**Beispiel 1.** *Beschreibe die folgenden Punktmengen von $z \in \mathbb{C}$ der komplexen Ebene geometrisch:*

*(a)* $|z - z_1| = |z - z_2|$ *für vorgegebene* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

*(b)* $\frac{1}{z} = \bar{z}$

*(c)* $\mathfrak{Re}(az + b) > 0$ *für gegebene* $a, b \in \mathbb{C}$

*(d)* $e^z$ *für* $0 \leq \mathfrak{Re}(z) \leq 1$ *und* $0 \leq \mathfrak{Im}(z) \leq \pi$

(a) Die Menge ist die Symmetrieachse zwischen $z_1$ und $z_2$. Gilt $z_1 = z_2$, so ist die Menge natürlich die gesamte komplexe Ebene.

(b) Wir wissen, dass $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ gilt. Ein Element $z_0$ liegt also genau dann in der Menge, wenn $|z_0| = 1$ gilt, also ist es der Einheitskreis.

(c) Wir finden:

$$0 < \mathfrak{Re}(az + b) = \mathfrak{Re}(az) + \mathfrak{Re}(b) = \mathfrak{Re}(a)z_1 - \mathfrak{Im}(a)z_2 + \mathfrak{Re}(b)$$

Wenn $a = 0$ gilt, dann löst je nach $\mathfrak{Re}(b)$ ganz $\mathbb{C}$ oder kein einziges $z$.

Wenn $\mathfrak{Im}(a) = 0$, dann ist es alles rechts von

$$z_1 = -\frac{\mathfrak{Re}(b)}{\mathfrak{Re}(a)}$$

Lösung der Ungleichung.

Wenn $\mathfrak{Im}(a) \neq 0$, dann ist es alles unter

$$z_2 = \frac{\mathfrak{Re}(a)}{\mathfrak{Im}(a)} z_1 + \frac{\mathfrak{Re}(b)}{\mathfrak{Im}(a)}$$

Lösung der Ungleichung.

(d) Mit $z = x + iy, xy \in \mathbb{R}$ finden wir:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$e^x$ ist ein reeller Skalar im Intervall $[0, e]$ und $e^{iy}$ ist eine komplexe Zahl, die auf der oberen Hälfte des Einheitskreises liegt. Zusammengesetzt ist diese Menge also die obere Hälfte der Kreisscheibe um den Ursprung, die Radius $e$ hat.

**Beispiel 2.** *Seien* $s \geq 0$ *und* $\varphi \in \mathbb{R}$ *gegeben. Wie viele Lösungen hat die Gleichung* $z^n = se^{i\varphi}$, *für* $n \in \mathbb{N}$*? Finde sie.*

Wir schreiben $z = |z|e^{i\theta}$, womit wir die Gleichung $|z|^n e^{in\theta} = se^{i\varphi}$. Die Lösung dieser Gleichung äquivalent zur Lösung von

$$\begin{aligned} |z|^n &= s \\ n\theta &= \varphi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

sind. Damit bekommen wir die Lösungen:

$$z = s^{1/n} e^{i(\varphi/n + 2k\pi/n)}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

wobei nur $1 \leq k \leq n$ zu unterschiedlichen Lösungen führt, da wir eine Periodizität in den Lösungen haben. Insgesamt sind es also $n$ Lösungen.

**Beispiel 3.** *Sei $w \in B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ein Element der Einheitskreisscheibe, und definiere:*

$$F(z) := \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}.$$

*Zeige, dass dies eine Abbildung definiert mit den folgenden Eigenschaften:*

*(a) $F : B_1(0) \to B_1(0)$, d.h. $F$ bildet die Einheitskreisscheibe auf sich selber ab, und ist holomorph,*

*(b) $F$ vertauscht die Punkte $0$, $w \in B_1(0) : F(0) = w, F(w) = 0$,*

*(c) Für $|z| = 1$ gilt $|F(z)| = 1$,*

*(d) $F : B_1(0) \to B_1(0)$ ist bijektiv.*

(a) Die Funktion ist eine Selbstabbildung, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{|w-z|}{|1-\bar{w}z|} < 1 &\Leftrightarrow |w-z|^2 < |1-\bar{w}z|^2 \\
&\Leftrightarrow (w-z)(\bar{w}-\bar{z}) < (1-\bar{w}z)(1-w\bar{z}) \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z < 1 + |w|^2|z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 < 1 + |w|^2|z|^2
\end{aligned}$$

Die Funktion ist holomorph, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{w-z-h}{1-\bar{w}z-\bar{w}h} - \frac{w-z}{1-\bar{w}z}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{w - z - h - |w|^2 z + \bar{w}z^2 + \bar{w}zh - w + z + |w|^2 z - \bar{w}z^2 + |w|^2 h - \bar{w}zh}{(1-\bar{w}z-\bar{w}h)(1-\bar{w}z)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1 + |w|^2}{(1-\bar{w}z-\bar{w}h)(1-\bar{w}z)} \\
&= \frac{-1+|w|^2}{(1-\bar{w}z)^2}
\end{aligned}$$

(b) Wir finden natürlich:

$$F(0) = \frac{w-0}{1-0} = w \quad \wedge \quad F(w) = \frac{w-w}{1-\bar{w}w} = 0$$

(c) Sei $z$ mit $|z| = 1$ beliebig:

$$\begin{aligned}
\frac{|w-z|}{|1-\bar{w}z|} = 1 &\Leftrightarrow |w-z|^2 = |1-\bar{w}z|^2 \\
&\Leftrightarrow (w-z)(\bar{w}-\bar{z}) = (1-\bar{w}z)(1-w\bar{z}) \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z = 1 + |w|^2|z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 = 1 + |w|^2|z|^2 \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + 1 = 1 + |w|^2
\end{aligned}$$

(d) Zuerst beweisen wir die Injektivität:

$$\begin{aligned} F(z_1) &= F(z_2) \\ \frac{w - z_1}{1 - \bar{w}z_1} &= \frac{w - z_2}{1 - \bar{w}z_2} \\ (w - z_1)(1 - \bar{w}z_2) &= (w - z_2)(1 - \bar{w}z_1) \\ w - |w|^2 z_2 - z_1 + \bar{w}z_1 z_2 &= w - |w|^2 z_1 - z_2 + \bar{w}z_1 z_2 \\ -|w|^2 z_2 + z_2 &= -|w|^2 z_1 + z_1 \\ z_2(1 - |w|^2) &= z_1(1 - |w|^2) \\ z_2 &= z_1 \end{aligned}$$

Sei nun $z_0 \in B_1(0)$ beliebig. Nehmen wir an wir finden ein $z$ mit $F(z) = z_0$:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \\ z_0 &= w - z + \bar{w}z z_0 \\ z_0 - w &= z \underbrace{(\bar{w}z_0 - 1)}_{\neq 0} \\ z &= \frac{z_0 - w}{(\bar{w}z_0 - 1)} = F(z_0) \in B_1(0) \end{aligned}$$

Also ist die Funktion bijektiv (sogar selbstinvers).

**Beispiel 4.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:*

(a) *Sowohl Real- als auch Imaginärteil von $f$ sind harmonische Funktionen. (Erinnerung: Eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt harmoische, falls $g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.)*

(b) *Falls $\Omega$ zusammenhängend ist und $f$ nur reelle Werte annimmt, d.h. $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, dann ist $f$ konstant.*

Wir schreiben $f(z) = u(z) + iv(z)$. Wir kennen die Riemann-Cauchy Gleichungen, die gelten, da $f$ holomorph ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Mit dem Satz von Schwarz (welcher angewendet kann, weil jede holomorphe Funktion unendlich oft diffbar ist) folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y)$$

Also sind sowohl $u$ und $v$ harmonisch.

Wieder zerlegen wir $f(z) = u(z) + iv(z)$. Wenn $f$ nur reelle Werte annimmt gilt natürlich $\forall z \in \Omega | v(z) = 0$. Der Imaginärteil ist also konstant, damit ist die Ableitung 0 und somit sind auch die partiellen Ableitungen 0. Nach Gültigkeit der Riemann-Cauchy Gleichungen sind auch die partiellen Ableitungen von $u$ gleich 0. Damit ist auch $u$ konstant.

**Beispiel 5.** *Sei* $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Zeige:*

*(a) Falls* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < \infty$, *dann gilt* $R = \frac{1}{L}$.

*(b) Für jeden Punkt* $z_0 \in B_R(0)$ *kann* $f$ *auch als Potenzreihe um* $z_0$ *geschrieben werden.*

(a) Wir wissen, dass eine Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergiert, wenn

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \leq q < 1$$

für fast alle $n$ existiert und dann divergiert, wenn

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \geq 1$$

für fast alle $n$ gilt. Somit finden wir für unsere Potenzreihe:

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|a_{n+1}||z|^{n+1}}{|a_n||z|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z|$$

Für $|z| < R = \frac{1}{L}$ konvergiert die Reihe, denn

$$\exists \varepsilon, N, \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}(L - \varepsilon) =: q < 1$$

und für $|z| > L$ divergiert sie, denn

$$\exists \varepsilon, N, \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| > \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}(L + \varepsilon) \geq 1$$

(b) Sei $|z_0| < R$, dann finden wir mit der binomischen Formel:

$$z^n = (z - z_0 + z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z - z_0)^k$$

wodurch wir

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z - z_0)^k = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z - z_0)^k =: \sum_{k\geq 0} c_k(z - z_0)^k$$

Wir finden natürlich eine offene Umgebung um $z_0$ auf der diese Reihe konvergiert, da wir $z_0$ im Inneren des Konvergenzradius gewählt haben.