

MVE630 demouppgifter

2021-11-03

5.1 19

Hitta ett uttryck på sluten form för

$$\sum_{k=1}^n (\pi^k - 3). \quad (1)$$

Lösning: Vi vill använda följande sats:

Sats 1 (5.1 (d) i Adams).

$$\sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (2)$$

om $r \neq 1$.

Vi får då att

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\pi^k - 3) &= -3n + \pi \sum_{k=1}^n \pi^{k-1} \\ &= -3n + \pi \frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}. \end{aligned}$$

5.4 21

Vi vet att

$$\int_0^a x^2 \, dx = \frac{a^3}{3}. \quad (3)$$

Beräkna

$$\int_0^1 (x^2 + \sqrt{1 - x^2}) \, dx. \quad (4)$$

Lösning: Den första termen i (4) ser vi från (3) är $\frac{1}{3}$. Den andra termen kan vi identifiera med arean av en kvarts (rita figur) och den blir $\frac{\pi}{4}$.

5.4 36

Beräkna

$$\int_0^3 |2 - x| \, dx.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_0^3 |2-x| \, dx &= \int_0^2 (2-x) \, dx + \int_2^3 -(2-x) \, dx \\ &= 2 + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5.5 16

Beräkna

$$\int_{-1}^1 2^x \, dx.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 2^x \, dx &= [\log 2 \cdot 2^x]_{-1}^1 \\ &= \log 2 \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \log 2.\end{aligned}$$

5.5 25

Hitta arean som begränsas av kurvorna

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 3x + 3, \\ y &= 1.\end{aligned}$$

Lösning Rita en bild.

Snacka allmänt om arean av en figur som begränsas av två kurvor $y = f(x)$ och $y = g(x)$.

Eftersom kurvorna möts i $x = 1$ och $x = 2$ är arean (beloppet av)

$$\int_1^2 (x^2 - 3x + 3 - 1) \, dx = -\frac{1}{6}.$$

5.5 44

Beräkna

$$\frac{d}{d\theta} \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx.$$

Lösning

$$\begin{aligned}\int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx &= \int_1^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx + \int_{\sin \theta}^1 \frac{1}{1-x^2} \, dx \\ &= \int_1^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx - \int_1^{\sin \theta} \frac{1}{1-x^2} \, dx.\end{aligned}$$

Enligt kedjeregeln är

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \int_1^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} \cos \theta} \left(\int_1^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x \right) \frac{\mathrm{d} \cos \theta}{\mathrm{d}\theta} \\ &= - \frac{1}{1 - \cos^2 \theta} \sin \theta \\ &= - \sin \theta.\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \int_1^{\sin \theta} \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} \sin \theta} \left(\int_1^{\sin \theta} \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x \right) \frac{\mathrm{d} \sin \theta}{\mathrm{d}\theta} \\ &= \frac{1}{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta \\ &= \cos \theta.\end{aligned}$$

Chapter 5 review 21

Beräkna arean som begränsas av

$$\begin{aligned}y &= \sin x, \\ y &= \cos 2x, \\ x &= 0, \\ x &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$