Beispiel 1. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π periodisch mit*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

(a) *Zeigen Sie, das*

$$f(x) \sim \frac{1}{2i} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{inx}}{n}.$$

(b) *Beachten Sie, dass f nicht stetig ist. Zeigen Sie, dass die Fourier Reihe dennoch für jedes x konvergiert (womit wir wie üblich meinen, dass die symmetrischen Teilsummen der Reihe konvergieren). (Achtung: Sie müssen nicht beweisen, dass die Reihe gegen $f(x)$ konvergiert, sondern dass sie konvergent ist.)*

(a) Wir finden für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) e^{-inx} dx + \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) e^{-inx} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{0} e^{-inx} dx \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} e^{-inx} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{-in} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{-in} e^{-inx} \right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{xe^{-inx}}{-in} + \frac{e^{-inx}}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2in} - \frac{\pi e^{in\pi}}{2in} - \frac{\pi e^{-in\pi}}{2in} + \frac{\pi}{2in} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} + \frac{e^{-in\pi}}{n^2} - \frac{\pi e^{in\pi}}{in} - \frac{e^{in\pi}}{n^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{in} - \frac{\pi e^{in\pi}}{in} + \frac{\pi e^{in\pi}}{in} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{in} = \frac{1}{2in}
\end{aligned}$$

Und für $n = 0$ sehen wir:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(0) &= \int_{-\pi}^{0} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} dx \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\int_{0}^{\pi} 1 dx - \int_{-\pi}^{0} 1 dx \right) - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} x dx \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

(b) Für den zweiten Punkt wenden wir die Dirichlet-Test an. Dafür spalten wir die Reihe in $\frac{1}{n}$ und e^{inx}. Ob wir den nullten Summanden mitzählen macht keinen Unterschied für die Konvergenz und die Reihe über e^{inx} ist der Dirichletkern, also:

$$\left| \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \right| = \frac{|\sin((N + \frac{1}{2})x)|}{|\sin(\frac{x}{2})|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$$

Für $x \neq 0$ haben wir somit mit dem Dirichlet-Test die Konvergenz gezeigt. Für $x = 0$ haben wir aber einfach:

$$\sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{e^{in0}}{n} = \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n} = 0$$

Beispiel 2. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und integrierbar und $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Nehmen wir an, dass f (höchstens) eine Sprungunstetigkeit bei x_0 hat, d.h., die Limes*

$$f\left(x_0^-\right) = \lim_{x\to x_0^-} f(x), \quad f\left(x_0^+\right) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

existieren und sind endlich. Zeigen Sie,

(a) $A_r(f) \to \frac{1}{2}\left(f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)\right)$, *für* $r \to 1^-$;

(b) $C_N(f) \to \frac{1}{2}\left(f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)\right)$, *für* $N \to \infty$;

wobei A_r und C_N die Abel und Cesaro Durchschnitte der Fourier Reihe sind. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(x)dx = \frac{1}{2}$ und argumentieren Sie wie im Satz 23.)

Wir zeigen zuerst, dass das Integral über den Poisson Kern jeweils $\frac{1}{2}$ ergibt. Wir wissen, dass die Poissonkerne eine gute Folge von Kernen sind, wenn wir $r_n \to 1^-$ betrachten, das Integral über P_r von $-\pi$ bis π ist daher immer 1. Das könnten wir auch händisch ausrechnen. Weil die Reihe konvergiert, können wir summandenweise integrieren:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx \\
&= 1 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{r^{|n|}}{in}(e^{in\pi} - e^{-in\pi}) = 1
\end{aligned}$$

In der Darstellung:

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$$

sieht man, dass die Funktion in x gerade ist. Somit muss von 0 bis π die gleiche Fläche, wie von $-\pi$ bis 0 liegen, also jeweils $\frac{1}{2}$.

Weiter gilt $A_r(f) = (f * P_r)$, damit finden wir analog zum Beweis von Satz 23:

$$
\begin{aligned}
&\left|A_r(f)(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))\right| = \left|(f * P_r)(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y)P_r(y)dy - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y)P_r(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0^+)P_r(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0^-)P_r(y)dy\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x_0 - y)P_r - f(x_0^+)P_r(y)dy + \int_{0}^{\pi} f(x_0 - y)P_r - f(x_0^-)P_r(y)dy\right)\right| \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy + \int_{0}^{\pi} |f(x_0 - y) - f(x_0^-)||P_r(y)|dy\right) \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int_{-\delta<y<0} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy + \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy \\
&+ \int_{0<y<\delta} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy + \int_{\delta}^{\pi} |f(x_0 - y) - f(x_0^+)||P_r(y)|dy\Bigg) \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\Bigg(\sup_{-\delta<y<0}(|f(x_0 - y) - f(x_0^+)|)\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(y)|dy + 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{-\delta} |P_r(y)|dy \\
&+ \sup_{0<y<\delta}(|f(x_0 - y) - f(x_0^+)|)\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(y)|dy + 2\|f\|_\infty \int_{\delta}^{\pi} |P_r(y)|dy\Bigg) \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\sup_{-\delta<y<0}(|f(x_0 - y) - f(x_0^+)|)}_{\to 0} M + 2\|f\|_\infty \underbrace{\int_{-\pi}^{-\delta} |P_r(y)|dy}_{\to 0} \\
&+ \underbrace{\sup_{0<y<\delta}(|f(x_0 - y) - f(x_0^+)|)}_{\to 0} M + 2\|f\|_\infty \underbrace{\int_{\delta}^{\pi} |P_r(y)|dy}_{\to 0}\Bigg)
\end{aligned}
$$

Genau analog können wir für Fejér Kerne, also für die Cesaro-Mittel mit $C_n(f) = f * F_n$, argumentieren, die auch eine gute Folge von Kernen und symmetrisch in x sind:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

Beispiel 3. *Betrachten Sie die Funktions- und Sequenzräume*

$$
\begin{aligned}
L^1([-\pi, \pi]) &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \textit{ messbar, mit } \|f\|_1 < \infty\}, \quad &&\textit{wobei } \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \\
\ell^\infty(\mathbb{Z}) &= \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \|a\|_\infty < \infty\}, &&\textit{wobei } \|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|.
\end{aligned}
$$

(Wie üblich werden L^1-Funktionen identifiziert, wenn sie sich in einer Nullmenge unterscheiden.)

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} : L^1([-\pi, \pi]) &\to \ell^\infty(\mathbb{Z}) \\
f &\mapsto (f(n))_{n\in Z}
\end{aligned}
$$

eine stetige Abbildung ist. (Hier, $f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$.)

Sei f_k eine Folge, die gegen f konvergiert, also

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_k - f|dx \to 0$$

Nun prüfen wir, ob die Folge $(\hat{f}_k(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ auch gegen $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ konvergiert.

$$\begin{aligned}\|(\hat{f}_k(n))_{n\in\mathbb{Z}} - (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}\| &= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_k - f)e^{-inx}dx\right| \quad \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_k - f||e^{-inx}|dx \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_k - f|dx \to 0\end{aligned}$$

Beispiel 4. *Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und integrierbar und $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie das Folgende.*

(a) Wenn f k-mal stetig differenzierbar ist, dann

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^k|\hat{f}(n)| < \infty.$$

(Wobei, "0-mal stetig differenzierbar" = "stetig".)

(b) Wenn

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^k|\hat{f}(n)| < \infty,$$

dann ist f k-mal stetig differenzierbar nach Neudefinition auf einer Nullmenge. Das heißt, eine k-mal stetig differenzierbare Funktion g existiert mit $f = g$ fast überall.

(c) Finden Sie eine integrierbare aber nicht (fast) stetige Funktion f, mit

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)|\hat{f}(n)| < \infty.$$

(a) Aus Satz 12 wissen wir $\hat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$ und damit bekommen wir analog zum Beweis von Korollar 13 für $n \neq 0$:

$$|\hat{f}(n)| = \left|\frac{1}{(in)^k}\hat{f^{(k)}}(n)\right| = \frac{1}{2\pi|n|^k}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f^{(k)}(n)e^{-inx}dx\right| \leq \frac{1}{2\pi|n|^k}\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(k)}(n)|dx \leq \frac{C}{|n|^k}$$

Damit bekommen wir für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^k|\hat{f}(n)| &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^k C\frac{1}{|n|^k} \\ &= C\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1+|n|}{|n|}\right)^k \\ &\leq 2^k C\end{aligned}$$

Für $n = 0$ ist $\hat{f}(0)$ aber auch beschränkt, weil die Funktion integrierbar ist.

(b) Wir definieren:

$$g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{inx}$$

Nach der Voraussetzung sind insbesondere die $\hat{f}(n)$ absolut summierbar, damit existiert nach Korollar 38 eine Funktion g mit den gleichen Fourierkoeffizienten, die stetig ist und fast überall mit f übereinstimmt. So können wir g oBdA stetig und f.ü $f = g$ wählen. Nun differenzieren wir g, dabei dürfen wir Ableitungsoperator und Summe vertauschen, weil diese absolut konvergiert:

$$g'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d}{dx}\hat{f}(n)e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(in)e^{inx}$$

Nun gilt aber nach Voraussetzung:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)(in)e^{inx}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)||n| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|)^k|\hat{f}(n)| < \infty$$

Wir fahren per Induktion fort, nehmen also an, dass die $l-1$-te Ableitung absolut konvergent und sehen so für die l-te Ableitung (mit $l \leq k$):

$$g^{(l)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d}{dx}\hat{f}(n)(in)^{l-1}e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d}{dx}\hat{f}(n)(in)^{l}e^{inx}$$

und

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)(in)^l e^{inx}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)||n|^l \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|)^k|\hat{f}(n)| < \infty$$

Somit ist auch jede Ableitung bis zur k-ten stetig.

(c) Für den letzten Punkt ziehe ich das Beispiel 3 von UE 8 heran:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin]a,b] \end{cases}.$$

Wobei wir $\hat{f}(0) = \frac{b-a}{2\pi}$ und $\hat{f}(n) = \frac{e^{-ina}-e^{-inb}}{2\pi in}$ erhalten, damit sehen wir für $n \neq 0$:

$$(1+|n|)|\hat{f}(n)| = (1+|n|)\frac{|e^{-ina}-e^{-inb}|}{|2\pi in|} \leq \frac{2(1+|n|)}{2\pi|n|} = \frac{1}{\pi|n|} + \frac{1}{\pi} \leq \frac{2}{\pi}$$

Gesamt haben wir also:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)|\hat{f}(n)| \leq \max\left(\frac{b-a}{2\pi}, \frac{2}{\pi}\right) < \infty$$

Die Funktion ist nicht fast stetig, weil an ihren Sprungstellen eine stetige Annäherung auf einer nicht Nullmenge verschieden von f sein muss.