

MVE025 Räknade uppgifter

2021-09-09

1.1

Låt $z = 1 + 2i$, $w = 2 - i$ och beräkna följande:

b.

$$\bar{w} - z.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\bar{w} - z &= (2 + i) - (1 + 2i) \\ &= 1 - i.\end{aligned}$$

c.

$$z^3.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}z^3 &= (1 + 2i)^3 \\ &= 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2i + 3 \cdot 1 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 \\ &= -11 - 2i.\end{aligned}$$

d.

$$\operatorname{Re}(w^2 + w).$$

Lösning:

$$\operatorname{Re}(w^2 + w) = \operatorname{Re}(2^2 - 2i + i^2 + 2 - i) = 5.$$

1.2

Hitta real- och imaginärdel av följande uttryck:

a.

$$\frac{z-a}{z+a} \text{ för } a \in \mathbb{R}.$$

Lösning: Om uttrycket är väldefinerat borde nämnaren vara nollskiljd, och då även nämnarens konjugat. Med $z = x + yi$ har vi

$$\begin{aligned}\frac{z-a}{z+a} &= \frac{x+yi-a}{x+yi+a} \\ &= \frac{(x-yi+a)(x+yi-a)}{(x-yi+a)(x+yi+a)} \\ &= \frac{-a^2+i2ay+x^2+y^2}{a^2+2ax+x^2+y^2} \\ &= \frac{-a^2+x^2+y^2}{a^2+2ax+x^2+y^2} + \frac{2ay}{a^2+2ax+x^2+y^2}i.\end{aligned}$$

b.

$$\frac{3+5i}{1+7i}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\frac{3+5i}{1+7i} &= \frac{(1-7i)(3+5i)}{1+7^2} \\ &= \frac{3-21i+5i+35}{49} \\ &= \frac{38}{49} + \frac{-16}{49}i\end{aligned}$$

d.

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \left(1\angle\frac{2\pi}{3}\right)^3 \\ &= 1\angle2\pi \\ &= 1.\end{aligned}$$

1.3

Hitta beloppet och konjugatet av följande uttryck:

b.

$$z = (2+i)(4+3i).$$

Lösning:

$$\begin{aligned}|z| &= |(2+i)| \cdot |(4+3i)| \\ &= \sqrt{3} \cdot 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{(2+i)} \overline{(4+3i)} \\ &= (2-i)(4-3i).\end{aligned}$$

d.

$$z = (1+i)^6.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}|z| &= |(1+i)|^6 \\&= \sqrt{2}^6.\end{aligned}$$

$$\bar{z} = (1-i)^6$$

1.4

Skriv om till polär form:

f.

$$z = |3-4i|.$$

Lösning:

$$z = |3-4i|\angle 0.$$

h.

$$z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)^4.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}z &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2}e^{-\frac{2\pi}{8}i}\right)^4 \\&= \frac{4}{9}e^{-\pi i}.\end{aligned}$$

1.8

Använd pq -regeln för att lösa följande ekvationer:

a.

$$z^2 + 25 = 0.$$

Lösning:

$$z = \pm 5.$$

b.

$$2z^2 + 2z + 5 = 0.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1 \pm (1 - 4\frac{5}{2})^{\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{4\frac{5}{2} - 1i}}{2}. \end{aligned}$$

1.11

Hitta samtliga lösningar till följande ekvationer:

a.

$$z^6 = 1.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} z^6 &= e^{n2\pi i} \\ z &= e^{n\frac{\pi}{3}i}, \end{aligned}$$

för $n \in \mathbb{Z}$.

c.

$$z^6 = -9.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} z^6 &= 9e^{(\pi+n2\pi)i} \\ z &= 3^{\frac{1}{3}}e^{(\frac{\pi}{6}+n\frac{\pi}{3})i}. \end{aligned}$$

1.22

Bevisa att, för alla z och $w \in \mathbb{C}$,

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad (1)$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad (2)$$

$$\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}, \quad (3)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad (4)$$

$$|\bar{z}| = |z|, \quad (5)$$

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad (7)$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad (8)$$

$$\overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}. \quad (9)$$

Lösning: Om vi väljer att definiera konjugering som spegling i realaxeln blir många av dom här identiteterna någorlunda uppenbara.

Om addition defineras enligt parallelogramregeln så säger (1) att man får samma parallelogram om man speglar varje ben för sig som om man speglar hela på en gång, vilket man ju får.

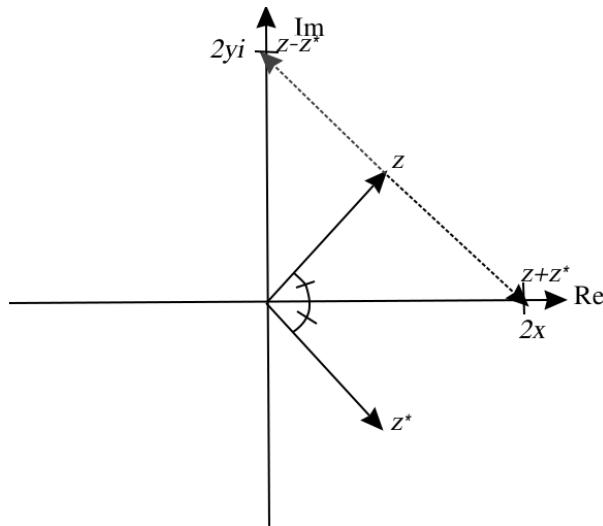
Om multiplikation av två komplexa tal defineras som att man multiplicerar deras längder och adderar deras vinklar är det också uppenbart att jag kan spegla varje tal för sig och få samma svar som om jag speglar efter att ha multiplicerat (längden påverkas inte av spegling och vinklarna blir samma pga $-(\theta + \phi) = -\theta - \phi$). Vi har då visat (2). (3) följer på samma sätt.

Spegling i realaxeln är sin egen invers, varför (4).

Längder påverkas inte av spegling, varför (5).

$z\bar{z}$ har argumentet $\theta - \theta = 0$ och är alltså reellt. Dess längd är $|z|^2$. Därav (6).

(7) och (8) förklaras av figur 1.



Figur 1: $z = x + yi$.

(9) är trivial om man definierar exponentiering av komplexa tal enligt

$$e^{x+yi} = e^x \angle y.$$

1.23

Skissa följande delmängder till det komplexa talplanet:

b.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } |z - 1 + i| \leq 2 \}.$$

Lösning: Detta är en disk med centrum i $1 - i$ och radie 2. Randen är inkluderad.

d.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } |z - i| + |z + i| = 3 \}.$$

Lösning: Detta är en ellips med brännpunkterna i och $-i$ och med större radie $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2}i$ ligger i mängden).

f.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } |z - 1| = 2|z + 1| \}.$$

Lösning: Mängden, kalla den A , är preimage av en cirkel med radie 2 under avbildningen $f: z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$. Vi har att

$$\begin{aligned} f^{-1}(z) &= \frac{1+z}{1-z} \\ &= \frac{2}{1-z} - 1 \end{aligned}$$

f och f^{-1} tillhör en speciell mängd av funktioner som kallas *Möbiustransformationer*. Möbiustransformationer karaktäriseras av att de avbildar cirklar på cirklar. Man kan se att f^{-1} bevarar cirklar genom att övertyga sig själv om att varje komposant i $f = (z \mapsto z - 1) \circ (z \mapsto 2z) \circ (z \mapsto \frac{1}{z}) \circ (z \mapsto -z + 1)$ bevarar cirklar. En cirkel är entydigt bestämd av tre punkter, så eftersom $-\frac{1}{3}$ och $-3 \in A$ och eftersom A är symmetrisk i realaxeln har vi att A är cirkeln centrerad i $-\frac{5}{3}$ med radie $\frac{4}{3}$.

g.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } \operatorname{Re} z^2 = 1 \}.$$

Lösning: Mängden är preimage av linjen $\operatorname{Re} z = 1$ under avbildningen $z \mapsto z^2$. Så vi har att preimage av $z = 1 + yi$ är

$$\pm(1 + yi)^{\frac{1}{2}}.$$

1.24

Låt p vara ett polynom med reella koefficienter. Visa att

a.

$$\overline{p(z)} = p(\bar{z}).$$

Lösning: Vi gör ett induktionsbevis. Basfallet är en konstant reell funktions, så påståendet stämmer där ✓.

Om vi betecknar induktionshypotesen med H har vi att

$$\begin{aligned} \overline{p_{n+1}(z)} &= \overline{a_{n+1}z^{n+1} + a_nz^n + \dots + a_0} \\ &\stackrel{(1)}{=} \overline{a_{n+1}z^{n+1}} + \overline{a_nz^n} + \dots + \overline{a_0} \\ &\stackrel{(2)}{=} a_{n+1}\bar{z}^{n+1} + \overline{a_nz^n} + \dots + \overline{a_0} \\ &\stackrel{H}{=} a_{n+1}\bar{z}^{n+1} + a_n\bar{z}^n + \dots + a_0 \\ &= p_{n+1}(\bar{z}). \end{aligned}$$

b.

$$p(z) = 0 \text{ omm } p(\bar{z}) = 0.$$

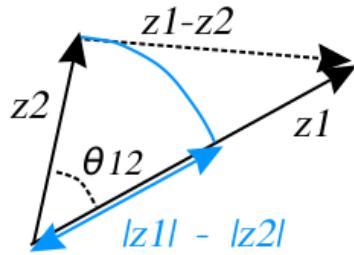
Lösning: Följer av a. och att $\bar{0} = 0$.

1.25

Bevisa den omvänta triangelolikheten

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (10)$$

Lösning: Betrakta figur 2. VL i (10) har ett minimum när $\theta_{12} = 0$. Då är VL och HL lika. HL beror inte på θ_{12} . Alltså följer påståendet.



Figur 2: θ_{12} är vinkeln mellan z_1 och z_2 .

1.26

Använd inversa triangelolikheten för att visa att

$$\left| \frac{1}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{1}{3} \quad (11)$$

för alla $z \in C[0, 2]$.

Lösning: Eftersom VL och HL är positiva är (11) ekvivalent med

$$|z^2 - 1| \geq 3. \quad (12)$$

Men om $|z| = 2$ är (12) triangelolikheten för $z_1 = z^2$, $z_2 = 1$.

1.27

Skissa följande delmängder till \mathbb{C} och avgör om dom är öppna, slutna, begränsade, sammanhangande.

a.

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } |z + 3| < 2 \}.$$

Lösning: Öppen disk med radie 2 och centrum i det komplexa talet 3.

b.

$$|z| < 1.$$

Lösning: Ett band mellan $y = \pm 1$. Öppet, sammanhängande, ej begränsat.

c.

$$0 < |z - 1| < 2.$$

Lösning: Öppen punkterad disk med radie 2 och centrum i det komplexa talet 1. Öppen, sammanhängande, begränsad.

d.

$$|z - 1| + |z + 1| = 2.$$

Lösning: Ett linjesegment från 1 till -1 . Öppet, sammanhängande, begränsat.

1.29

Låt $G = [-2, -1] \cup D(0, 1) \cup \{1, 2\}$.

b.

Vilka punkter är G :s inre punkter?

Lösning: $D(0, 1)$.

c.

Vilka punkter är G :s randpunkter?

Lösning:

$$\partial G := \overline{G} \cap \overline{G^c} = [-2, -1] \cup C(0, 1) \cup \{1, 2\}.$$

Kom ihåg att $z \in \partial G$ inte nödvändigtvis behöver betyda att $z \in G$.

d.

Vilka punkter är G :s isolerade punkter?

Lösning: z isolerad innebär att det finns ϵ s.a. $D(z) \cap G = \{z\}$. Endast en punkt uppfyller detta, 2. Kom ihåg att z isolerad punkt till G nödvändigtvis betyder att $z \in G$.

1.33

Parametrisera följande kurvor:

a.

$C[1+i, 1]$, orienterad moturs.

Lösning: $z(t) = e^{it} + 1 + i$, $t \in [0, 2\pi]$.

b.

Linjesegmentet från $z_1 = -1 - i$ till $z_2 = 2i$.

Lösning: $z(t) = (1 - t)z_1 + tz_2, t \in [0, 1]$.

e.

Ellipsen centrerad i 0 med större radie 2 och mindre radie $\sqrt{3}$, orienterad moturs.

Lösning: Låt $f(t) = e^{it}$ och $g(x + iy) = 2x + \sqrt{3}iy$. Då är $g \circ f$ en parametrisering.

2.15

Derivera $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ där $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ s.a. $ad - bc \neq 0$. När är $T'(z) = 0$?

Lösning:

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \quad (13)$$

Derivatan är därför aldrig 0.

2.21

Bevisa att om $f(z)$ och $\bar{f}(z)$ båda är holomorfa på ett sammanhängande område $G \subset \mathbb{C}$, så är f konstant på G .

Lösning: Från Cauchy–Riemann-ekvationen har vi att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = -i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}, \quad (15)$$

men om man komplexkonjugerar (14) får man också att

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}. \quad (16)$$

(15) och (16) ger tillsammans att $f' = 0$ på G .

Vi kan då applicera Teorem 2.17 för att lösa uppgiften.

2.22

Antag att f är hel och på formen $f(z) = u(x) + iv(y)$. Visa att $f(z) = az + b$ för något $a \in \mathbb{R}$ och något $b \in \mathbb{C}$.

Lösning: Teorem 2.13 ger oss $f'(z) = u'(x)$, som är en reell funktion. Vi kan då se att $f''(z)$ är väldefinerad och, eftersom $f''(z) = -i\partial_y f'(z)$, är $f''(z) = 0$ överallt. Enligt teorem 2.17 är då $f' = a$ för något konstant a (som vi även vet är reell). Eftersom $az - f(z)$ har derivata 0 kan vi applicera teorem 2.17 en gång till för att säga att $f(z) = az + b$ för något $b \in \mathbb{C}$.

2.23

Antag att f är hel med real- och imaginärdel u och v som uppfyller $u(x, y)v(x, y) = 3$ för alla på hela \mathbb{C} . Visa att f är konstant.

Lösning:

$$\begin{aligned} f(z)^2 &= (u(x, y) + iv(x, y))^2 \\ &= u(x, y)^2 + 2iu(x, y)v(x, y) - v(x, y)^2 \\ &= u(x, y)^2 + 6i - v(x, y)^2. \end{aligned}$$

Alltså är $f(z)^2 - 6i$ en reell hel funktion. Som i uppgift 2.22 har vi då att $f(z)^2 - 6i$ är en konstant funktion.

2.25

Hitta något v s.a. $u + iv$ är holomorf i något område för följande v :

a.

$$v(x, y) = x^2 - y^2.$$

Lösning: $v = 2xy$ ger $u + iv = z^2$.

Linjär algebra och holomorfi

Om vi antar proposition 2.11 (bevaring av vinklar) som definitionen av holomorf kan vi härleda Cauchy–Riemanns ekvationer genom lite linjäralgebra.

En hyfsat rigorös definition av *derivata* är följande.

Definition 1. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen delmängd, och låt $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en funktion. f är *deriverbar* i en punkt $x \in E$ om det finns en linjär funktion $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s.a.

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \rho(h), \quad (17)$$

$$\text{där } \frac{\rho(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Om $E \subset \mathbb{C}$ så kan en funktion $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ även betraktas som en funktion $f: \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ där $\tilde{E} \subset \mathbb{R}^2$ svarar mot E . Från flervarren vet vi att om en funktion är partiellt deriverbar i ett öppet område är den deriverbar. Så betrakta en sådan funktion f och låt, utan inskränkning, $x = 0$. Vi har då att

$$f(h) \approx f(0) + Ah \quad (18)$$

för små h . Vi har att A är en 2×2 -matris,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Så f är, nära h , en affin funktion som bestäms entydigt av var 0 och basvektorerna avbildas. Om f ska vara holomorf måste vinkeln mellan bilden av basvektorerna vara $\frac{\pi}{2}$. Dessa två villkor är ekvivalenta.

Därför måste A vara proportionell mot en ortogonal matris. Vi har att $AA^T = \lambda I$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Villkoren som matriselementen måste uppfylla är då

$$a_{12} = -a_{21} \quad \text{och} \quad a_{11} = a_{22} \quad \text{eller} \quad (20)$$

$$a_{12} = a_{21} \quad \text{och} \quad a_{11} = -a_{22}. \quad (21)$$

Om vi nu identifierar A med f :s Jacobianmatris $\begin{bmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{bmatrix}$ ser vi att vi får tillbaka Cauchy–Riemanns ekvationer. (20) beskriver villkoren för en holomorf funktion, medan (21) beskriver villkoren för en antiholomorf funktion.

3.13

Låt $f(z) = \frac{2z}{z+2}$. Rita två grafer, en som visar följande sex delmängder $G \subset \mathbb{C}$, och en som visar deras bild under f .

a.

$$G_a = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Lösning: Denna linje kommer avbildas på antingen en linje eller en cirkel. Men det är uppenbart att $f|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, så G_a avbildas på sig själv.

b.

$$G_b = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Lösning:

$$0 \mapsto 0, \quad (22a)$$

$$\infty \mapsto 2, \quad (22b)$$

så $f(G_b)$ är en cirkel som går genom punkterna 0 och 2. Men på grund av symmetri måste $f(G_b)$ vara symmetrisk i realaxeln, så $f(G_b)$ är cirkeln med centrum i 1 med radie 1.

c.

$$G_c = \{z \mid \text{s.a. } x = y\} \cup \{\infty\}.$$

Lösning:

$$f: 1+i \mapsto \frac{4+2i}{5}. \quad (22c)$$

Så $f(G_c)$ är en cirkel som går genom 0, 2, och $\frac{4+2i}{5}$.

d.

$$G_d = C[0, 2].$$

Lösning:

$$f: 2 \mapsto 1, \quad (22d)$$

$$f: -2 \mapsto \infty. \quad (22e)$$

G_d träffar därför G_a i punkten 1 med vinkeln $\frac{\pi}{2}$. Eftersom $\infty \in f(G_d)$ är hon en linje. G_d är alltså linjen $x = 1$.

e.

$$G_e = C[1, 1].$$

Lösning: (22a) och (22d) samt symmetri i realaxeln $\implies f(G_e) = C[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

f.

$$G_f = C[-1, 1].$$

Lösning: (22e) $\implies f(G_f)$ är en linje. (22a) $\implies f(G_f)$ korsar realaxeln i 0 (med vinkeln $\frac{\pi}{2}$). Så $f(G_f) = \{x = 0\}$.

3.14

Hitta Möbiustransformationer som uppfyller följande.

a.

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 0, \\ 2 &\mapsto 1, \\ 3 &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Lösning:

$$\frac{z-1}{z-3} \cdot \frac{2-3}{2-1}.$$

b.

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 0, \\ 1+i &\mapsto 1, \\ 2 &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Lösning:

$$\frac{z-1}{z-2} \cdot \frac{(1+i)-2}{(1+i)-1}.$$

c.

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto i, \\ 1 &\mapsto 1, \\ \infty &\mapsto -i. \end{aligned}$$

Lösning:

$$-i \frac{z-i}{z+i}.$$

3.18

Hitta en Möbiustransformation som avbildar $D[0, 1]$ på $G := \{x + iy \in \mathbb{C} \text{ s.a. } x + y > 0\}$.

Lösning: Om vi kan hitta en Möbiustransformation som avbildar $\partial D[0, 1]$ på ∂G så finns det två alternativ:

1. insidan av $D[0, 1]$ avbildas på insidan av G ,
2. insidan av $D[0, 1]^c$ avbildas på insidan av G .

Det räcker att kolla på bilden av en punkt för att avgöra vilken av dessa som gäller.

Möbiustransformation

$$f(z) = (1-i) \frac{z+i}{z+1} \tag{23}$$

avbildar

$$\begin{aligned} -i &\mapsto 0, \\ -1 &\mapsto \infty, \\ \infty &\mapsto 1-i. \end{aligned}$$

Så $f(\partial D[0, 1])$ är en linje som går genom 0 och $1+i$, alltså ∂G . Det som återstår att kolla är att $f(D[0, 1])$ hamnar på ”rätt sida om randen”. Men det kan vi övertyga oss om genom att betrakta $f: 0 \mapsto 1+i \in G$.

Om det sista steget hade skitit sig hade man bara behövt definiera om f med motsatt tecken.

3.19

Jacobianen av en avbildning $(u, v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är determinanten av Jacobimatrizen

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Visa att om $f = y + iv$ är holomorf så är Jacobianen $|f'(z)|^2$.

Lösning:

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2 &\stackrel{(2,2)}{=} |u_x + iv_x|^2 \\ &= u_x^2 + v_x^2 \\ &\stackrel{(2,3)}{=} u_x v_y - v_x u_y \\ &= |J|. \end{aligned}$$