MVE630 demouppgifter

2021-11-17

Vecka 44

5.1 19

Hitta ett uttryck på sluten form för

$$\sum_{k=1}^{n}(\pi^k - 3). \tag{1}$$

Lösning: Vi vill använda följande sats:

Sats 1 (5.1 (d) i Adams)**.**

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \tag{2}$$

om $r \neq 1$.

Vi får då att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\pi^k - 3) &= -3n + \pi\sum_{k=1}^{n}\pi^{k-1}\\ &= -3n + \pi\frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}.\end{aligned}$$

5.4 21

Vi vet att

$$\int_0^a x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}. \tag{3}$$

Beräkna

$$\int_0^1 (x^2 + \sqrt{1 - x^2}) \, \mathrm{d}x \,. \tag{4}$$

Lösning: Den första termen i (4) ser vi från (3) är $\frac{1}{3}$. Den andra termen kan vi identifiera med arean av en kvarts och den blir $\frac{\pi}{4}$.

5.4 36

Beräkna

$$\int_0^3 |2 - x| \, \mathrm{d}x \,.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_0^3 |2-x|\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 -(2-x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5.5 16

Beräkna

$$\int_{-1}^{1} 2^x\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 2^x\,\mathrm{d}x =&\ [\log 2\cdot 2^x]_{-1}^{1} \\ =&\ \log 2(2-\frac{1}{2}) \\ =&\ \frac{3}{2}\log 2.\end{aligned}$$

5.5 25

Hitta arean som begränsas av kurvorna

$$\begin{aligned}&y = x^2-3x+3,\\ &y=1.\end{aligned}$$

Lösning: Eftersom kurvorna möts i $x=1$ och $x=2$ är arean (beloppet av)

$$\int_1^2 (x^2-3x+3-1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}.$$

5.5 44

Beräkna

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\sin\theta}^{0}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sin\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Enligt kedjeregeln är

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_0^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta}\left(\int_0^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} \\ &=\ -\frac{1}{1-\cos^2\theta}\sin\theta \\ &=\ -\sin\theta.\end{aligned}$$

och

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_0^{\sin\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sin\theta}\left(\int_0^{\sin\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{1}{1-\sin^2\theta}\cos\theta \\
&= \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Vecka 45

5.6 6

Evaluera

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Kedjeregeln ger att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{x} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Vi har därför att

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

5.6 9

Evaluera

$$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: I Adams står det att

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

Vi börjar med att göra variabelsubstitutionen $u = \sin x$. Eftersom $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$ har vi att

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} + C \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{\sin x}{2} + C.
\end{aligned}
$$

5.7 10

Hitta arean som begränsas av kurvorna

$$
\begin{aligned}
x &= y^2, \\
x &= 2y^2 - y - 2.
\end{aligned}
$$

Lösning: Kurvorna möts i $y=-1$ och $y=2$. Alltså är den inneslutna arean

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} y^2-(2y^2-y-2)\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{2} -y^2+y+2\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

6.1 2

Beräkna

$$\int (x+3)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning:

Sats 2 (partialintegrering)**.** *Om u och v är två deriverbara funktioner av x så gäller*

$$\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = uv-\int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v\,\mathrm{d}x\,.$$

Låt $u=x+3$ och $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x}$ ($v=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$). Då har vi att

$$\begin{aligned}\int (x+3)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= (x+3)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\int \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\ &= \left((x+3)\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}+C.\end{aligned}$$

6.1 7

Beräkna

$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Vi vill använda att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Så låt $u=\arctan x$ och $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=1$ ($v=x$). Partiell integrering ger då att

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,\mathrm{d}x &= x\arctan x-\int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+C.\end{aligned}$$

6.1 21

Beräkna

$$\int \frac{\log\log x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Låt $u = \log x$. Då är $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ och

$$\begin{aligned}\int \frac{\log\log x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \log u\,\mathrm{d}u \\ &= u\log u - \int 1\,\mathrm{d}u \\ &= u\log u - u + C.\end{aligned}$$

6.2 7

Beräkna

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Vi använder oss av partialintegrering:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{(a-x)(a+x)} \\ &= \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x}\end{aligned}$$

för några konstanter A och B. Vi kan bestämma dom genom att vi vet att

$$A(a+x) + B(a-x) = 1,$$

så $A = B = \frac{1}{2a}$. Nu är det lätt att integrera:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x}\,\mathrm{d}x \\ &= -A\log(a-x) + B\log(a+x) + C \\ &= \frac{1}{2a}\left(\log(a+x) - \log(a-x)\right) + C.\end{aligned}$$

6.2 22

Beräkna

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Vi har att

$$\frac{x^2+1}{x^3+8} = \frac{x^2}{x^3+8} + \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Eftersom $x^3 + 8 = (x+2)(x^2-2x+4)$ kan vi dela upp

$$\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{2}{12(x^2-2x+4)} - \frac{x-2}{12(x^2-2x+4)} + \frac{1}{12(x+2)}.$$

Vi vet hur man integrerar varje term:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^3+8}\,\mathrm{d}x &\overset{u=x^3}{=} \int \frac{1}{3(u+8)}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}\log|u+8| + C \\
&= \frac{1}{3}\log\left|x^3+8\right| + C, \\
\int \frac{x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &\overset{u=x^2-2x}{=} \int \frac{1}{2(u+4)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\log|u+4| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+4\right| + C, \\
\int \frac{2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &\overset{u+1=x}{=} \int \frac{2}{u^2+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C, \\
\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x &= \log|x+2| + C.
\end{aligned}$$

Vi kombinerar dessa fyra identiteter för att erhålla

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{x^3+8} + \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\log\left|x^3+8\right| + \frac{1}{12}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+4\right| + \log|x+2|\right) + C.
\end{aligned}$$

6.5 8

Beräkna

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

eller bevisa att den divergerar.

Lösning: Integranden kommer bete sig som $1/x$ runt $x=0$, så vi gissar att integralen kommer divergera eftersom

$$\begin{aligned}
\int_0^p \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^p \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}[\log x]_\epsilon^p \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\log p - \log\epsilon \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

för alla $p>0$. Så vi vill visa att integralen divergerar.

Integranden är alltid positiv, så

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1/2}}\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

vilket vi har visat divergerar mot oändligheten.

6.5 19

Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

eller bevisa att den divergerar.

Lösning: Detta är en udda funktion integrerad över ett symmetriskt intervall, så integralen är 0 om den existerar. Dock är

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{M\to\infty} [\frac{1}{2}\log{(1+x^2)}]_0^M \\ &= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\log{(1+M^2)} \\ &= \infty\end{aligned}$$

så integralen existerar inte.

6.5 34

Divergerar eller konvergerar

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2}\,?$$

Lösning: Konvergerar pga

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2} + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2} \\ &\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

6.5 35

Divergerar eller konvergerar

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x?$$

Lösning: Divergerar pga

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x &\geq \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \infty.\end{aligned}$$

6.5 42a

Givet att

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

beräkna

$$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning Vi kör lite partialintegrering med $u = x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x\mathrm{e}^{-x^2}$ $(v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2})$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= [-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-x^2}]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Vecka 46

7.1 11

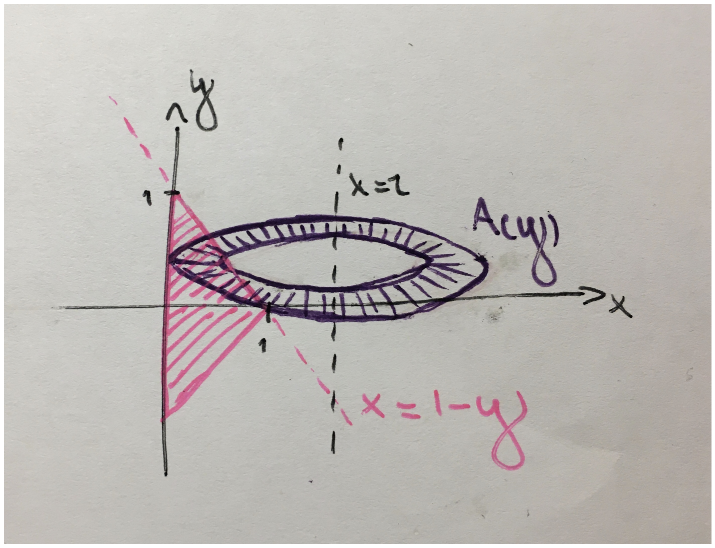
Hitta volymen av figuren som uppstår av att man roterar triangeln $(0,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ kring $x = 2$.

Lösning: Definera arean $A(y)$ enligt figur 1. Då är

$$\begin{aligned}V &= 2\int_0^1 A(y)\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1 \left(\pi 2^2 - \pi(x-2)^2\right)\mathrm{d}y \\ &= 2\pi\int_0^1 \left(4 - (-1-y)^2\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{10\pi}{3}.\end{aligned}$$

7.2 3

Hitta volymen av en figur som har höjd 1 och vars tvärsnitt vid höjden z är en ellips som har en radie z och en radie $\sqrt{1-z^2}$.



Figur 1:

Lösning: Vi gör ungefär som i förra uppgiften. En ellips med radierna a och b har arean $ab\pi$, så

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 A(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \pi z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z \\
&= -\frac{\pi}{3}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

7.2 7

Hitta volymen av en figur som har höjd h och vars tvärsnitt vid höjden z är en cirkelsektor med radien a och vinkel $2\pi(1-z/h)$.

Lösning: Med $A(z) = \pi a^2(1-z/h)$ har vi att

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^h A(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^h \pi a^2(1-\frac{z}{h})\,\mathrm{d}z \\
&= \pi a^2\left[z-\frac{z^2}{2h}\right]_0^h \\
&= \pi a^2\frac{h}{2}.
\end{aligned}$$

7.9 4

Lös den separabla differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2y^2.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^2y^2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{1}{y^2} &= x^2 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{y}\right) &= x^2 \\
-\frac{1}{y} &= \frac{1}{3}x^3 + C \\
y &= -\frac{1}{x^3 + C'}.
\end{aligned}$$

7.9 12

Lös

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} &= \frac{1}{x^2} \\
x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y &= \frac{1}{x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) &= \frac{1}{x} \\
xy &= \log x + C \\
y &= \frac{\log x + C}{x}.
\end{aligned}$$

7.9 19

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{gathered}
x^2y' + y = x^2\mathrm{e}^{1/x}, \\
y(1) = 3\mathrm{e}.
\end{gathered}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-1/x}y' + \mathrm{e}^{-1/x}\frac{1}{x^2}y &= 1 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-1/x}y) &= 1 \\
\mathrm{e}^{-1/x}y &= x + C \\
y &= \mathrm{e}^{1/x}(x + C).
\end{aligned}$$

$y(1) = 3\mathrm{e}$ medför att $C = 2$.

Review 7 12

Hitta en familj av kurvor som skär alla ellipser på formen

$$3x^2 + 4y^2 = C$$

vinkelrätt.

Lösning: I det övre halvplanet kan vi beskriva dessa ellipser som funktioner. Det gäller då att dessa funktioner uppfyller

$$\begin{aligned} 6x + 8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{3x}{4y}. \end{aligned}$$

Men en kurva som är vinkelrät mot denna måste uppfylla (se exempel 6 i avsnitt 7.9 i Adams)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4y}{3x}.$$

Vi kan lösa denna diffekvation genom variabelseparation, men det går också att se direkt att $y = Cx^{4/3}$ är en familj lösningar.