Beispiel 1. *Sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphe Funktion f. Zeige: Die Funktion $z \mapsto e^{f(z)}$ kann in z_0 keinen Pol haben.*

Nehmen wir an $e^{f(z)}$ hätte einen Pol bei z_0, dann gilt:

$$|e^{f(z)}| \to \infty \Rightarrow \mathfrak{Re}(f(z)) \to +\infty$$

Damit ist die Singulatität von f auch ein Pol. Wir schreiben in einer Umgebung von z_0 $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$. Ist $g(z_0) = re^{i\varphi}$ wählen wir $\theta = \pi - \varphi$ Nun betrachten wir die Folge $z_k = z_0 + \frac{1}{k} e^{i\theta/(-n)} \to z_0$.

$$f(z_k) = (z_k - z_0)^{-n} g(z) = k^n \underbrace{e^{i\theta} g(z)}_{=-r} \to -\infty$$

Man kann auch jeden Fall einzeln durchargumentieren.

Beispiel 2. *Berechne die Pole, deren Ordnung und Residuen für die Funktion*

$$z \mapsto \frac{1}{\sin(\pi z)}$$

Nullstellen von Sinus genauer argumentieren.
Die Pole der Funktion sind die Nullstellen von $\sin(\pi z)$ und somit $z \in \mathbb{Z}$. Ich behaupte, dass alle diese Pole die Ordnung 1 haben. Dafür betrachten wir für einen Pol $z_0 \pi$

$$\sin(\pi z) = (z - z_0 \pi) \frac{\sin(\pi z)}{(z - z_0 \pi)} := (z - z_0 \pi) g(z)$$

Nun müssen wir zeigen, dass $g(\pi z_0) \neq 0$ gilt. Wir wissen aber das $g(z)$ holomorph und somit insbesondere stetig ist. Damit ist aber $g(\pi z_0) = 1$, weil wir uns auf der reellen Achse befinden.

Die Residuen sind damit:

$$\text{res}_{z_0 \pi} = \lim_{z \to z_0 \pi} (z - z_0 \pi) \frac{1}{\sin(\pi z)}$$

Wir wissen, dass dieser Grenzwert existieren muss, also muss er gleich dem reellen Grenzwert sein und damit gleich $\frac{1}{(-1)^n \pi}$.

Beispiel 3. *Berechne das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Offensichtlich haben wir 4 Pole, nämlich $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$. Diese sind alle erster Ordnung, weil wir von einem Polynom vierter Ordnung nur 4 Nullstellen finden können. Wir berechnen nun das Integral über den oberen Halbkreis $\gamma_R : t \mapsto Re^{it}$:

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1 + x^4} dx + \int_0^{\pi} \frac{Rie^{it}}{1 + R^4 e^{4it}} = 2\pi i (\text{res}_{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \text{res}_{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}})$$

Das Integral über die Kreislinie geht gegen 0 für $R \to \infty$. Wir berechnen nun die Residuen:

$$\text{res}_{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1 + z^4} = \lim_{z \to \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\frac{2i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2+2i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}(-1 + i)}$$

$$\text{res}_{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1 + z^4} = \lim_{z \to \frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\frac{-2+2i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1 + i)}$$

Somit erhalten wir gesamt mit $R \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} = 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)} + \frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)} \right) = 2\pi i \left(\frac{4\sqrt{2}i}{8(-2)} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

Beispiel 4. *Zeige, dass*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\, dx = \pi e^{-a}, \quad a > 0.$$

Wir betrachten das Integral über den oberen Halbkreis von $f(z) := \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}$. Der einzige Pol in der oberen Halbebene ist ia, somit haben wir:

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{ia} f$$

Zuerst bestimmen wir:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{iR^2 e^{2it} e^{iRe^{it}}}{R^2 e^{2it} + a^2} dt \right| \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{R^2 |e^{iR(\cos(t)+i\sin(t))}|}{|R^2 e^{2it} + a^2|} dt \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{R^2 |e^{-R\sin(t)}|}{R^2 - a^2} dt \to 0
\end{aligned}$$

Weiter finden wir (weil der Pol Ordnung 1 hat):

$$\operatorname{res}_{ia} f = \lim_{z \to ia} \frac{ze^{iz}}{z+ia} = \frac{e^{-a}}{2}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} dz = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\cos(z)}{z^2+a^2} dz}_{\in \mathbb{R}} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\sin(z)}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2} = i\pi e^{-a} \\
\Rightarrow &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\, dx = \pi e^{-a}
\end{aligned}$$

Beispiel 5. *Sei f holomorph auf einem Gebiet, das einen Kreisring $D_{r,R} = \{r \leq |z - z_0| \leq R\}$ enthält, wobei $0 < r < R, z_0 \in \mathbb{C}$. Zeige: dann hat f im Inneren von $D_{r,R}$ eine eindeutige Darstellung als sogenannte "Laurent-Reihe"*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

(Vorschlag Zeige, dass sich f schreiben lässt als

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei $C_\rho := \{|z - z_0| = \rho\}, \rho > 0$. Folgere daraus die Behauptung.)

Mit dem richtigen Schlüsselloch ist offensichtlich, dass wir f in der Form des Tipps schreiben können.

Wir versuchen beide Integrale als Potenzreihe zu schreiben, dafür beginnen wir mit dem äußeren Kreis:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z_0 - z}{\zeta - z_0} \right)^n$$

Für den kleineren Kreis:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z_0 - z}} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\zeta - z_0}{z_0 - z} \right)^n$$

Gesamt haben wir damit (weil alle vorkommenden Reihen absolut konvergieren):

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z_0 - z}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\zeta) \frac{1}{z_0 - z} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\zeta - z_0}{z_0 - z} \right)^n d\zeta \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\zeta) \frac{(z_0 - z)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n < 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\zeta) \cdot \frac{(z_0 - z)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta
\end{aligned}$$

Für $k \geq 0$ definieren wir also

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\zeta) \frac{(-1)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

und für $k < 0$ haben wir

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\zeta) \cdot \frac{(-1)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

und erhalten damit das Gewünschte.

Eindeutig ist die Darstellung, weil die Reihe mit positiven Koeffizienten eindeutig sein muss. Und mit $f(z)(z - z_0)^n$ kann ich das gleiche Argument auf negative Koeffizienten fortsetzen.