

MVE630 demouppgifter

2021-11-16

Vecka 44

5.1 19

Hitta ett uttryck på sluten form för

$$\sum_{k=1}^n (\pi^k - 3). \quad (1)$$

Lösning: Vi vill använda följande sats:

Sats 1 (5.1 (d) i Adams).

$$\sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (2)$$

om $r \neq 1$.

Vi får då att

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\pi^k - 3) &= -3n + \pi \sum_{k=1}^n \pi^{k-1} \\ &= -3n + \pi \frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}. \end{aligned}$$

5.4 21

Vi vet att

$$\int_0^a x^2 \, dx = \frac{a^3}{3}. \quad (3)$$

Beräkna

$$\int_0^1 (x^2 + \sqrt{1-x^2}) \, dx. \quad (4)$$

Lösning: Den första termen i (4) ser vi från (3) är $\frac{1}{3}$. Den andra termen kan vi identifiera med arean av en kvarts och den blir $\frac{\pi}{4}$.

5.4 36

Beräkna

$$\int_0^3 |2-x| \, dx.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_0^3 |2-x| \, dx &= \int_0^2 (2-x) \, dx + \int_2^3 -(2-x) \, dx \\ &= 2 + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5.5 16

Beräkna

$$\int_{-1}^1 2^x \, dx.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 2^x \, dx &= [\log 2 \cdot 2^x]_{-1}^1 \\ &= \log 2 \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \log 2.\end{aligned}$$

5.5 25

Hitta arean som begränsas av kurvorna

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 3x + 3, \\ y &= 1.\end{aligned}$$

Lösning: Eftersom kurvorna möts i $x = 1$ och $x = 2$ är arean (beloppet av)

$$\int_1^2 (x^2 - 3x + 3 - 1) \, dx = -\frac{1}{6}.$$

5.5 44

Beräkna

$$\frac{d}{d\theta} \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx &= \int_0^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx + \int_{\sin \theta}^0 \frac{1}{1-x^2} \, dx \\ &= \int_0^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx - \int_0^{\sin \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx.\end{aligned}$$

Enligt kedjeregeln är

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \int_0^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx &= \frac{d}{d \cos \theta} \left(\int_0^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx \right) \frac{d \cos \theta}{d\theta} \\ &= -\frac{1}{1-\cos^2 \theta} \sin \theta \\ &= -\sin \theta.\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \int_0^{\sin \theta} \frac{1}{1-x^2} dx &= \frac{d}{d \sin \theta} \left(\int_0^{\sin \theta} \frac{1}{1-x^2} dx \right) \frac{d \sin \theta}{d\theta} \\ &= \frac{1}{1-\sin^2 \theta} \cos \theta \\ &= \cos \theta.\end{aligned}$$

Vecka 45

5.6 6

Evaluera

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Lösning: Kedjeregeln ger att

$$\frac{d}{dx} \cos \sqrt{x} = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Vi har därför att

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2 \cos \sqrt{x} + C.$$

5.6 9

Evaluera

$$\int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx.$$

Lösning: I Adams står det att

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

Vi börjar med att göra variabelsubstitutionen $u = \sin x$. Eftersom $du = \cos x dx$ har vi att

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx &= \int \frac{1}{4 + u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{\sin x}{2} + C.\end{aligned}$$

5.7 10

Hitta arean som begränsas av kurvorna

$$\begin{aligned}x &= y^2, \\ x &= 2y^2 - y - 2.\end{aligned}$$

Lösning: Kurvorna möts i $y = -1$ och $y = 2$. Alltså är den inneslutna arean

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 y^2 - (2y^2 - y - 2) \, dy &= \int_{-1}^2 -y^2 + y + 2 \, dy \\ &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

6.1 2

Beräkna

$$\int (x+3)e^{2x} \, dx.$$

Lösning:

Sats 2 (partialintegrering). Om u och v är två deriverbara funktioner av x så gäller

$$\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int \frac{du}{dx} v \, dx.$$

Låt $u = x + 3$ och $\frac{dv}{dx} = e^{2x}$ ($v = \frac{1}{2}e^{2x}$). Då har vi att

$$\begin{aligned}\int (x+3)e^{2x} \, dx &= (x+3)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \, dx \\ &= \left((x+3)\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C.\end{aligned}$$

6.1 7

Beräkna

$$\int \arctan x \, dx.$$

Lösning: Vi vill använda att

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Så låt $u = \arctan x$ och $\frac{dv}{dx} = 1$ ($v = x$). Partiell integrering ger då att

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

6.1 21

Beräkna

$$\int \frac{\log \log x}{x} \, dx.$$

Lösning: Låt $u = \log x$. Då är $du = \frac{1}{x} dx$ och

$$\begin{aligned}\int \frac{\log \log x}{x} dx &= \int \log u \, du \\ &= u \log u - \int 1 \, du \\ &= u \log u - u + C.\end{aligned}$$

6.2 7

Beräkna

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx.$$

Lösning: Vi använder oss av partialintegrering:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{(a - x)(a + x)} \\ &= \frac{A}{a - x} + \frac{B}{a + x}\end{aligned}$$

för några konstanter A och B . Vi kan bestämma dom genom att vi vet att

$$A(a + x) + B(a - x) = 1,$$

så $A = B = \frac{1}{2a}$. Nu är det lätt att integrera:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{A}{a - x} + \frac{B}{a + x} dx \\ &= -A \log(a - x) + B \log(a + x) + C \\ &= \frac{1}{2a} (\log(a + x) - \log(a - x)) + C.\end{aligned}$$

6.2 22

Beräkna

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 8} dx.$$

Lösning: Vi har att

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 + 8} = \frac{x^2}{x^3 + 8} + \frac{1}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}$$

Eftersom $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ kan vi dela upp

$$\frac{1}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{2}{12(x^2 - 2x + 4)} - \frac{x - 2}{12(x^2 - 2x + 4)} + \frac{1}{12(x + 2)}.$$

Vi vet hur man integrerar varje term:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{x^3+8} dx &\stackrel{u=x^3}{=} \int \frac{1}{3(u+8)} du \\
 &= \frac{1}{3} \log |u+8| + C \\
 &= \frac{1}{3} \log |x^3+8| + C, \\
 \int \frac{x-2}{x^2-2x+4} dx &\stackrel{u=x^2-2x}{=} \int \frac{1}{2(u+4)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \log |u+4| + C \\
 &= \frac{1}{2} \log |x^2-2x+4| + C, \\
 \int \frac{2}{x^2-2x+4} dx &\stackrel{u+1=x}{=} \int \frac{2}{u^2+3} dx \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{u}{\sqrt{3}} + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C, \\
 \int \frac{1}{x+2} dx &= \log |x+2| + C.
 \end{aligned}$$

Vi kombinerar dessa fyra identiteter för att erhålla

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx &= \int \frac{x^2}{x^3+8} + \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} dx \\
 &= \frac{1}{3} \log |x^3+8| + \frac{1}{12} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \log |x^2-2x+4| + \log |x+2| \right) + C.
 \end{aligned}$$

6.5 8

Beräkna

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx$$

eller bevisa att den divergerar.

Lösning: Integranden kommer bete sig som $1/x$ runt $x = 0$, så vi gissar att integralen kommer divergera eftersom

$$\begin{aligned}
 \int_0^p \frac{1}{x} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^p \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\log x]_{\epsilon}^p \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log p - \log \epsilon \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

för alla $p > 0$. Så vi vill visa att integralen divergerar.

Integranden är alltid positiv, så

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1/2}} dx,\end{aligned}$$

vilket vi har visat divergerar mot oändligheten.

6.5 19

Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

eller bevisa att den divergerar.

Lösning: Detta är en udda funktion integrerad över ett symmetriskt intervall, så integralen är 0 om den existerar. Dock är

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_0^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log(1+M^2) \\ &= \infty\end{aligned}$$

så integralen existerar inte.

6.5 34

Divergerar eller konvergerar

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}?$$

Lösning: Konvergerar pga

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{2x^2} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

6.5 35

Divergerar eller konvergerar

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x+1} dx?$$

Lösning: Divergerar pga

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x+1} dx &\geq \int_{-1}^1 \frac{e^{-1}}{x+1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{e^{-1}}{x} dx \\ &= \infty.\end{aligned}$$

6.5 42a

Givet att

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

beräkna

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx.$$

Lösning Vi kör lite partialintegrering med $u = x$, $\frac{dv}{dx} = xe^{-x^2}$ ($v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$):

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx &= \left[-\frac{x}{2}e^{-x^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Vecka 46

7.1 11

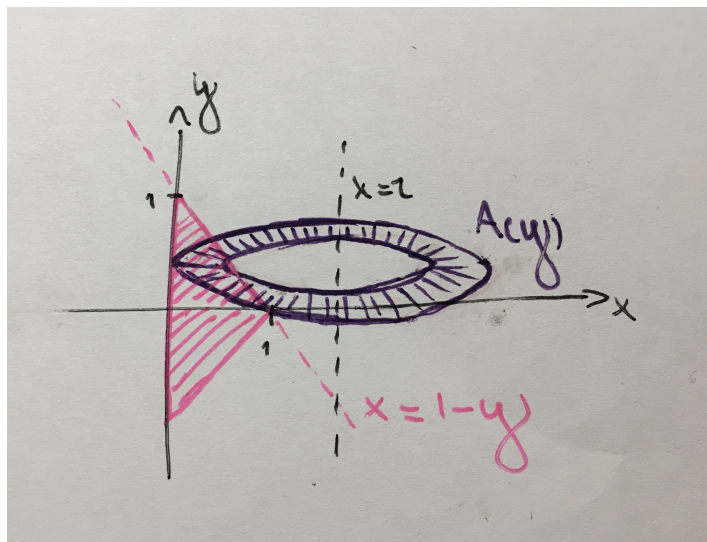
Hitta volymen av figuren som uppstår av att man roterar triangeln $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ kring $x = 2$.

Lösning: Definera arean $A(y)$ enligt figur 1. Då är

$$\begin{aligned}V &= 2 \int_0^1 A(y) dy \\ &= 2 \int_0^1 (\pi 2^2 - \pi(1-y)^2) dy \\ &= \frac{22\pi}{3}.\end{aligned}$$

7.2 3

Hitta volymen av en figur som har höjd 1 och vars tvärsnitt vid höjden z är en ellips som har en radie z och en radie $\sqrt{1-z^2}$.



Figur 1:

Lösning: Vi gör ungefär som i förra uppgiften. En ellips med radierna a och b har arean $ab\pi$, så

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 A(z) \, dz \\
 &= \int_0^1 \pi z \sqrt{1-z^2} \, dz \\
 &= -\frac{\pi}{3} \int_0^1 \frac{d}{dz} (1-z^2)^{\frac{3}{2}} \, dz \\
 &= -\frac{\pi}{3} \left[(1-z^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

7.2 7

Hitta volymen av en figur som har höjd h och vars tvärsnitt vid höjden z är en cirkelsektor med radien a och vinkel $2\pi(1-z/h)$.

Lösning: Med $A(z) = \pi a^2(1-z/h)$ har vi att

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h A(z) \, dz \\
 &= \int_0^h \pi a^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \, dz \\
 &= \pi a^2 \left[z - \frac{z^2}{2h} \right]_0^h \\
 &= \pi a^2 \frac{h}{2}.
 \end{aligned}$$

7.9 4

Lös den separabla differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y^2.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 y^2 \\ \frac{dy}{dx} \frac{1}{y^2} &= x^2 \\ \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{3y^3} \right) &= x^2 \\ -\frac{1}{3y^3} &= \frac{1}{3}x^3 + C \\ y &= -(x^3 + C')^{-1/3}.\end{aligned}$$

7.9 12

Lös

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} &= \frac{1}{x^2} \\ x \frac{dy}{dx} + y &= \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx}(xy) &= \frac{1}{x} \\ xy &= \log x \\ y &= \frac{\log x}{x}.\end{aligned}$$

7.9 19

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}x^2 y' + y &= x^2 e^{1/x}, \\ y(1) &= 3e.\end{aligned}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}e^{-1/x} y' + e^{-1/x} \frac{1}{x^2} y &= 1 \\ \frac{d}{dx}(e^{-1/x} y) &= 1 \\ e^{-1/x} y &= x + C \\ y &= e^{1/x}(x + C).\end{aligned}$$

$y(1) = 3e$ medför att $C = 2$.

Review 7 12

Hitta en familj av kurvor som skär alla ellipser på formen

$$3x^2 + 4y^2 = C$$

vinkelrätt.

Lösning: I det övre halvplanet kan vi beskriva dessa ellipser som funktioner. Det gäller då att dessa funktioner uppfyller

$$\begin{aligned} 6x + 8y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{3x}{4y}. \end{aligned}$$

Men en kurva som är vinkelrät mot denna måste uppfylla (se exempel 6 i avsnitt 7.9 i Adams)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{3x}.$$

Vi kan lösa denna diffekvation genom variabelseparation, men det går också att se direkt att $y = Cx^{4/3}$ är en familj lösningar.