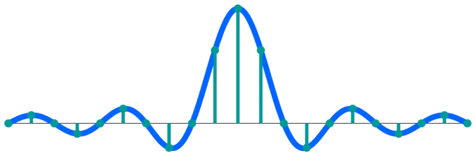
Das Shannon-Abtasttheorem

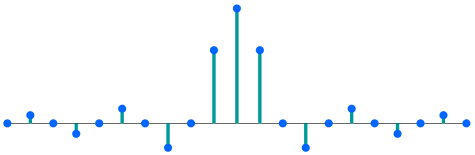
Harmonische Analysis - 250018 VO (2023W)

José Luis Romero

Universität Wien

Das Problem der Signalkodierung





Lagerung einer reduzierten Anzahl von Proben; erster Schritt in Richtung Digitalisierung

Schlüsselbegriffe

- Abtastrate
- Bandbreite

Prinzip der Probenahme

- Bandbreite = Abtastrate

Plan

- Mathematische Definition der Bandbreite
- Beweis des Abtasttheorems

* Claude E. Shannon, *Communication in the presence of noise*. Proceedings of the Institute of Radio Engineers. 1949.

Die Fourier-Transformation

Integrierbare Funktionen: $L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ messbar } : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty\}$
Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

Plancherels Isometrie

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ measurable } : \|f\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < \infty\}$
Erweiterung durch Dichte: isometrischer Isomorphismus $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

Inversionsformel für $\hat{f}$ integrierbar: f ist stetig (als L^2-Funktion) und

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Fourier-Reihen

Quadratintegrierbare Funktionen über ein kompaktes Intervall $\left[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}\right] \subseteq \mathbb{R}$:

$$L^2\left([-\tfrac{\Omega}{2}, \tfrac{\Omega}{2}]\right) = \left\{ f : [-\tfrac{\Omega}{2}, \tfrac{\Omega}{2}] \to \mathbb{C} \text{ messbar } : \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

Schlüsselfakt: die Exponentialfunktionen

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{2\pi i \frac{k}{\Omega} x}, \qquad x \in [-\tfrac{\Omega}{2}, \tfrac{\Omega}{2}], \qquad k \in \mathbb{Z}$$

sind eine Orthonormalbasis von $L^2\left([-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}]\right)$

Parsevals Isometrie:

$$\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} f(x) e^{-2\pi i \frac{k}{\Omega} x} dx \right|^2$$

Bandbreiten- und bandbegrenzte Funktionen

$$B_\Omega = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0, \text{ f.ü. } \xi \notin [-\tfrac{\Omega}{2}, \tfrac{\Omega}{2}] \right\}, \qquad \Omega = \text{Bandbreite}$$

Beispiel

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} & |\xi| \le \Omega/2 \\ 0 & |\xi| > \Omega/2 \end{cases}$$

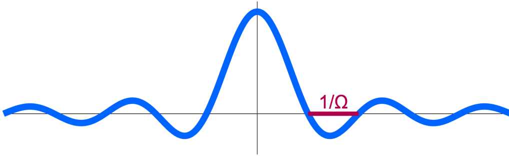
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \frac{1}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i \Omega x} \left(e^{\pi i \Omega x} - e^{-\pi i \Omega x} \right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{\sin(\pi \Omega x)}{\pi \Omega x}$$

Kardinalsinus

$$\frac{\sin\left(\pi\Omega(\,\cdot - \frac{k}{\Omega})\right)}{\pi\Omega(\,\cdot - \frac{k}{\Omega})} \in B_\Omega$$



$$f(k/\Omega) = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Bandbegrenzte Funktionen sind stetig

$$B_\Omega = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0, \text{ a.e. } \xi \notin [-\tfrac{\Omega}{2}, \tfrac{\Omega}{2}] \right\}, \qquad \Omega = \text{Bandbreite}$$

Für $f \in B_\Omega$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| 1_{[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}]}(\xi) d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} 1 \, d\xi \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Daher ist $\hat{f}$ integrierbar, f ist stetig und

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Auf dem Weg zum Abtasttheorem

Sei $f \in B_\Omega$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{\Omega} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i \frac{k}{\Omega}\xi} d\xi \right|^2 \\
&= \frac{1}{\Omega} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i \frac{k}{\Omega}\xi} d\xi \right|^2 \\
&= \frac{1}{\Omega} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| f(-\tfrac{k}{\Omega}) \right|^2 = \frac{1}{\Omega} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| f(\tfrac{k}{\Omega}) \right|^2
\end{aligned}$$

Stichprobenisometrie, wenn Abtastrate $= \Omega =$ Bandbreite

Der Satz von Shannon

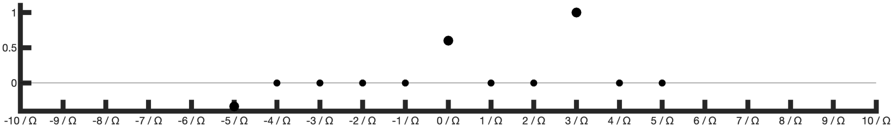
Satz: Sei $f \in B_\Omega$. Dann ist f stetig,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|f\left(\tfrac{k}{\Omega}\right)\right|^2$$

und

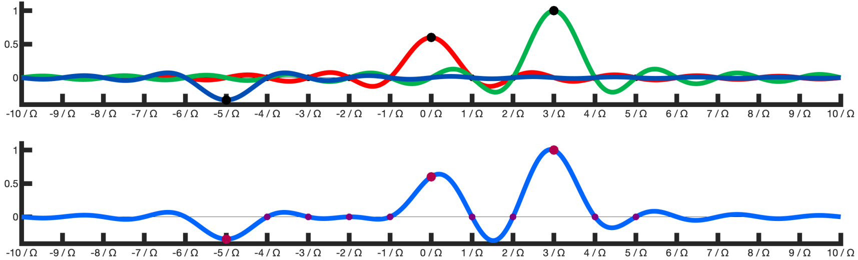
$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\tfrac{k}{\Omega}\right) \frac{\sin\left(\pi\Omega\left(\cdot - \frac{k}{\Omega}\right)\right)}{\pi\Omega\left(\cdot - \frac{k}{\Omega}\right)}$$

mit unbedingter Konvergenz in der Norm von $L^2(\mathbb{R})$.



Zusammenfassung und Ausblick

Abtastformel für eine bandbegrenzte Funktion: $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) \frac{\sin\left(\pi\Omega\left(\cdot - \frac{k}{\Omega}\right)\right)}{\pi\Omega\left(\cdot - \frac{k}{\Omega}\right)}$

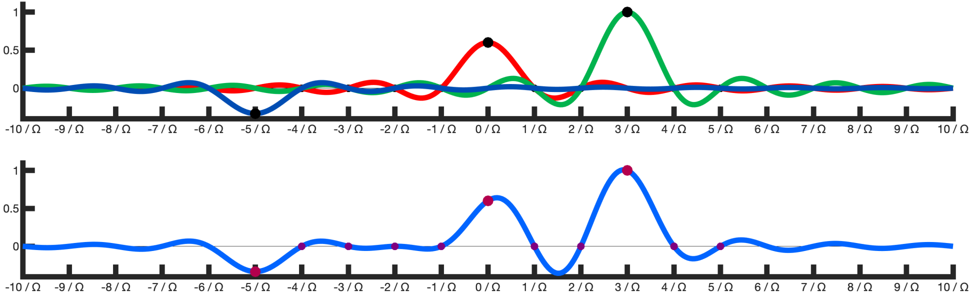


- Wie schnell konvergieren die Stichprobenreihen?
- Wie viele Informationen können aus endlich vielen Stichproben extrahiert werden?
- Wie wäre es mit *oversampling*?

Stabilität der Probenahme/Rekonstruktion

Für $f_1, f_2 \in B_\Omega$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx = \frac{1}{\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| f_1\left(\frac{k}{\Omega}\right) - f_2\left(\frac{k}{\Omega}\right) \right|^2$$



Gleichmäßige Konvergenz im Abtasttheorem

Satz: Sei $f \in B_\Omega$. Dann

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) \frac{\sin\left(\pi\Omega\left(x-\frac{k}{\Omega}\right)\right)}{\pi\Omega\left(x-\frac{k}{\Omega}\right)} \right| \longrightarrow 0, \quad \text{as } N \longrightarrow \infty$$

Beweis: Sei $E_N(x) := f(x) - \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) \frac{\sin\left(\pi\Omega\left(x-\frac{k}{\Omega}\right)\right)}{\pi\Omega\left(x-\frac{k}{\Omega}\right)}$

Wir wissen: $E_N \in B_\Omega$, $\|E_N\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |E_N(x)|^2 dx \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} |E_n(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{E_n}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi \right| = \left| \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \widehat{E_n}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi \right| \\ &\leq \sqrt{\Omega} \left\| \widehat{E_N} \right\|_2 = \sqrt{\Omega} \, \|E_N\|_2 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$