Komplexe und Harmonische Analysis WS2023

Simon Garger - simon.garger@gmail.com

17. Oktober 2023, Wien

Inhaltsverzeichnis

Komplexe Analysis

Bemerkung. Im Folgenden wird immer $z_k = x_k + iy_k = r_k \cdot e^{i\theta_k}$ gelten. Außerdem wird im Allgemeinen Ω eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ sein.

1 Grundlagen

Definition 1.1 (Komplexe Zahlen):
Wir definieren den komplexen Zahlenkörper als die Menge

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$$

Dabei bezeichnet i die komplexe Einheit mit $i^2 = -1$. Man nennt $x = \mathfrak{Re}(z)$ den Realteil und $y = \mathfrak{Im}(z)$ den Imaginärteil. Der Betrag einer komplexen Zahl wird geschrieben durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wir definieren $\bar{z} := x - iy$ als das komplex Konjugierte von z.

Proposition 1.2:
Die komplexen Zahlen erfüllen folgende Rechenregeln:

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
   (Interpretation: Vektoraddition)
2. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
   (Interpretation: Streckung und Drehung)
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|z|^2 = z\bar{z} \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Definition 1.3:
Da $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ gilt, können wir die topologischen Eigenschaften von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$ übertragen und werden auch im Weiteren öfter die komplexen Zahlen mit der zweidimensionalen Zahlenebene identifizieren. Weiter werden wir eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ meist mit Ω bezeichnen. Wir erhalten damit:

1. Die komplexen Zahlen sind vollständig, es konvergiert also jede Cauchy-Folge.
2. Eine Folge konvergiert in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn Real- und Imaginärteil konvergieren und genau dann, wenn es eine Cauchy-Folge ist.
3. Das Innere von Ω ist $\Omega^\circ \colon = \{a | \exists B_r \colon a \in B_r \subset \Omega\}$
4. Wir nennen Ω kompakt, sofern die Menge beschränkt und abgeschlossen ist.
5. Wir nennen Ω offen (abgeschlossen) zusammenhängend, wenn für Ω_1, Ω_2 offen (abgeschlossen) gilt:
$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \wedge \quad \emptyset = \Omega_1 \cap \Omega_2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 = \emptyset \quad \vee \quad \Omega_2 = \emptyset$$
6. Wir nennen eine Funktion f stetig, wenn gilt:
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z)$$

2 Holomorphie

Definition 2.1:
Sei $z_0 \in \Omega$, dann nennen wir f holomorph (komplex differenzierbar) in z_0 falls
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$
existiert.

Eine Funktion heißt auf Ω holomorph, wenn sie in jedem Punkt $z \in \Omega$ holomorph ist oder einfach "ganz", falls sie für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph ist.

Beispiel. Beispiele für holomorphe Funktionen sind:

- Konstante Funktionen
- Potenzfunktionen
- Polynomfunktionen
- Potenzreihen

Hingegen ist $f(z) = \bar{z}$ nicht holomorph, da
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$
und der letzte Term existiert nicht (für h reell 1 für h rein imaginär -1).

Proposition 2.2 (Cauchy-Riemann Gleichungen):
Sei f eine auf Ω holomorphe Funktion. Identifizieren wir nun $f(z) = u(z) + iv(z)$, wobei $u, v \colon \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind, so gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Beweis. Wir definieren für ein beliebiges $x + iy = z_0 \in \Omega$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) =: a + ib$$

Nun differenzieren wir nur partiell (der obige Limes beschreibt ja eine beliebige Nullfolge, also können wir auch die entlang der Achsen betrachten), indem wir die obige u, v Identifikation und $h = (h_1, h_2)$ verwenden:

$$\begin{aligned} a + ib &= \lim_{h_1\to 0} \frac{f(z_0 + h_1) - f(z)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1\to 0} \frac{u(z_0 + h_1) + iv(z_0 + h_1) - u(z_0) - iv(z_0)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1\to 0} \frac{u(z_0 + h_1) - u(z_0)}{h_1} + \lim_{h_1\to 0} \frac{i(v(z_0 + h_1) - v(z_0))}{h_1} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a, b) \end{aligned}$$

Genauso finden wir:

$$\begin{aligned} a + ib &= \lim_{h_2\to 0} \frac{f(z_0 + ih_2) - f(z_0)}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2\to 0} \frac{u(z_0 + ih_2) + iv(z_0 + ih_2) - u(z_0) - iv(z_0)}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2\to 0} \frac{u(z_0 + ih_2) - u(z_0)}{ih_2} + \lim_{h_2\to 0} \frac{i(v(z_0 + ih_2) - v(z_0))}{ih_2} \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{aligned}$$

Damit folgt (unter Berücksichtigung von $\frac{1}{i} = -i$):

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ b &= \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Bemerkung. F ist reell differenzierbar in $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \exists J_f(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, sodass für $H = (h_1, h_2)$

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{F(z_0 + H) - F(z_0) - J_f(z_0)H}{\|H\|} = 0$$

gilt. Dabei geht es nur um die Länge von H und nicht wie bei der Holomorphie um die Existenz des Grenzwertes in allen Richtungen.

Beispiel. Die Funktion, die komplex konjugiert, entspricht im reellen:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung ist schon linear, also ist sie insbesondere reell differenzierbar.

Proposition 2.4:
f holomorph $\Rightarrow F$ reell differenzierbar mit $|\det J_f(x_0, y_0)| = |f'(z_0)|^2$

Beweis. f holomorph impliziert

$$f(z + h) = f(z) + f'(z)h + hR(h)$$

mit $R(h) \to 0$ für $h \to 0$.

$$J_f \cdot H = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx}h_1 + \frac{du}{dy}h_2 \\ \\ \frac{dv}{dx}h_1 + \frac{dv}{dy}h_2 \end{pmatrix}$$

Nun identifizieren wir $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$:

$$= \left(\frac{du}{dx}h_1 + \frac{du}{dy}h_2\right) + i\left(\frac{dv}{dx}h_1 + \frac{dv}{dy}h_2\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1 + ih_2)$$

Wobei die letzte Gleichheit aus den Cauchy-Riemann Gleichungen folgt.

Gesamt erhalten wir damit wie gewünscht:

$$|\det J_f| = \left|\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right| = \left|\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \left(\frac{du}{dy}\right)^2\right| = \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|^2 = |f'|^2$$

Satz 2.5:

Sei F reell differenzierbar mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

mit u, $v \in C^1(\Omega)$, dann ist f auch holomorph.

Beweis. Wir wollen zeigen: $\exists a \in \mathbb{C}$ sodass

$$f(z+h) - f(z) - ah = hR(h)$$

mit $R(h) \to 0$ für $h \to 0$.

Wir finden:

$$u(z+h) - u(z) = \frac{du}{dx}h_1 + \frac{du}{dy}h_2 + h_1 R_u^1(h_1) + h_2 R_u^2(h_2)$$

und auch

$$v(z+h) - v(z) = \frac{dv}{dx}h_1 + \frac{dv}{dy}h_2 + h_1 R_v^1(h_1) + h_2 R_v^2(h_2)$$

Mit Cauchy-Riemann folgt die Behauptung. Wir definieren mit diesen:

$$a\colon = \frac{du}{dx} + i\left(-\frac{du}{dy}\right)$$

Denn damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&f(z+h) - f(z) - ah = u(z+h) - u(z) + i(v(z+h) - v(z)) - \left(\frac{du}{dx} + i\left(-\frac{du}{dy}\right)\right)h \\
&= \frac{du}{dx}h_1 + \frac{du}{dy}h_2 + R_u h + i\left(\frac{dv}{dx}h_1 + \frac{dv}{dy}h_2 + R_v h\right) - \frac{du}{dx}h_1 - \frac{du}{dy}h_2 - i\left(-\frac{du}{dy}h_1 + \frac{du}{dx}h_2\right) \\
&= h_1 R_u^1(h_1) + h_2 R_u^2(h_2) + h_1 R_v^1(h_1) + h_2 R_v^2(h_2) =: hR(h)
\end{aligned}$$

Dabei geht $R(h)$ natürlich wie gewünscht gegen 0 für $h \to 0$, weil die $R_i^j(h_k)$ alle gegen 0 gehen.

3 Potenzreihen

Definition 3.1:

Eine Potenzreihe ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$.

Absolute Konvergenz bedeutet

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n < \infty$$

Beispiel.

(i) geoemtrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
konvergiert auf $B_1(0) = \{|z| < 1\}$ und dort gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Denn es gilt:

$$(1-z)\sum_{n=0}^{N} z^n = (1 - z^{N+1}) \to 1 \qquad (\text{für } N \to \infty)$$

(ii) Die Exponentialreihe:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Satz 3.2:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gegeben, dann existiert ein $0 \leq R \leq +\infty$ "Konvergenzradius", sodass

(i) $|z| < R$, dann konvergiert die Folge absolut

(ii) $|z| > R$, dann divergiert die Folge

Es gilt

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{mit} \quad L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

Für $L = 0$ definieren wir $R = \infty$ und für $L = \infty$ $R = 0$.

Bemerkung. Das Verhalten auf dem Rand $B_R(0) = \{|z| = R\}$ kann kompliziert sein. Hier kann es eine Mischung aus Konvergenz und Divergenz geben.

e^z konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$.

Äquivalent ist das Quotientenkriterium (Übung 5).

Bei diesen Beweisen ändert sich verhältnismäßig wenig im Umstieg von reell auf komplex, da wir über absolute Konvergenz, also Konvergenz reeller Zahlen reden.

Beweis.

1. $L = 0 \Rightarrow R = \infty$:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists N > 0,\ \exists 0 \leq r < 1,\ \forall n > N\colon |a_n||z|^n = (a_n^{1/n}|z|)^n < r^n$$

   Daraus folgt:

$$\sum_{n=N}^{M} |a_n||z|^n < \sum_{n=N}^{M} r^n < \sum_{n^N}^{\infty} < \infty$$

2. $L = \infty \Rightarrow R = 0$:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists N,\ (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}},\ r > 1,\ \forall n_k > N\colon |a_{n_k}||z|^n \geq r > 1$$

   damit divergiert die Reihe.

3. $0 < L < \infty$: Sei $R = \frac{1}{L}$ und $|z| < R$. Dann gilt

$$\exists \varepsilon > 0,\ 0 \leq r < 1\colon (L + \varepsilon)|z| = r < 1$$

   Damit folgt:

$$\exists N,\ \forall n \geq N\colon |a_n|^{1/n} \leq L + \varepsilon$$

   Damit befinden wir uns wieder im Fall des ersten Unterpunkts und können somit wieder die Konvergenz innerhalb von R beschließen.

4. Ist andererseits $|z| > R$, dann folgt:

$$\exists \varepsilon > 0,\ r > 1\colon (L - \varepsilon)|z| = r > 1$$

   Es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass:

$$\exists N,\ \forall k \geq N\colon |a_{n_k}|^{1/n_k} > L - \varepsilon$$

   Damit folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n_k}||z|^{n_k} > \sum_{k=0}^{\infty} r^{n_k}$$

   wobei nun der letzte Term divergiert.

Satz 3.3:

Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definiert eine innerhalb ihres Konvergenzradius R holomorphe Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Außerdem gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

und $f'(z)$ konvergiert absolut auf $B_R(0)$.

Bemerkung. f und f' haben den gleichen Konvergenzradius, da $\sqrt[n]{n} = 1$. Insbesondere folgt, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius unendlich oft komplex differenzierbar sind.

Beispiel.

1. e^z ist ganz mit
$$\frac{\partial}{\partial z}(e^z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$
2. Die trigonometrischen Funktionen sin und cos sind ganz:
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\Rightarrow \qquad e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

Beweis. Sei $f(z) = S_N(z) + E_N(z)$ mit $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ und $E_N(z) = f(z) - S_N(z)$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$.

In der vorigen Bemerkung wurde bereits erwähnt, dass der Konvergenzradius von g gleich dem von f, also R ist.

Wir folgern:
$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) &= \frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - g(z) + \frac{E_N(z+h) - E_N(z)}{h} \\ &= \frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - S_N'(z) + S_N'(z) - g(z) + \frac{E_N(z+h) - E_N(z)}{h}\end{aligned}$$
Per Definition gilt:
$$\lim_{h\to 0} \frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - S_N'(z) = 0$$
Weiter gilt, weil die Potenzreihe auf dem Konvergenzradius konvergiert:
$$\lim_{N\to\infty} S_N' - g(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = 0$$
Zuletzt sehen wir noch:
$$\lim_{h\to 0} \frac{|E_N(z+h) - E_N(z)|}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z+h)^n - a_n z^n|}{|h|} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \to 0$$
für $N \to \infty$.

4 Kurvenintegrale

Definition 4.1:

Eine Abbildung

$$z\colon [a,\, b] \to \mathbb{C}$$

ist eine parametrisierte Kurve.

Wir sagen z ist glatt oder C^1, falls für alle $t \in [a,\, b]$ die Ableitung $z'(t)$ existiert, stetig ist und $z'(t) \neq 0$ gilt.

Stückweise glatt heißt eine Kurve, wenn $\exists a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ mit $z|_{[a_j,\, a_{j+1}]}$ glatt.

Eine Parametrisierung $\tilde{z}\colon [c,\, d] \to \mathbb{C}$ heißt äquivalent zu z falls $\exists t\colon [c,\, d] \to [a,\, b]$ eine Bijektion mit $t'(s) \neq 0$ so dass

$$\tilde{z}(s) = z(t(s))$$

Die Familie aller äquivalenten Parametrisierungen definiert eine glatte, orientierte Kurve γ als $\mathrm{Bild}(z) = z([a,\, b])$, durchlaufen von a nach b.

Notation: Dann ist γ^- die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve parametrisiert durch $z^-\colon [a,\, b] \to \mathbb{C}$ mit $z^-(t) = z(b + a - t)$.

Die Punkte $z(a)$, $z(b)$ heißen Endpunkte von γ.

Die Kurve heißt geschlossen, wenn $z(a) = z(b)$.

Die Kurve heißt einfach falls die Kurve geschlossen ist und injektiv in $(a,\, b)$.

Bemerkung. Ab jetzt wird jede Kurve (stückweise) glatt sein.

Beispiel. ZEICHNUNG EINHEITSKREIS

$[0,\, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{it}$ in positive Orientierung (das Innere liegt links) und
$[0,\, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{it}$ in negative Orientierung

Definition 4.2 (Kurvenintegral):

Sei f stetig, γ Kurve (mit Parametrisierung $z\colon [a,\, b] \to \mathbb{C}$), dann ist das Integral von f entlang von γ ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt$$

falls γ glatt. Falls γ stückweise glatt, dann

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(z(t))z'(t)\, dt$$

Bemerkung. Äquivalente Parametrisierungen ergeben das gleiche Kurvenintegral.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_c^d f(z(t(s)))z'(t(s))t'(s)\,ds = \int_c^d f(\tilde{z}(s))\tilde{z}'(s)\,ds$$

Da $\tilde{(}s) = z(t(s))$ und $\tilde{z}'(s) = z'(t(s))t'(s)$ mit Umparametrisierung $t = t(s)$.

Definition 4.3:

Die Länge von γ ist

$$L(\gamma) \colon = \int_a^b |z'(t)|\,dt$$

ÜBUNG: L hängt nicht von der Parametrisierung ab!

Proposition 4.4:

$\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$

(i) $\int_\gamma \alpha f(z) + \beta g(z)\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz$

(ii) $\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$

(iii) $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in\gamma} |f(z)| L(\gamma)$

Beweis. [label = (iii)]

klar

klar

$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,dt \leq \sup_{z\in\gamma} |f(z)| \int_a^b |z'(t)|$

Integrale vs. Ableitungen

Definition 4.5:

Sei $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, Ω offen. Dann heißt $F \colon \Omega \to \mathbb{C}$ Stammfunktion von f falls F holomorph mit $F'(z) = f(Z)$.

Satz 4.6:

Sei $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F, γ Kurve in Ω von w_1 nach w_2. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(w_2) - F(w_1)$$

Beweis. Sei γ glatt, parametrisiert durch $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt \\ &= \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}[F(z(t))]\,dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = F(w_2) - F(w_1)\end{aligned}$$

Stückweise glatt funktioniert genau gleich, nur, dass wir eine Teleskopsumme erhalten.

Korollar 4.7:

Falls außerdem γ geschlossen mit den Voraussetzungen von oben, dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Beispiel. Wir betrachten $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ und untersuchen die Existenz einer Stammfunktion.

Dafür integrieren wir über den Einheitskreis $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$. Dann gilt:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i \neq 0$$

Also gibt es keine Stammfunktion.

Korollar 4.8:

Sei f holomorph auf Ω offen und zusammenhängend, falls $f' = 0 \Rightarrow f$ konstant.

Beweis. Wir zeigen, dass für alle w_1, w_2 die Werte gleich sind. Dafür finden wir eine Kurve γ (parametrisiert durch $z\colon [a, b] \to \Omega$ mit $z(a) = w_1$, $z(b) = w_2$) von w_1 nach w_2, damit gilt:

$$f(w_2) - f(w_1) = \int_\gamma f'(z)\,dz = \int_\gamma 0\,dz = 0$$

also sind die Funktionswerte gleich.

Definition 4.9:

$\Omega \subset \mathbb{C}$ ist ein Gebiet, falls Ω offen und zusammenhängend.

Satz von Cauchy und Folgerungen

Bemerkung. Informelle besatz der Satz von Cauchy:
Sei Ω offen, geschlossene Kurve $\gamma \in \Omega$ deren Inneres auch in Ω liegt. Dann gilt

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz$$

für jede holomorphe Funktion.

Satz 4.10 (Satz von Goursat (?)):
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $T \subset \Omega$ ein Dreieck dessen Inneres D in Ω liegt.

Falls $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, dann

$$\int_T f(z)\,dz = 0$$

Beweis. Wir konstruieren eine Folge von Dreiecken durch sukzessives Halbieren der Seiten. (ZEICHNUNG)

$$\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz = \int_{T_1^{(1)}} f(z)\,dz + \int_{T_2^{(1)}} f(z)\,dz + \int_{T_3^{(1)}} f(z)\,dz + \int_{T_4^{(1)}} f(z)\,dz$$

Damit wissen wir $\exists 1 \leq j \leq 4$:

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{T_j^{(1)}} f(z)\,dz\right|$$

Umbenennung $T^{(1)} \colon= T_j^{(1)}$, wieder kann man die Seiten halbieren und wieder ein $T^{(2)}$ finden. Durch Iteration erhalten wir so eine Folge von Dreiecken $T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ mit Innerem $D^{(0)} \supset D^{(1)} \supset D^{(2)} \supset \ldots$ mit Durchmesser von $D^{(n)} =: d^n \leq \frac{1}{2} d^{(n-1)} \leq 2^{-n} d^{(0)}$ und Umfang von $T^{(n)} =: p^{(n)} \leq 2^{-n} p^{(0)}$.

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right|$$

Wir nehmen das Innere kompakt und finden damit:

$$D^{(n)} \text{ kompakt} \Rightarrow \exists! z_0 \in \bigcap_{n \geq 1} D^{(n)}$$

Schreibe $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z)(z - z_0)$ mit $R(z) \to 0$ für $z \to z_0$.

Da $f(z_0)$ und $f'(z_0)(z - z_0)$ Stammfunktionen haben, gilt

$$\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{T^{(n)}} R(z)(z - z_0)\,dz$$

Daraus folgt:

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leq \left|\int_{T^{(n)}} R(z)(z-z_0)\,dz \leq 4^n \sup_{z\in D^{(n)}} |R(z)| d^{(n)} p^{(n)} \leq 4^n \sup_{z\in D^{(n)}} |R(z)| 2^{-n} d^{(0)}\right.$$

5 Pausiert solange er "Complex Analysis, Stein, Shakarchi folgt!