

MVE025 Räknade uppgifter

2021-10-07

1.1

Låt $z = 1 + 2i$, $w = 2 - i$ och beräkna följande:

b.

$$\bar{w} - z.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\bar{w} - z &= (2 + i) - (1 + 2i) \\ &= 1 - i.\end{aligned}$$

c.

$$z^3.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}z^3 &= (1 + 2i)^3 \\ &= 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2i + 3 \cdot 1 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 \\ &= -11 - 2i.\end{aligned}$$

d.

$$\operatorname{Re}(w^2 + w).$$

Lösning:

$$\operatorname{Re}(w^2 + w) = \operatorname{Re}(2^2 - 2i + i^2 + 2 - i) = 5.$$

1.2

Hitta real- och imaginärdel av följande uttryck:

a.

$$\frac{z-a}{z+a} \text{ för } a \in \mathbb{R}.$$

Lösning: Om uttrycket är väldefinerat borde nämnaren vara nollskiljd, och då även nämnarens konjugat. Med $z = x + yi$ har vi

$$\begin{aligned}\frac{z-a}{z+a} &= \frac{x+yi-a}{x+yi+a} \\ &= \frac{(x-yi+a)(x+yi-a)}{(x-yi+a)(x+yi+a)} \\ &= \frac{-a^2+i2ay+x^2+y^2}{a^2+2ax+x^2+y^2} \\ &= \frac{-a^2+x^2+y^2}{a^2+2ax+x^2+y^2} + \frac{2ay}{a^2+2ax+x^2+y^2}i.\end{aligned}$$

b.

$$\frac{3+5i}{1+7i}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\frac{3+5i}{1+7i} &= \frac{(1-7i)(3+5i)}{1+7^2} \\ &= \frac{3-21i+5i+35}{49} \\ &= \frac{38}{49} + \frac{-16}{49}i\end{aligned}$$

d.

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \left(1\angle\frac{2\pi}{3}\right)^3 \\ &= 1\angle2\pi \\ &= 1.\end{aligned}$$

1.3

Hitta beloppet och konjugatet av följande uttryck:

b.

$$z = (2+i)(4+3i).$$

Lösning:

$$\begin{aligned}|z| &= |(2+i)| \cdot |(4+3i)| \\ &= \sqrt{3} \cdot 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{(2+i)} \overline{(4+3i)} \\ &= (2-i)(4-3i).\end{aligned}$$

d.

$$z = (1 + i)^6.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}|z| &= |(1 + i)|^6 \\&= \sqrt{2}^6.\end{aligned}$$

$$\bar{z} = (1 - i)^6$$

1.4

Skriv om till polär form:

f.

$$z = |3 - 4i|.$$

Lösning:

$$z = |3 - 4i| \angle 0.$$

h.

$$z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)^4.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}z &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2}e^{-\frac{2\pi}{8}i}\right)^4 \\&= \frac{4}{9}e^{-\pi i}.\end{aligned}$$

1.8

Använd pq -regeln för att lösa följande ekvationer:

a.

$$z^2 + 25 = 0.$$

Lösning:

$$z = \pm 5.$$

b.

$$2z^2 + 2z + 5 = 0.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1 \pm (1 - 4\frac{5}{2})^{\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{4\frac{5}{2} - 1}i}{2}. \end{aligned}$$

1.11

Hitta samtliga lösningar till följande ekvationer:

a.

$$z^6 = 1.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} z^6 &= e^{n2\pi i} \\ z &= e^{n\frac{\pi}{3}i}, \end{aligned}$$

för $n \in \mathbb{Z}$.

c.

$$z^6 = -9.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} z^6 &= 9e^{(\pi+n2\pi)i} \\ z &= 3^{\frac{1}{3}}e^{(\frac{\pi}{6}+n\frac{\pi}{3})i}. \end{aligned}$$

1.22

Bevisa att, för alla z och $w \in \mathbb{C}$,

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad (1)$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad (2)$$

$$\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}, \quad (3)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad (4)$$

$$|\bar{z}| = |z|, \quad (5)$$

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad (7)$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad (8)$$

$$\overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}. \quad (9)$$

Lösning: Om vi väljer att definiera konjugering som spegling i realaxeln blir många av dom här identiteterna någorlunda uppenbara.

Om addition defineras enligt parallelogramregeln så säger (1) att man får samma parallelogram om man speglar varje ben för sig som om man speglar hela på en gång, vilket man ju får.

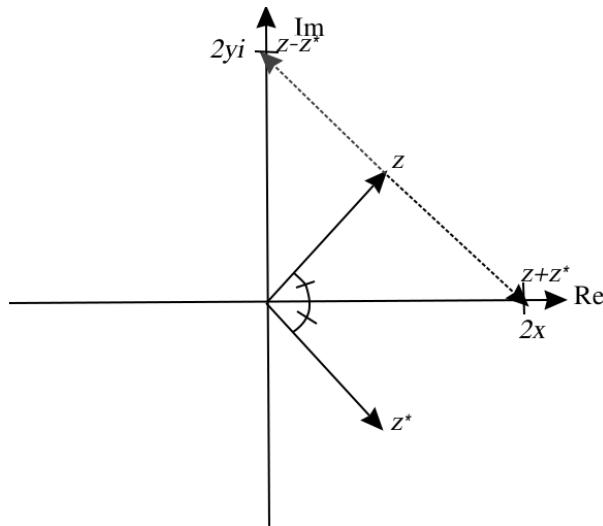
Om multiplikation av två komplexa tal defineras som att man multiplicerar deras längder och adderar deras vinklar är det också uppenbart att jag kan spegla varje tal för sig och få samma svar som om jag speglar efter att ha multiplicerat (längden påverkas inte av spegling och vinklarna blir samma pga $-(\theta + \phi) = -\theta - \phi$). Vi har då visat (2). (3) följer på samma sätt.

Spegling i realaxeln är sin egen invers, varför (4).

Längder påverkas inte av spegling, varför (5).

$z\bar{z}$ har argumentet $\theta - \theta = 0$ och är alltså reellt. Dess längd är $|z|^2$. Därav (6).

(7) och (8) förklaras av figur 1.



Figur 1: $z = x + yi$.

(9) är trivial om man definierar exponentiering av komplexa tal enligt

$$e^{x+yi} = e^x \angle y.$$

1.23

Skissa följande delmängder till det komplexa talplanet:

b.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } |z - 1 + i| \leq 2 \}.$$

Lösning: Detta är en disk med centrum i $1 - i$ och radie 2. Randen är inkluderad.

d.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } |z - i| + |z + i| = 3 \}.$$

Lösning: Detta är en ellips med brännpunkterna i och $-i$ och med större radie $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2}i$ ligger i mängden).

f.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } |z - 1| = 2|z + 1| \}.$$

Lösning: Mängden, kalla den A , är preimage av en cirkel med radie 2 under avbildningen $f: z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$. Vi har att

$$\begin{aligned} f^{-1}(z) &= \frac{1+z}{1-z} \\ &= \frac{2}{1-z} - 1 \end{aligned}$$

f och f^{-1} tillhör en speciell mängd av funktioner som kallas *Möbiustransformationer*. Möbiustransformationer karaktäriseras av att de avbildar cirklar på cirklar. Man kan se att f^{-1} bevarar cirklar genom att övertyga sig själv om att varje komposant i $f = (z \mapsto z - 1) \circ (z \mapsto 2z) \circ (z \mapsto \frac{1}{z}) \circ (z \mapsto -z + 1)$ bevarar cirklar. En cirkel är entydigt bestämd av tre punkter, så eftersom $-\frac{1}{3}$ och $-3 \in A$ och eftersom A är symmetrisk i realaxeln har vi att A är cirkeln centrerad i $-\frac{5}{3}$ med radie $\frac{4}{3}$.

g.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } \operatorname{Re} z^2 = 1 \}.$$

Lösning: Mängden är preimage av linjen $\operatorname{Re} z = 1$ under avbildningen $z \mapsto z^2$. Så vi har att preimage av $z = 1 + yi$ är

$$\pm(1 + yi)^{\frac{1}{2}}.$$

1.24

Låt p vara ett polynom med reella koefficienter. Visa att

a.

$$\overline{p(z)} = p(\bar{z}).$$

Lösning: Vi gör ett induktionsbevis. Basfallet är en konstant reell funktions, så påståendet stämmer där ✓.

Om vi betecknar induktionshypotesen med H har vi att

$$\begin{aligned} \overline{p_{n+1}(z)} &= \overline{a_{n+1}z^{n+1} + a_nz^n + \dots + a_0} \\ &\stackrel{(1)}{=} \overline{a_{n+1}z^{n+1}} + \overline{a_nz^n} + \dots + \overline{a_0} \\ &\stackrel{(2)}{=} a_{n+1}\bar{z}^{n+1} + \overline{a_nz^n} + \dots + \overline{a_0} \\ &\stackrel{H}{=} a_{n+1}\bar{z}^{n+1} + a_n\bar{z}^n + \dots + a_0 \\ &= p_{n+1}(\bar{z}). \end{aligned}$$

b.

$$p(z) = 0 \text{ omm } p(\bar{z}) = 0.$$

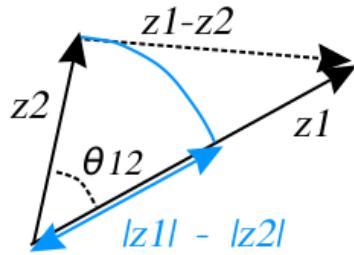
Lösning: Följer av a. och att $\bar{0} = 0$.

1.25

Bevisa den omvända triangelolikheten

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (10)$$

Lösning: Betrakta figur 2. VL i (10) har ett minimum när $\theta_{12} = 0$. Då är VL och HL lika. HL beror inte på θ_{12} . Alltså följer påståendet.



Figur 2: θ_{12} är vinkeln mellan z_1 och z_2 .

1.26

Använd inversa triangelolikheten för att visa att

$$\left| \frac{1}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{1}{3} \quad (11)$$

för alla $z \in C[0, 2]$.

Lösning: Eftersom VL och HL är positiva är (11) ekvivalent med

$$|z^2 - 1| \geq 3. \quad (12)$$

Men om $|z| = 2$ är (12) triangelolikheten för $z_1 = z^2$, $z_2 = 1$.

1.27

Skissa följande delmängder till \mathbb{C} och avgör om dom är öppna, slutna, begränsade, sammanhangande.

a.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } |z + 3| < 2 \}.$$

Lösning: Öppen disk med radie 2 och centrum i det komplexa talet 3.

b.

$$|z| < 1.$$

Lösning: Ett band mellan $y = \pm 1$. Öppet, sammanhängande, ej begränsat.

c.

$$0 < |z - 1| < 2.$$

Lösning: Öppen punkterad disk med radie 2 och centrum i det komplexa talet 1. Öppen, sammanhängande, begränsad.

d.

$$|z - 1| + |z + 1| = 2.$$

Lösning: Ett linjesegment från 1 till -1 . Öppet, sammanhängande, begränsat.

1.29

Låt $G = [-2, -1] \cup D(0, 1) \cup \{1, 2\}$.

b.

Vilka punkter är G :s inre punkter?

Lösning: $D(0, 1)$.

c.

Vilka punkter är G :s randpunkter?

Lösning:

$$\partial G := \overline{G} \cap \overline{G^c} = [-2, -1] \cup C(0, 1) \cup \{1, 2\}.$$

Kom ihåg att $z \in \partial G$ inte nödvändigtvis behöver betyda att $z \in G$.

d.

Vilka punkter är G :s isolerade punkter?

Lösning: z isolerad innebär att det finns ϵ s.a. $D(z) \cap G = \{z\}$. Endast en punkt uppfyller detta, 2. Kom ihåg att z isolerad punkt till G nödvändigtvis betyder att $z \in G$.

1.33

Parametrisera följande kurvor:

a.

$C[1+i, 1]$, orienterad moturs.

Lösning: $z(t) = e^{it} + 1 + i$, $t \in [0, 2\pi]$.

b.

Linjesegmentet från $z_1 = -1 - i$ till $z_2 = 2i$.

Lösning: $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2, t \in [0, 1]$.

e.

Ellipsen centrerad i 0 med större radie 2 och mindre radie $\sqrt{3}$, orienterad moturs.

Lösning: Låt $f(t) = e^{it}$ och $g(x+iy) = 2x + \sqrt{3}iy$. Då är $g \circ f$ en parametrisering.

2.15

Derivera $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ där $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ s.a. $ad - bc \neq 0$. När är $T'(z) = 0$?

Lösning:

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \quad (13)$$

Derivatan är därför aldrig 0.

2.21

Bevisa att om $f(z)$ och $\bar{f}(z)$ båda är holomorfa på ett sammanhängande område $G \subset \mathbb{C}$, så är f konstant på G .

Lösning: Från Cauchy–Riemann-ekvationen har vi att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = -i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}, \quad (15)$$

men om man komplexkonjugerar (14) får man också att

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}. \quad (16)$$

(15) och (16) ger tillsammans att $f' = 0$ på G .

Vi kan då applicera Teorem 2.17 för att lösa uppgiften.

2.22

Antag att f är hel och på formen $f(z) = u(x) + iv(y)$. Visa att $f(z) = az + b$ för något $a \in \mathbb{R}$ och något $b \in \mathbb{C}$.

Lösning: Teorem 2.13 ger oss $f'(z) = u'(x)$, som är en reell funktion. Vi kan då se att $f''(z)$ är väldefinerad och, eftersom $f''(z) = -i\partial_y f'(z)$, är $f''(z) = 0$ överallt. Enligt teorem 2.17 är då $f' = a$ för något konstant a (som vi även vet är reell). Eftersom $az - f(z)$ har derivata 0 kan vi applicera teorem 2.17 en gång till för att säga att $f(z) = az + b$ för något $b \in \mathbb{C}$.

2.23

Antag att f är hel med real- och imaginärdel u och v som uppfyller $u(x, y)v(x, y) = 3$ för alla på hela \mathbb{C} . Visa att f är konstant.

Lösning:

$$\begin{aligned} f(z)^2 &= (u(x, y) + iv(x, y))^2 \\ &= u(x, y)^2 + 2iu(x, y)v(x, y) - v(x, y)^2 \\ &= u(x, y)^2 + 6i - v(x, y)^2. \end{aligned}$$

Alltså är $f(z)^2 - 6i$ en reell hel funktion. Som i uppgift 2.22 har vi då att $f(z)^2 - 6i$ är en konstant funktion.

2.25

Hitta något v s.a. $u + iv$ är holomorf i något område för följande v :

a.

$$v(x, y) = x^2 - y^2.$$

Lösning: $v = 2xy$ ger $u + iv = z^2$.

Linjär algebra och holomorfi

Om vi antar proposition 2.11 (bevaring av vinklar) som definitionen av holomorf kan vi härleda Cauchy–Riemanns ekvationer genom lite linjäralgebra.

En hyfsat rigorös definition av *derivata* är följande.

Definition 1. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen delmängd, och låt $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en funktion. f är *deriverbar* i en punkt $x \in E$ om det finns en linjär funktion $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s.a.

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \rho(h), \quad (17)$$

$$\text{där } \frac{\rho(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Om $E \subset \mathbb{C}$ så kan en funktion $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ även betraktas som en funktion $f: \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ där $\tilde{E} \subset \mathbb{R}^2$ svarar mot E . Från flervarren vet vi att om en funktion är partiellt deriverbar i ett öppet område är den deriverbar. Så betrakta en sådan funktion f och låt, utan inskränkning, $x = 0$. Vi har då att

$$f(h) \approx f(0) + Ah \quad (18)$$

för små h . Vi har att A är en 2×2 -matris,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Så f är, nära h , en affin funktion som bestäms entydigt av var 0 och basvektorerna avbildas. Om f ska vara holomorf måste vinkeln mellan bilden av basvektorerna vara $\frac{\pi}{2}$. Dessa två villkor är ekvivalenta.

Därför måste A vara proportionell mot en ortogonal matris. Vi har att $AA^T = \lambda I$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Villkoren som matriselementen måste uppfylla är då

$$a_{12} = -a_{21} \quad \text{och} \quad a_{11} = a_{22} \quad \text{eller} \quad (20)$$

$$a_{12} = a_{21} \quad \text{och} \quad a_{11} = -a_{22}. \quad (21)$$

Om vi nu identifierar A med f :s Jacobianmatris $\begin{bmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{bmatrix}$ ser vi att vi får tillbaka Cauchy–Riemanns ekvationer. (20) beskriver villkoren för en holomorf funktion, medan (21) beskriver villkoren för en antiholomorf funktion.

3.13

3.14

Hitta Möbiustransformationer som uppfyller följande.

a.

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 0, \\ 2 &\mapsto 1, \\ 3 &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Lösning:

$$\frac{z-1}{z-3} \cdot \frac{2-3}{2-1}.$$

b.

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 0, \\ 1+i &\mapsto 1, \\ 2 &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Lösning:

$$\frac{z-1}{z-2} \cdot \frac{(1+i)-2}{(1+i)-1}.$$

c.

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto i, \\ 1 &\mapsto 1, \\ \infty &\mapsto -i. \end{aligned}$$

Lösning:

$$-i \frac{z-i}{z+i}.$$

3.18

Hitta en Möbiustransformation som avbildar $D[0, 1]$ på $G := \{x + iy \in \mathbb{C} \text{ s.a. } x + y > 0\}$.

Lösning: Om vi kan hitta en Möbiustransformation som avbildar $\partial D[0, 1]$ på ∂G så finns det två alternativ:

1. insidan av $D[0, 1]$ avbildas på insidan av G ,
2. insidan av $D[0, 1]^{\mathbb{C}}$ avbildas på insidan av G .

Det räcker att kolla på bilden av en punkt för att avgöra vilken av dessa som gäller.

Möbiustransformation

$$f(z) = (1 - i) \frac{z + i}{z + 1} \quad (22)$$

avbildar

$$\begin{aligned} -i &\mapsto 0, \\ -1 &\mapsto \infty, \\ \infty &\mapsto 1 - i. \end{aligned}$$

Så $f(\partial D[0, 1])$ är en linje som går genom 0 och $1 + i$, alltså ∂G . Det som återstår att kolla är att $f(D[0, 1])$ hamnar på ”rätt sida om randen”. Men det kan vi övertyga oss om genom att betrakta $f: 0 \mapsto 1 + i \in G$.

Om det sista steget hade skitit sig hade man bara behövt definera om f med motsatt tecken.

3.19

Jacobianen av en avbildning $(u, v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är determinanten av Jacobimatrisen

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Visa att om $f = y + iv$ är holomorf så är Jacobianen $|f'(z)|^2$.

Lösning:

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2 &\stackrel{(2.2)}{=} |u_x + iv_x|^2 \\ &= u_x^2 + v_x^2 \\ &\stackrel{(2.3)}{=} u_x v_y - v_x u_y \\ &= |J|. \end{aligned}$$

4.34

Beräkna

$$I(r) = \int_{C[-2i, r]} \frac{dz}{z^2 + 1}$$

För alla $r \neq 1, 3$.

Lösning: Vi börjar med att skriva ner två satser vi kommer använda oss av.

Sats (Cauchys sats). *Om f är holo i ett område G och γ och λ är två styckvis släta kurvor i G s.a. $\gamma \sim_G \lambda$, då är*

$$\int_{\gamma} f = \int_{\lambda} f. \quad (24)$$

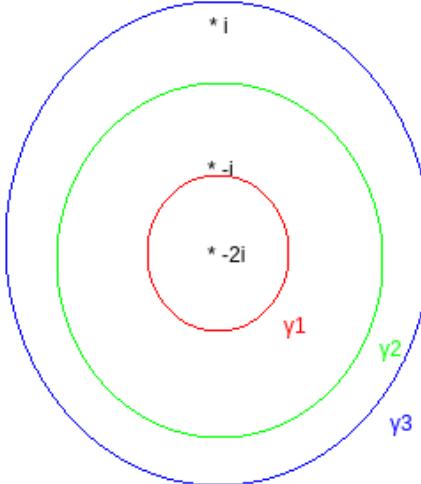
Sats (Cauchys integralformel). *Om f är holo i ett område G och γ är en positivt orienterad, enkel, sluten, styckvis slät kurva s.a. $w \in \text{int } \gamma$ och $\gamma \sim_G 0$, då är*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-w} dz. \quad (25)$$

Idén är att vi, för olika r , kommer kunna skriva om integranden $g(z) = \frac{1}{z^2+1}$ på formen (25) på lite olika sätt. Vi har tre fall

1. $\gamma_1 = C[-2i, r]$, $r < 1$,
2. $\gamma_2 = C[-2i, r]$, $1 < r < 3$,
3. $\gamma_3 = C[-2i, r]$, $r > 3$.

Figur 3 visar ett par exempel på hur dessa tre olika fall kan se ut.

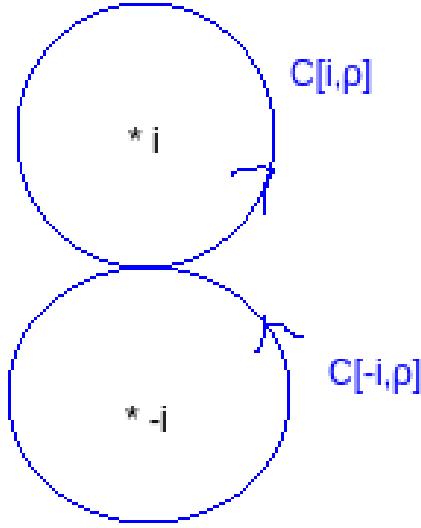


Figur 3:

I fall 1 ser vi att g inte har nåra singulariter i $\text{int } \gamma_1$. Därför är $I = 0$ (detta är en uppenbar följdssats till Cauchys sats, men även till Cauchys integralformel genom att välja $(z + 2i)g(z)$).

I fall 2 ser vi att g har en singularitet i $z = -i$. Vi kan faktorisera $g(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$, så definera g_2 enligt $g(z) = \frac{g_2(z)}{z+i}$. Idén är nu att $g_2(z) = \frac{1}{z-i}$ är holo på $\text{int } \gamma_2$, så allt är upplagt för att använda Cauchys integralformel. Det är alltså bara att stoppa in $f = g_2$ och $w = -i$. Vi erhåller

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma_2} \frac{g_2(z)}{z+i} dz \\ &= 2\pi i g_2(-i) \\ &= -\pi. \end{aligned}$$



Figur 4: Cauchys sats säger att vi har $\int_{\gamma_3} f = \int_{\gamma'_3} f$.

I fall 3 är saker lite mer komplicerade, g har två singulariteter i int γ_3 . Vi hanterar detta genom att deformera γ_3 till γ'_3 enligt figur 4.

γ'_3 består av två delar: en cirkel med centrum i i och en cirkel med centrum i $-i$. I var och en av dessa två cirklar kan vi applicera Cauchys integralformel! Vi får att

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_3} f &= \int_{\gamma'_3} f \\
 &= \int_{C[i,\rho]} f + \int_{C[-i,\rho]} f \\
 &\quad \{g_3(z) := 1/(z+i)\} \\
 &= \int_{C[i,\rho]} \frac{g_3(z)}{z-i} + \int_{C[-i,\rho]} \frac{g_3(z)}{z+i} \\
 &= \pi - \pi \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

5.1

Beräkna följande kurvintegraler när \square är randen till en kvadrat med hörn i $\pm 4 \pm 4i$ (positivt orienterad).

a)

$$\int_{\square} \frac{\exp\{z^2\}}{z^3} dz.$$

Lösning: Vi börjar med att statea thm 5.1:

Sats. Antag f holo på ett område G och γ en positivt orienterad enkel sluten styckvis slät kurva som är nollhomotop på G . Om $w \in \text{int } \gamma$ så är

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-w)^2}, \quad (26)$$

$$f''(w) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-w)^3}. \quad (27)$$

Om vi identifierar $f(z) = \exp\{z^2\}$ och $w = 0$ har vi att

$$f''(z) = 2 \exp\{z^2\}(2z^2 + 1).$$

Eftersom $0 \in \text{int } \square$ får vi

$$\begin{aligned} \int_{\square} \frac{\exp\{z^2\}}{z^3} dz &= \pi i f''(0) \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

b)

$$\int_{\square} \frac{\exp\{3z\}}{(z - \pi i)^2} dz$$

Lösning: På samma sätt som i a): eftersom $\pi i \in \text{int } \square$,

$$\begin{aligned} \int_{\square} \frac{\exp\{3z\}}{(z - \pi i)^2} dz &= 2\pi i \frac{d \exp\{3z\}}{dz} \Big|_{z=\pi i} \\ &= 6\pi i \exp\{3z\} \Big|_{z=\pi i} \\ &= -6\pi i. \end{aligned}$$

c)

$$\int_{\square} \frac{\sin 2z}{(z - \pi)^2} dz.$$

Lösning: Eftersom $\pi \in \text{int } \square$,

$$\begin{aligned} \int_{\square} \frac{\sin 2z}{(z - \pi)^2} dz &= 2\pi i \frac{d \sin 2z}{dz} \Big|_{z=\pi} \\ &= 4i\pi \cos 2z \Big|_{z=\pi} \\ &= 4i\pi. \end{aligned}$$

d)

$$\int_{\square} \frac{\exp\{z\} \cos z}{(z - \pi)^3} dz.$$

Lösning: Eftersom $\pi \in \text{int } \square$,

$$\begin{aligned} \int_{\square} \frac{\exp\{z\} \cos z}{(z - \pi)^3} dz &= \pi i \frac{d^2 \exp\{z\} \cos z}{dz^2} \Big|_{z=\pi} \\ &= -2\pi i \exp\{z\} \sin z \Big|_{z=\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

5.16

Antag att f är hel och att det finns konstanter a och b s.a.

$$|f(z)| \leq a|z| + b \quad (28)$$

för alla $z \in \mathbb{C}$. Visa att f är ett polynom av grad högst 1.

Lösning: Idén är att använda (27) tillsammans med prop. 4.6 d):

Proposition. antag att γ är en styckvis slät kurva och f är en komplexa funktion som är kontinuerlig på γ , då är

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|. \quad (29)$$

Låt $\gamma = C[w, R]$ för något stort R (så att w ligger i $\text{int } \gamma$). Vi har att

$$\begin{aligned} |f''(w)| &= \left| \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^3} dz \right| \\ &\stackrel{(29)}{\leq} \frac{1}{\pi} \max_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{|z-w|^3} |\gamma| \\ &\stackrel{(28)}{\leq} \frac{1}{\pi} \max_{z \in \mathbb{C}} \frac{(a|z| + b)}{R^3} 2\pi R \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{(a(R+|w|) + b)}{R^3} 2\pi R \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Därför får vi att $f'' = 0$. Det är inte svårt att se att f då måste vara ett polynom med grad högst 1 (detta visar man i en annan uppgift tror jag).

5.18

Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

Lösning: TODO.

6.11

Visa att, om $U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är harmonisk och begränsad på \mathbb{C} , så är U konstant.

Lösning: Vi statear vi statear två användbara satser:

Sats (6.6). Låt $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara harmonisk på ett enkelt sammanhängande område. Då finns det en funktion $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s.a. $f = u + iv$ är holomorf på G .

Sats (Liouvilles sats). Alla hela begränsade funktioner är konstanta.

Definera F enligt sats 6.6 s.a. $F = U + iV$ är hel (\mathbb{C} är ett enkelt sammanhängande område). Betrakta nu den sammansatta funktionen $G = \exp \circ F$. G är en sammansättning av två hela funktioner och är därför också hel. Men G är också begränsad eftersom F :s realdel är begränsad. Enligt Liouvilles sats är då G konstant och därför är även F konstant.

7.25

Hitta potensserier och bestäm deras konvergensradier för följande funktioner.

a)

$$\frac{1}{1+4z}.$$

Lösning: Uppgiften specificerar ingen punkt att centrera potensserierna i, men jag väljer att utveckla kring 0.

Vi vill använda oss av den geometriska serien

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k \geq 0} w^k. \quad (30)$$

Med $w = -4z$ blir (30)

$$\frac{1}{1+4z} = \sum_{k \geq 0} (-4z)^k.$$

Eftersom (30):s konvergensradie är 1 är denna series konvergensradie $\frac{1}{4}$.

b)

$$\frac{1}{3 - \frac{z}{3}}.$$

Lösning: I (30), välj $w = \frac{z}{6}$. Då har vi att

$$\frac{1}{3 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{3} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z}{6}\right)^k$$

med konvergensradie 6

c)

$$\frac{z^2}{(4-z)^2}.$$

Lösning: Om vi deriverar den geometriska (30) serien får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-w)^2} &= \sum_{k \geq 1} kw^{k-1} \\ &= \sum_{k \geq 0} (k+1)w^k.\end{aligned}\tag{31}$$

Om vi tänker på fortsan så kommer vi ihåg att om en funktionsföljd är likformigt konvergent så kan vi derivera och gå i gräns i vilken ordning vi vill. Eftersom potensserier konvergerar likformigt på alla slutna delmängder till deras öppna konvergensdisk så gäller (31) på hela (30):s öppna konvergensdisk. (31):s konvergensradie är alltså minst lika stor som (30):s. Om man stoppar in $w = 1$ är det även uppenbart att konvergensradien inte blir större.

Välj nu $w = \frac{z}{4}$. Vi erhåller

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{(4-z)^2} &= \frac{1}{16} z^2 \sum_{k \geq 0} (k+1) \left(\frac{z}{4}\right)^k \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k \geq 0} (k+1) \left(\frac{z}{4}\right)^{k+2}\end{aligned}$$

med konvergensradie 4.

7.27

a)

Antag att talföljden c_k är begränsad av något tal M . Visa att konvergensradien hos $\sum_{k \geq 0} c_k z^k$ inte är mindre än 1.

Lösning: Om $|z| < 1$ har vi att

$$\begin{aligned}\left| \sum_k c_k z^k \right| &\stackrel{\Delta\text{-inequality}}{\leq} \sum_k |c_k z^k| \\ &= \sum_k |c_k| |z|^k \\ &\leq \sum_k M |z|^k \\ &= M \sum_k |z|^k \\ &\leq \infty.\end{aligned}$$

b)

Antag att talföljden c_k inte konvergerar mot 0. Visa att konvergensradien hos $\sum_{k \geq 0} c_k z^k$ inte är större än 1.

Lösning: Om c_k inte konvergerar mot 0 så finns det ett tal $\epsilon > 0$ s.a. $|c_k| \geq \epsilon$ för oändligt många k . Vi har då att funktionsföljden $f_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ omöjligt kan konvergera om $|z| > 1$ eftersom för varje $N \in \mathbb{N}$ kommer jag kunna hitta ett $n > N$ s.a. (beloppet av) skillnaden mellan $f_n(z)$ och $f_{n+1}(z)$ är större än $\epsilon |z|^n > \epsilon$.

7.28

Hitta potensserier centrerade i 1 och deras konvergensradie för följande funktioner:

a)

$$\frac{1}{z}.$$

Lösning:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1 - z)},$$

så välj $w = 1 - z$ i (30). Vi erhåller

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \sum_{k \geq 0} (1 - z)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k (z - 1)^k\end{aligned}$$

med konvergensradie 1.

b)

$$\text{Log } z.$$

Lösning: Vi integrerar a) och använder att $\text{Log } 1 = 0$:

$$\text{Log } z = - \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k} (z - 1)^{k+1}.$$

Samma argument med likformig konvergens som i 7.25 c) ger oss konvergensradien 1.

8.23

Visa att

$$\frac{z-1}{z-2} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(z-1)^k}$$

för $|z-1| > 1$.

Lösning: Gör variabelbytet $w = 1/(z-1)$, $z = 1/w + 1$. Då står det

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w} - 1} &= \sum_{k \geq 0} w^k \\ \frac{1}{1-w} &= \sum_{k \geq 0} w^k\end{aligned}\tag{32}$$

som är den välkända geometriska serien. Det som är kvar att visa är att konvergensområdet innehåller $\{z \text{ s.a. } |z-1| > 1\}$. Men (32) konvergerar för $\{w \text{ s.a. } w < 1\} = \{z \text{ s.a. } |z-1| > 1\}$.

8.25a

Hitta Laurentserien för $\frac{\cos z}{z^2}$ centrerad i $z = 0$.

Lösning: Vi börjar med att skriva upp en sats.

Sats (Identitetsprincipen). *Antag att G är ett område och $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ är holo s.a. $f(a_n) = g(a_n)$ för en sekvens (a_n) i G som konvergerar i G , då är $f = g$.*

Uppgiften är kanske inte supersvår egenklig men vi behöver den här satsen för att resonera lite om dom mer tekniska aspekterna.

Så lösningen är basically bara att taylorutveckla cos.

$$\begin{aligned}\frac{\cos z}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \sum_{k \geq 0} "k \text{ är udda}" \cdot \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} z^k \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{k \geq 0} "k \text{ är udda}" \cdot \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} z^{k-2}.\end{aligned}$$

Okej, så anledningen till att vi vet cosinus taylorutveckling är identitetsprincipen. Vi har vid något tillfälle härlett att

$$\cos x = \sum_{k \geq 0} "k \text{ är udda}" \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} x^k.$$

Men om vi bara stoppar in z istället för x så har vi en komplex potensserie. Den potensseriens konvergensradie är då ∞ (man kan använda bl.a. rottestet), så den potensserien är en hel funktion. Men en hel funktion som stämmer överens med $\cos z$ på \mathbb{R} måste vara $\cos z$ enligt identitetsprincipen.

8.32

Hitta Laurentserien till

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(z+2)}$$

centrerad i 0, definierad på $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, respektive $2 < |z|$.

Lösning:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{3}{(1-z)(z+2)} \\ &= -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.\end{aligned}$$

Den första termen har två möjliga utvecklingar:

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{k \geq 0} z^k$$

som konvergerar för $|z| < 1$, och

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{z}\right)^k\end{aligned}$$

som konvergerar för $1 < |z|$. På samma sätt har den andra termen också två möjliga utvecklingar:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \left(-\frac{z}{2}\right)^k$$

som konvergerar för $|z| < 2$, och

$$\frac{1}{z+2} = \frac{2}{z} \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \left(-\frac{2}{z}\right)^k$$

som konvergerar för $2 < |z|$. Om vi vill att vår potensserie ska konvergera på $\{|z| < 1\}$ måste vi då välja första utvecklingen för båda termerna. Vi får

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \left[z^k + \frac{1}{2} \left(-\frac{z}{2}\right)^k \right].$$

Om vi vill att potensserien ska konvergera på $\{1 < |z| < 2\}$ måste vi välja

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \left[\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z}\right)^k + \frac{1}{2} \left(-\frac{z}{2}\right)^k \right].$$

Slutligen, om vi vill att potensserien konvergerar på $\{2 < |z|\}$ måste vi välja

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \left[\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z}\right)^k + \frac{2}{z} \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{z}\right)^k \right].$$

8.33

Antag att $f(z)$ har exakt ett nollställe, kalla det a , på int γ och att det är av ordning 1. Visa att

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz. \quad (33)$$

Lösning: Enligt klassifikation av nollställen har vi att (TODO: skriv upp sats?) $f(z) = (z-a)g(z)$ med g holo och nollskiljd på int γ . VL i (33) blir då

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z[g(z) + (z-a)g'(z)]}{(z-a)g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma} \frac{z}{(z-a)} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right] dz$$

Eftersom g är nollskiljd på int γ är g'/g holo där och den andra termen blir 0. Cauchys integralformel på den första termen ger oss då (33).

8.34

Visa att om f är jämn så har dess Laurentserie bara jämnna potenser.

Lösning: TODO: ta f minus sina jämnna termer och så får du kvar en jämn funktion. Motivera detta med absolutkonvergens.

9.1

Antag att f har ett nollställe av ordning m i a . Förklara varför $\frac{1}{f}$ har en pol av ordning m i a .

Lösning: Vi börjar med att skriva ner två satser

Sats (klassifikation av nollställen). *Antag att $G \subset \mathbb{C}$ är ett område. Antag $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holo och har ett nollställe i $a \in G$. Då gäller antingen*

1. $f = 0$.
2. $\exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ och en holomorf funktion $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ s.a. $g(a) \neq 0$ och

$$f(z) = (z - a)^m g(z).$$

Sats (Földjsats 9.6). *Antag f holo i en punkterad disk $D^\times[a, R]$. Då har f en pol i a omm $\exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ och holo $g: D^\times[a, R] \rightarrow \mathbb{C}$ s.a. $g(a) \neq 0$ och*

$$f(z) = (z - a)^{-m} g(z).$$

Vi har alltså att $f(z) = (z - a)^m g(z)$ för något m och något holo g s.a. $g(z) \neq 0$. Men då är $\frac{1}{g}$ holo i ett område kring a och alltså har $\frac{1}{(z-a)^m g(z)}$ en pol av ordning m enligt földjsats 9.6.

9.2

Hitta poler/hävbar singulariteter hos följande funktioner och bestäm deras ordning.

a)

$$f(z) = (z^2 + 1)^{-3}(z - 1)^{-4}.$$

Lösning: Det är enkelt att göra detta om vi lyckas faktorisera f . Vi har att

$$f = (z + i)^{-3}(z - i)^{-3}(z - 1)^{-4}.$$

Så f har

- en pol av ordning 3 i $-i$,
- en pol av ordning 3 i i ,
- en pol av ordning 4 i 1.

b)

$$f(z) = z \cot z.$$

Lösning:

Anmärkning 2. *Okej, så om jag har en holo funktion g med en pol i a och en holo funktion h s.a. $h(a) \neq 0$ så har g och gh en pol av samma ordning i a . Detta är uppenbart från földjsats 9.6.*

$\cot z$ har en pol av ordning 1 i 0 och den är π -periodisk, så den har poler av ordning 1 i alla punkter på formen $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Eftersom z är nollskiljd överallt förutom i 0 har vi att f har poler av ordning 1 i alla punkter på formen $n\pi$ förutom 0, där har hon en hävbar singularitet.

c)

$$f(z) = z^{-5} \sin z.$$

Lösning: Taylorutveckling av \sin ger oss att f har en pol av ordning 4 i 0.

d)

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^z}.$$

Lösning: f har en pol i 0 av ordning 1 och eftersom \exp är $2\pi i$ -periodisk har vi att f har poler av ordning 1 i all punkter på formen $n2\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$.

e)

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^z}$$

Lösning: Vi kombinerar d) med anmärkning 2 och får att f har poler i all punkter på formen $n2\pi i$ förutom i 0. Där är singulariteten hävbar.

9.5

Evaluera följande integraler när $\gamma = C[0, 3]$.

Gör 9.6 först.

a)

$$\int_{\gamma} \cot z \, dz.$$

Lösning: Vi börjar med att statea residysatsen

Definition. Antag a isolerad singularitet till en holo funktion f med Laurentutveckling $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(z - a)^k$. Då är c_{-1} f :s residy i a . Vi skriver $\text{Res}_{z=a}[f(z)]$.

Sats (Residysatsen). *Antag f mero i ett område G och antag γ positivt orienterad, enkel, sluten, styckvis slät kurva, nollhomotop i G som undviker f :s singulariteter. Då är*

$$\int_{\gamma} f \, dz = 2\pi i \sum_a \text{Res}_{z=a}[f(z)] \tag{34}$$

där summan tas över f :s singulariteter i $\text{int } \gamma$ (garanterat ändligt många).

$\cot z$ har en pol i $\text{int } \gamma$. Där är residyn 1. Tänk $\cot z = 1/\tan z = (1/z)(z/\tan z)$ där $z/\tan z$ är holo kring $z = 0$. Därför blir integralen $2\pi i$.

b)

$$\int_{\gamma} z^3 \cos \frac{3}{z} \, dz.$$

Lösning: Integranden har en väsentlig singularitet i 0, så dess Laurentutveckling kommer ha oändligt många termer med negativ potens. Men det är fine, vi behöver bara veta koefficienten för $\frac{1}{z}$ i dess Laurentutveckling. Vi Taylorutvecklar cos:

$$z^3 \cos \frac{3}{z} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-3)^{2k}}{(2k)!} z^{-2k+3}.$$

Residyn i 0 blir $\frac{81}{24}$ (svavar mot $k = 2$). Därför blir integralen $\frac{27}{8}\pi i$.

c)

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z+4)(z^2+1)}$$

Lösning: Vi har två singulariteter som ligger i $\text{int } \gamma, \pm i$. Integranden går att skriva om som

$$h(z) = \frac{1}{(z+4)(z+i)(z-i)}. \quad (35)$$

Kring $-i$ kan vi bryta ut $\frac{1}{z+i}$ och se att $h(z) \approx \frac{1}{(-i+4)(-i-i)} \frac{1}{z-i}$. Så residyn i den punkten är $\frac{1}{(-i+4)(-2i)}$ (enligt 9.6). På samma sätt har vi att residyn i i är $\frac{1}{(i+4)(2i)}$. Vi adderar dessa enligt residysatsen och erhåller att integralen blir $-\frac{2\pi i}{17}$.

d)

$$\int_{\gamma} z^2 \exp\left\{\frac{1}{z}\right\} dz. \quad (36)$$

Lösning: Vi Taylorutvecklar exp och får att

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} z^{-k+2} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left[\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} z^{-k+2} \right] \\ &= 2\pi i \frac{1}{3!} \\ &= \frac{\pi i}{3}. \end{aligned}$$

9.6

Antag att en holo funktion f har en pol av ordning 1 i a och att g är holo i a . Visa att

$$\operatorname{Res}_{z=a} [f(z)g(z)] = g(a) \operatorname{Res}_{z=a} [f(z)]. \quad (37)$$

Lösning: Om g är holo i a kan vi Taylorutveckla henne där. Vi kan också Laurentutveckla f kring a . Vi får då att

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{k \geq -1} c_k (z-a)^k \right) \left(\sum_{k \geq 0} d_k (z-a)^k \right). \quad (38)$$

Från detta kan vi se att koefficienten för $\frac{1}{z}$ i fg :s Laurentutveckling är $c_{-1}d_0 = c_{-1}g(a)$.

9.7

Bestäm residyn i 0 för följande funktioner.

d)

$$\exp\left\{1 - \frac{1}{z}\right\}.$$

Lösning: Vi Taylorutvecklar \exp :

$$\exp\left\{1 - \frac{1}{z}\right\} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^k.$$

Härifrån kan vi se att $c_{-1} = \sum_{k \geq 1} \frac{-1}{k!} = -e^1 - 1$. **Facit sa $-e$ men det låter fel??**

e)

$$\frac{\exp\{4z\} - 1}{\sin^2 z}.$$

Lösning: Jag vet inte om detta är det tydligaste sättet att göra det på, men vi skriver om uttrycket enligt

$$\frac{\exp\{4z\} - 1}{\sin^2 z} = \frac{\exp\{4z\} - 1}{z^2} \frac{z^2}{\sin^2 z}.$$

$\frac{z^2}{\sin^2 z}$ är holo kring 0. Detta inses kanske lättast genom att använda standardgränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\frac{\exp\{4z\} - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} (4z)^k$ har en pol av ordning 1 i 0 med residyn 4.

9.8

Använd residyer för att beräkna följande integraler.

c)

$$\int_{D[0,2]} \frac{e^z}{z^3 + z} dz.$$

Lösning: $z^3 + z = z(z - i)(z + i)$, så integranden har tre poler i $D[0, 2]$. Vi erhåller

$$\begin{aligned} \int_{D[0,2]} \frac{e^z}{z^3 + z} dz &= 2\pi i \sum_a \operatorname{Res}_{z=a} \left[\frac{e^z}{z(z - i)(z + i)} \right] \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \left[\frac{e^z}{z(z - i)(z + i)} \right] + \operatorname{Res}_{z=i} \left[\frac{e^z}{z(z - i)(z + i)} \right] + \operatorname{Res}_{z=-i} \left[\frac{e^z}{z(z - i)(z + i)} \right] \right) \\ &= 2\pi i \left(\left. \frac{e^z}{(z - i)(z + i)} \right|_{z=0} + \left. \frac{e^z}{z(z + i)} \right|_{z=i} + \left. \frac{e^z}{z(z - i)} \right|_{z=-i} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{-i^2} + \frac{e^i}{2i^2} + \frac{e^{-i}}{2i^2} \right) \end{aligned}$$

TODO

d)

Lösning: