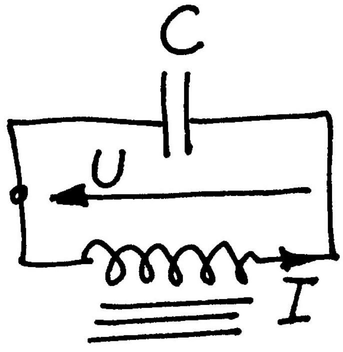
5 * Kretsen

En enkel strömkrets består av en kondensator och en spole. Kondensatorn är uppladdad till spänningen U_0. Spolen innehåller järn och har strömberoende induktans:



$$L = L_0 / \left(1 + I^2\right). \tag{1}$$

Vid tiden $t = 0$ sluts kretsen och strömmen bestäms sedan av två samband:

Spänningen över induktansen: $$U = L\frac{dI}{dt} \tag{2}$$

Strömmen genom kondensatorn: $$I = -C\frac{dU}{dt} \tag{3}$$

Visa att följande differentialekvation kan härledas ur uttrycken ovan (efter derivering av första uttrycket):

$$\frac{d^2I}{dt^2} = \frac{2I}{1+I^2}\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 - \frac{I\left(1+I^2\right)}{L_0C}$$

Vid tiden $t = 0$ gäller $I = 0$ och $dI/dt = U_0/L_0$. Lösningen $I(t)$ till differentialekvationen är en periodisk funktion som är mer eller mindre sinusliknande beroende av hur U_0-värdet väljs. Visa att för lösningen till begynnelsevärdesproblemet gäller

$$E(t) = CU(t)^2 + L_0 \ln(1 + I(t)^2) = \text{konstant},$$

tex genom att derivera uttrycket för E och utnyttja (1), (2) samt (3).

Gällande data är $L_0 = 1$ H, $C = 1 \cdot 10^{-6}$ F . Några olika värden på U_0 ska prövas, dels spänningen 240 V då järnkärnans inflytande är nästan försumbart, dels två höga spänningsvärden 1200 V och 2400 V då strömkurvan inte blir särskilt sinuslik längre.

Använd Runge–Kutta 4 för att beräkna och rita strömkurvorna. Plotta också $E(t)$ och verifiera att den är konstant. Fundera ut en bra algoritm för att bestämma strömmens toppvärde $I_{\max}$ och för att med mycket god precision beräkna svängningstiden T. Gör tillförlitlighetsbedömning av $I_{\max}$ och T. Undersök hur resultaten påverkas av de olika numeriska felkällorna: lösning av begynnelsevärdesproblem, interpolation, etc.

Före den numeriska behandlingen kan det vara bra att bedöma storleksordningen på svängningstiden. Det är lätt att räkna ut frekvensen och svängningstiden för en krets med konstant C och konstant $L = L_0$.

Fourieranalys – anpassning med trigonometriskt polynom

Programmet ska göra en fourieranalys av strömkurvan, det vill säga beräkna koefficienterna a_k i fourierutvecklingen av $I(t)$:

$$I(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \cdots, \quad \text{där} \quad \omega = 2\pi/T$$

(Att det inte blir några cosinustermer i utvecklingen följer av att funktionen $I(t)$ är udda.)

För koefficienterna i formeln gäller:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T I(t)\sin(k\omega t)\,dt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Använd trapetsregeln för att beräkna integralen numeriskt.[2] Beräkna de 14 första fourierkoefficienterna. Om strömmen är nästan sinusformad bör alla koefficienter utom den första vara mycket små, stämmer det? Det symmetriska utseendet hos strömkurvan gör att vissa fourierkoefficienter är noll (teoretiskt i alla fall). Vilka är det och hur väl stämmer teori och praktik?

Rita i samma figur upp strömkurvan samt resultatet av fourierutvecklingen, dels då bara de tre första termerna tas med, dels då alla fjorton finns med.

Utvidgning

Det kommer ett krav att strömmen i kretsen inte får överstiga 10 A. Beräkna med en effektiv lösningsmetod, tex sekantmetoden eller intervallhalvering, det spänningsvärde $U_0 = U_0{}^*$ som ger $I_{\max} = 10$ A. Man har möjlighet att variera spolens L_0-värde och vill därför för en krets som uppfyller kravet $I_{\max} = 10$ undersöka beroendet mellan $U_0{}^*$ och L_0. Beräkna och markera i ett diagram $U_0{}^*$ för $L_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 2.0$ H.

[2] Trapetsregeln är speciellt bra när integranden är periodisk; läs gärna mer om detta tex i *Numeriska algoritmer med Matlab*, avsnitt 5.2.4, skriven av Gerd Eriksson (tillgänglig på kurswebben).