

**Beispiel 1.** Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Begründe:

- (a) Die Abbildung  $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto x^5 y^4 - ix^4 y^5$  ist holomorph.
- (b) Die Abbildung  $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto e^y - ie^x$  ist holomorph.
- (c) Die Abbildung  $f_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sin(z^4 |z|^2)$  ist holomorph.
- (d) Falls  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, so sind dies auch  $g_1(z) := \overline{f(z)}, g_2(z) := f(\bar{z})$  und  $g_3(z) := \overline{f(\bar{z})}$ .

Wir finden:

- (a) Wir prüfen die Cauchy-Riemann Gleichungen, dabei gilt  $u(x + iy) = x^5 y^4, v(x + iy) = -x^4 y^5$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4 y^4 \neq -5x^4 y^4 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

- (b) Wir prüfen die Cauchy-Riemann Gleichungen, dabei gilt  $u(x + iy) = e^y, v(x + iy) = -e^x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \neq e^x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

- (c) Wäre die Funktion holomorph auf  $\mathbb{C}$  so müsste ihr Integral über eine geschlossene Kurve verschwinden. Wir betrachten hierfür die Kurven

$$\gamma_1 : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}, \gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t$$

und finden damit:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \sin(z^4 |z|^2) dz + \int_{\gamma_2} \sin(z^4 |z|^2) dz &= \int_0^\pi \sin(e^{4it}) i e^{it} dt + \underbrace{\int_{-1}^1 \sin(t^6) dt}_{=: r \in \mathbb{R}} \\ &= i \int_0^\pi \frac{e^{4it} - e^{-4it}}{2i} e^{it} dt + r \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{5it} - e^{-3it} dt + r \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{5i} e^{5it} + \frac{1}{3i} e^{-3it} \right]_0^\pi + r \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{5i} - \frac{1}{3i} - \frac{1}{5i} - \frac{1}{3i} \right) + r \\ &= r + i \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) \neq 0 \end{aligned}$$

Also ist die Funktion nicht holomorph.

Geht leichter mit Ableitung nach  $\bar{z}$ . Nochmal anschauen, nicht ganz verstanden.

- (d)  $g_1(z)$  und  $g_2(z)$  sind im Allgemeinen nicht holomorph, wie man an dem Beispiel  $f(z) = z$  sieht. Für  $g_3(z)$  hingegen finden wir:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_3(z+h) - g_3(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{f(z+h)} - \overline{f(z)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{f(\bar{z} + \bar{h})} - \overline{f(\bar{z})}}{\bar{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(\bar{z} + \bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}} \right) = f'(\bar{z})\end{aligned}$$

Also ist die Funktion holomorph.

**Beispiel 2.** Sei

$$\alpha(t) := \begin{cases} 1 - e^{it}, & t \in [0, 2\pi], \\ -1 + e^{-it}, & t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Skizziere die durch  $\alpha$  parametrisierte Kurve und berechne das Kurvenintegral

$$\int_{\alpha} z e^{z^2} dz$$

Die Kurve entspricht einem "8er", also zuerst ein Kreis um  $(1, 0)$  der mit positiver Orientierung durchlaufen wird und dann ein Kreis um  $(-1, 0)$  der mit negativer Orientierung durchlaufen wird.

Da  $z e^{z^2}$  und  $\alpha(0) = 1 - e^{i0} = 0 = -1 + e^{-i4\pi} = \alpha(4\pi)$  ist die Kurve geschlossen und die Funktion holomorph. Damit ist das gegebene Integral 0.

Oder Stammfunktion raten.

**Beispiel 3.** Seien  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $R \subset \mathbb{C}$  ein solides Rechteck und  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine bijektive  $C^1$  Funktion mit  $\varphi(R) \subset \Omega$ . Zeige: Parametrisiert  $\gamma$  den Rand von  $\varphi(R)$ , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Wir adaptieren den Beweis von Goursat für Rechtecke. Dafür unterteilen wir unser Rechteck  $R^{(0)}$  mit positiver Orientierung und  $d^{(0)}$  und  $u^{(0)}$  für Durchmesser und Umfang. Wir verbinden nun gegenüberliegende Mittelpunkte um so 4 neue Rechtecke zu konstruieren. Eines dieser Rechtecke  $R^{(1)}$  erfüllt

$$\left| \int_{R^{(0)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{R_1^{(1)}} f(z) dz + \int_{R_2^{(1)}} f(z) dz + \int_{R_3^{(1)}} f(z) dz + \int_{R_4^{(1)}} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{R^{(1)}} f(z) dz \right|$$

Weiter gilt  $d^{(1)} = \frac{1}{2}d^{(0)}$  und  $p^{(1)} = \frac{1}{2}p^{(0)}$ .

Nach Proposition 1.4 finden wir einen eindeutigen Punkt  $z_0$  der in  $\lim_{n \rightarrow \infty} R^{(n)}$  liegt. Mit  $f$  holomorph finden wir somit  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)$ .  $f(z_0)$  sowie  $f'(z_0)(z - z_0)$  haben als konstante bzw. lineare Funktion Stammfunktionen, also gilt

$$\int_{R^{(n)}} f(z) dz = \int_{R^{(n)}} \psi(z)(z - z_0) dz$$

Nun muss natürlich im Rechteck  $R^{(n)}$   $|z - z_0| \leq d^{(n)}$  gelten. Somit haben wir:

$$\left| \int_{R^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in R^{(n)}} |\psi(z)| d^{(n)} p^{(n)} \leq \varepsilon_n 4^{-n} d^{(0)} p^{(0)}$$

Gesamt gilt damit:

$$\left| \int_{R^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{R^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \varepsilon_n d^{(0)} p^{(0)}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .

$\varphi$  bijektiv, stetig, kompakt, also Homoömorphismus. Also bildet der Rand von  $R$  auf den Rand von  $\varphi(R)$ .

$\varphi$  außerdem Lipschitzstetig, weil wir auf einem kompakten Intervall arbeiten. Dadurch kann man Umfang und Durchmesser mit  $L$  abschätzen.

Dann Beweis von Goursat, jeweils mit  $L$ .

**Beispiel 4.** Berechne die folgenden Integrale:

(a) Für  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\int_C z^n dz$$

wobei  $C$  ein im Ursprung zentrierter, positiv orientierter Kreis ist.

(b) Für  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\int_C z^n dz$$

wobei  $C$  der positiv orientierte Rand einer Kreisscheibe  $\partial B_R(z)$  ist mit  $0 < R < |z|$ .

(c) Für  $0 < a < r < b$  :

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz,$$

wobei  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$  mit positiver Orientierung.

(a) Weil  $C$  geschlossen und  $z^n$  holomorph für  $n \geq 0$  ist, verschwindet das Integral in diesen Fällen. Wenn  $n < 0$  finden wir mit der Parametrisierung  $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$

$$\int_C z^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n r i e^{it} dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt$$

Im Fall  $n = -1$  ergibt diese Integral  $i2\pi$ , andernfalls erhalten wir  $\left[ \frac{ir^{n+1} e^{it(n+1)}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0$

(b) Alle gegebenen Funktionen sind Zusammensetzungen holomorpher Funktionen (deren Quotient nirgendwo verschwindet), also ist das Integral jeweils 0. Für  $n \neq -1$  finden wir die Stammfunktion  $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ , da der Kreis eine geschlossene Kurve ist, finden wir (mit einer beliebigen Parametrisierung von  $z_0$  nach  $z_0$ ):

$$\int_C z^n dz = F(z_0) - F(z_0) = 0$$

Nun behandeln wir den Fall  $n = -1$ . Dafür nehmen wir die Kurve  $\varphi : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z + R \cdot e^{it}$ . Damit finden wir:

$$\int_C z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z + R \cdot e^{it}} \cdot R i e^{it} dt = \int_{z+R}^{z+R} \frac{1}{u} du = 0$$

(c) Wir parametrisieren die Kurve mit  $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$  und finden damit:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz &= \int_C -\frac{1}{(b-a)(z-a)} dz + \int_C \frac{1}{(b-a)(z-b)} dz \\
&= \frac{1}{a-b} \left( \int_C \frac{1}{z-a} dz + \int_C \frac{1}{b-z} dz \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left( \int_C \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} dz + \int_C \frac{1}{b} \frac{1}{1-\frac{z}{b}} dz \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left( \int_C \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n dz + \int_C \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n dz \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_C \frac{1}{z^{n+1}} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{n+1}} \int_C z^n dz \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\pi})^{n+1}} rie^{i\pi} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{n+1}} \int_0^{2\pi} (re^{i\pi})^{n+1} rie^{i\pi} dt \right) \\
&= \frac{i}{a-b} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \int_0^{2\pi} e^{-itn} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt \right) \\
&= \frac{i}{a-b} \left( 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{-1}{in} [e^{-itn}]_0^{2\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^{n+1} \frac{1}{i(n+1)} [e^{-it(n+1)}]_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{2\pi i}{a-b}
\end{aligned}$$

Funktioniert auch mit dem Representationssatz.

**Beispiel 5.** Sei  $f$  holomorph auf  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , und  $T \subset \Omega$  ein Dreieck dessen Inneres auch in  $\Omega$  enthalten ist. Gemäss Satz von Goursat gilt dann, dass

$$\int_T f(z) dz = 0.$$

Beweise dies mittels Satz von Green unter der zusätzlichen Annahme, dass die Ableitung  $f'$  stetig ist.

Der Satz von Green besagt:

$$\int_T F dx + G dy = \int_{\text{Inneres von } T} \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dxdy$$

Wir bezeichnen im Folgenden das Innere des Dreiecks mit  $T^\circ$

Wir schreiben nun  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sowie  $dz = dx + idy$ :

$$\int_T f(z) dz = \int_T (u + iv)(dx + idy) = \int_T u dx - v dy + i \int_T u dy + v dx$$

Mit dem Satz von Green:

$$= \iint_{T^\circ} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_{T^\circ} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dxdy = 0$$

Wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Cauchy-Riemann-Gleichungen gilt.