion $\frac{1}{f(z)-a}$, welche natürlich ganz und betragsmäßig kleiner gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ ist, also ist sie konstant und somit ist $f(z)$ konstant, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Beispiel 4. *Betrachte die durch die folgenden Potenzreihen definierten Funktionen:*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

(a) Zeige: f und g definieren auf $B_1(0)$ holomorphe Funktionen.

(b) Kann f holomorph auf eine offene Menge Ω mit $B_1(0) \subsetneq \Omega \subset \mathbb{C}$ fortgesetzt werden?

(c) Kann g holomorph auf eine offene Menge Ω mit $B_1(0) \subsetneq \Omega \subset \mathbb{C}$ fortgesetzt werden?

(a) Wir wissen aus Satz 2.6, dass eine Potenzreihe auf ihrem Konvergenzradius eine holomorphe Funktion definiert. Für den Konvergenzradius der ersten Reihe gilt:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1$$

Wir schreiben die zweite Reihe zu $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mit $a_n = 1$, wenn ein k existiert sodass $2^k = n$ gilt und 0 sonst. Damit finden wir den Konvergenzradius:

$$R = \frac{1}{\sqrt[n]{\limsup_{n\to\infty} |a_n|}} = 1$$

Also sind beide Funktionen auf $B_1(0)$ holomorph.

(b) Auf der Einheitskreisscheibe gilt $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Diese Funktion ist aber überall außer in 1 holomorph und somit können wir die Funktion auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fortsetzen.

(c) Hingegen kann man diese Funktion nicht holomorph fortsetzen. Wir betrachten die Punkte $z = re^{i\frac{2\pi p}{2^k}}$ mit $p, k \in \mathbb{N}$. Nun gilt:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} e^{i2\pi p 2^{n-k}} = \sum_{n=0}^{k} r^{2^n} e^{i2\pi p 2^{n-k}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} r^{2^n} e^{i2\pi p 2^{n-k}} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} r^{2^n} \to \infty$$

für $r \to 1$. Nun liegt diese Menge allerdings dicht auf dem Einheitskreis. Denn sei φ ein beliebiger Winkel und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann finden wir:

$$\frac{2\pi}{2^{\min(n | \frac{2\pi}{2^n} < \varepsilon)}} \cdot p$$

wobei wir p so wählen, dass unsere Approximation bestmöglich wählen. Somit kann man die Potenzreihe aber nicht einmal auf den Abschluss fortsetzen.

Beispiel 5. *Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig und holomorph auf $B_1(0)$. Zeige: Falls $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial B_1(0)$, dann ist f konstant. (Hinweis: Betrachte die Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{C}$, welche durch Reflektion am Einheitskreis definiert ist.)*

Wir betrachten die Funktion

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & z \in B_1(0) \\ \frac{1}{\overline{f(1/\overline{z})}} & z \notin B_1(0) \end{cases}$$

Da f nirgendwo verschwindet, ist f außerhalb des Einheitskreises holomorph. Innerhalb des Einheitskreises ist die Funktion natürlich immernoch holomorph.
Weiter gilt für Punkte z_0 auf dem Einheitskreis:

$$F(z_0) = \frac{1}{\overline{f(1/\overline{z_0})}} = \frac{1}{\overline{f(z_0)}} = f(z_0)$$

Also setzt sich diese Funktion stetig am Rand fort und ist somit überall holomorph.

Nun nimmt die Funktion auf der Einheitskreisscheibe natürlich das Maximum und das Minimum an und somit finden wir:

$$|F(z)| \leq \max_{z \in \overline{B_1(0)}} \max(|f(z)|, |1/f(z)|)$$

Die Funktion ist somit ganz und beschränkt, also ist sie konstant.

Holomorphie von Dreiecken über den Rand muss man eigentlich noch zeigen.

Beispiel 1. *Sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphe Funktion f. Zeige: Die Funktion $z \mapsto e^{f(z)}$ kann in z_0 keinen Pol haben.*

Nehmen wir an $e^{f(z)}$ hätte einen Pol bei z_0, dann gilt:

$$|e^{f(z)}| \to \infty \Rightarrow \mathfrak{Re}(f(z)) \to +\infty$$

Damit ist die Singulatität von f auch ein Pol. Wir schreiben in einer Umgebung von z_0 $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$. Ist $g(z_0) = re^{i\varphi}$ wählen wir $\theta = \pi - \varphi$ Nun betrachten wir die Folge $z_k = z_0 + \frac{1}{k} e^{i\theta/(-n)} \to z_0$.

$$f(z_k) = (z_k - z_0)^{-n} g(z) = k^n \underbrace{e^{i\theta} g(z)}_{=-r} \to -\infty$$

Man kann auch jeden Fall einzeln durchargumentieren.

Beispiel 2. *Berechne die Pole, deren Ordnung und Residuen für die Funktion*

$$z \mapsto \frac{1}{\sin(\pi z)}$$

Nullstellen von Sinus genauer argumentieren.
Die Pole der Funktion sind die Nullstellen von $\sin(\pi z)$ und somit $z \in \mathbb{Z}$. Ich behaupte, dass alle diese Pole die Ordnung 1 haben. Dafür betrachten wir für einen Pol $z_0\pi$

$$\sin(\pi z) = (z - z_0\pi) \frac{\sin(\pi z)}{(z - z_0\pi)} := (z - z_0\pi) g(z)$$

Nun müssen wir zeigen, dass $g(\pi z_0) \neq 0$ gilt. Wir wissen aber das $g(z)$ holomorph und somit insbesondere stetig ist. Damit ist aber $g(\pi z_0) = 1$, weil wir uns auf der reellen Achse befinden.

Die Residuen sind damit:

$$\text{res}_{z_0\pi} = \lim_{z \to z_0\pi} (z - z_0\pi) \frac{1}{\sin(\pi z)}$$

Wir wissen, dass dieser Grenzwert existieren muss, also muss er gleich dem reellen Grenzwert sein und damit gleich $\frac{1}{(-1)^n \pi}$.

Beispiel 3. *Berechne das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Offensichtlich haben wir 4 Pole, nämlich $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$. Diese sind alle erster Ordnung, weil wir von einem Polynom vierter Ordnung nur 4 Nullstellen finden können. Wir berechnen nun das Integral über den oberen Halbkreis $\gamma_R : t \mapsto Re^{it}$:

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4} dx + \int_0^{\pi} \frac{Rie^{it}}{1 + R^4 e^{4it}} = 2\pi i (\text{res}_{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \text{res}_{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}})$$

Das Integral über die Kreislinie geht gegen 0 für $R \to \infty$. Wir berechnen nun die Residuen:

$$\text{res}_{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+z^4} = \lim_{z \to \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\frac{2i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2+2i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)}$$

$$\text{res}_{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+z^4} = \lim_{z \to \frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\frac{-2+2i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)}$$

Somit erhalten wir gesamt mit $R \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} = 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)} + \frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)} \right) = 2\pi i \left(\frac{4\sqrt{2}i}{8(-2)} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

Beispiel 4. *Zeige, dass*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\, dx = \pi e^{-a}, \quad a > 0.$$

Wir betrachten das Integral über den oberen Halbkreis von $f(z) := \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}$. Der einzige Pol in der oberen Halbebene ist ia, somit haben wir:

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{res}_{ia} f$$

Zuerst bestimmen wir:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{iR^2e^{2it}e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it}+a^2} dt \right| \\ &\le \int_0^{\pi} \frac{R^2|e^{iR(\cos(t)+i\sin(t))}|}{|R^2e^{2it}+a^2|} dt \\ &\le \int_0^{\pi} \frac{R^2|e^{-R\sin(t)}|}{R^2-a^2} dt \to 0 \end{aligned}$$

Weiter finden wir (weil der Pol Ordnung 1 hat):

$$\mathrm{res}_{ia} f = \lim_{z\to ia} \frac{ze^{iz}}{z+ia} = \frac{e^{-a}}{2}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} dz = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\cos(z)}{z^2+a^2} dz}_{\in\mathbb{R}} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\sin(z)}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2} = i\pi e^{-a} \\ \Rightarrow &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\, dx = \pi e^{-a} \end{aligned}$$

Beispiel 5. *Sei f holomorph auf einem Gebiet, das einen Kreisring $D_{r,R} = \{r \le |z-z_0| \le R\}$ enthält, wobei $0 < r < R, z_0 \in \mathbb{C}$. Zeige: dann hat f im Inneren von $D_{r,R}$ eine eindeutige Darstellung als sogenannte "Laurent-Reihe"*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

(Vorschlag Zeige, dass sich f schreiben lässt als

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei $C_\rho := \{|z-z_0| = \rho\}, \rho > 0$. Folgere daraus die Behauptung.)

Mit dem richtigen Schlüsselloch ist offensichtlich, dass wir f in der Form des Tipps schreiben können.

Wir versuchen beide Integrale als Potenzreihe zu schreiben, dafür beginnen wir mit dem äußeren Kreis:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z_0 - z}{\zeta - z_0} \right)^n$$

Für den kleineren Kreis:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z_0 - z}} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\zeta - z_0}{z_0 - z} \right)^n$$

Gesamt haben wir damit (weil alle vorkommenden Reihen absolut konvergieren):

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z_0 - z}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\zeta) \frac{1}{z_0 - z} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\zeta - z_0}{z_0 - z} \right)^n d\zeta \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\zeta) \frac{(z_0 - z)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n < 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\zeta) \cdot \frac{(z_0 - z)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta
\end{aligned}$$

Für $k \geq 0$ definieren wir also

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\zeta) \frac{(-1)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

und für $k < 0$ haben wir

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\zeta) \cdot \frac{(-1)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

und erhalten damit das Gewünschte.

Eindeutig ist die Darstellung, weil die Reihe mit positiven Koeffizienten eindeutig sein muss. Und mit $f(z)(z - z_0)^n$ kann ich das gleiche Argument auf negative Koeffizienten fortsetzen.

Beispiel 1. *Zeige dass für $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}$$

wobei $\cosh(z) := \frac{e^z+e^{-z}}{2}$. *(Hinweis: Benutze den Residuensatz für eine geeignete Rechteck-Kontour und die Periodizität von $e^{\pi z}$.)*

Sei $f(z) := \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{\cosh(\pi z)}$. Zuerst bemerken wir, dass der Nenner genau dann verschwindet, wenn $e^z = -e^{-z} \Rightarrow e^{2\pi z} = -1$ gilt. Somit muss $2\pi z = i\pi \mod 2\pi$. Wir betrachten nun das Rechteck auf der x-Achse von $-R$ bis R und mit der Höhe bis $2i$. Die einzigen Pole in diesem Rechteck sind $z_1 = i/2$ und $z_2 = 3i/2$. Die Residuen dieser Pole sind:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{2e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} \\
&= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{2e^{\pi z}e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}(e^{\pi z}-e^{2\pi z_1}e^{-\pi z})} \\
&= \lim_{z\to z_1} 2e^{-2\pi i z\xi}e^{\pi z}\frac{z-z_1}{e^{2\pi z}-e^{2\pi z_1}} \\
&= 2e^{-2\pi i z_1\xi}e^{\pi z_1}\frac{1}{2\pi e^{2\pi z_1}} = \frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}
\end{aligned}$$

Somit hat f erstens einen einfachen Pol und wir haben auch gleich das Residuum. Genauso finden wir:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{2e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} \\
&= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{2e^{\pi z}e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}(e^{\pi z}-e^{2\pi z_2}e^{-\pi z})} \\
&= \lim_{z\to z_2} 2e^{-2\pi i z\xi}e^{\pi z}\frac{z-z_2}{e^{2\pi z}-e^{2\pi z_2}} \\
&= 2e^{-2\pi i z_2\xi}e^{\pi z_2}\frac{1}{2\pi e^{2\pi z_2}} = -\frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}
\end{aligned}$$

Für die rechte Seitenfläche finden wir mit $z = R + iy$ mit $0 \le y \le 2$:

$$\frac{|e^{-2\pi i z\xi}|}{|\cosh(\pi z)|} \le \frac{2e^{4\pi|\xi|}}{||e^{\pi z}|-|e^{-\pi z}||} = \frac{2e^{4\pi|\xi|}}{e^{\pi R}-e^{-\pi R}} \to 0$$

Genauso finden wir für die linke Seitenfläche:

$$\frac{|e^{-2\pi i z\xi}|}{|\cosh(\pi z)|} \le \frac{2e^{4\pi|\xi|}}{||e^{\pi z}|-|e^{-\pi z}||} = \frac{2e^{4\pi|\xi|}}{e^{-\pi R}-e^{\pi R}} \to 0$$

Nun bemerken wir, dass die Funktion entlang der y-Achse "periodisch" ist. Denn es gilt:

$$f(z+2i) = \frac{e^{4\pi\xi}e^{-2\pi i z\xi}}{\frac{e^{z\pi+2\pi i}+e^{-(z\pi+2\pi i)}}{2}} = e^{4\pi\xi}f(z)$$

Gesamt haben wir also bis jetzt:

$$\int_R f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)}dx - e^{4\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)}dx = 2\pi i\left(\frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}-\frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}\right) = 2(e^{\pi\xi}-e^{3\pi\xi})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{-2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi})}{1 - e^{4\pi\xi}} = \frac{-2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi})}{-e^{2\pi\xi}(e^{2\pi\xi} - e^{-2\pi\xi})} = \frac{2(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi})}{(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi})(e^{\pi\xi} + e^{-\pi\xi})} =$$

Damit haben wir wie gewünscht:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}$$

Beispiel 2. *Berechne das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx, \quad a > 0.$$

Wir können faktorisieren:

$$(z^2 + a^2)^2 = (z - ia)^2(z + ia)^2$$

Wir haben also zwei Pole, jeweils mit Ordnung 2. Wir berechnen das Residuum vom Pol ia:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{ia} f(z) &= \lim_{z \to ia} \frac{1}{(2-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1} (z - ia)^2 f(z) \\
&= \lim_{z \to ia} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z + ia)^2} \\
&= \lim_{z \to ia} \frac{2z(z + ia)^2 - 2(z + ia)z^2}{(z + ia)^4} \\
&= \frac{2ia(-4a^2) + 4ia^3}{16a^4} \\
&= \frac{-ia^3}{4a^4} = -\frac{i}{4a}
\end{aligned}$$

Nun integrieren wir über den oberen Halbkreis von $-R$ bis R. Dabei wählen wir die Parametriesierung $\gamma_R : t \mapsto Re^{it}$ mit $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)\, dz &= \left| \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2it} i R e^{it}}{(R^2 e^{2it} + a^2)^2} dt \right. \\
&= \int_0^{\pi} \frac{R^3 e^{3it} i}{R^4 e^{4it} + 2R^2 e^{2it} a^2 + a^4} dt \\
|\cdot| \Rightarrow &\leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{R^4 - 2R^2 - a^4} dt \\
&= \frac{\pi R^3}{R^4 - 2R^2 a^2 - a^4} \to 0
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz haben wir somit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = 2\pi i \left(-\frac{i}{4a}\right) = \frac{\pi}{2a}$$

Beispiel 3. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und injektiv. Zeige: dann existieren $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$ so dass $f(z) = az+b$. (Hinweis: Betrachte $z \mapsto f(1/z)$ und untersuche die isolierte Singularität in $z = 0$.)*

Nehmen wir an es wäre eine hebbare Singularität. Dann wäre $f(1/z)$ um 0 beschränkt, also wäre $f(z)$ außerhalb eines bestimmen Radius beschränkt. Damit ist f aber beschränkt und ganz und damit konstant, was ein Widerspruch zur Injektivität ist.

Nehmen wir nun an es ist eine essentielle Singularität. Dann liegt das Bild von $f(1/z)$ einer Umgebung von 0 dicht in $\mathbb{C}$. Damit ist das Bild von f dicht außerhalb eines Radius. Nun wählen wir $f^{-1}(B_\varepsilon(z))$ (offen) für ein z im inneren Kreis. Da das Bild außerhalb des Radius dicht ist, widerspricht das der injektivität. Gebietstreu weil injektiv und stetig? Eher über Bilder als über Urbilder argumentieren?

Also hat $f(1/z)$ einen Pol bei $z = 0$. Nun schreiben wir:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \Rightarrow \quad f(1/z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$$

Nach Theorem 1.2, müssen fast alle a_n verschwinden. Also ist $f(z)$ ein Polynom. Dieses Polynom muss Grad 1 haben, denn ein Polynom mit Grad 0 ist nicht injektiv und ein Polynom mit Grad $n > 1$ hat entweder mehrere verschiedene Nullstellen (nicht injektiv) oder zumindest eine mit Vielfachheit $k > 1$. Ist allerdings $f(z) = (x - z_0)^k$, dann finden wir mit zwei verschiedenen k-ten Einheitswurzeln r_1 und r_2:

$$f(z_0 + r_1) = f(z_0 + r_2) = 1$$

Beispiel 4. *Nullstellen zählen:*

(a) Bestimme die Anzahl Nullstellen (mit Vielfachheiten) von $z \mapsto z^7 - 5z^3 + 7$ auf $1 < |z| < 2$, und von $z \mapsto z^8 - 3z^2 + 1$ auf $|z| > 1$.

(b) Zeige: Das Polynom $P(z) := z^4 + 6z + 3$ hat 4 Nullstellen in $B_2(0)$. Eine davon liegt in $B_1(0)$, die restlichen drei in $B_2(0) \backslash B_1(0)$.

Wir verwenden Rouches Theorem:

(a) Für $|z| = 2$

$$|f(z) - z^7| = |-5z^3 + 7| \leq 47 < 128 = |z^7|$$

Also haben wir als 7 Nullstellen innerhalb des Kreises mit Radius 2. Weiter finden wir mit $|z| = 1$:

$$|f(z) - 7| = |z^7 - 5z^3| \leq 6 < 7$$

Deshalb sind innerhalb des Einheitskreises gleich viele Nullstellen wie von $g(z) = 7$, also keine.

Für die zweite Funktion sehen wir auf dem Einheitskreis:

$$|f(z) + 3z^2| = |z^8 + 1| \leq 2 < 3 = |-3z^2|$$

Somit haben wir zwei Nullstellen innerhalb des Einheitskreises.

(b) Zuerst sehen wir für $|z| = 2$:

$$|P(z) - z^4| = |6z + 3| \leq 9 < 16 = |z^4|$$

Für $z = 1$ sehen wir genauso:

$$|P(z) - 6z| = |z^4 + 4| \leq 5 < 6 = |6z|$$

was das Gewünschte zeigt.

Beispiel 5. *Klassifizere die isolierten Singularitäten und bestimme (wo relevant) die Residuen für*

(a) $\frac{1-\cos(z)}{z^2}$,

(b) $e^{\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}$,

(c) $\left(z^2+1\right)^{-n}, n \in \mathbb{N}$,

(d) $(z+2)\sin\left((z+2)^{-1}\right)$,

(e) $\frac{g(z)}{1+z^n}$ *mit* g *ganz,*

(f) $\frac{4z}{(z^2+2az+1)^2}$ *mit* $a > 1$.

(a) Wir finden:

$$\frac{1-\cos(z)}{z^2} = \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} \to \frac{1}{2}$$

Also ist die Singularität hebbar, denn durch Umformungen sehen wir, dass jede Folge gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

(b) Entlang der Folge $\frac{1}{n}$ sehen wir:

$$e^n - n \to \infty$$

Also ist es keine hebbare Singularität.
Wir entwickeln wieder die Potenzreihe

$$e^{1/z} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} - \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

Wäre es ein Pol vom Grad n könnten wir z^{-n} herausheben und dann müsste die Reihe holomorph sein. Das ist sie offensichtlich nicht, also ist es eine essentielle Singularität. Gilt allgemeiner, wenn man zB $e^{1/z} - \frac{1}{z} = f(z)$, dann muss $f(z) + \frac{1}{z}$ auch eine essentielle Singularität sein.

(c) Wir haben diesmal Singularitäten bei $\pm i$. Wir finden:

$$\frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$$

Beide Pole sind somit n-fach. Wir bestimmen die Residuen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_i f &= \lim_{z\to i} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}(z+i)^{-n} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(n\cdot(n+1)\cdots(2n-2))\cdot(z+i)^{-(n+n-1)} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}(-1)^{n-1}(z+i)^{-(2n-1)} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}(-1)^{n-1}(2i)^{-(2n-1)}
\end{aligned}$$

Genauso finden wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{-i} f &= \lim_{z\to -i} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z-i)^{-n} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(n\cdot(n+1)\cdots(2n-2))\cdot(z-i)^{-(n+n-1)} \\
&= \lim_{z\to -i} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}(-1)^{n-1}(z-i)^{-(2n-1)} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}(-1)^{-n+1}(2i)^{-(2n-1)}
\end{aligned}$$

(d) Wir schreiben als Potenzreihe:

$$(z+2)\sin((z+2)^{-1}) = (z+2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{-(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{-2n}}{(2n+1)!}$$

Mit der gleichen Arumentation von b sehen wir, dass es sich um eine essentielle Singularität handeln muss.

(e) Offensichtlich ist die Singularität für $g(z) = 0$ hebbar. Die Nullstellen des Nenners sind die Punkte $z_j = e^{\frac{i\pi+2\pi ij}{n}}$ mit $j = 0, 1, \ldots, n-1$. z_j ist genau dann hebbar, wenn $g(z_j) = 0$ (nicht so trivial) gilt und sonst ein einfacher Pol. Nehmen wir an $g(z_j) \neq 0$, dann gilt:

$$\operatorname{res}_{z\to z_j}\frac{g(z)}{1+z^n} = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)\frac{g(z)}{1+z^n} = \lim_{z\to z_j}\frac{g(z)}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1}(z-z_i)} = \frac{g(z_j)}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1}(z_j-z_i)}$$

(f) Zuerst bestimmen wir die Pole:

$$(z^2+2az+1)^2 = (z+a-\sqrt{a^2-1})^2(z+a+\sqrt{a^2-1})^2$$

Also haben wir zwei Pole mit Ordung 2. Damit finden wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}} &= \lim_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}} \frac{d}{dz}\frac{4z}{(z+a+\sqrt{a^2-1})^2} \\
&= \lim_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}} \frac{4(z+a+\sqrt{a^2-1})^2 - 8z(z+a+\sqrt{a^2-1})}{(z+a+\sqrt{a^2-1})^4} \\
&= \frac{16(a^2-1) - 16\sqrt{a^2-1}(-a+\sqrt{a^2-1})}{16(a^2-1)^2} = \frac{1}{a^2-1} - \frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{(a^2-1)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Für den anderen Pol finden wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z\to -a-\sqrt{a^2-1}} &= \lim_{z\to -a-\sqrt{a^2-1}} \frac{d}{dz}\frac{4z}{(z+a-\sqrt{a^2-1})^2} \\
&= \lim_{z\to -a-\sqrt{a^2-1}} \frac{4(z+a-\sqrt{a^2-1})^2 - 8z(z+a-\sqrt{a^2-1})}{(z+a-\sqrt{a^2-1})^4} \\
&= \frac{16(a^2-1) + 16\sqrt{a^2-1}(-a-\sqrt{a^2-1})}{16(a^2-1)^2} = \frac{1}{a^2-1} + \frac{-a-\sqrt{a^2-1}}{(a^2-1)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Beispiel 1. *Zeige: Falls $h : B_1(0) \to \mathbb{R}$ harmonisch ($\Delta h(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ für $z = x + iy \in B_1(0)$) auf der Einheitskreisscheibe, dann existiert eine holomorphe Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ so dass $\mathrm{Re}(f(z)) = h(x,y)$. (Hinweis: Konstruiere zuerst die Ableitung von f.) Gilt dies auch falls $B_1(0)$ durch $B_1(0)\backslash\{0\}$ ersetzt wird?*

Wir betrachten zuerst die Funktion:

$$g(z) := \left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right)(z)$$

Diese Funktion ist holomorph, denn sie erfüllt die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial^2 x} = -\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial h}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

Nun betrachten wir die Funktion:

$$f(z) := h(z_0) + \int_\gamma g(\xi)\, d\xi$$

wobei γ ein Weg von z_0 bis z ist. Weil auf dem Einheitskreis alle Wege homotop sind, ist diese Definition eindeutig. Diese Funktion ist wieder holomorph, weil sie differenzierbar ist sei nun $u(z)$ der Realteil von f. Dann gilt zuerst einmal $u(z_0) = h(z_0)$ und weiter gilt:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right)(z) = f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(z)$$

Wobei die letzte Gleichheit aus Cauchy-Riemann und $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ folgt.
Damit sind die partiellen Ableitungen von h und u gleich und sie stimmen an z_0 überein, also sind sie insgesamt gleich.

Das gilt nur für einfachzusammenhängende Gebiete. Zum Beispiel ist $h(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \mathfrak{Re}(\log(z))$ wobei $\log(z)$ in diesem Kontext für den Hauptzweig des Logarithmus steht. Als Realteil einer auf der geschlitzen Einheitskreisscheibe ist die Funktion harmonisch. Das kann man auch über die partiellen Ableitungen argumentieren, denn es gilt:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Da die Funktion symmetrisch in x und y ist folgt damit, dass die Funktion harmonisch ist.

Nehmen wir nun an es gäbe eine holomorphe Funktion mit $f(z) = h(z) + iv(z)$. Nach Cauchy-Riemann gilt dann (mit den oben berechneten partiellen Ableitungen):

$$f'(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

Nach dem Kommentar unter Korollar 3.3 in den Princeton Lectures Complex Analysis (S. 23) wissen wir, dass $\frac{1}{z}$ auf der durchstochenen Einheitskreisscheibe keine Stammfunktion hat. Also kann diese Funktion f nicht auf der durchstochenen Einheitskreisscheibe definiert sein.

Beispiel 2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeige dass falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, Ω einfach zusammenhängend ist:*

(a) Ω ist konvex (d.h. für je zwei Punkte in Ω liegt auch das sie verbindende Geradensegment in Ω).

(b) Es gibt einen Punkt $z_0 \in \Omega$ so dass für alle $z \in \Omega$ das Geradensegment zwischen z und z_0 in Ω liegt. (Ein solches Ω heisst sternförmig.)

Zeige: die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ ist einfach zusammenhängend.

Seien im folgenden γ_1 und γ_2 beliebige Wege in Ω mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \alpha$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = \beta$. Sowohl in a) als auch in b) finden wir solche Wege, weil beide Mengen wegzusammenhängend sind.

(a) Wir betrachten die Homotopie:

$$F(s,t) = s\gamma_2(t) + (1-s)\gamma_1(t)$$

Das ist eine stetige Funktion, die jeweils für alle t die Kurven Segmente $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ interpoliert. Diese "Zwischenkurven" liegen jeweils in der Menge, weil wir für jedes t die Konvexität der Menge nutzen. Weiter gilt $F(s,0) = \alpha$ und $F(s,1) = \beta$ sowie $F(0,t) = \gamma_1(t)$ und $F(1,t) = \gamma_2(t)$. Also erfüllen die Funktionen genau unsere Definition von homotop und somit ist Ω einfach zusammenhängend.

(b) Sei

$$F(s,t) := \begin{cases} (1-3t)\alpha + 3t((1-s)\gamma_1(0) + sz_0) & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ (1-s)\gamma_1(3t-1) + sz_0 & t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ (3-3t)((1-s)\gamma_1(1) + sz_0) + (3t-2)\beta & t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Das ist genau die Kurve, die die ursprüngliche Kurve immer weiter zu z_0 zieht, die Anfangs- und Endpunkt dabei aber konstant lässt und linear mit den zusammengezogenen Punkten verbindet. Per Konstruktion ist die Funktion in t stetig. In s ist die Funktion stetig, weil s nur als Kontraktionsfaktor vorkommt. Somit ist jede Kurve zu der Funktion, die von α bis z_0 eine Gerade ist und von z_0 bis β homotop. Damit sind aber auch γ_1 und γ_2 homotop, weil die Eigenschaft transitiv ist.

Die geschlitzte Ebene ist einfach zusammenhängend, weil sie sternförmig ist. Denn wir betrachten $z_0 = 1$. Für alle Zahlen auf der positiven x-Achse liegt die Verbindungslinie offensichtlich in $\Omega = \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ für alle anderen z ist der Imaginärteil ungleich 0 und somit auch entlang der Verbindungslinie ungleich 0, also in Ω.

Beispiel 3. *Berechne fir $a > 0$ das Integral*

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2 + a^2} dx$$

(Hinweis: Wähle einen passenden Zweig des Logarithmus und eine Kontour, welche den Ursprung meidet.)

Wir betrachten die Funktion $f(z) = \frac{\log(z)}{z^2+a^2}$, also $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$. Wir wählen den Logarithmus mit dem Schlitz entlang der negativen imaginären Achse. Wir werden entlang eines Halbkreises mit Radius R auf der oberen Halbebene integrieren und mit einem kleinen Halbkreis mit Radius r den Ursprung ausnehmen. Darin befindet sich das Residuum ia. Dafür finden wir:

$$\mathrm{res}_{ia} f(z) = \lim_{z \to ia} \frac{\log(z)}{z + ia} = \frac{\log(ia)}{2ia} = \frac{\log(a) + i\frac{\pi}{2}}{2ia}$$

Damit haben wir nach dem Residuensatz:

$$\int_r^R \frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx + \int_{-R}^{-r} \frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \pi\frac{\log(a)+i\frac{\pi}{2}}{a}$$

Nun berechnen wir die einzelnen Integrale:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx = \int_{-R}^{-r} \frac{\log|x|+i\pi}{x^2+a^2}dx = \int_{-R}^{-r} \frac{\log|x|}{x^2+a^2}dx + \int_{-R}^{-r} \frac{i\pi}{x^2+a^2}dx =$$
$$\int_r^R \frac{\log|x|}{x^2+a^2}dx + \frac{i\pi}{a}\arctan\left(\frac{-r}{a}\right) - \frac{i\pi}{a}\arctan\left(\frac{-R}{a}\right) \to \int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx + \frac{i\pi^2}{2a}$$

Weiter sehen wir:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\log(Re^{it})iRe^{it}}{R^2e^{2it}+a^2}dt\right| \le \int_0^\pi \frac{|\log(R)+it|R}{R^2-a^2}dt$$
$$\le \int_0^\pi \frac{(\log(R)+\pi)R}{R^2-a^2}dt = \frac{\pi(\log(R)+\pi)R}{R^2-a^2} \to 0$$

Für das Integral über den kleinen Halbkreis gilt:

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\log(re^{it})ire^{it}}{r^2e^{2it}+a^2}dt\right| \le \int_0^\pi \frac{|\log(r)+\pi|r}{a^2-r^2}dt \le \frac{\pi(\log(r)+\pi)r}{a^2-r^2} \to 0$$

Gesamt haben wir also:

$$\pi\frac{\log(a)+i\frac{\pi}{2}}{a} = 2\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx + \frac{i\pi^2}{2a} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi\log(a)}{2a}$$

Beispiel 4. *(a) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig und 2π-periodisch (d.h., $f(x+2\pi)=f(x), x\in\mathbb{R}$). Zeigen Sie folgendes:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)dx, \quad a\in\mathbb{R}.$$

(b) Angenommen, $\{a_n\}_{n-1}^N$ und $\{b_n\}_{n=1}^N$ seien zwei endliche Folgen komplexer Zahlen. Sei

$$B_n := \sum_{k=1}^n b_k, \quad B_0 = 0$$

die Reihe der Teilsummen. Beweisen Sie die Formel für die Summierung nach Teilen

$$\sum_{n=M}^N a_nb_n = a_NB_N - a_MB_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n.$$

(a) Aus der Substitution $u=x+a$ folgt die zweite Gleichheit mit:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)du$$

Weiter sehen wir:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = f(x+2\pi)-f(x) = f(x)-f(x) = 0$$

Damit folgt, dass es egal ist über welches Intervall wir integrieren, wenn es Länge 2π hat. Damit ist der rechte und ganz linke Ausdruck gleich.

(b) Wir beweisen per Induktion nach N mit $(M \leq N)$ für $N = 1$ sehen wir:

$$\sum_{n=1}^{1} a_n b_n = a_1 b_1 - \underbrace{a_1 B_0 - \sum_{n=1}^{0} (a_{n+1} - a_n) B_n}_{=0}$$

Sei das Ganze für N und beliebiges $M \leq N$ gezeigt, dann sehen wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N+1} a_n b_n &= a_{N+1} b_{N+1} + a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n \\
&= \underbrace{a_{N+1} b_{N+1} + a_{N+1} B_N}_{=a_{N+1} B_{N+1}} - \underbrace{a_{N+1} B_N + a_N B_N}_{(a_{N+1} - a_N) B_N} - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n \\
&= a_{N+1} B_{N+1} - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N} (a_{n+1} - a_n) B_n
\end{aligned}$$

Für $M = N$ gilt:

$$\sum_{n=N}^{N} a_n b_n = a_N b_N = a_N B_N - a_N B_{N-1} - \underbrace{\sum_{n=N}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n}_{=0}$$

Beispiel 5. *(a) Sei $\{a_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen und*

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_n, \quad n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass wenn $a_n \to a \in \mathbb{R}$, dann $b_n \to a$, für $n \to \infty$.

(b) Eine (formelle) Reihe von komplexen Zahlen $\sum_{n \geq 1} a_n$ heißt Cesàro konvergent, wenn die Folge der Durchschnittswerte der Teilsummen

$$C_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} a_j, \quad n \geq 1,$$

konvergiert (mit Cesàro Limes = $\lim_n C_n$). Zeigen Sie, dass eine konvergente Reihe auch Cesàro konvergent ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$ nicht konvergent ist, aber sie Cesàro konvergent ist. Was ist ihr Cesàro Limes?

(d) Sei $\sum_{n \geq 1} a_n$ eine Cesàro konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass $\frac{a_n}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann finden wir N mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Somit haben wir:

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} a_k - a \right| \leq \frac{|\sum_{k=0}^{N-1} a_k|}{n} + \frac{\sum_{k=N}^{n} |a_k - a|}{n} \\
&\leq \frac{|\sum_{k=0}^{N-1} a_k|}{n} + \frac{(n - N + 1)\varepsilon}{n} \to \varepsilon
\end{aligned}$$

(b) Die Aussage folgt aus (a) und der konvergenten Folge $\tilde{a}_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$.

(c) Offensichtlich ist die Reihe nicht konvergent, denn wir finden kein N sodass die Folgenglieder in einem Ball mit Radius $\frac{1}{3}$ liegen. Allerdings sehen wir:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}(-1) = \frac{1-\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}{n}$$

Für n ungerade haben wir:

$$\frac{1-\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}{n} = \frac{1-\frac{n-1}{2}}{n} \to -\frac{1}{2}$$

und für n gerade:

$$\frac{1-\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}{n} = \frac{1-\frac{n}{2}}{n} \to -\frac{1}{2}$$

In beiden Fällen hat die Folge einen Grenzwert. Dieser stimmt überein, also ist der Grenzwert $-\frac{1}{2}$.

(d) Wir bezeichnen $S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$ und $C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k$. Nach Voraussetzung gilt $C_n - C_{n-1} \to C - C = 0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
C_n - C_{n-1} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k - \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2} S_k \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} S_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} S_k - \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2} S_k \\
&= \frac{1}{n}S_{n-1} - \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2} S_k \\
&= \frac{1}{n}S_n - \frac{1}{n}C_{n-1} \to \frac{1}{n}S_n
\end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass $\frac{1}{n}S_n$ auch gegen 0 gehen muss. Es gilt aber auch:

$$\frac{S_{n-1}}{n} = \frac{S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} \to 0\cdot 1$$

Also gilt auch:

$$\frac{a_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} \to 0 - 0 = 0$$

Beispiel 1. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und integrierbar. Zeigen Sie folgendes.*

(a) Wenn die Fourier-Reihe von f am Punkt x konvergiert, dann

$$f(x) = \hat{f}(0) + \sum_{n \geq 1} [\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)] \cos(nx) + i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] \sin(nx).$$

(b) Wenn f gerade ist, dann ist $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ und die Fourier-Reihe von f besteht, wenn sie konvergent ist, aus Kosinusfunktionen.

(c) Wenn f ungerade ist, dann ist $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$ und die Fourier-Reihe von f besteht, wenn sie konvergent ist, aus Sinusfunktionen.

(d) Wenn $f(x + \pi) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, dann $\hat{f}(n) = 0$ für jedes ungerade $n \in \mathbb{Z}$.

(e) Wenn f reellwertig ist, dann ist $\hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Gilt die umgekehrte Implikation?

(a) Da $x \in \mathbb{R}$, gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \hat{f}(-n) e^{-inx} \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \hat{f}(n)(\cos(nx) + i \sin(nx)) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \hat{f}(-n)(\cos(nx) - i \sin(nx)) \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n \geq 1} [\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)] \cos(nx) + i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] \sin(nx)
\end{aligned}$$

(b) Wir finden:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(-nx) dx + i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(-nx) dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \hat{f}(-n)
\end{aligned}$$

Weil der Sinus ungerade ist und f gerade ist, fällt das entsprechende Integral weg, deswegen dürfen wir von der zweiten auf die dritte Zeile das Vorzeichen des zweiten Integrals wechseln.
Für die Fourierreihe gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)(\cos(nx) + i \sin(nx)) \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n \geq 1} \hat{f}(n)(\cos(nx) + i \sin(nx)) + \sum_{n \geq 1} \hat{f}(-n)(\cos(-nx) + i \sin(-nx)) \\
&= \hat{f}(0) + 2 \sum_{n \geq 1} \hat{f}(n) \cos(nx)
\end{aligned}$$

(c) Genauso sehen wir für f ungerade:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx = -\hat{f}(-n)\end{aligned}$$

Weil der Cosinus gerade ist und f ungerade ist, fällt das entsprechende Integral weg, deswegen dürfen wir von der zweiten auf die dritte Zeile das Vorzeichen des ersten Integrals wechseln. Für die Fourierreihe gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)(\cos(nx)+i\sin(nx)) \\ &= \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}\hat{f}(n)(\cos(nx)+i\sin(nx)) + \sum_{n\geq 1}\hat{f}(-n)(\cos(-nx)+i\sin(-nx)) \\ &= 2i\sum_{n\geq 1}\hat{f}(n)\sin(nx)\end{aligned}$$

(d) Sei $2m+1\in\mathbb{Z}$ ungerade (also $m\in\mathbb{Z}$), dann gilt:

$$\begin{aligned}\hat{f}(2m+1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(2m+1)x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)e^{-i(2m+1)(x+\pi)}dx \\ &= e^{-i(2m+1)\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(2m+1)x}dx \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(2m+1)x}dx = -\hat{f}(2m+1)\end{aligned}$$

(e) Es gilt:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)dx + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx} = \overline{\hat{f}(-n)}\end{aligned}$$

Nehmen wir an die gegebene Bedingung hält für f, dann ist (weil man bei konvergenten

Reihen die Konjugation in die Summe ziehen darf):

$$\begin{aligned}
\overline{f(x)} &= \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(n)e^{inx}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(-n)e^{-inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx} = f(x)
\end{aligned}$$

Also ist f reellwertig.

Beispiel 2. *Beweisen Sie das folgende Kriterium für die Konvergenz einer Reihe (bekannt als Dirichlet-Test). Seien $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ und $\{b_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$. Nehmen wir an, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton auf 0 abnimmt und dass die Folge der Partialsummen*

$$B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

beschränkt ist. Dann konvergiert $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$.

Wir haben:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1})$$

Sei $|B_n| \leq M$, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n-1} |B_k(a_k - a_{k+1})| \leq M \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \to M a_1$$

und da wir $a_n B_n \to 0$. Also konvergiert die Reihe absolut nach dem Majorantenkriterium. Das a_k reell und monoton ist brauchen wir, damit wir den Betrag weglassen können.

Beispiel 3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodische Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin]\, a, b] \end{cases}.$$

wobei $-\pi < a < b < \pi$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi i n} e^{inx}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe für kein x absolut konvergiert.

(c) Beweisen Sie jedoch, dass die Fourier-Reihe in jedem Punkt x konvergiert. (Achtung: Sie müssen nicht beweisen, dass die Reihe gegen $f(x)$ kotwergiert; Hinweise: Dirichlet-Test).

(d) Was passiert, wenn $a = -\pi$ und $b = \pi$?

(a) Wir finden:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-in\theta} d\theta e^{inx} \\ &= \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-inb} - e^{-ina}}{-in} e^{inx} \\ &= \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx} \end{aligned}$$

(b) Sei x beliebig. Definieren wir θ so, dass $0 < 2\theta < \min(2\pi - b + a, b - a)$ hält. Dann gilt für alle $\alpha \in [-\pi, \pi) \setminus [-\theta, \theta]$ immer $1 - \cos(\alpha) \geq 1 - \cos(\theta) := \varepsilon > 0$.

Das wählen wir, damit wir gesamt

$$1 - \cos(n(b-a)) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos((n+1)(b-a)) \geq \varepsilon$$

haben. Graphisch haben wir also einen Sektor am Einheitskreis gewählt, der so klein ist, dass wir, wenn wir einmal darin landen mit der nächsten Iteration um $b - a$ weiter den Einheitskreis entlang gehen und damit sicher aus dem Sektor herausgehen, was wir in der folgenden Abschätzung gleich verwenden werden:

$$\begin{aligned} \sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \left| \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx} \right| &= \sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \frac{|e^{-ina} - e^{-inb}|}{2\pi|n|} \\ &= \sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \frac{|e^{-ina}||1 - e^{-in(b-a)}|}{2\pi|n|} \\ &= \sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \frac{|1 - \cos(n(b-a)) - i\sin(n(b-a))|}{2\pi|n|} \\ &= \sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \frac{\sqrt{(1-\cos(n(b-a)))^2 + \sin^2(n(b-a))}}{2\pi|n|} \\ &= \sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \frac{\sqrt{1-\cos(n(b-a))}}{\sqrt{2}\pi|n|} \\ &\geq \sum_{\substack{n\in Z\setminus\{0\} \\ 1-\cos(n(b-a))\geq\varepsilon}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}\pi|n|} = +\infty \end{aligned}$$

Nach Konstruktion wissen wir, dass die Indexmenge der letzten Summe unendlich ist, weil es zumindest jede zweite ganze Zahl sein muss.

(c) Wir wählen für den Dirichlet-Test die reelle Nullfolge $\frac{1}{2\pi n}$ (das i im Nenner hat keinen Einfluss auf Konvergenz). Nun zeigen wir, dass die Partialsummen (symmetrisch also betrachten wir technisch gesehen $-n$ und n als einen Summanden, was bei der Summation nicht zu einem Problem führt, weil wir die Werte der Partialsummen nicht verändern) von $(e^{-ina} - e^{-inb})e^{inx}$ beschränkt sind.

Sei zuerst $x \neq a, b$. Wir erinnern uns an den Dirichlet-Kern:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} (e^{-ina} - e^{-inb})e^{inx} &= \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-a)} - \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-b)} \\ &= \frac{\sin((N+\frac{1}{2})(x-a))}{\sin(\frac{x-a}{2})} - \frac{\sin((N+\frac{1}{2})(x-b))}{\sin(\frac{x-b}{2})} \\ &\overset{|\cdot|}{\leq} \frac{2}{\min\left(\sin(\frac{x-a}{2}), \sin(\frac{x-b}{2})\right)} < \infty\end{aligned}$$

Sei nun $x = a$ ($x = b$ geht symmetrisch):

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} \frac{(e^{-ina} - e^{-inb})e^{ina}}{2\pi ni} &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1 - e^{in(a-b)}}{2\pi ni} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi ni} - \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{in(a-b)}}{2\pi ni}\end{aligned}$$

Die erste Summe ist aufgrund der Symmetrie 0, der zweite Summand konvergiert wieder nach dem Dirichlet-Test, genau wie oben.

(d) Für $a = -\pi$ und $b = \pi$ haben wir die konstante 1-Funktion und für die Fourier-Reihe gilt natürlich:

$$f(x) = \frac{2\pi}{2\pi} + \sum_{n \in Z \setminus \{0\}} \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2\pi in} e^{inx} = 1 + \sum_{n \in Z \setminus \{0\}} \frac{(-1)^n - (-1)^n}{2\pi in} e^{inx} = 1$$

Beispiel 4. *Sei $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Wir definieren die (formelle) Abel-Reihe durch*

$$A(r) := \sum_{n \geq 1} a_n r^n, \qquad 0 < r < 1.$$

Die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ heißt Abel konvergent, wenn jede $A(r)$ konvergent ist und der Abel Limes

$$\lim_{r \to 1^-} A(r)$$

existiert. Zeigen Sie das Folgende.

(a) Die Abel-Reihe $A(r)$ ist wohldefiniert, wenn a beschränkt ist.

(b) Wenn $\sum_{n>1} a_n$ konvergent ist, dann ist sie auch Abel konvergent.

(c) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} (-1)^n$ ist nicht konvergent, aber sie ist Abel konvergent. Was ist ihr Abel Limes?

(a) Ist $\|a\|_\infty = M$, dann finden wir:

$$\sum_{n\geq 1} |a_n r^n| \leq M \sum_{n\geq 1} r^n = M\left(\frac{1}{1-r} - 1\right)$$

also konvergiert sie für alle r absolut und ist somit wohldefiniert.

(b) Da die Summe über a_n konvergiert, ist diese eine Nullfolge und damit beschränkt durch M und die Abelreihe wohldefiniert. Sei nun $0 < r < 1$ beliebig, dann finden wir:

$$\sum_{n\geq 1} |a_n r^n| \leq M \sum_{n\geq 1} r^n < \infty$$

Nach dem Majorantenkriterium ist damit $a_n r^n$ absolut konvergent. Aus diesem Grund dürfen wir Limit und Summe vertauschen, also:

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geq 1} a_n r^n = \sum_{n\geq 1} \lim_{r\to 1^-} a_n r^n = \sum_{n\geq 1} a_n = A$$

(c) Das $\sum_{\mathrm{n}\geq 1}(-1)^n$ nicht konvergiert ist offensichtlich. Allerdings gilt:

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n r^n = \sum_{n\geq 1}(-r)^n = \frac{1}{1+r} - 1$$

Und damit gilt natürlich auch:

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1+r} - 1 = -\frac{1}{2}$$

b) Falsch siehe Ana2 Übungsblätter

Beispiel 5. *Zeigen Sie, die Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n n$ ist nicht Cesàro konvergent aber sie ist Abel konvergent.*

Zuerst beweise ich per Induktion $\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j = (-1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Für $n = 1$ gilt offensichtlich $\sum_{j=1}^{1}(-1)^j j = -1 = -1 \cdot 1$. Nun zum Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j &= (-1)^{n-1}\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + (-1)^n n \\ &= (-1)^n \left(n - \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)\end{aligned}$$

Ist nun n gerade, dann erhalten wir:

$$n - \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

und für n ungerade erhalten wir:

$$n - \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Nun überprüfen wir Cesaro-Konvergenz und betrachten dafür die Teilfolge der Partialsummen mit $n = 2m$ gerade:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k} a_j &= \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \\
&= \frac{1}{2m}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\left\lceil\frac{2k}{2}\right\rceil - \sum_{k=0}^{m-1}\left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil\right) \\
&= \frac{1}{2m}\left(\sum_{k=0}^{m-1}k - \sum_{k=0}^{m-1}k+1\right) \\
&= \frac{-m}{2m} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Sei hingegen $2m = n - 1$, dann finden wir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k} a_j &= \frac{1}{2m+1}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \\
&= \frac{1}{2m+1}\left(\sum_{k=0}^{m}\left\lceil\frac{2k}{2}\right\rceil - \sum_{k=0}^{m-1}\left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil\right) \\
&= \frac{1}{2m+1}\left(\sum_{k=0}^{m}k - \sum_{k=0}^{m-1}k+1\right) \\
&= \frac{m-m}{2m+1} = 0
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge nicht Cesàro konvergent.

Nun untersuchen wir die Reihe auf Abelkonvergenz. Wir wissen bereits, dass $\sum_{n\geq 1} z^{n+1}$ auf der offenen Einheitskreisscheibe konvergiert und somit nach Theorem 2.6 (Complex analysis, Princeton Lectures) holomorph ist. Nach dem gleichen Satz wissen wir auch, dass die termweise Ableitung $\sum_{n\geq 1}(n+1)z^n$ auf dem gleichen Konvergenzradius konvergiert. Damit gilt:

$$\sum_{n\geq 1}|(-1)^n n r^n| = \sum_{n\geq 1} n r^n \leq \sum_{n\geq 1}(n+1)r^n < \infty$$

Also haben wir absolute Konvergenz. Insbesondere gilt durch die entsprechende Überlegung:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}(-1)^n n r^n &= \sum_{n\geq 1} n(-r)^n = (-r)\sum_{n\geq 1} n(-r)^{n-1} = r\sum_{n\geq 1}\frac{d}{dr}(-r)^n \\
&= r\frac{d}{dr}\sum_{n\geq 1}(-r)^n = r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{1+r} - 1\right) = \frac{-r}{(1+r)^2} \to -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Für $r \to 1^-$. Also ist unser Abel-Grenzwert $-\frac{1}{4}$.

Der erste Unterpunkt geht viel leichter nach Übungsblatt 1 letzter Unterpunkt.

Sei $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Wir definieren die (formelle) Abel-Reihe durch

$$A(r) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n, \quad 0 < r < 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt Abel konvergent, wenn jede $A(r)$ konvergent ist und der Abel Limes

$$\lim_{r \to 1^-} A(r)$$

existiert. Zeigen Sie das Folgende.

(a) Die Abel-Reihe $A(r)$ ist wohldefiniert, wenn a beschränkt ist.

(b) Wenn $\sum_{n \geq 1} a_n$ konvergent ist, dann ist sie auch Abel konvergent.

(c) Die Reihe $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$ ist nicht konvergent, aber sie ist Abel konvergent. Was ist ihr Abel Limes?

a)

Um die Wohldefiniertheit von $A(r)$ zu zeigen, müssen wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ konvergent ist:
Wir zeigen sogar mehr - Wir zeigen, dass sie sogar absolut konvergent ist:
Wenn $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$ gilt:

$$\sum_{n \geq 1} |a_n r^n| = \sum_{n \geq 1} |a_n| r^n \leq \sum_{n \geq 1} M r^n = \frac{M}{1-r} - M = \frac{M}{r-1}$$

Also ist die Reihe absolut konvergent $\implies \sum_{n \geq 1} a_n r^n$ konvergiert ebenfalls.

b)

$\sum_{n \geq 1} a_n$ ist konvergent. d.h. $\sum_{n \geq 1} a_n = \alpha$. Um den Beweis etwas anschaulicher zu machen, nehmen wir an, dass $\alpha = 0$.
Weiters definieren wir die Partialsummen: $\sum_{n=1}^{N} a_n = \alpha_N \to \alpha$.
Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass $\lim_{r \to 1^-} A(r) = \alpha$:
Wir nutzen die Gleichung aus dem letzten Übungsblatt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n r^n &= r^N \alpha_N - \sum_{n=1}^{N-1} (r^{n+1} - r^n) \alpha_n \\
&= r^N \alpha_N - \sum_{n=1}^{N-1} (r-1) r^n \alpha_n \\
&= r^N \alpha_N + (1-r) \sum_{n=1}^{N-1} r^n \alpha_n \\
\xrightarrow[N \to \infty]{} &= 0 + (1-r) \sum_{n \geq 1} r^n \alpha_n
\end{aligned}$$

Wir müssen jetzt zeigen, dass $\lim_{r\to 1^-}(1-r)\sum_{n\geq 1}\alpha_n r^n = 0$

Wir wissen, dass die α_n beschränkt sind: d.h. $\exists M \leq \infty : \forall n \in \mathbb{N} : |\alpha_n| \leq M$
Da $\alpha_n \to 0$: $\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n \geq N : |\alpha_n| \leq \epsilon$.

Wir spalten die Reihe in zwei Teile auf:

$$\begin{aligned}
|(1-r)\sum_{n\geq 1}\alpha_n r^n| &= |(1-r)(\sum_{n=1}^{N-1}\alpha_n r^n + \sum_{n\geq N}\alpha_n r^n)| \\
&\leq (1-r)(\sum_{n=1}^{N-1}|\alpha_n| r^n + \sum_{n\geq N}|\alpha_n| r^n) \\
&\leq (1-r)(\sum_{n=1}^{N-1} M r^n + \sum_{n\geq N}\epsilon r^n) \\
&= (1-r)(\frac{M(1-r^N)}{1-r} - M + \frac{\epsilon}{1-r} - \frac{\epsilon(1-r^N)}{1-r}) \\
&= M(r-r^N) + \epsilon - \epsilon(1-r^N) \\
\xrightarrow[r\to 1^-]{} &= \epsilon
\end{aligned}$$

d.h.
$\forall \epsilon > 0 : \lim_{r\to 1^-}|(1-r)\sum_{n\geq}\alpha_n r^n| \leq \epsilon \iff \lim_{r\to 1^-}|(1-r)\sum_{n\geq}\alpha_n r^n| = 0$

Warum reicht es, wenn wir uns nur auf den Fall $\sum_{n\geq 1}\alpha_n = 0$ beziehen?

Wenn $\sum_{n\geq 1} a_n = \alpha \neq 0$ konvergent ist, können wir das Verhalten von

$$\sum_{n\geq 1}\left(a_n - \frac{\alpha}{2^n}\right) = \sum_{n\geq 1} a_n - \sum_{n\geq 1}\frac{\alpha}{2^n} = \alpha - \alpha = 0$$

betrachten und dasselbe Argument wie oben durchführen.

c)
Wie auch beim letzten Übungsblatt besprochen wurde, ist die Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ nicht konvergent, weil die Folge ihrer Partialsummen $\sum_{n=1}^{N}$ zwei Häufungspunkte in -1 und 0 hat.
Sie ist aber Abel konvergent, da

1. $\forall r : 0 < r < 1$ $A(r)$ konvergent ist,
   $A(r) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n r^n = \sum_{n\geq 1}(-r)^n = \frac{1}{1+r} - 1 = -\frac{r}{1+r}$
2. $\lim_{r\to 1^-} A(r)$ existiert.
   $A(r) = \lim_{r\to 1^-}\frac{r}{1+r} = -\frac{1}{2}$

Beispiel 1.

(i) *Seien $f : S^1 \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodische Funktion $g(x) := f(e^{ix})$. Zeigen Sie, dass f stetig ist, genau dann wenn g stetig ist.*

(ii) *Zeigen Sie, dass für jede 2π-periodische und stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion $f : S^1 \to \mathbb{C}$ existiert, mit $g(x) = f(e^{ix})$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.*

(Hier, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.)

Ist f stetig, so ist g als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Ist hingegen g stetig und $z_n \to z$ eine Konvergente Folge auf S^1. Dann finden wir eine Folge $\theta_n \to \theta$ mit $e^{i\theta_n} = z_n$ und $e^{i\theta} = z$. Denn nehmen wir an, das wäre nicht der Fall, dann würden wir eine Teilfolge θ_{n_k} finden, die nicht gegen θ sondern gegen $\tilde{\theta}$ (mit $\theta \neq \tilde{\theta} \mod 2\pi$) konvergiert (weil S^1 kompakt ist). Dann gilt aber $|z_{n_k} - z| = \left|e^{i\theta_{n_k}} - e^{i\theta}\right| \nrightarrow 0$. Damit finden wir nun für die Folge z_n:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(e^{i\theta_n}) = \lim_{n\to\infty} g(\theta_n) = g(\theta) = f(e^{i\theta}) = f(z)$$

Also haben wir auch die Umkehrung gezeigt.

Wir betrachten g für den zweiten Unterpunkt zuerst nur auf $[-\pi, \pi]$. Dann definieren wir f durch $f(z) = f(e^{i\theta}) := g(\theta)$. Dabei schreiben wir z immer mit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Sei nun $\alpha := \theta + 2k\pi$ beliebig:

$$g(\alpha) = g(\theta + 2k\pi) = g(\theta) = f(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta} \cdot e^{2k\pi}) = f(e^{i\alpha})$$

Also erfüllt unser f die Bedingung $g(x) = f(e^{ix})$. Weiter wissen wir, aus Punkt 1, dass f stetig ist.

Beispiel 2. *Betrachten Sie die 2π-periodische ungerade Funktion, die auf $[0, \pi]$ durch $f(x) = x(\pi - x)$ definiert ist.*

(i) *Zeichnen Sie den Graphen von f.*

(ii) *Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von f und zeigen Sie, dass:*

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k\geq 1 \text{ ungerade}} \frac{\sin(kx)}{k^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Wir zeichnen die Funktion im Intervall $[0, \pi]$ und setzen sie zuerst ungerade und dann periodisch fort. Damit erhalten wir Nun bestimmen wir die Fourierkoeffizienten für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
2\pi \hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{0} x(\pi + x)e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} x(\pi - x)e^{-inx}dx \\
&= \int_{-\pi}^{0} \pi x e^{-inx}dx + \int_{-\pi}^{0} x^2 e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} \pi x e^{-inx}dx - \int_{0}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \pi x e^{-inx}dx + \int_{-\pi}^{0} x^2 e^{-inx}dx - \int_{0}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx
\end{aligned}$$

Wir berechnen die zugehörigen Stammfunktionen durch partielles Integrieren:

$$\int \pi x e^{-inx}dx = \frac{\pi x e^{-inx}}{-in} - \frac{\pi}{-in} \int e^{-inx}dx = \frac{\pi x e^{-inx}}{-in} + \frac{\pi}{n^2} e^{-inx}$$

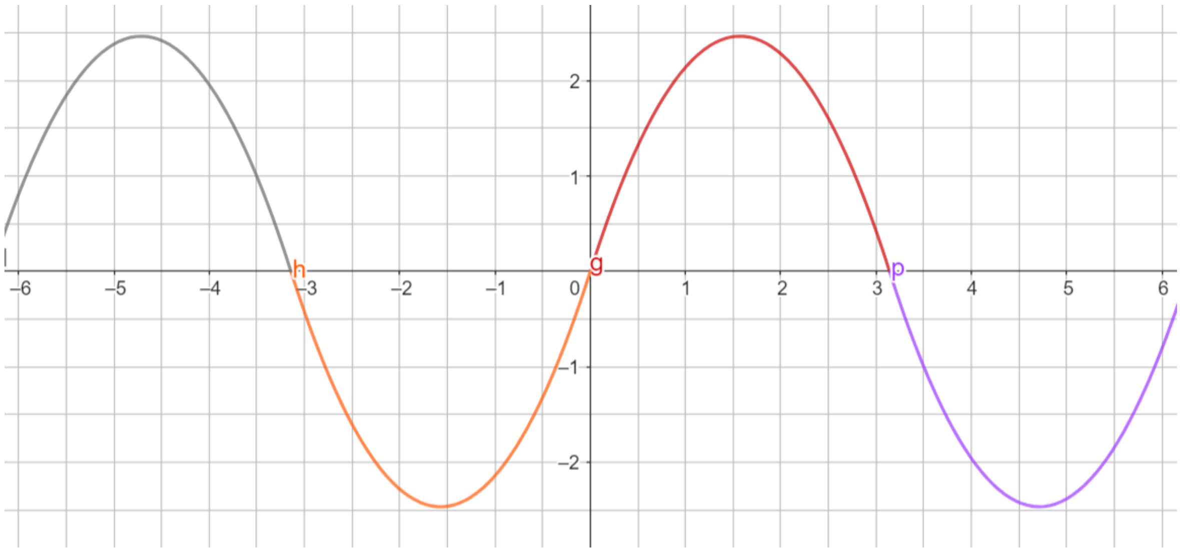

Figure 1: f(x)

und

$$\int x^2 e^{-inx} dx = \frac{x^2 e^{-inx}}{-in} - \frac{2}{-in} \int x e^{-inx} dx = \frac{x^2 e^{-inx}}{-in} + \frac{2}{in} \cdot \frac{x e^{-inx}}{-in} + \frac{2}{in} \cdot \frac{1}{n^2} e^{-inx}$$

Wir setzen die Grenzen ein:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \pi x e^{-inx} dx + \int_{-\pi}^{0} x^2 e^{-inx} dx - \int_{0}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx$$

$$= \frac{\pi^2 e^{-in\pi}}{-in} + \frac{\pi e^{-in\pi}}{n^2} + \frac{\pi^2 e^{-in\pi}}{-in} - \frac{\pi e^{-in\pi}}{n^2} +$$

$$\frac{2}{in^3} + \frac{\pi^2 e^{in\pi}}{in} + \frac{2\pi e^{in\pi}}{n^2} - \frac{2e^{in\pi}}{in^3} +$$

$$\frac{\pi^2 e^{in\pi}}{in} - \frac{2\pi e^{in\pi}}{n^2} - \frac{2e^{-in\pi}}{in^3} + \frac{2}{in^3}$$

$$= -\frac{4i}{n^3} + \frac{4ie^{-in\pi}}{n^3} = \frac{4i((-1)^n - 1)}{n^3}$$

Also gilt $\hat{f}(n) = \frac{2i((-1)^n-1)}{\pi n^3}$.

Für $n = 0$ finden wir hingegen:

$$\hat{f}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \pi x dx + \int_{-\pi}^{0} x^2 dx - \int_{0}^{\pi} x^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2}(\pi^2 - \pi^2) - \frac{1}{3}\pi^3 + \frac{1}{3}\pi^3 = 0$$

Da die Funktion stetig und periodisch ist, konvergiert die Fourierreihe gegen f. Damit haben wir insgesamt (mit $\mathbb{Z}^-$ für negative ganze Zahlen und $\mathbb{Z}^+$ für positive):

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} e^{inx} \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^-} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} e^{inx} + \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} e^{inx} \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{-\pi n^3} e^{-inx} + \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} e^{inx} \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} (e^{inx} - e^{-inx}) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+} \frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3} (e^{inx} - e^{-inx}) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+,\ \text{ungerade}} \frac{-4i}{\pi n^3} (e^{inx} - e^{-inx}) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^+,\ \text{ungerade}} \frac{8}{\pi n^3} \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\
&= \frac{8}{\pi} \sum_{\mathbb{Z}^+,\ \text{ungerade}} \frac{\sin(nx)}{n^3}
\end{aligned}$$

Beispiel 1. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π periodisch mit*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, das

$$f(x) \sim \frac{1}{2i} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{inx}}{n}.$$

(b) Beachten Sie, dass f nicht stetig ist. Zeigen Sie, dass die Fourier Reihe dennoch für jedes x konvergiert (womit wir wie üblich meinen, dass die symmetrischen Teilsummen der Reihe konvergieren). (Achtung: Sie müssen nicht beweisen, dass die Reihe gegen $f(x)$ konvergiert, sondern dass sie konvergent ist.)

(a) Wir finden für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) e^{-inx} dx + \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) e^{-inx} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{0} e^{-inx} dx \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} e^{-inx} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{-in} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{-in} e^{-inx} \right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{xe^{-inx}}{-in} + \frac{e^{-inx}}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2in} - \frac{\pi e^{in\pi}}{2in} - \frac{\pi e^{-in\pi}}{2in} + \frac{\pi}{2in} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} + \frac{e^{-in\pi}}{n^2} - \frac{\pi e^{in\pi}}{in} - \frac{e^{in\pi}}{n^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{in} - \frac{\pi e^{in\pi}}{in} + \frac{\pi e^{in\pi}}{in} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{in} = \frac{1}{2in}
\end{aligned}$$

Und für $n = 0$ sehen wir:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(0) &= \int_{-\pi}^{0} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} dx \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\int_{0}^{\pi} 1 dx - \int_{-\pi}^{0} 1 dx \right) - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} x dx \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

(b) Für den zweiten Punkt wenden wir die Dirichlet-Test an. Dafür spalten wir die Reihe in $\frac{1}{n}$ und e^{inx}. Ob wir den nullten Summanden mitzählen macht keinen Unterschied für die Konvergenz und die Reihe über e^{inx} ist der Dirichletkern, also:

$$\left| \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \right| = \frac{|\sin((N + \frac{1}{2})x)|}{|\sin(\frac{x}{2})|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$$

Für $x \neq 0$ haben wir somit mit dem Dirichlet-Test die Konvergenz gezeigt. Für $x = 0$ haben wir aber einfach:

$$\sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{e^{in0}}{n} = \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n} = 0$$

Beispiel 2. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und integrierbar und $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Nehmen wir an, dass f (höchstens) eine Sprungunstetigkeit bei x_0 hat, d.h., die Limes*

$$f\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad f\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

existieren und sind endlich. Zeigen Sie,

(a) $A_r(f) \to \frac{1}{2}\left(f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)\right)$, für $r \to 1^-$;

(b) $C_N(f) \to \frac{1}{2}\left(f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)\right)$, für $N \to \infty$;

wobei A_r und C_N die Abel und Cesaro Durchschnitte der Fourier Reihe sind. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(x)dx = \frac{1}{2}$ und argumentieren Sie wie im Satz 23.)

Wir zeigen zuerst, dass das Integral über den Poisson Kern jeweils $\frac{1}{2}$ ergibt. Wir wissen, dass die Poissonkerne eine gute Folge von Kernen sind, wenn wir $r_n \to 1^-$ betrachten, das Integral über P_r von $-\pi$ bis π ist daher immer 1. Das könnten wir auch händisch ausrechnen. Weil die Reihe konvergiert, können wir summandenweise integrieren:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{r^{|n|}}{in}(e^{in\pi} - e^{-in\pi}) = 1\end{aligned}$$

In der Darstellung:

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$$

sieht man, dass die Funktion in x gerade ist. Somit muss von 0 bis π die gleiche Fläche, wie von $-\pi$ bis 0 liegen, also jeweils $\frac{1}{2}$.

Weiter gilt $A_r(f) = (f * P_r)$, damit finden wir analog zum Beweis von Satz 23:

$$\begin{aligned}
&\left|A_r(f)(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))\right| = \left|(f * P_r)(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y)P_r(y)dy - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y)P_r(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0^+)P_r(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0^-)P_r(y)dy\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x_0 - y)P_r - f(x_0^+)P_r(y)dy + \int_{0}^{\pi} f(x_0 - y)P_r - f(x_0^-)P_r(y)dy\right)\right| \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy + \int_{0}^{\pi} |f(x_0 - y) - f(x_0^-)||P_r(y)|dy\right) \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int_{-\delta<y<0} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy + \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy \\
&+ \int_{0<y<\delta} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy + \int_{\delta}^{\pi} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy\Bigg) \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\Bigg(\sup_{-\delta<y<0}(|f(x_0 - y) - f(x_0^+)|)\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(y)|dy + 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{-\delta} |P_r(y)|dy \\
&+ \sup_{0<y<\delta}(|f(x_0 - y) - f(x_0^+)|)\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(y)|dy + 2\|f\|_\infty \int_{\delta}^{\pi} |P_r(y)|dy\Bigg) \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\sup_{-\delta<y<0}(|f(x_0 - y) - f(x_0^+)|)}_{\to 0} M + 2\|f\|_\infty \underbrace{\int_{-\pi}^{-\delta} |P_r(y)|dy}_{\to 0} \\
&+ \underbrace{\sup_{0<y<\delta}(|f(x_0 - y) - f(x_0^+)|)}_{\to 0} M + 2\|f\|_\infty \underbrace{\int_{\delta}^{\pi} |P_r(y)|dy}_{\to 0}\Bigg)
\end{aligned}$$

Genau analog können wir für Fejér Kerne, also für die Cesaro-Mittel mit $C_n(f) = f * F_n$, argumentieren, die auch eine gute Folge von Kernen und symmetrisch in x sind:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

Beispiel 3. *Betrachten Sie die Funktions- und Sequenzräume*

$$\begin{aligned}
L^1([-\pi, \pi]) &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ messbar, mit } \|f\|_1 < \infty\}, \quad &&\text{wobei } \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \\
\ell^\infty(\mathbb{Z}) &= \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \|a\|_\infty < \infty\}, &&\text{wobei } \|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|.
\end{aligned}$$

(Wie üblich werden L^1-Funktionen identifiziert, wenn sie sich in einer Nullmenge unterscheiden.)

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} : L^1([-\pi, \pi]) &\to \ell^\infty(\mathbb{Z}) \\
f &\mapsto (f(n))_{n\in Z}
\end{aligned}$$

eine stetige Abbildung ist. (Hier, $f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$.)

Sei f_k eine Folge, die gegen f konvergiert, also

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_k - f|dx \to 0$$

Nun prüfen wir, ob die Folge $(\hat{f}_k(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ auch gegen $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ konvergiert.

$$\begin{aligned}\|(\hat{f}_k(n))_{n\in\mathbb{Z}} - (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}\| &= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_k - f)e^{-inx}dx\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_k - f||e^{-inx}|dx \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_k - f|dx \to 0\end{aligned}$$

Beispiel 4. *Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und integrierbar und $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie das Folgende.*

(a) Wenn f k-mal stetig differenzierbar ist, dann

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1 + |n|)^k|\hat{f}(n)| < \infty.$$

(Wobei, "0-mal stetig differenzierbar" = "stetig".)

(b) Wenn

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1 + |n|)^k|\hat{f}(n)| < \infty,$$

dann ist f k-mal stetig differenzierbar nach Neudefinition auf einer Nullmenge. Das heißt, eine k-mal stetig differenzierbare Funktion g existiert mit $f = g$ fast überall.

(c) Finden Sie eine integrierbare aber nicht (fast) stetige Funktion f, mit

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1 + |n|)|\hat{f}(n)| < \infty.$$

(a) Aus Satz 12 wissen wir $\hat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$ und damit bekommen wir analog zum Beweis von Korollar 13 für $n \neq 0$:

$$|\hat{f}(n)| = \left|\frac{1}{(in)^k}\hat{f^{(k)}}(n)\right| = \frac{1}{2\pi|n|^k}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f^{(k)}(n)e^{-inx}dx\right| \leq \frac{1}{2\pi|n|^k}\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(k)}(n)|dx \leq \frac{C}{|n|^k}$$

Damit bekommen wir für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1 + |n|)^k|\hat{f}(n)| &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}}(1 + |n|)^k C\frac{1}{|n|^k} \\ &= C\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1 + |n|}{|n|}\right)^k \\ &\leq 2^k C\end{aligned}$$

Für $n = 0$ ist $\hat{f}(0)$ aber auch beschränkt, weil die Funktion integrierbar ist.

(b) Wir definieren:

$$g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{inx}$$

Nach der Voraussetzung sind insbesondere die $\hat{f}(n)$ absolut summierbar, damit existiert nach Korollar 38 eine Funktion g mit den gleichen Fourierkoeffizienten, die stetig ist und fast überall mit f übereinstimmt. So können wir g oBdA stetig und f.ü $f = g$ wählen. Nun differenzieren wir g, dabei dürfen wir Ableitungsoperator und Summe vertauschen, weil diese absolut konvergiert:

$$g'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d}{dx}\hat{f}(n)e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(in)e^{inx}$$

Nun gilt aber nach Voraussetzung:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)(in)e^{inx}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)||n| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|)^k|\hat{f}(n)| < \infty$$

Wir fahren per Induktion fort, nehmen also an, dass die $l-1$-te Ableitung absolut konvergent und sehen so für die l-te Ableitung (mit $l \leq k$):

$$g^{(l)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d}{dx}\hat{f}(n)(in)^{l-1}e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d}{dx}\hat{f}(n)(in)^{l}e^{inx}$$

und

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)(in)^l e^{inx}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)||n|^l \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|)^k|\hat{f}(n)| < \infty$$

Somit ist auch jede Ableitung bis zur k-ten stetig.

(c) Für den letzten Punkt ziehe ich das Beispiel 3 von UE 8 heran:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin]a,b] \end{cases}.$$

Wobei wir $\hat{f}(0) = \frac{b-a}{2\pi}$ und $\hat{f}(n) = \frac{e^{-ina}-e^{-inb}}{2\pi in}$ erhalten, damit sehen wir für $n \neq 0$:

$$(1+|n|)|\hat{f}(n)| = (1+|n|)\frac{|e^{-ina}-e^{-inb}|}{|2\pi in|} \leq \frac{2(1+|n|)}{2\pi|n|} = \frac{1}{\pi|n|} + \frac{1}{\pi} \leq \frac{2}{\pi}$$

Gesamt haben wir also:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)|\hat{f}(n)| \leq \max\left(\frac{b-a}{2\pi}, \frac{2}{\pi}\right) < \infty$$

Die Funktion ist nicht fast stetig, weil an ihren Sprungstellen eine stetige Annäherung auf einer nicht Nullmenge verschieden von f sein muss.

Satz von Parseval: Seien $f \in L^2([-\pi,\pi])$ und

$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx}, \quad N \geq 1$$

die partielle Fourier-Summen. Dann gilt Folgendes.

- (Quadratische Konvergenz)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2\,dx \longrightarrow 0 \text{ für } N \to \infty.$$

- (Parseval-Isometrie)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Beispiel 1. *Sei $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(\pi) = 0$. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $u : [0,\pi] \times [0,\infty)$ existiert, so dass*

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, & t \in [0,\infty) \\ u(\pi,t) = 0, & t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,\pi] \\ \Delta u = 0 & \textit{auf } (0,\pi) \times (0,\infty) \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, mit $g(-x) = -g(x), g \equiv f$ auf $[0,\pi]$ und die Funktionen $u_k(x,t) = e^{-kt}\sin(kx)$.

Zuerst sehen wir durch

$$\Delta u_k(x,t) = \underbrace{e^{-kt}(-k^2\sin(kx))}_{\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}} + \underbrace{k^2 e^{-kt}\sin(kx)}_{\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}} = 0$$

, dass die Funktionen tatsächlich harmonisch sind (und damit auch alle linear Kombinationen). Weiter erinnern wir uns, dass für alle ungeraden Funktionen g

$$g(x) \sim 2i\sum_{n\geq 1} \hat{g}(n)\sin(nx)$$

gilt. Wir definieren mit diesem Wissen:

$$u(x,t) := 2i\sum_{n\geq 1}\hat{g}(n)u_n(x,t) = 2i\sum_{n\geq 1}\hat{g}(n)e^{-nt}\sin(nx)$$

Nun prüfen wir die gewünschten Eigenschaften:

(i) $\sin(0) = 0 \Rightarrow u(0,t) = 0$

(ii) $\sin(\pi) = 0 \Rightarrow u(\pi,t) = 0$

(iii) $e^0 = 1 \Rightarrow g(x) \sim u(x,0)$

(iv) $\forall k | \Delta u_k = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$

Bleibt zu zeigen, dass die Fourierreihe von g gegen die Funktion selbst konvergiert. Das ist der Fall, denn wenn wir $r := e^{-t}$ dann haben wir für positives r genau das $u(x,t)$ die Abelreihe von g ist und somit konvergiert u gegen g für $t \to 0$.

Beispiel 2. *(a) Sei f die Funktion, die auf $[-\pi, \pi]$ durch $f(x) = |x|$ definiert ist. Verwenden Sie die Parsevals Identität, um das Folgende zu zeigen:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(b) Betrachten Sie die 2π-periodische ungerade Funktion, die auf $[0, \pi]$ durch $f(x) = x(\pi - x)$ definiert ist. Zeigen Sie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Wir rechnen mit Parseval und finden dafür zuerst:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{3\pi}\pi^3 = \frac{\pi^2}{3}$$

Für $n \neq 0$ finden wir mit der bereits aus anderen Aufgaben bekannten Stammfunktion $\frac{e^{-inx}}{n^2} - \frac{x}{in}e^{-inx}$ von xe^{-inx}:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\pi}^{0} x e^{-inx} dx + \int_{0}^{\pi} x e^{-inx} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n \pi}{in} + \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^n \pi}{in} - \frac{1}{n^2} \right) \\
&= \frac{2(-1)^n - 2}{2\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

Also sind alle geraden Fourierkoeffizienten 0 und alle ungeraden $\frac{2}{\pi n^2}$. Für $n = 0$ gilt:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi}\pi^2 = \frac{\pi}{2}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{3} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \\
&= \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi^2 |n^4|} + \frac{\pi^2}{4} \\
&= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{\pi^2}{4} \\
\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} &= \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^4}{96}
\end{aligned}$$

Für den zweiten Punkt sehen wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= \sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{n^4} + \sum_{n \text{ gerade}}\frac{1}{n^4} \\
&= \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{2^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \\
\Rightarrow \frac{15}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{96} \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^4}{90}
\end{aligned}$$

Wir verwenden wieder Parseval:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x\pi - x^2)^2dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\pi^2 - 2^3 + x^4dx \\
&= \frac{\pi^2}{3\pi}\pi^3 - \frac{2\pi}{4\pi}\pi^4 + \frac{1}{5}\pi^5 \\
&= \pi^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi^4}{30}
\end{aligned}$$

Weiter wissen wir von Übungsblatt 9 Aufgabe 2, dass für die gegebene Funktion für $n \neq 0$ $\hat{f}(n) = \frac{2i((-1)^n-1)}{\pi n^3}$, für n gerade haben wir also 0 als Fourierkoeffizient für n ungerade haben wir:

$$|\hat{f}(n)|^2 = \left|\frac{2i((-1)^n - 1)}{\pi n^3}\right|^2 = \left(\frac{4}{\pi|n|^3}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2|n|^6}$$

Nach Parseval gilt damit:

$$\frac{\pi^4}{30} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{|n|^6} = \frac{32}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^6}$$

Womit wegen $32 \cdot 30 = 960$ die erste Behauptung folgt. Die zweite Behautptung folgt durch:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{n^6} + \sum_{n \text{ gerade}}\frac{1}{n^6} \\
&= \frac{\pi^6}{960} + \frac{1}{2^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} \\
\Rightarrow \frac{63}{64}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^6}{960} \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^6}{945}
\end{aligned}$$

Beispiel 3. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Zeigen Sie das Folgende.*

(a) Auf $[0, 2\pi]$ gilt

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}e^{i(\pi-x)\alpha} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{inx}}{n+\alpha}$$

(b)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

Wir bestimmen die Fourierkoeffizienten für $f(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha}$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha} e^{-inx} dx \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin(\pi\alpha)} \int_0^{2\pi} e^{-ix(\alpha+n)} dx \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin(\pi\alpha)} \frac{1}{-i(\alpha+n)} \left[e^{-ix(\alpha+n)}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{-2i\sin(\pi\alpha)(\alpha+n)} \left(e^{-2\pi i(\alpha+n)} - 1\right) \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)(\alpha+n)} \frac{1-e^{-2\pi i\alpha}}{2i} \\
&= \frac{1}{\sin(\pi\alpha)(\alpha+n)} \cdot \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i} = \frac{1}{\alpha+n}
\end{aligned}$$

Also haben wir wie gewünscht

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{n+\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

Damit gilt nach der Parseval-Isometrie

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2}
\end{aligned}$$

Beispiel 4. *Beweisen Sie das Riemann-Lebesgue-Lemma: Wenn $f \in L^1([-\pi,\pi])$, dann $\hat{f}(n) \to 0$ für $n \to \pm\infty$.*
(Hinweis: Betrachten Sie zuerst $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Für $f \in L^1([-\pi,\pi])$ finden Sie $f_k \in L^2([-\pi,\pi])$ mit $\|f - f_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$)

Sei zuerst $f \in L^2$, dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Damit gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein N sodass alle Fourierkoeffizienten mit einem Index, der betragsmäßig größer N ist kleiner als ε, weil so die Konvergenz definiert ist.

Sei nun $f \in L^1$ beliebig, dann definieren wir

$$f_k(x) := \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese sind alle integrierbar und sogar in L^2, denn sie sind beschränkt.

Dann gilt

$$\|f - f_k\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_k| dx \to 0$$

Dabei gilt die letzte Konvergenz, denn $|f - f_k|$ ist eine integrierbare Funktion und wird von $|f|$ dominiert. Mit dem Satz der dominierten Konvergenz haben wir damit:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_k| dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{k\to\infty} |f - f_k| dx = 0$$

Damit gilt dann aber

$$|\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\hat{f}(x) - \hat{f}_k(x)) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(x) - \hat{f}_k(x)| dx \to 0$$

Dieser Grenzwert ist unabhängig von n, also ist der Grenzwert gleichmäßig und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} |\hat{f}(n)| = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} |\hat{f}_k(n)| = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} |\hat{f}_k(n)| = 0$$

Beispiel 1. *Seien $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$. Zeigen Sie, dass*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

Wir finden mit der Polarisationsformel:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx &= \langle f, g\rangle \\ &= \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f-ig\|^2 - i\|f+ig\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|\widehat{f+g}\|^2 - \|\widehat{f-g}\|^2 + i\|\widehat{f-ig}\|^2 - i\|\widehat{f+ig}\|^2) \\ &= \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}\end{aligned}$$

Die folgende Reihe konvergiert absolut, weil das Skalarprodukt in L^2 stetig ist (?):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}\overline{\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}(m)e^{imx}}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(m)}e^{i(n-m)x}dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(m)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(m)}\delta_{m,n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}\end{aligned}$$

Beispiel 2. *(Verbesserung von Korollar 14) Beweisen Sie, dass die Fourier-Reihe einer stetig differenzierbaren und periodischen Funktion absolut konvergent ist. (Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Parseval-Identität für die Ableitungsfunktion.)*

Wir wissen aus Satz 12, dass $\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$ gilt.

Da f stetig ist, ist die Funktion integrierbar und damit ist $f' \in L^2$. Damit gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n}|\hat{f}'(n)| \leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{f}'(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < C\|f'(x)\|_{L^2} < \infty$$

Beispiel 3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und C^k (d.h., k-mal stetig differenzierbar). Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\pm\infty} (1 + |n|)^k |\hat{f}(n)| = 0.$$

Dies ist eine Verbesserung gegenüber einer vorherigen Übung. (Hint: Verwenden Sie das Riemann-Lebesgue-Lemma.)

Wir beginnen mit einer ähnlichen Abschätzung wie auf Übungsblatt 10:

$$|\hat{f}(n)| = \left|\frac{1}{(in)^k}\widehat{f^{(k)}}(n)\right| = \frac{1}{|n|^k}|\widehat{f^{(k)}}(n)|$$

Nun ist nach der Angabe $f^{(k)}(x)$ stetig und damit auf kompakten Intervallen beschränkt. Die Funktion $f^{(k)}(n)$ ist somit integrierbar und nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma (Übungsblatt 11) gilt damit $\widehat{f^{(k)}}(n) \to 0$. Damit bekommen wir:

$$\lim_{n\to\pm\infty}(1+|n|)^k|\hat{f}(n)| \leq \lim_{n\to\pm\infty}\frac{(1+|n|)^k}{|n|^k}\left|\widehat{f^{(k)}}(n)\right| = 0$$

Wobei der letzte Schritt aus Riemann-Lebesgue folgt.

Beispiel 4. *Wir werden die Ungleichungen von Wirtinger und Poincaré beweisen, die einen Zusammenhang zwischen die Norm einer Funktion und die ihrer Ableitung herstellen.*

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodisch, stetig und stückweise C^1 (d.h., einmal stetig differenzierbar) mit $\int_0^T f(x)dx = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T \left|f'(x)\right|^2 dx$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f(x) = A\sin(2\pi x/T) + B\cos(2\pi x/T)$. (Hint: Wenden Sie Parsevals Identität an.)

(b) Sei f wie oben und g C^1 und T*-periodisch, Zeigen Sie, dass*

$$\left|\int_0^T \overline{f(x)}g(x)dx\right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(x)|^2 dx \int_0^T \left|g'(x)\right|^2 dx.$$

(c) Zeigen Sie, dass für jedes kompakte Intervall $[a, b]$ und jede stetig differenzierbare Funktion f mit $f(a) = f(b) = 0$,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b \left|f'(x)\right|^2 dx$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f(x) = A\sin\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$. (Hint: Erweitern Sie f so, dass es bezüglich a ungerade und T-periodisch ist, mit $T = 2(b-a)$, so dass sein Integral über ein Intervall der Länge T null ist.)

Nach dem Beweis für Satz 12 gilt allgemeiner:

$$\begin{aligned}
T\hat{f}(n) &= \int_0^T f(x)e^{-\frac{2\pi inx}{T}}dx = \int_0^T f(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{T}{-2\pi in}e^{-\frac{2\pi inx}{T}}\right]dx \\
&= \left[f(x)\frac{T}{-2\pi in}e^{-\frac{2\pi inx}{T}}\right]_0^T - \int_0^T f'(x)\frac{T}{-2\pi in}e^{-\frac{2\pi inx}{T}}dx = \frac{T^2}{-2\pi in}\hat{f'}(n) \\
&\Rightarrow \hat{f}(n) = \frac{T}{2\pi in}\hat{f'}(n)
\end{aligned}$$

Weiter sehen wir, dass nach Vorraussetzung

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = 0$$

gilt. Damit bekommen wir:

$$\int_0^T |f(x)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{f}(x)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^2|\hat{f}(x)|^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{f}'(x)|^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(x)|^2 dx$$

Damit Gleichheit gilt müssen alle Fourierkoeffizienten außer $\hat{f}(1)$ und $\hat{f}(-1)$ verschwinden. Damit muss unsere Fourierreihe wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \hat{f}(-1)e^{-\frac{2\pi i x}{T}} + \hat{f}(1)e^{\frac{2\pi i x}{T}} \\ &= \hat{f}(-1)\left(\cos\left(-\frac{2\pi x}{T}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi x}{T}\right)\right) + \hat{f}(1)\left(\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\right) \\ &= (\hat{f}(1) + \hat{f}(-1))\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + i(\hat{f}(1) - \hat{f}(-1))\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \end{aligned}$$

Für den zweiten Unterpunkt sehen wir durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und den ersten Unterpunkt:

$$\left|\int_0^T \overline{f(x)}g(x)dx\right|^2 \leq \int_0^T |f(x)|^2 dx \int_0^T |g(x)|^2 \, dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(x)|^2 dx \int_0^T \left|g'(x)\right|^2 dx$$

[Falsch: g muss man noch anpassen, weil das Integral nicht notwendigerweise verschwindet, $h(x) = g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$]. Wie im Hinweis gegeben betrachten wir die ungerade (bzgl. a) Funktion f auf einem Intervall mit Länge $T = 2(b-a)$. Damit ist das Integral über f auf jedem Intervall mit Länge T gleich 0 und somit können wir die Ungleichung des ersten Punktes anwenden und bekommen damit die erste Behauptung direkt. Gleicheit gilt damit genau dann wenn die Funktion

$$f(x-a) = A\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right) + B\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)$$

Diese Form hat (eigentlich $f(x)$, nur gleich $(x-a)$ geschrieben wegen dem Folgenden.) Diese Funktion ist um $x = 0$ ungerade und damit muss B gleich 0 sein.

Beispiel 4. *Wir werden die Ungleichungen von Wirtinger und Poincaré beweisen, die einen Zusammenhang zwischen die Norm einer Funktion und die ihrer Ableitung herstellen.*

(a) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodisch, stetig und stückweise C^1 (d.h., einmal stetig differenzierbar) mit $\int_0^T f(x)dx = 0$. Zeigen Sie, dass*

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \left|f'(x)\right|^2 dx$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f(x) = A\sin(2\pi x/T)+B\cos(2\pi x/T)$. (Hint: Wenden Sie Parsevals Identität an.)

(b) *Sei f wie oben und g C^1 und* T*-periodisch, Zeigen Sie, dass*

$$\left|\int_0^T \overline{f(x)} g(x) dx\right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(x)|^2 dx \int_0^T \left|g'(x)\right|^2 dx.$$

(c) *Zeigen Sie, dass für jedes kompakte Intervall $[a, b]$ und jede stetig differenzierbare Funktion f mit $f(a) = f(b) = 0$,*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \left|f'(x)\right|^2 dx$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f(x) = A\sin\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$. (Hint: Erweitern Sie f so, dass es bezüglich a ungerade und T-periodisch ist, mit $T = 2(b-a)$, so dass sein Integral über ein Intervall der Länge T null ist.)

a)

Als erstes substitutieren wir

$$y = \frac{2\pi x}{T}$$
$$g(x) = f\left(\frac{Ty}{2\pi}\right)$$

Dadurch wird die zu zeigende Ungleichung, nach herausziehen der konstanten Terme zu:

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dy \leq \int_0^{2\pi} \left|g'(x)\right|^2 dy$$

g ist stetig und somit L^2.
Wenn g' nicht L^2 ist, divergiert die rechte Seite womit die Ungleichung trivial ist. Also können wir auf beiden Seiten die Parseval-Isometrie anwenden.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g'}(n)|^2$$

Weiter sehen wir, dass nach Vorraussetzung gilt:

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = 0$$

Zusätzlich Verwenden wir, folgende Identität:

$$\hat{f'} = in\hat{f}$$

Damit bekommen wir:
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{g}(n)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^2|\hat{g}(n)|^2$$
Jeder Term auf der linken Seite kommt auch auf der rechten vor, und alle Terme sind positiv. Also haben wir die Ungleichung gezeigt. Es bleibt noch der Gleichheitsfall zu betrachten. Dieser tritt genau dann ein, wenn alle Fourierkoeffizienten außer die von ± 1 null sind. Wenn dies der Fall eintritt, konvergiert die Fourierreihe, womit sie insbesondere gegen $g(x)$ konvergiert, also, nach einer Rücksubstitution:

$$f(x) = \hat{f}(-1)e^{-\frac{2\pi i x}{T}} + \hat{f}(1)e^{-\frac{2\pi i x}{T}}$$

und nachdem man Eulers Identität nutzt:

$$f(x) = A\sin(2\pi x/T) + B\cos(2\pi x/T)$$

b)
Wir substituieren:
$$h(x) = g(x) - \hat{g}(0)$$
$$\left|\int_0^T \overline{f(x)}h(x)dx + \int_0^T \overline{f(x)}\hat{g}(0)dx\right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(x)|^2dx \int_0^T \left|h'(x)\right|^2 dx$$
Das zweite Integral in dem Betrag ist nun aber nur $\hat{f}(0)$ mal eine Konstante und somit 0:

$$\left|\int_0^T \overline{f(x)}h(x)dx\right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(x)|^2dx \int_0^T \left|h'(x)\right|^2 dx$$

Nun verwenden wir Cauchy schwarz auf der linken Seite:

$$\left|\int_0^T \overline{f(x)}h(x)dx\right|^2 \leq \int_0^T |f(x)|^2dx \int_0^T |h(x)|^2 dx$$

Nach *a)*
$$\int_0^T |f(x)|^2dx \int_0^T |h(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(x)|^2dx \int_0^T \left|h'(x)\right|^2 dx$$
Also, wegen der transitiven Eigenschaft von Ungleichungen:

$$\left|\int_0^T \overline{f(x)}g(x)dx\right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(x)|^2dx \int_0^T \left|g'(x)\right|^2 dx.$$

c)
substituiere:
$$y = x + a$$
$$T = 2(b-a)$$

Definiere:
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq \frac{T}{2} \\ -f(T-x) & \frac{T}{2} \leq x \leq T \end{cases}$$

Also ist zu zeigen:
$$\int_0^{\frac{T}{2}} |g(y)|^2dy \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^{\frac{T}{2}} \left|g'(y)\right|^2 dy$$

Man kann sehen, dass mit dieser Definition von g beide Integrale, jeweils gleich dem Integral von $\frac{T}{2}$ bis T sind. wir addieren dieses jeweilige verschobene Integral zu beiden Seiten dazu.

$$\int_0^T |g(y)|^2 dy \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \left|g'(y)\right|^2 dy$$

hier ist g nun: T-periodisch, stetig differenzierbar. Es bleibt noch eine Eigenschaft zu zeigen um a) anzuwenden:

$$\int_0^T g(y)dy = 0$$

Da wir f ungerade fortgesetzt haben gilt diese Eigenschaft aber auch.
Also können wir a) anwenden.
folglich hat $g(x)$ folgende Form:

$$g(y) = A\sin(2\pi y/T) + B\cos(2\pi y/T)$$

da aber $g(x)$ ungerade konstruiert wurde, muss $B = 0$ gelten. Und da $f = g$ auf $(0, b-a)$ gilt, muss auch f diese Form haben:

$$f(y) = A\sin(\pi y/(b-a))$$

Nun müssen wir noch y Rücksubstituieren:

$$f(x) = A\sin(\pi(x-a)/(b-a))$$

Sie können das folgende Resultat verwenden, das wir gleich in der Hauptvorlesung beweisen werden: Sei $\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i \xi x} dx$. Dann gilt $\check{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beispiel 1. *Seien*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \textit{für } |x| > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \textit{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \textit{für } |x| > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}, \quad \hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

wobei $\hat{f}(0) = 2$ und $\hat{g}(0) = 1$.

Die Faltung von f mit sich selbst ist g skaliert.

Wir finden:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi x \xi} dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \frac{1}{-1\pi\xi} [e^{-2\pi i x \xi}]_{-1}^{1} = \frac{e^{-2\pi i \xi} - e^{2\pi i \xi}}{-2\pi i \xi} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \end{aligned}$$

und

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi x \cdot 0} dx = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2$$

Für die zweite Funktion finden wir:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi x \xi} dx = \int_{-1}^{1} (1 - |x|) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x \xi} dx + \int_{-1}^{0} x e^{-2\pi x \xi} dx - \int_{0}^{1} x e^{-2\pi i x} dx \\ &= \frac{1}{-2\pi i \xi} (e^{-2\pi i \xi} - e^{2\pi i \xi}) + \left[e^{-2\pi i \xi} \left(\frac{-x}{2\pi i \xi} + \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} \right) \right]_{-1}^{0} - \left[e^{-2\pi i \xi} \left(\frac{-x}{2\pi i \xi} + \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} \right) \right]_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{-2\pi i \xi} (e^{-2\pi i \xi} - e^{2\pi i \xi}) + \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} - \frac{1}{2\pi i \xi} e^{2\pi i \xi} - \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} e^{2\pi i \xi} + \frac{1}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi} - \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} e^{-2\pi i \xi} + \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} \cdot \left(2 - e^{2\pi i \xi} - e^{-2\pi i \xi} \right) = \\ &= \left(\frac{e^{2\pi i \xi} - e^{-2\pi i \xi}}{2 i \pi \xi} \right) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \right)^2 \end{aligned}$$

und

$$\hat{g}(0) = \int_{-1}^{1} (1 - |x|) dx = \int_{-1}^{1} 1 dx + \int_{-1}^{0} x dx - \int_{0}^{1} x dx = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Beispiel 2.

(i) Berechnen Sie die Fourier-Transformationen der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = e^{-ax^+}, \quad f_2(x) = e^{-a|x|}, \quad f_3(x) = \left(x^2 + a\right)^{-2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $a \in (0, \infty)$. (Hier: $x^+ = \max\{x, 0\}$).

(ii) *Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existiert mit*

$$f - f'' = g.$$

Können Sie eine Formel für f in Bezug auf g finden?

Ersten zwei sind straight forward, drittes Integral mit der Formel am Anfang vom Blatt (gilt auch für L^1). Zusammenhang vom Fourierkoeffizienten von f_2 mit f_3 vergleichen. Es geht auch mit dem Residuensatz.

Teil 2: Fourierkoeffizienten berechnen (eh so wie ichs gemacht hab), Frage ist $\frac{\hat{g}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Gilt weil

$$\frac{\hat{g}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2} = \widehat{f * h}, \qquad h(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$$

Kann man aber auch direkt sehen, weil der Quotient unendlich oft differenzierbar ist und wenn man ableitet bekommt man Ableitung von $\hat{g}$ und Ableitungen von $\frac{1}{1+4\pi^2\xi^2}$ sind beschränkt, damit ist der Quotient Schwartz.

Beispiel 3. *(Bump-Funktionen und Dichte glatter, kompakt getragener Funktionen)*

(i) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ die "Bump-Funktion":*

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} e^{-1/(x-a)}e^{-1/(b-x)} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{für } x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Zeigen Sie, das $\varphi_{a,b}$ unendlich differenzierbar ist.

(ii) *Sei $f \in C_c(\mathbb{R})$ und $a < b$. Zeigen Sie, dass $f*\varphi_{a,b} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. (Hier: $f \in C_c(\mathbb{R})$ bedeutet, dass f stetig ist und einen kompakten Träger hat, während $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ bedeutet, dass f unendlich differenzierbar ist und einen kompakten Träger hat).*

(iii) *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass eine Folge $\{f_n : n \geq 1\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ existiert mit $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$ für $n \to \infty$.*

stetig klar, Ableitung für beliebiges x ausrechnen und wieder Grenzwert betrachten und dann per Induktion, die Ableitung am Punkt a oder Punkt b existiert, weil irgendwie Mittelwertsatz.

Faltung einsetzen schaun wo man ungleich 0 ist. Dann weiß man, dass diese kompakten Träger hat und $(\varphi_{a,b} * f)' = \varphi'_{a,b} * f$ gilt und damit die Funktion unendlich oft diffbar ist.

Für Teil 3 wissen wir, dass $C_c(\mathbb{R})$ dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, wählen eine solche Folge $g_n \to f$ und nutzen $K_n * g_n \to f$ mit $K = \frac{\varphi_{a,b}}{\|\varphi_{a,b}\|_1}$ und $K_n = \frac{1}{n}K(nx)$ (was eine Folge guter Kerne ist.).

Beispiel 4. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ stetig ist.*

Sei $\xi_n \to \xi$ beliebig, dann wird die Funktionenfolge $f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi_n}$ von der integrierbaren Funktion $|f(x)|$ dominiert und wir finden damit mit dem Satz der dominierten Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi x \xi_n} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi x \xi} dx = \hat{f}(\xi)$$

Ohne dominierte Konvergenz: Wenn $f_n \to f$, dann $\hat{f}_n \to \hat{f}$, wobei die erste Konvergenz in L^1 ist und die zweite in L^∞. $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Damit ist die Grenzfunktion stetig.