Zusammenfassung Komplexe und Harmonische Analysis 2023 WS

Simon Garger

February 6, 2024

1 Preliminaries to Complex Analysis

Holomorphie Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph am Punkt z, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

für $h \in \mathbb{C}$ existiert.

Das ist genau dann der Fall, wenn für $f = u + iv$ u und v differenzierbar sind und sie die Cauchy-Riemann Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllen.

Weiter definiert jede Potenzreihe eine holomorphe Funktion auf dem Konvergenzradius und die termweise Ableitung entspricht der Ableitung selbst. Damit ist eine holomorphe Funktion unendlich oft differenzierbar und die Ableitung hat den gleichen Konvergenzradius.

2 Cauchy's Theorem and Its Applications

Goursat Ω offen und $T \subset \Omega$ ein Dreieck, wessen Inneres in Ω liegt, dann gilt

$$\int_T f(z)dz = 0$$

wenn f holomorph auf Ω ist.

Stammfunktionen Eine holomorphe Funktion hat auf jeder offenen Kreisscheibe eine Stammfunktion. Damit ist das Integral holomorpher Funktionen über geschlossene Kurven immer 0.

Cauchy-Integral-Formel Ist f holomorph auf einer offenen Menge, die den Abschluss einer Kreisscheibe D enthält. Sei nun C der Rand von D in positiver Richtung dann gilt die Cauchy-Integral-Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle $z \in D$.

Für die n-te Ableitung gilt entsprechend:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Womit man auch die Abschätzung

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \|f\|_C}{R^n}$$

Liouville Eine ganze und beschränkte Funktion f ist konstant.

Analytische Fortsetzung Gilt für f, g holomorph auf Ω auch $f(z) = g(z)$ auf einer Folge unterschiedlicher Punkte mit Grenzwert in Ω, dann sind f und g gleich.

Morera Eine stetige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge für jedes Dreick im Inneren

$$\int_T f(z) dz =$$

erfüllt, ist holomorph.

Folgen holomorpher Funktionen Der Grenzwert f einer Folge holomorpher Funktionen f_n ist holomorph, wenn die Folge gleichmäßig konvergiert.

Schwarz reflection principle Sei Ω eine offene Menge symmetrisch um die reelle Achse und sei weiter f eine holomorphe Funktion auf dem "positiven Teil" Ω^+. Kann die Funktion weiter stetig auf die reelle Achse fortgesetzt werden, sodass sie dort nur reelle Werte annimmt, dann kann man die Funktion gleich auf Ω^- fortsetzen. Das passiert durch $F = f$ auf Ω^+ und $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ für $z \in \Omega^-$.

Runge's approximation theorem Eine holomorphe Funktion kann in der Umgebung von einer kompakten Menge K gleichmäßig auf K durch rationale Funktionen approximiert werden. Die Singularitäten diese Funktionen liegen in K^c.
Ist K^c zusammenhängend, dann kann man die Funktion sogar durch Polynome approximieren.

3 Meromorphic Functions and the Logarithm

Singularities Wir haben drei verschiedene Arten an Singularitäten:

- Hebbare Singularität (f beschränkt)
- Pol ($1/f$ beschränkt, hat eine Ordnung n)
- Essentielle Singularität ($f(B_\varepsilon(z_0))$ liegt dicht in $\mathbb{C}$)

Residuum Hat f einen Pol der Ordnung n bei z_0, dann können wir

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + G(z)$$

mit G holomorph und der Teil davor heißt Hauptteil (principal part). Weiter haben wir $\mathrm{res}_{z_0} f = a_{-1}$.

Wir bestimmen das Residuum im Allgemeinen mit

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} (z - z_0)^n f(z)$$

und für $n = 1$ einfach mit $\mathrm{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

Residuen Formel Ist f holomorph auf einer offenen Menge, welche den Kreis (Contour Integral) C und sein Inneres enthält bis auf die Pole $z_1, \dots, z_N$ im Kreis. Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}_{z_k} f$$

Argument principle Sei f meromorph in einer offenen Menge, die einen Kreis (Contourintegral) C und sein Inneres enthält. Wenn f keine Pole und keine Nullstellen auf C hat, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{ (Nullstellen innerhalb von } C) \; - \; \text{(Anzahl an Polen innerhalb von C)}$$

Rouché's Theorem Seien f und g holomorph in einer offenen Menge, die einen Kreis C und sein Inneres enthält. Wenn nun $|f(z)| > |g(z)|$ auf C gilt, dann haben f und $f + g$ gleich viele Nullstellen innerhalb von C.

Folgerungen Eine nichtkonstante, holomorphe Funktion f bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

Eine nichtkonstante, holomorphe Funktion nimmt auf einer offenen Menge Ω nicht ihr Maximum an.

Homotopie Zwei Kurven γ_0, γ_1 sind homotop, wenn sie die gleichen Anfangs- und Endpunkte haben und für jedes $0 \leq s \leq 1$ eine Kurve existiert γ_s existiert, die ebenso die selben Anfangspunkte hat und in s stetig ist. Es geht also lasch gesagt darum, dass man die eine Kurve stetig zu der anderen umformen kann.

Für holomorphe Funktionen f und homotope Kurven γ_0, γ_1 gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

In einfach zusammenhängenden Gebieten sind alle Kurven mit gleichen Endpunkten homotop. Auf einfach zusammenhängenden Gebieten haben deswegen auch alle holomorphen Funktionen eine Stammfunktion.

Komplexer Logarithmus Weil die Umkehrung von e^z nicht aufgrund des Phasenwinkels von z nicht eindeutig ist, können wir den Logarithmus nicht global definieren sonderen nur auf Branches/Zweigen, also der komplexen Zahlenebene mit einem Schlitz.

Diese Gebiete sind dann nämlich einfach zusammenhängend (weil wir die 0 ausnehmen). Auf diesen definieren wir nun:

$$\log(z) = \log(r) + i\theta$$

wobei $z = re^{i\theta}$. Dieser Logarithmus erbt im Allgemeinen nicht die Rechenregeln vom reellen Logarithmus. Wir können aber damit für alle α

$$z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$$

definieren.

4 Fourier Reihe

Fourier Reihe Für eine integrierbare Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definieren wir den n-ten Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

und die Fourierreihe durch

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

wobei die letzte Reihe über den symmetrischen Grenzwert definiert ist.

Eindeutigkeit Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und integrierbar mit

$$\hat{f}(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wenn f bei x_0 stetig ist, dann $f(x_0) = 0$. Sonst ist die Funktion f.ü. 0

Damit folgt sofort Sei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und stetig mit

$$\hat{f}(n) = \hat{g}(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Dann gilt $f \equiv g$.

Weiter ist für eine periodische und stetige Funktion mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. Dann

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz.

Eine weitere Folgerung ist, dass für eine periodische und integrierbare Funktion f die auch $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ erfüllt gilt, dass f fast stetig ist, also existiert g stetig mit $f = g$ f.ü.

Absolute Konvergenz der Fourierkoeffizienten Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und stetig differenzierbar gilt

$$\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$$

und damit konvergiert die Fourier-Reihe auf jeden Fall absolut und gleichmäßig gegen f, wenn die Funktion zweimal stetig differenzierbar ist. Außerdem erhalten wir die Abschätzung

$$|\hat{f}(n)| \le C|n|^{-2}, \qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Faltungsprodukt Für f, g periodisch, f integrierbar und g messbar und beschränkt definieren wir die Faltung von f und g als

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dieses ist auch periodisch und stetig. Weiter gilt

$$f \hat{*} g(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$$

und wir haben alle Eigenschaften von Produkten, Assoziativität mit Skalaren, Distributivität, Kommutativität, Assoziativität.

Folge guter Kerne Eine Folge $(K_n)_{n \geq 1}$ heißt gut, wenn

(i) Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$$

(ii) Es gibt ein $M > 0$, so dass für alle $n \geq 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M$$

(iii) Für jedes $\delta > 0$ gilt

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \to 0$$

für $n \to \infty$.

In diesem Fall gilt $(f * K_n)(x_0) \to f(x_0)$, wenn f auf x_0 stetig ist und wenn f stetig ist, dann $f * K_n \to f$ gleichmäßig. Für f periodisch und integrierbar gilt immernoch

$$\|f * K_n - f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f * K_n - f)(x)| dx$$

Kerne Der Dirichlet Kern ist definiert durch

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2} \cdot x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Ist keine Folge guter Kerne, die Faltung konvergiert aber trotzdem.

Der Poisson Kern ist für $\in (0, 1)$ definiert

$$P_r(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2}$$

Ist eine Folge guter Kerne. Vorallem gilt für die Abel-Durchschnitte

$$A_r(f)(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{inx} = (f * P_r)(x) \to f, \qquad r \in (0, 1)$$

wobei die letzte Konvergenz gleichmäßig ist.

Der Fejér Kern ist definiert als

$$F_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{M=0}^{N-1} D_M(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

Es ist eine gute Folge von Kernen. Vorallem gilt für die Cesàro-Durchschnitte

$$C_n(f)(x) := \frac{1}{N}\sum_{M=0}^{N-1}\sum_{n=-M}^{M} \hat{f}(n)e^{inx} = (f * F_n)(x) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1}(1-\frac{|n|}{N})\hat{f}(n)e^{inx} \to f$$

wobei die letzte Konvergenz gleichmäßig ist.

Interpretation als Hilbertraum Wir können den $L^2([-\pi,\pi])$ (quadratintegrierbare Funktion mit Äquivalenzklassen auf f.ü. übereinstimmenden Funktionen) als Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g^*(x)dx$$

Dabei bildet e^{inx} mit $n \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis und somit finden wir mit $S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx}$ die quadratische Konvergenz

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 dx \to 0$$

und die Parseval-Isometrie

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

Lipschitz Sei f periodische, integrierbar und lokal Lipschitz bei x_0, dann gilt

$$S_N(f)(x_0) \to f(x_0)$$

für $N \to \infty$

Lokalisierungsprinzip von Riemann Seien f, g periodisch, messbar und beschränkt. Nehmen wir an $f \equiv g$ auf einer Umgebung von x_0. Dann $S_N(f)(x_0) \to f(x_0)$ genau dann wenn $S_N(g)(x_0) \to f(x_0)$

Fourier-Transformation Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Die Fourier-Transformation von f ist

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

Die Abbildung $L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}), f \mapsto \hat{f}$ ist stetig und linear.

Schwartz-Funktionen Eine Funktion f heißt Schwartz, wenn sie unendlich oft differenzierbar ist und für alle $k, j \in \mathbb{N}$ auch

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^k \left| \frac{d^j}{dx^j} f(x) \right| < \infty$$

Ist eine Funktion Schwartz so sind es auch alle Ableitungen und alle Multiplikationen mit Polynomen. Wichtigstes Beispiel ist die Gauß-Funktion $\Phi(x) = e^{-\pi x^2}$.

Weiter gilt für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^k |g(x)| dx < \infty$$

dann ist auch die Faltung $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Sind $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

Familie von guten Kerne Eine Familie $K_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt gut, wenn

(i)
$$\int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x) dx = 1$$

(ii)
$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} |K_\varepsilon(x)| dx < \infty$$

(iii) Für jedes $\delta > 0$ gilt
$$\int_{\delta < |x|} |K_\varepsilon(x)| dx \to 0$$
für $\varepsilon \to 0^+$.

Aus einer Funktion $K \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} K(x) dx = 1$ gewinnt man eine solche Familie durch $K_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} K(x/\varepsilon)$.

Eigenschaften der Fouriertransofrmation Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) g(y) dy$$

Für $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ gilt damit
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$
für fast jedes $x \in \mathbb{R}$. Ist f sogar Schwartz gilt es für jedes x.

Nach Plancherel gilt für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 d\xi$$

J e konzentrierter eine Funktion ist, desto breiter ist die Fourier-Transformation.

Wir messen die Verbreitung mit:

$$V(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}}} |f(x)|^2 dx$$

Anwendung davon ist die Heisenbergsche Unschärferelation.

Fehler Skript: Beweis Satz 4 vorletzte Zeile, zweimal a$_n$