Satz von Parseval: Seien $f \in L^2([-\pi, \pi])$ und

$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad N \geq 1$$

die partielle Fourier-Summen. Dann gilt Folgendes.

- (Quadratische Konvergenz)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 \, dx \longrightarrow 0 \text{ für } N \to \infty.$$

- (Parseval-Isometrie)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Beispiel 1. *Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(\pi) = 0$. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $u : [0, \pi] \times [0, \infty)$ existiert, so dass*

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, & t \in [0, \infty) \\ u(\pi, t) = 0, & t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, \pi] \\ \Delta u = 0 & \textit{auf } (0, \pi) \times (0, \infty) \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, mit $g(-x) = -g(x), g \equiv f$ auf $[0, \pi]$ und die Funktionen $u_k(x,t) = e^{-kt} \sin(kx)$.

Zuerst sehen wir durch

$$\Delta u_k(x,t) = \underbrace{e^{-kt}(-k^2 \sin(kx))}_{\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}} + \underbrace{k^2 e^{-kt} \sin(kx)}_{\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}} = 0$$

, dass die Funktionen tatsächlich harmonisch sind (und damit auch alle linear Kombinationen). Weiter erinnern wir uns, dass für alle ungeraden Funktionen g

$$g(x) \sim 2i \sum_{n \geq 1} \hat{g}(n) \sin(nx)$$

gilt. Wir definieren mit diesem Wissen:

$$u(x,t) := 2i \sum_{n \geq 1} \hat{g}(n) u_n(x,t) = 2i \sum_{n \geq 1} \hat{g}(n) e^{-nt} \sin(nx)$$

Nun prüfen wir die gewünschten Eigenschaften:

(i) $\sin(0) = 0 \Rightarrow u(0,t) = 0$

(ii) $\sin(\pi) = 0 \Rightarrow u(\pi, t) = 0$

(iii) $e^0 = 1 \Rightarrow g(x) \sim u(x, 0)$

(iv) $\forall k | \Delta u_k = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$

Bleibt zu zeigen, dass die Fourierreihe von g gegen die Funktion selbst konvergiert. Das ist der Fall, denn wenn wir $r := e^{-t}$ dann haben wir für positives r genau das $u(x,t)$ die Abelreihe von g ist und somit konvergiert u gegen g für $t \to 0$.

Beispiel 2. *(a) Sei f die Funktion, die auf $[-\pi, \pi]$ durch $f(x) = |x|$ definiert ist. Verwenden Sie die Parsevals Identität, um das Folgende zu zeigen:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(b) Betrachten Sie die 2π-periodische ungerade Funktion, die auf $[0, \pi]$ durch $f(x) = x(\pi - x)$ definiert ist. Zeigen Sie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Wir rechnen mit Parseval und finden dafür zuerst:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{3\pi}\pi^3 = \frac{\pi^2}{3}$$

Für $n \neq 0$ finden wir mit der bereits aus anderen Aufgaben bekannten Stammfunktion $\frac{e^{-inx}}{n^2} - \frac{x}{in}e^{-inx}$ von xe^{-inx}:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} xe^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} xe^{-inx}dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n\pi}{in} + \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^n\pi}{in} - \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{2(-1)^n - 2}{2\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

Also sind alle geraden Fourierkoeffizienten 0 und alle ungeraden $\frac{2}{\pi n^2}$. Für $n = 0$ gilt:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{1}{2\pi}\pi^2 = \frac{\pi}{2}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{3} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \\
&= \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi^2|n^4|} + \frac{\pi^2}{4} \\
&= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{\pi^2}{4} \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right)\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^4}{96}
\end{aligned}$$

Für den zweiten Punkt sehen wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= \sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{n^4}+\sum_{n \text{ gerade}}\frac{1}{n^4}\\
&= \frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{2^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\\
\Rightarrow \frac{15}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{96}\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^4}{90}
\end{aligned}$$

Wir verwenden wieder Parseval:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x\pi-x^2)^2dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\pi^2-2^3+x^4dx\\
&= \frac{\pi^2}{3\pi}\pi^3-\frac{2\pi}{4\pi}\pi^4+\frac{1}{5}\pi^5\\
&= \pi^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi^4}{30}
\end{aligned}$$

Weiter wissen wir von Übungsblatt 9 Aufgabe 2, dass für die gegebene Funktion für $n \neq 0$ $\hat{f}(n)=\frac{2i((-1)^n-1)}{\pi n^3}$, für n gerade haben wir also 0 als Fourierkoeffizient für n ungerade haben wir:

$$|\hat{f}(n)|^2=\left|\frac{2i((-1)^n-1)}{\pi n^3}\right|^2=\left(\frac{4}{\pi|n|^3}\right)^2=\frac{16}{\pi^2|n|^6}$$

Nach Parseval gilt damit:

$$\frac{\pi^4}{30}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{|n|^6}=\frac{32}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^6}$$

Womit wegen $32\cdot 30=960$ die erste Behauptung folgt. Die zweite Behautptung folgt durch:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{n^6}+\sum_{n \text{ gerade}}\frac{1}{n^6}\\
&= \frac{\pi^6}{960}+\frac{1}{2^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\\
\Rightarrow \frac{63}{64}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^6}{960}\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^6}{945}
\end{aligned}$$

Beispiel 3. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Zeigen Sie das Folgende.*

(a) Auf $[0,2\pi]$ gilt

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}e^{i(\pi-x)\alpha}\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{inx}}{n+\alpha}$$

(b)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

Wir bestimmen die Fourierkoeffizienten für $f(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha}$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha} e^{-inx} dx \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin(\pi\alpha)} \int_0^{2\pi} e^{-ix(\alpha+n)} dx \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin(\pi\alpha)} \frac{1}{-i(\alpha+n)} \left[e^{-ix(\alpha+n)}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{-2i\sin(\pi\alpha)(\alpha+n)} \left(e^{-2\pi i(\alpha+n)} - 1\right) \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)(\alpha+n)} \frac{1-e^{-2\pi i\alpha}}{2i} \\
&= \frac{1}{\sin(\pi\alpha)(\alpha+n)} \cdot \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i} = \frac{1}{\alpha+n}
\end{aligned}$$

Also haben wir wie gewünscht

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{n+\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

Damit gilt nach der Parseval-Isometrie

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2}
\end{aligned}$$

Beispiel 4. *Beweisen Sie das Riemann-Lebesgue-Lemma: Wenn $f \in L^1([-\pi,\pi])$, dann $\hat{f}(n) \to 0$ für $n \to \pm\infty$.*
(Hinweis: Betrachten Sie zuerst $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Für $f \in L^1([-\pi,\pi])$ finden Sie $f_k \in L^2([-\pi,\pi])$ mit $\|f - f_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$)

Sei zuerst $f \in L^2$, dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Damit gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein N sodass alle Fourierkoeffizienten mit einem Index, der betragsmäßig größer N ist kleiner als ε, weil so die Konvergenz definiert ist.

Sei nun $f \in L^1$ beliebig, dann definieren wir

$$f_k(x) := \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese sind alle integrierbar und sogar in L^2, denn sie sind beschränkt.

Dann gilt

$$\|f - f_k\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_k| dx \to 0$$

Dabei gilt die letzte Konvergenz, denn $|f - f_k|$ ist eine integrierbare Funktion und wird von $|f|$ dominiert. Mit dem Satz der dominierten Konvergenz haben wir damit:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_k| dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{k\to\infty} |f - f_k| dx = 0$$

Damit gilt dann aber

$$|\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\hat{f}(x) - \hat{f}_k(x)) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(x) - \hat{f}_k(x)| dx \to 0$$

Dieser Grenzwert ist unabhängig von n, also ist der Grenzwert gleichmäßig und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} |\hat{f}(n)| = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} |\hat{f}_k(n)| = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} |\hat{f}_k(n)| = 0$$