Beispiel 1. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und integrierbar. Zeigen Sie folgendes.*

(a) Wenn die Fourier-Reihe von f am Punkt x konvergiert, dann

$$f(x) = \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1} [\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)] \cos(nx) + i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] \sin(nx).$$

(b) Wenn f gerade ist, dann ist $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ und die Fourier-Reihe von f besteht, wenn sie konvergent ist, aus Kosinusfunktionen.

(c) Wenn f ungerade ist, dann ist $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$ und die Fourier-Reihe von f besteht, wenn sie konvergent ist, aus Sinusfunktionen.

(d) Wenn $f(x + \pi) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, dann $\hat{f}(n) = 0$ für jedes ungerade $n \in \mathbb{Z}$.

(e) Wenn f reellwertig ist, dann ist $\hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Gilt die umgekehrte Implikation?

(a) Da $x \in \mathbb{R}$, gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} + \sum_{n\geq 1}^{\infty} \hat{f}(-n) e^{-inx} \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}^{\infty} \hat{f}(n)(\cos(nx) + i\sin(nx)) + \sum_{n\geq 1}^{\infty} \hat{f}(-n)(\cos(nx) - i\sin(nx)) \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1} [\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)] \cos(nx) + i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] \sin(nx)
\end{aligned}$$

(b) Wir finden:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(-nx) dx + i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(-nx) dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \hat{f}(-n)
\end{aligned}$$

Weil der Sinus ungerade ist und f gerade ist, fällt das entsprechende Integral weg, deswegen dürfen wir von der zweiten auf die dritte Zeile das Vorzeichen des zweiten Integrals wechseln.

Für die Fourierreihe gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)(\cos(nx) + i\sin(nx)) \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1} \hat{f}(n)(\cos(nx) + i\sin(nx)) + \sum_{n\geq 1} \hat{f}(-n)(\cos(-nx) + i\sin(-nx)) \\
&= \hat{f}(0) + 2\sum_{n\geq 1} \hat{f}(n)\cos(nx)
\end{aligned}$$

(c) Genauso sehen wir für f ungerade:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx = -\hat{f}(-n)
\end{aligned}$$

Weil der Cosinus gerade ist und f ungerade ist, fällt das entsprechende Integral weg, deswegen dürfen wir von der zweiten auf die dritte Zeile das Vorzeichen des ersten Integrals wechseln. Für die Fourierreihe gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)(\cos(nx) + i\sin(nx)) \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1} \hat{f}(n)(\cos(nx) + i\sin(nx)) + \sum_{n\geq 1} \hat{f}(-n)(\cos(-nx) + i\sin(-nx)) \\
&= 2i\sum_{n\geq 1} \hat{f}(n)\sin(nx)
\end{aligned}$$

(d) Sei $2m+1 \in \mathbb{Z}$ ungerade (also $m \in \mathbb{Z}$), dann gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(2m+1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(2m+1)x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)e^{-i(2m+1)(x+\pi)}dx \\
&= e^{-i(2m+1)\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(2m+1)x}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(2m+1)x}dx = -\hat{f}(2m+1)
\end{aligned}$$

(e) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)dx + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx} = \overline{\hat{f}(-n)}
\end{aligned}$$

Nehmen wir an die gegebene Bedingung hält für f, dann ist (weil man bei konvergenten

Reihen die Konjugation in die Summe ziehen darf):

$$\begin{aligned}\overline{f(x)} &= \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(n)e^{inx}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(-n)e^{-inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx} = f(x)\end{aligned}$$

Also ist f reellwertig.

Beispiel 2. *Beweisen Sie das folgende Kriterium für die Konvergenz einer Reihe (bekannt als Dirichlet-Test). Seien $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ und $\{b_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$. Nehmen wir an, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton auf 0 abnimmt und dass die Folge der Partialsummen*

$$B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

beschränkt ist. Dann konvergiert $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$.

Wir haben:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1})$$

Sei $|B_n| \leq M$, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n-1} |B_k(a_k - a_{k+1})| \leq M \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \to M a_1$$

und da wir $a_n B_n \to 0$. Also konvergiert die Reihe absolut nach dem Majorantenkriterium. Das a_k reell und monoton ist brauchen wir, damit wir den Betrag weglassen können.

Beispiel 3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodische Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin] \, a, b] \end{cases} .$$

wobei $-\pi < a < b < \pi$.

(a) *Zeigen Sie, dass*

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx}.$$

(b) *Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe für kein x absolut konvergiert.*

(c) *Beweisen Sie jedoch, dass die Fourier-Reihe in jedem Punkt x konvergiert. (Achtung: Sie müssen nicht beweisen, dass die Reihe gegen $f(x)$ kotwergiert; Hinweise: Dirichlet-Test).*

(d) Was passiert, wenn $a = -\pi$ und $b = \pi$?

(a) Wir finden:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-in\theta} d\theta e^{inx} \\
&= \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-inb} - e^{-ina}}{-in} e^{inx} \\
&= \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi i n} e^{inx}
\end{aligned}$$

(b) Sei x beliebig. Definieren wir θ so, dass $0 < 2\theta < \min(2\pi - b + a, b - a)$ hält. Dann gilt für alle $\alpha \in [-\pi, \pi) \setminus [-\theta, \theta]$ immer $1 - \cos(\alpha) \geq 1 - \cos(\theta) := \varepsilon > 0$.

Das wählen wir, damit wir gesamt

$$1 - \cos(n(b-a)) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos((n+1)(b-a)) \geq \varepsilon$$

haben. Graphisch haben wir also einen Sektor am Einheitskreis gewählt, der so klein ist, dass wir, wenn wir einmal darin landen mit der nächsten Iteration um $b - a$ weiter den Einheitskreis entlang gehen und damit sicher aus dem Sektor herausgehen, was wir in der folgenden Abschätzung gleich verwenden werden:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \left| \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi i n} e^{inx} \right| &= \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{|e^{-ina} - e^{-inb}|}{2\pi |n|} \\
&= \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{|e^{-ina}||1 - e^{-in(b-a)}|}{2\pi |n|} \\
&= \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{|1 - \cos(n(b-a)) - i \sin(n(b-a))|}{2\pi |n|} \\
&= \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{\sqrt{(1 - \cos(n(b-a)))^2 + \sin^2(n(b-a))}}{2\pi |n|} \\
&= \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{\sqrt{1 - \cos(n(b-a))}}{\sqrt{2}\pi |n|} \\
&\geq \sum_{\substack{n \in Z\setminus\{0\} \\ 1-\cos(n(b-a)) \geq \varepsilon}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}\pi |n|} = +\infty
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion wissen wir, dass die Indexmenge der letzten Summe unendlich ist, weil es zumindest jede zweite ganze Zahl sein muss.

(c) Wir wählen für den Dirichlet-Test die reelle Nullfolge $\frac{1}{2\pi n}$ (das i im Nenner hat keinen Einfluss auf Konvergenz). Nun zeigen wir, dass die Partialsummen (symmetrisch also betrachten wir technisch gesehen $-n$ und n als einen Summanden, was bei der Summation nicht zu einem Problem führt, weil wir die Werte der Partialsummen nicht verändern) von $(e^{-ina} - e^{-inb})e^{inx}$ beschränkt sind.

Sei zuerst $x \neq a, b$. Wir erinnern uns an den Dirichlet-Kern:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} (e^{-ina} - e^{-inb})e^{inx} &= \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-a)} - \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-b)} \\
&= \frac{\sin((N+\frac{1}{2})(x-a))}{\sin(\frac{x-a}{2})} - \frac{\sin((N+\frac{1}{2})(x-b))}{\sin(\frac{x-b}{2})} \\
&\overset{|\cdot|}{\leq} \frac{2}{\min\left(\sin(\frac{x-a}{2}), \sin(\frac{x-b}{2})\right)} < \infty
\end{aligned}$$

Sei nun $x = a$ ($x = b$ geht symmetrisch):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} \frac{(e^{-ina} - e^{-inb})e^{ina}}{2\pi ni} &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1 - e^{in(a-b)}}{2\pi ni} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi ni} - \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{in(a-b)}}{2\pi ni}
\end{aligned}$$

Die erste Summe ist aufgrund der Symmetrie 0, der zweite Summand konvergiert wieder nach dem Dirichlet-Test, genau wie oben.

(d) Für $a = -\pi$ und $b = \pi$ haben wir die konstante 1-Funktion und für die Fourier-Reihe gilt natürlich:

$$f(x) = \frac{2\pi}{2\pi} + \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2\pi in} e^{inx} = 1 + \sum_{n \in Z\setminus\{0\}} \frac{(-1)^n - (-1)^n}{2\pi in} e^{inx} = 1$$

Beispiel 4. *Sei $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Wir definieren die (formelle) Abel-Reihe durch*

$$A(r) := \sum_{n \geq 1} a_n r^n, \qquad 0 < r < 1.$$

Die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ heißt Abel konvergent, wenn jede $A(r)$ konvergent ist und der Abel Limes

$$\lim_{r \to 1^-} A(r)$$

existiert. Zeigen Sie das Folgende.

(a) Die Abel-Reihe $A(r)$ ist wohldefiniert, wenn a beschränkt ist.

(b) Wenn $\sum_{n>1} a_n$ konvergent ist, dann ist sie auch Abel konvergent.

(c) Die Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ ist nicht konvergent, aber sie ist Abel konvergent. Was ist ihr Abel Limes?

(a) Ist $\|a\|_\infty = M$, dann finden wir:

$$\sum_{n\geq 1} |a_n r^n| \leq M \sum_{n\geq 1} r^n = M\left(\frac{1}{1-r} - 1\right)$$

also konvergiert sie für alle r absolut und ist somit wohldefiniert.

(b) Da die Summe über a_n konvergiert, ist diese eine Nullfolge und damit beschränkt durch M und die Abelreihe wohldefiniert. Sei nun $0 < r < 1$ beliebig, dann finden wir:

$$\sum_{n\geq 1} |a_n r^n| \leq M \sum_{n\geq 1} r^n < \infty$$

Nach dem Majorantenkriterium ist damit $a_n r^n$ absolut konvergent. Aus diesem Grund dürfen wir Limit und Summe vertauschen, also:

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geq 1} a_n r^n = \sum_{n\geq 1} \lim_{r\to 1^-} a_n r^n = \sum_{n\geq 1} a_n = A$$

(c) Das $\sum_{\text{n}\geq 1}(-1)^n$ nicht konvergiert ist offensichtlich. Allerdings gilt:

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n r^n = \sum_{n\geq 1}(-r)^n = \frac{1}{1+r} - 1$$

Und damit gilt natürlich auch:

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1+r} - 1 = -\frac{1}{2}$$

b) Falsch siehe Ana2 Übungsblätter

Beispiel 5. *Zeigen Sie, die Reihe* $\sum_{n\geq 1}(-1)^n n$ *ist nicht Cesàro konvergent aber sie ist Abel konvergent.*

Zuerst beweise ich per Induktion $\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j = (-1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Für $n = 1$ gilt offensichtlich $\sum_{j=1}^{1}(-1)^j j = -1 = -1 \cdot 1$. Nun zum Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j &= (-1)^{n-1}\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + (-1)^n n \\ &= (-1)^n \left(n - \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)\end{aligned}$$

Ist nun n gerade, dann erhalten wir:

$$n - \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

und für n ungerade erhalten wir:

$$n - \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Nun überprüfen wir Cesaro-Konvergenz und betrachten dafür die Teilfolge der Partialsummen mit $n = 2m$ gerade:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k} a_j &= \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \\
&= \frac{1}{2m}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\left\lceil\frac{2k}{2}\right\rceil - \sum_{k=0}^{m-1}\left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil\right) \\
&= \frac{1}{2m}\left(\sum_{k=0}^{m-1} k - \sum_{k=0}^{m-1} k+1\right) \\
&= \frac{-m}{2m} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Sei hingegen $2m = n - 1$, dann finden wir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k} a_j &= \frac{1}{2m+1}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \\
&= \frac{1}{2m+1}\left(\sum_{k=0}^{m}\left\lceil\frac{2k}{2}\right\rceil - \sum_{k=0}^{m-1}\left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil\right) \\
&= \frac{1}{2m+1}\left(\sum_{k=0}^{m} k - \sum_{k=0}^{m-1} k+1\right) \\
&= \frac{m-m}{2m+1} = 0
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge nicht Cesàro konvergent.

Nun untersuchen wir die Reihe auf Abelkonvergenz. Wir wissen bereits, dass $\sum_{n\geq 1} z^{n+1}$ auf der offenen Einheitskreisscheibe konvergiert und somit nach Theorem 2.6 (Complex analysis, Princeton Lectures) holomorph ist. Nach dem gleichen Satz wissen wir auch, dass die termweise Ableitung $\sum_{n\geq 1}(n+1)z^n$ auf dem gleichen Konvergenzradius konvergiert. Damit gilt:

$$\sum_{n\geq 1}|(-1)^n n r^n| = \sum_{n\geq 1} n r^n \leq \sum_{n\geq 1}(n+1)r^n < \infty$$

Also haben wir absolute Konvergenz. Insbesondere gilt durch die entsprechende Überlegung:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}(-1)^n n r^n &= \sum_{n\geq 1} n(-r)^n = (-r)\sum_{n\geq 1} n(-r)^{n-1} = r\sum_{n\geq 1}\frac{d}{dr}(-r)^n \\
&= r\frac{d}{dr}\sum_{n\geq 1}(-r)^n = r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{1+r}-1\right) = \frac{-r}{(1+r)^2} \to -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Für $r \to 1^-$. Also ist unser Abel-Grenzwert $-\frac{1}{4}$.

Der erste Unterpunkt geht viel leichter nach Übungsblatt 1 letzter Unterpunkt.