Sie können das folgende Resultat verwenden, das wir gleich in der Hauptvorlesung beweisen werden: Sei $\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i\xi x}dx$. Dann gilt $\check{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beispiel 1. *Seien*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } |x| \le 1 \\ 0 & \textit{für } |x| > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \textit{für } |x| \le 1 \\ 0 & \textit{für } |x| > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}, \quad \hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

wobei $\hat{f}(0) = 2$ und $\hat{g}(0) = 1$.

Die Faltung von f mit sich selbst ist g skaliert.

Wir finden:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi x\xi}dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{-1\pi\xi}[e^{-2\pi ix\xi}]_{-1}^{1} = \frac{e^{-2\pi i\xi} - e^{2\pi i\xi}}{-2\pi i\xi} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \end{aligned}$$

und

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi x\cdot 0}dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

Für die zweite Funktion finden wir:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi x\xi}dx = \int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{-2\pi ix\xi}dx \\ &= \int_{-1}^{1} e^{-2\pi ix\xi}dx + \int_{-1}^{0} xe^{-2\pi x\xi}dx - \int_{0}^{1} xe^{-2\pi ix}dx \\ &= \frac{1}{-2\pi i\xi}(e^{-2\pi i\xi} - e^{2\pi i\xi}) + \left[e^{-2\pi i\xi}\left(\frac{-x}{2\pi i\xi} + \frac{1}{4\pi^2\xi^2}\right)\right]_{-1}^{0} - \left[e^{-2\pi i\xi}\left(\frac{-x}{2\pi i\xi} + \frac{1}{4\pi^2\xi^2}\right)\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{-2\pi i\xi}(e^{-2\pi i\xi} - e^{2\pi i\xi}) + \frac{1}{4\pi^2\xi^2} - \frac{1}{2\pi i\xi}e^{2\pi i\xi} - \frac{1}{4\pi^2\xi^2}e^{2\pi i\xi} + \frac{1}{2\pi i\xi}e^{-2\pi i\xi} - \frac{1}{4\pi^2\xi^2}e^{-2\pi i\xi} + \frac{1}{4\pi^2\xi^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2\xi^2}\cdot\left(2 - e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}\right) = \\ &= \left(\frac{e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}}{2i\pi\xi}\right) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2 \end{aligned}$$

und

$$\hat{g}(0) = \int_{-1}^{1}(1-|x|)dx = \int_{-1}^{1} 1dx + \int_{-1}^{0} xdx - \int_{0}^{1} xdx = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Beispiel 2.

(i) Berechnen Sie die Fourier-Transformationen der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = e^{-ax^+}, \quad f_2(x) = e^{-a|x|}, \quad f_3(x) = \left(x^2 + a\right)^{-2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $a \in (0,\infty)$. (Hier: $x^+ = \max\{x, 0\}$).

(ii) Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existiert mit

$$f - f'' = g.$$

Können Sie eine Formel für f in Bezug auf g finden?

Ersten zwei sind straight forward, drittes Integral mit der Formel am Anfang vom Blatt (gilt auch für L^1). Zusammenhang vom Fourierkoeffizienten von f_2 mit f_3 vergleichen. Es geht auch mit dem Residuensatz.

Teil 2: Fourierkoeffizienten berechnen (eh so wie ichs gemacht hab), Frage ist $\frac{\hat{g}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Gilt weil

$$\frac{\hat{g}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2} = \widehat{f * h}, \qquad h(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$$

Kann man aber auch direkt sehen, weil der Quotient unendlich oft differenzierbar ist und wenn man ableitet bekommt man Ableitung von $\hat{g}$ und Ableitungen von $\frac{1}{1+4\pi^2\xi^2}$ sind beschränkt, damit ist der Quotient Schwartz.

Beispiel 3. *(Bump-Funktionen und Dichte glatter, kompakt getragener Funktionen)*

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ die "Bump-Funktion":

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} e^{-1/(x-a)}e^{-1/(b-x)} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{für } x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Zeigen Sie, das $\varphi_{a,b}$ unendlich differenzierbar ist.

(ii) Sei $f \in C_c(\mathbb{R})$ und $a < b$. Zeigen Sie, dass $f * \varphi_{a,b} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. (Hier: $f \in C_c(\mathbb{R})$ bedeutet, dass f stetig ist und einen kompakten Träger hat, während $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ bedeutet, dass f unendlich differenzierbar ist und einen kompakten Träger hat).

(iii) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass eine Folge $\{f_n : n \geq 1\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ existiert mit $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$ für $n \to \infty$.

stetig klar, Ableitung für beliebiges x ausrechnen und wieder Grenzwert betrachten und dann per Induktion, die Ableitung am Punkt a oder Punkt b existiert, weil irgendwie Mittelwertsatz.

Faltung einsetzen schaun wo man ungleich 0 ist. Dann weiß man, dass diese kompakten Träger hat und $(\varphi_{a,b} * f)' = \varphi'_{a,b} * f$ gilt und damit die Funktion unendlich oft diffbar ist.

Für Teil 3 wissen wir, dass $C_c(\mathbb{R})$ dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, wählen eine solche Folge $g_n \to f$ und nutzen $K_n * g_n \to f$ mit $K = \frac{\varphi_{a,b}}{\|\varphi_{a,b}\|_1}$ und $K_n = \frac{1}{n}K(nx)$ (was eine Folge guter Kerne ist.).

Beispiel 4. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ stetig ist.*

Sei $\xi_n \to \xi$ beliebig, dann wird die Funktionenfolge $f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi_n}$ von der integrierbaren Funktion $|f(x)|$ dominiert und wir finden damit mit dem Satz der dominierten Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi x \xi_n} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi x \xi} dx = \hat{f}(\xi)$$

Ohne dominierte Konvergenz: Wenn $f_n \to f$, dann $\hat{f}_n \to \hat{f}$, wobei die erste Konvergenz in L^1 ist und die zweite in L^∞. $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Damit ist die Grenzfunktion stetig.