MVE630 demouppgifter

2021-11-09

Vecka 44

5.1 19

Hitta ett uttryck på sluten form för

$$\sum_{k=1}^{n}(\pi^k - 3). \tag{1}$$

Lösning: Vi vill använda följande sats:

Sats 1 (5.1 (d) i Adams)**.**

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \tag{2}$$

om $r \neq 1$.

Vi får då att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\pi^k - 3) &= -3n + \pi\sum_{k=1}^{n}\pi^{k-1} \\ &= -3n + \pi\frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}.\end{aligned}$$

5.4 21

Vi vet att

$$\int_0^a x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}. \tag{3}$$

Beräkna

$$\int_0^1 (x^2 + \sqrt{1 - x^2}) \, \mathrm{d}x\,. \tag{4}$$

Lösning: Den första termen i (4) ser vi från (3) är $\frac{1}{3}$. Den andra termen kan vi identifiera med arean av en kvarts (rita figur) och den blir $\frac{\pi}{4}$.

5.4 36

Beräkna

$$\int_0^3 |2 - x| \, \mathrm{d}x\,.$$

Lösning:

$$\int_0^3 |2-x| \,\mathrm{d}x = \int_0^2 (2-x) \,\mathrm{d}x + \int_2^3 -(2-x) \,\mathrm{d}x$$
$$= 2 + \frac{1}{2}.$$

5.5 16

Beräkna

$$\int_{-1}^{1} 2^x \,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 2^x \,\mathrm{d}x &= [\log 2 \cdot 2^x]_{-1}^{1} \\ &= \log 2(2-\frac{1}{2}) \\ &= \frac{3}{2}\log 2.\end{aligned}$$

5.5 25

Hitta arean som begränsas av kurvorna

$$y = x^2 - 3x + 3,$$
$$y = 1.$$

Lösning: Rita en bild.
Snacka allmänt om arean av en figur som begränsas av två kurvor $y = f(x)$ och $y = g(x)$.
Eftersom kurvorna möts i $x = 1$ och $x = 2$ är arean (beloppet av)

$$\int_1^2 (x^2 - 3x + 3 - 1) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}.$$

5.5 44

Beräkna

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x + \int_{\sin\theta}^{0} \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x - \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Enligt kedjeregeln är

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_0^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta}\left(\int_0^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\\ &= -\frac{1}{1-\cos^2\theta}\sin\theta\\ &= -\sin\theta.\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_0^{\sin\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sin\theta}\left(\int_0^{\sin\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}\\ &= \frac{1}{1-\sin^2\theta}\cos\theta\\ &= \cos\theta.\end{aligned}$$

Chapter 5 review 21

Beräkna arean som begränsas av

$$\begin{aligned} y &= \sin x,\\ y &= \cos 2x,\\ x &= 0,\\ x &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Lösning: TODO.

Vecka 45

5.6 6

Evaluera

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Kolla om någon vet hur man löser den.
Kedjeregeln ger att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{x} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Vi har därför att

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + C.$$

5.6 9

Evaluera

$$\int\frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: I Adams står det att

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

Vi börjar med att göra variabelsubstitutionen $u = \sin x$. Eftersom $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$ har vi att

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{\sin x}{2} + C.\end{aligned}$$

5.7 10

Hitta arean som begränsas av kurvorna

$$\begin{aligned}x &= y^2, \\ x &= 2y^2 - y - 2.\end{aligned}$$

Lösning: Kurvorna möts i $y = -1$ och $y = 2$. Alltså är den inneslutna arean

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} y^2 - (2y^2 - y - 2)\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{2} -y^2 + y + 2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

6.1 2

Beräkna

$$\int (x+3)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning:

Sats 2 (partialintegrering)**.** *Om u och v är två deriverbara funktioner av x så gäller*

$$\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = uv - \int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v\,\mathrm{d}x\,.$$

Låt $u = x + 3$ och $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{2x}$ ($v = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$). Då har vi att

$$\begin{aligned}\int (x+3)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= (x+3)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \int \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left((x+3)\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} + C.\end{aligned}$$

6.1 7

Beräkna

$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Vi vill använda att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Så låt $u = \arctan x$ och $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1$ $(v = x)$. Partiell integrering ger då att

$$\begin{aligned}
\int \arctan x \, \mathrm{d}x &= x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \log\left(1+x^2\right) + C.
\end{aligned}$$