Matematiska institutionen
Göteborgs universitet och
Chalmers tekniska högskola
Version 130529

Ekvationssystem, Matriser och Eliminationsmetoden - En inledning

1 Ekvationssystem - matrisformulering.

Vi såg att ekvationen $Ax + By + Cz = D$ betyder ett plan i rummet $\mathbb{R}^3$ och $ax + by = c$ eller $y = kx + m$ betyder en linje i planet $\mathbb{R}^2$.

Flera sådana ekvationer kan bilda ett system av ekvationer, ett ekvationssystem, och en lösning till ett sådant ekvationssystem är alltså punkter som ligger på alla planen (eller linjerna) i systemet.

OBS: Om vi betraktar punkter (x, y, z) i rummet som uppfyller ekvationen $Ax + By = D$ så bildar dessa punkter ett plan trots att ekvationen ser ut som ekvationen för en linje (i planet) ty ekvationen är egentligen $Ax + By + 0z = D$ i $\mathbb{R}^3$. Om inget annat sägs så bestämmer de förekommande variablerna om vi är i planet eller rummet.

Betrakta ekvationssystemen a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ 4x & + & 5y & = & 6 \end{array}\right.$ och b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 5y & + & z & = & 45 \\ 5x & + & 2y & - & z & = & 23 \\ 13x & - & 7y & + & z & = & 6 \end{array}\right.$.

Vi ser att i båda dessa system så är antalet variabler lika med antalet ekvationer. Låt m och n vara två positiva heltal. Det allmänna ekvationssystemet är

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

där a_{ij} för $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ är (de kända, eller givna) koefficienterna i ekvationssystemet, m är antalet ekvationer och n är antalet variabler (eller så kallade okända). Lösa ekvationssystemet innebär att finna alla de möjliga, om några, värdena på de okända variablerna x_j, $1 \leq j \leq n$.

Om $\left\{\begin{array}{lll} m = n & \text{kallas ekvationssystemet för} & \textbf{kvadratiskt}, \\ m < n & \text{-//-} & \textbf{underbestämt}, \\ m > n & \text{-//-} & \textbf{överbestämt}. \end{array}\right.$

En lösning till ekvationssystemet (1) är en punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ som uppfyller alla m ekvationerna.

Genom att betrakta t ex ett ekvationssystem bestående av två linjer i $\mathbb{R}^2$, som i (a) ovan, så ser vi att för lösningarna så är bara tre olika fall möjliga:

Ex:

Samma förhållande (ingen lösning, exakt en lösning eller oändligt många lösningar) gäller för alla ekvationssystem (kräver bevis; vi genomför inte det beviset).

Sats Ett allmänt ekvationssystem har precis en lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar.

Bevis: Genomförs med hjälp av eliminationsmetoden nedan; men det beviset genomför vi alltså inte. $\square$

2 Hur löser vi ett ekvationssystem? - Eliminationsmetoden

Två delmetoder: eliminationsmetoden och substitutionsmetoden, varav eliminationsmetoden är den fundamentala och grunden för ett systematiskt, automatiskt lösande som lämpar sig väl för användande i beräkning med datorer.

Strategi: Göra enkla operationer (s k *radoperationer*) och få ett nytt enklare ekvationssystem med samma lösningar.

Ex: Vilka operationer förändrar ej lösningsmängden? Dessa förändrar ej lösningsmängden:

i) Lösningar till $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ lösningar till $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ där vi alltså bytt plats på raderna.

ii) Lösningar till $2x + 2y = 4 \Leftrightarrow$ lösningar till $\frac{1}{2}(2x + 2y = 4) \Leftrightarrow$ lösningar till $x + y = 2$.

iii) Lösningar till $\begin{cases} x + y = 1 & \boxed{1} \\ -x + y = 2 & \hookleftarrow \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ lösningar till $\begin{cases} x + y = 1 & \boxed{-1} \\ 2y = 3 & \hookleftarrow \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ lösningar till $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$

Definition(Elementära radoperationer)

1) Byte av plats för ekvationer, rader.

2) Multiplikation av en ekvation, rad, med en konstant $\neq 0$.

3) Multiplikation av en ekvation, rad, med en konstant, läggs till en annan ekvation, rad.

$\square$

Sats Elementära radoperationer på ett ekvationssystem förändrar ej lösningsmängden.

"**Bevis**": För en idé eller skiss, se senaste exemplen ovan.

$\square$

Grundfrågor för ett ekvationssystem:

1) Existens av lösning till ekvationssystemet; dvs finns det någon lösning?

2) Om det finns en lösning till ekvationssystemet, är den då unik (eller entydig; dvs enda lösningen) eller finns det fler lösningar?

Strategi (för att lösa ett ekvationssystem): Matrisnotation undertrycker variabelnamnen och skapar på ett entydigt vis ett tillhörande talschema; en s k matris. Det blir då mindre och smidigare att skriva ner/genomföra lösningen; direkt skrivmässigt men också genom att använda räknande med matriser (matrisformulering med matrismultiplikation etc; vi tar inte upp det här men det är en mycket givande teknik som man kan lära sig i en (efterföljande) kurs i *linjär algebra*).

Exempel: $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ 4x & + & 5y & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$, $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 5y & + & z & = & 45 \\ 5x & + & 2y & - & z & = & 23 \\ 13x & - & 7y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 1 & 45 \\ 5 & 2 & -1 & 23 \\ 13 & -7 & 1 & 6 \end{array}\right)$.

Allmänna ekvationssystemet (1) ovan $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Här kallas talen a_{ij} till vänster om (sett från läsaren; ej från linjen) den heldragna, lodräta linjen i matrisen, för *koefficientmatris* och talen b_i till höger kallas *högerledsmatris* och hela matrisen, med a_{ij} och b_i, kallas *totalmatris*. Ofta skrivs högerledsmatrisen som HL eller (b_i), koefficientmatrisen som (a_{ij}) och totalmatrisen som $(a_{ij}|b_i)$.

Strategi: Överföra totalmatrisen m h a elementära radoperationer i en triangulär form.

Definition: I en matrisrad kallas det första nollskilda talet i raden, för ett ledande element. $\square$

Definition (Trappstegsform eller triangulär form eller rad echolon form (REF)): En rektangulär totalmatris är i **trappstegsform** om

i) alla icke-nollrader är ovanför alla nollrader.

ii) varje ledande tal i en rad är strikt till höger om det ledande talet i raden före.

iii) alla tal i en kolonn under ett ledande tal är noll.

Matrisen är i **reducerad trappstegsform (RREF)** om också

iv) det ledande talet i varje nollskild rad är $= 1$,

v) varje ledande etta är det enda nollskilda talet i kolumnen. $\square$

Definition: Ett ledande tal i en trappstegsformad, (REF), matris kallas **pivotelement**. Observera att ett pivotelement alltid $\neq 0$. $\square$

Ett ekvationssystem där högerledet, HL, är 0 kallas ett **homogent** ekvationssystem; annars **inhomogent**. Ett homogent ekvationssystem totalmatris $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$ skrivs alltid bara som koefficientmatrisen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observera att ett homogent ekvationssystem alltid har en lösning (åtminstone; möjligen fler), nämligen lösningen $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$.

Exempel: $\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & -2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & k \end{array}\right. \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & k \end{array}\right) \begin{array}{cc} \boxed{-1} & \boxed{-2} \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & k-2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{-1} \\ \hookleftarrow \end{array} \sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & k-2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{-1} \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{array}\right).$$

Pivotelement är de inringade talen 1 och 2 och eventuellt $k-2$ om $k-2 \neq 0$ (ty pivotelement är skilda från 0). Om $k-2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 2$ så betyder sista raden $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = k-2 \neq 0$ vilket inte är möjligt då ju $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$; alltså finns ingen lösning (x_1, x_2, x_3) då $k-2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 2$. Om $k-2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ så är sista raden en nollrad och innehåller ingen information om lösningarna (x_1, x_2, x_3), och kan därför strykas ur ekvationssystemet. Då finns bara två rader och de två pivotelementen för dessa rader ger inte pivotelement i alla kolonnerna. Den (eller mer generellt de) variabel/ler som motsvarar den/de kolonn(er) som saknar pivotelement kallas fri(a) variabel(ler).

Definition: Variabler som hör ihop med kolonner med pivotelement kallas **bundna** och de som hör ihop med kolonner utan pivotelement kallas **fria** variabler (eller parametrar). $\square$

I vårt senaste exempel är alltså, när $k = 2$, x_1 och x_2 bundna variabler och x_3 fri. Vi ser också att andra ekvationen, rad två, är $0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow 2x_2 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_3$.

Detta är en allmän egenskap:

Observation: De bundna variablerna kan uttryckas med (enbart) de fria variablerna. $\square$

Det blir lättare att uttrycka de bundna variablerna med de fria om man fortsätter eliminationsmetoden och skaffar sig nollor i raderna ovanför ett pivotelement. Detta gör man för alla pivotelementen och erhåller matrisen på reducerad rad echolonform, (RREF). Om vi fortsätter radreduktionen ovan (med $k = 2$ så att det finns lösningar till ekvationssystemet) så får vi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{1/2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \hookleftarrow \\ \boxed{-1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \end{array}\right)$$

där vi i sista ledet har matrisen på RREF-form. Vi ser att kolonn ett och två innehåller pivotelement, men inte kolonn tre; x_3 är alltså en fri variabel och x_2 och x_3 är bundna. Rad två är alltså $0x_1 + x_2 + (3/2)x_3 = 0$ varur vi får $x_2 = -\frac{3}{2}x_3$; och första raden ger oss $x_1 = 1 + \frac{7}{2}x_3$. Ofta brukar man ge de fria variablerna parameternamn, t ex $x_3 = s$ där s är ett fixt men godtyckligt reellt tal (ett parametervärde är fixt men godtyckligt; en variabels värde varierar (som ju förstås av namnet)). Varje sådant (fixt men godtyckligt $\in \mathbb{R}$) parametervärde ger upphov till en lösning av ekvationssystemet: $(x,x_2,x_3) = (1+\frac{7}{2}s, -\frac{3}{2}s, s)$; eller skrivet på kolonnform $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{7}{2}s \\ -\frac{3}{2}s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2}s \\ -\frac{3}{2}s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = [\text{sätt } \frac{s}{2} = t, \text{ där } s \in \mathbb{R}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ där $t \in \mathbb{R}$. Dessa punkter (x,x_2,x_3) i $\mathbb{R}^3$ beskriver en linje i $\mathbb{R}^3$ genom $(1,0,0)$ med riktningsvektor $(7,-3,2)$.

Formulering på kolonnform använder man för att med kolonner och matrismultiplikation går ekvationssystem enkelt att uttrycka som en matrisekvation och dess lösande hanteras med matrisoperationer; vi använder inte detta här men det kommer i senare kurser; exempelvis i en kurs i *linjär algebra*.

Ekvationssystenmet (1) kan i matrisformulering skrivas $\mathbb{A}x = b$ där $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ och mellan matriserna $\mathbb{A}$ och x är en produkt, matrisprodukten, som ger en ny matris $\mathbb{A}x$ och likhetstecknet tolkas som att de två matriserna $\mathbb{A}x$ och b har lika många rader och lika många kolonner och att talen i respektive fack, på respektive plats, är lika. Hur matrisprodukten definieras behandlar vi inte här. Sammanfattningsvis har vi alltså

i) om ett pivotelement finns i HL (alltså till höger om det vertikala strecket) så finns ingen lösning

ii) om varje kolonn i koefficientmatrisen har ett pivotelement och inget i HL, så finns inga fria variabler och alltså en <u>u</u>nik lösning

iii) om någon kolonn i koefficientmatrisen saknar pivotelement så finns fri variabel och alltså oändligt många lösningar. Det finns då lika många parametrar (fria variabler eller <u>frihetsgrader</u>) som kolonner som saknar pivotelement.

Exempel: $\begin{cases} x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a+1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & -1 & 1 & a+2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \boxed{-1} & \boxed{-a} \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1 \\ 0 & -(1+a) & 0 & 1+a \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \\ \hookleftarrow & \\ \boxed{1\text{-a}} & \boxed{-1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & (1+a) & 0 & -(1+a) \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & (1+a) & 0 & -(1+a) \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a^2 \end{array}\right)$. Vi ser från detta att om $a \neq \pm 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2-a^2}{1-a} \end{array}\right)$ så finns en unik lösning. Om $a = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$ så finns ingen lösning (på grund av den tredje ekvationen där ju pivotelementet står i HL; ekvationen betyder ju $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$). Om $a = -1$ har vi:

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{1/2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \hookleftarrow \\ \boxed{-1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 \end{array}\right)$ vilket ger att andra kolonnen inte innehåller ett pivotelement och alltså är motsvarande variabel, x_2, fri och vi ger den ett nytt namn (för att makera att den är en parameter; fix men godtycklig). Observera också att den andra raden i totalmatrisen för $a = -1$ är en nollrad och alltså inte innehåller någon information om lösningen (den säger ju bara att $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ som ju är sant för alla punkter (x_1, x_2, x_3)); den raden kan alltså tas bort ur ekvationssystemet utan att förändra lösningsmängden. Detta ger att $(x_1, x_2, x_3) = (s + \frac{1}{2}, s, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} s + \frac{1}{2} \\ s \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta betyder alltså att i detta fallet så utgör lösningarna (x_1, x_2, x_3) punkter på en linje i $\mathbb{R}^3$ genom punkten $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ med riktningsvektor $(1, 1, 0)$; dvs vi har oändligt många lösningar (en lösning för varje värde på $s \in \mathbb{R}$).

Exempel: $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 1 & 45 \\ 5 & 2 & -1 & 23 \\ 13 & -7 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \boxed{-2} & \boxed{-1} \\ & \hookleftarrow \\ \hookleftarrow & \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 1 & 45 \\ -1 & -3 & -2 & -22 \\ 1 & -17 & -1 & -84 \end{array}\right) \begin{array}{lll} & & \hookleftarrow \\ \boxed{1} & \boxed{6} & \boxed{-1} \\ \hookleftarrow & & \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -13 & -11 & -87 \\ 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & -20 & -3 & -106 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & 13 & 11 & 87 \\ 0 & 20 & 3 & 106 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{-1} \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & 13 & 11 & 87 \\ 0 & 7 & -8 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \hookleftarrow \\ \boxed{-2} \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & -1 & 27 & 49 \\ 0 & 7 & -8 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{7} \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & -1 & 27 & 49 \\ 0 & 0 & 181 & 362 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{-1} \\ \boxed{1/181} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & 1 & -27 & -49 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \hookleftarrow \\ \hookleftarrow & \\ \boxed{27} & \boxed{-2} \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \hookleftarrow \\ \boxed{-3} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\square$

3 Övningsuppgifter

1. Lös ekvationssystemen a) $\begin{cases} 2x & + & 3y & = 10 \\ 2x & - & y & = 6 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 3x & - & 2y & = 3 \\ 9x & - & 6y & = 8 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 5x & + & y & = 3 \\ 10x & + & 2y & = 6 \end{cases}$

   Svar: a) $x = 3,5,\ y = 1$, b) saknar lösning, c) oändligt många lösningar, av formen $x = t,\ y = 3 - 5t$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

2. En person som tillfrågades om sin ålder svarade: 'För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag blott 4 gånger så gammal.' Hur gammal var personen? Svar: 48 år.

3. Lös $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$ Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

4. Lös $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right)$ Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. Lös för $h \in \mathbb{R}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{array}\right)$ Svar: $h \neq -2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $h = -2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $s \in \mathbb{R}$.

6. Betrakta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. a) Antag först att matrisen anger ett homogent ekvationssystem; vad är då lösningen? b) Vad är lösningen om matrisen anger en totalmatris så att 4:e kolonnen är HL?

   Svar: a) unik lösning $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) ingen lösning.

7. Lös för $h, k \in \mathbb{R}$ ekvationssystemet $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & h & k \end{array}\right)$.

   Svar: i) Om $h = 9$ så finns för $k \neq 6$ ingen lösning och för $k = 6$ finns oändligt många lösningar, ii) Om $h \neq 9$ så finns unik lösning för $\forall k$.

8. Lös ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & k \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ för $k \in \mathbb{R}$.

   Svar: Endast lösning då $k = 2$ och lösningen är då för $s \in \mathbb{R}$
   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Finn en ekvation för a, b och c som gör ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ -2 & 5 & -9 & c \end{array}\right)$ lösbart.

   Svar: $2a + b + c = 0$.

10. Lös ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$. Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} +$

$+ s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $s, t \in \mathbb{R}$.

11. Lös för $h \in \mathbb{R}$ ekvationssystemet $\left(\begin{array}{cc|c} h & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$. Svar: $h \neq 0 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$h = 0 : \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \hookleftarrow \\ \boxed{-2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1/3 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

12. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 5x + 4y + z = 0 \end{cases}$ Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

13. För vilket värde på a saknar ekvationssystemet $\begin{cases} x + (4+a)z = -2 \\ -2x + 2y + 7z = -1 \\ x + 2y + (3+a)z = -2 \end{cases}$ lösningar?

Svar: För $a = -8$.

14. I vilken punkt skär linjen med ekvationer $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{5}$, planet med ekvation $2x+y-3z = 2$? (Detta är en lite annorlunda uppgift jämfört med de ovanstående ekvationssystemen. Man behöver inte se det främst som ett ekvationssystem; det är enklare än så.) Svar: I punkten $-2(4, 3, 4) = (-8, -6, -8)$.

15. Sök skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 8$ och räta linjen a) $5x - y - 2 = 0$, b) $2x - 3y - 6 = 0$, c) $4x - y - 6 = 0$. (Detta är också en lite annorlunda uppgift; ekvationen för cirkeln är inte linjär (ty det förkommer potenser av x och y som är större än ett) så vi har inte ett linjärt ekvationssystem; men ekvationssystemet är ändå inte så svårt att lösa.)

Svar: a) $(1, 3)$, $(0, -2)$, b) $(0, -2)$, tangering, c) ingen skärningspunkt.