

UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
FACULTÉ MATHÉMATIQUES



Principe du maximum et EDPs elliptiques

MÉMOIRE M1

JANVIER 2022 – MAI 2022

SIMON LOIN

ENCADRANT : M. ALBERTO FARINA

Table des matières

Introduction : Qu'est-ce qu'une Equation aux Dérivées Partielles ?	2
1 Equation de Laplace	5
1.1 Fonction harmoniques, Formule de représentation pour la solution de problème de Dirichlet sur la boule	5
1.2 Propriétés de la valeur moyenne des fonctions harmoniques. Fonctions sous-harmoniques. Principe du maximum	14
2 Le principe du maximum	30
2.1 Le principe du maximum de E. Hopf	30
2.2 Le principe du maximum de Alexandrov et Bakelman	36
2.3 Principes du maximum pour des équations différentielles non-linéaires	42
A Appendice	49
Conclusion	54
Bibliographie	55

Introduction :

Qu'est-ce qu'une Equation aux Dérivées Partielles ?

Tout d'abord en première réponse à la question, "Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles ?", nous voudrions donner une définition :

Définition 0.0.1. Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation impliquant les dérivées partielles d'une fonction inconnue $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, où Ω est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$.

Cependant cette définition est légèrement trompeuse, puisque dans la théorie des EDPs nous n'étudions pas des équations arbitraires, mais nous nous concentrons sur des équations qui apparaissent dans différents domaines (physique, ingénierie, économie) ou alors dans d'autres contextes mathématiques.

Par conséquent, en deuxième réponse à la question posée, nous voudrions décrire quelques exemples typiques d'EDPs. Mais juste avant cela nous allons introduire une notation : une dérivée partielle sera notée de la sorte,

$$u_{x_i} = \partial_{x_i} u := \frac{\partial u}{\partial x_i}, \text{ pour } i = 1, \dots, d.$$

Et nous noterons x le vecteur $x = (x_1, \dots, x_d)$.

Exemples :

1. Equation de Laplace

$$\Delta u := \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i} = 0 \quad (\Delta \text{ est appelé le laplacien})$$

Ou, plus généralement, l'équation de Poisson

$$\Delta u = f \text{ pour une certaine fonction donnée } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Par exemples, les parties réelles et imaginaires w et v d'une fonction holomorphe $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert) vérifient l'équation de Laplace. Cela vient des équations de Cauchy-Riemann :

$$w_x = v_y,$$

$$w_y = -v_x,$$

avec $z = x + iy$

On obtient,

$$w_{xx} + w_{yy} = 0 = v_{xx} + v_{yy}.$$

L'équation de Laplace modélise aussi beaucoup d'états en physique, et l'équation de Poisson est importante en électronique.

2. Equation de la chaleur

Ici, une coordonnées t désigne le temps, tandis que les autres coordonnées x_1, \dots, x_d représentent les coordonnées spatiales. Nous considérons

$$u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

et nous posons l'équation

$$u_t = \Delta u,$$

L'équation de la chaleur modélise la diffusion de la chaleur, elle peut aussi modéliser d'autres processus de diffusion.

3. Equation de transport

En prenant les mêmes notations que dans le point (2),

$$u_t = -u_x.$$

4. Equation des ondes

En prenant les mêmes notations que dans le point (2) avec $d = 1$,

$$u_{tt} = \Delta u,$$

Cette équation modélise les phénomènes ondulatoires et d'oscillation.

5. Equation de Monge-Ampère

En dimension 2,

$$u_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2} - u_{x_1 x_2}^2 = f,$$

ou en plus grande dimensions

$$\det(u_{x_i x_j})_{i,j=1,\dots,d} = f,$$

avec une fonction donnée f . Cette équation est utilisée pour trouver des surfaces (ou hypersurfaces) avec une courbure donnée.

6. L'équation de surface minimale

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

décrit une classe importante de surfaces dans \mathbb{R}^3 .

Il en existe évidemment beaucoup d'autres, dont certaines bien différentes que celles présentées ci-dessus. C'est pourquoi au premier abord il semble sans espoir de développer une théorie qui peut traiter toutes ces diverses équations. Cette impression est essentiellement correcte, et pour pouvoir poursuivre, nous cherchons à présent un ou plusieurs critères pour classer les EDPs. Voici quelques possibilités :

1. Algébriquement, c'est-à-dire selon la structure algébrique de l'équation. Différents critères sont alors donnés suivant si l'équation est linéaire, quasi-linéaire [le plus grand ordre de dérivation de u est linéaire], semi-linéaire [équations quasi-linéaires tel que le terme de plus grand ordre de dérivation de u ne dépend pas de u ou des dérivées d'ordre inférieur] ou alors complètement non-linéaire.
2. Selon le plus grand ordre de dérivation apparent :
Les équations de Cauchy-Riemann et l'équation de transport sont d'ordre 1, l'équation de Laplace, de la chaleur, des ondes, de Monge-Ampère et de surface minimale sont d'ordre 2. La plupart des EDPs les plus importantes sont du second ordre. Par conséquent, nous allons nous concentrer sur les EDPs du second ordre, et plus particulièrement les EDPs elliptiques.
3. Pour les EDPs du second ordre, une classification très utile existe, nous allons simplement donner le critère pour que l'équation soit elliptique.
Soit

$$F(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) = 0$$

une EDP du second ordre. Nous introduisons les variables factices suivantes et étudions la fonction

$$F(x, z, p_i, r_{ij})$$

L'équation est appelée elliptique sur Ω en $u(x)$ si la matrice

$$(F_{r_{ij}}(x, u(x), u_{x_i}(x), u_{x_i x_j}(x)))_{i,j=1,\dots,d}$$

est définie positive pour tout $x \in \Omega$.

Nous allons étudier uniquement les équations aux dérivées partielles elliptiques. Dans un premier temps, nous étudierons l'équation de Laplace et l'équation de Poisson comme prototype d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Puis dans un deuxième temps, nous verrons un cas plus général en restant tout d'abord dans le cas linéaire, pour finir par étudier un peu de non-linéaire. Nous nous concentrerons sur une étude qualitative des solutions grâce à notamment le principe du maximum.

1 Equation de Laplace

1.1 Fonction harmoniques, Formule de représentation pour la solution de problème de Dirichlet sur la boule

Dans cette partie, Ω désigne un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d pour lequel le théorème de la divergence s'applique, cela signifie que pour tout vecteur de champs V de classe $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} V(x) dx = \int_{\partial\Omega} \langle V(z), \nu(z) \rangle d\sigma(z) \quad (1.1.1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien usuel de \mathbb{R}^d . ν désigne le vecteur extérieur normal à $\partial\Omega$, et $d\sigma(z)$ est l'élément de volume de $\partial\Omega$. Rappelons la définition de la divergence d'un vecteur de champs $V = (V_1, \dots, V_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$\operatorname{div} V(x) := \sum_{i=1}^d \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x).$$

Pour que (1.1.1) reste vraie, il est par exemple suffisant que $\partial\Omega$ soit de classe C^1 .

Lemme 1.1.1. Soient $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Alors on a la première formule de Green

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx = \int_{\partial\Omega} v(z) \frac{\partial u}{\partial \nu}(z) d\sigma(z) \quad (1.1.2)$$

et la deuxième formule de Green

$$\int_{\Omega} (v(x) \Delta u(x) - u(x) \Delta v(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v(z) \frac{\partial u}{\partial \nu}(z) - u(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) d\sigma(z). \quad (1.1.3)$$

Démonstration. En prenant $V(x) = v(x) \nabla u(x)$, (1.1.2) vient de (1.1.1). (On notera que $\langle \nabla u, \nu \rangle = \frac{\partial u}{\partial \nu}$). Puis en interchangeant u et v dans (1.1.2) et soustrayant le résultat obtenu à (1.1.2), on obtient (1.1.3). \square

Définition 1.1.2. Une fonction u de classe $C^2(\Omega)$ est appelée harmonique (dans Ω) si

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Dans cette définition Ω peut être un quelconque ouvert de \mathbb{R}^d . On remarque aussi :

Lemme 1.1.3. Les fonctions harmoniques dans Ω forment un espace vectoriel.

Démonstration. La preuve se déduit du fait que Δ est un opérateur linéaire. \square

Nous allons maintenant donner quelques exemples de fonctions harmoniques :

(1) Dans \mathbb{R}^d , toutes les fonctions constantes, et plus généralement, toutes les fonctions affines sont harmoniques.

(2) Il existe aussi des fonctions harmoniques polynômiales de plus haut degré, par exemple :

$$u(x) = x_1^2 - x_2^2$$

pour, on le rappelle, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

(3) Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, avec $x \neq y$, on pose

$$\Gamma(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x - y| & \text{pour } d = 2, \\ \frac{1}{d(2-d)\omega_d} |x - y|^{2-d} & \text{pour } d > 2. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

où ω_d est le volume de la boule unité de dimension d .

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x, y) &= \frac{1}{d\omega_d} (x_i - y_i) |x - y|^{-d}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Gamma(x, y) &= \frac{1}{d\omega_d} \left[|x - y|^2 \delta_{ij} - d(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right] |x - y|^{-d-2}. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma(x, y) &= \frac{1}{\omega_d} |x - y|^{-d} - \frac{1}{\omega_d} \sum_{i=1}^d (x_i - y_i)(x_i - y_i) |x - y|^{-d-2} \\ &= \frac{1}{\omega_d} |x - y|^{-d} - \frac{1}{\omega_d} |x - y|^2 |x - y|^{-d-2} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, comme une fonction de x , Γ est harmonique sur $\mathbb{R}^d \setminus \{y\}$. Comme Γ est symétrique en x et y , c'est aussi une fonction harmonique en y sur $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$. Le choix des constantes utilisées dans (1.1.4) deviendra clair après (1.1.8) ci-dessous.

Définition 1.1.4. Γ définie selon (1.1.4) est appelée la solution fondamentale de l'équation de Laplace.

Une question vient alors naturellement, quelle est la raison pour cette solution particulière Γ pour l'équation de Laplace sur $\mathbb{R}^d \setminus \{y\}$? La réponse vient de la symétrie par rotation de l'opérateur de Laplace. L'équation

$$\Delta u = 0$$

est invariante pour toutes rotations de centre arbitraire y .

En effet, si $A \in \mathcal{O}(d)$ et $y \in \mathbb{R}^d$, alors pour une fonction harmonique $u(x)$,

$u(A(x - y) + y)$ est aussi harmonique.

Du fait de cette invariante de l'opérateur de Laplace, nous allons donc chercher des solutions elles aussi invariantes par rotation, c'est-à-dire, des solutions de la forme

$$u(x) = \varphi(r) \text{ avec } r = |x - y|.$$

On calcule tout d'abord les dérivées partielles de φ

$$\partial_j \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{x_j - y_j}{|x - y|}$$

$$\partial_{jk} \varphi(r) = \varphi''(r) \frac{x_j - y_j}{|x - y|} \frac{x_k - y_k}{|x - y|} + \varphi'(r) \frac{\delta_{jk} |x - y| - (x_j - y_j) \frac{x_k - y_k}{|x - y|}}{|x - y|^2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(r) &= \sum_{i=1}^d \partial_{ii} \varphi(r) \\ &= \varphi''(r) \sum_{i=1}^d \frac{(x_i - y_i)^2}{|x - y|^2} + \varphi'(r) \sum_{i=1}^d \left(\frac{|x - y|^2 - (x_i - y_i)^2}{|x - y|^3} \right) \\ &= \varphi''(r) + \varphi'(r) \left(\frac{d-1}{r} \right) \\ &= \frac{(r^{d-1} \varphi'(r))'}{r^{d-1}} \end{aligned}$$

L'équation de Laplace $\Delta u = 0$ est donc transformée en l'équation suivante pour φ comme une fonction de r ,

$$\varphi''(r) + \varphi'(r) \frac{d-1}{r} = 0.$$

Comme $\varphi''(r) + \varphi'(r) \frac{d-1}{r} = \frac{(r^{d-1} \varphi'(r))'}{r^{d-1}}$, les solutions doivent satisfaire

$$\varphi'(r) = c r^{1-d}$$

avec c une constante. En fixant cette constante et une autre constante additive, on obtient la solution fondamentale $\Gamma(r)$.

Théorème 1.1.5 (Représentation de Green). *Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$, on a alors pour $y \in \Omega$,*

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x, y) - \Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) d\sigma(x) + \int_{\Omega} \Gamma(x, y) \Delta u(x) dx \quad (1.1.5)$$

(ici, $\frac{\partial}{\partial \nu_x}$ indique que la dérivée doit être prise en direction du vecteur normal extérieur respectivement à la variable x).

Démonstration. Comme Ω est un ouvert et $y \in \Omega$, pour un $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$B(y, \varepsilon) \subset \Omega.$$

En appliquant (1.1.3) avec $v(x) = \Gamma(x, y)$ et $\Omega \setminus B(y, \varepsilon)$ à la place de Ω , et comme $\Gamma(x, y)$ est harmonique sur $\Omega \setminus y$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B(y, \varepsilon)} \Gamma(x, y) \Delta u(x) dx &= \int_{\partial \Omega} \left(\Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial \nu_x} \right) do(x) \\ &+ \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \left(\Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial \nu_x} \right) do(x). \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

On remarque que dans la deuxième intégrale du second membre, ν est le vecteur normal extérieur à $\Omega \setminus B(y, \varepsilon)$, c'est-à-dire le vecteur normal intérieur à $B(y, \varepsilon)$. Nous aimerions maintenant évaluer la limite des différentes intégrales quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Comme $u \in C^2(\overline{\Omega})$, Δu est borné. De plus, Γ est intégrable, par le théorème de convergence dominée le premier membre de (1.1.6) tend donc vers :

$$\int_{\Omega} \Gamma(x, y) \Delta u(x) dx.$$

Sur $\partial B(y, \varepsilon)$, on a $\Gamma(x, y) = \Gamma(\varepsilon)$. Donc, pour $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\left| \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) do(x) \right| \leq d\omega_d \varepsilon^{d-1} \Gamma(\varepsilon) \sup_{B(y, \varepsilon)} |\nabla u| \rightarrow 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} - \int_{\partial B(y, \varepsilon)} u(x) \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial \nu_x} do(x) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Gamma(\varepsilon) \int_{\partial B(y, \varepsilon)} u(x) do(x) \\ &\quad \text{(puisque } \nu \text{ est le vecteur normal intérieur de } B(y, \varepsilon)) \\ &= \frac{1}{d\omega_d \varepsilon^{d-1}} \int_{\partial B(y, \varepsilon)} u(x) do(x) \rightarrow u(y). \end{aligned}$$

En regroupant tous les termes, on obtient (1.1.5). \square

Remarque : En appliquant le théorème de représentation de Green à une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on obtient :

$$\varphi(y) = \int_{\Omega} \Gamma(x, y) \Delta \varphi(x) dx. \quad (1.1.7)$$

Ce qui peut être écrit symboliquement comme :

$$\Delta_x \Gamma(x, y) = \delta_y, \quad (1.1.8)$$

où Δ_x est l'opérateur de Laplace respectivement à la première variable de Γ , et δ_y est la mesure de Dirac, ce qui signifie que pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\delta_y(\varphi) := \varphi(y).$$

L'équation (1.1.8) explique la terminologie "solution fondamental" pour Γ , ainsi que le choix des constantes dans la définition (1.1.4).

En conséquence du théorème de représentation de Green : Si nous connaissons Δu , alors u est complètement déterminé par ses valeurs et celles de sa dérivée normale sur $\partial\Omega$. En particulier, une fonction harmonique sur Ω peut être totalement reconstruite depuis ses valeurs sur le bord. Nous pouvons alors nous demander si, inversement, on peut construire une fonction harmonique pour des valeurs arbitraires sur $\partial\Omega$ pour la fonction et sa dérivée normale. Même en ignorant le fait qu'il faudrait imposer certaines conditions de régularité comme la continuité sur certaines données, nous trouverions que ce n'est pas possible en général, mais que nous pouvons prescrire essentiellement qu'une seule de ces deux données.

Dans tous les cas, le théorème de la divergence (1.1.1) pour $V(x) = \nabla u(x)$ implique qu'une fonction harmonique u doit satisfaire

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(z) d\sigma(z) = \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = 0, \quad (1.1.9)$$

du fait que $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$. On a alors que la dérivée normale ne peut pas être totalement arbitraire.

Définition 1.1.6. Une fonction $G(x, y)$, définie pour $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$, est appelée une fonction de Green sur Ω si

- (1) $G(x, y) = 0$ pour $x \in \partial\Omega$,
- (2) $h(x, y) := G(x, y) - \Gamma(x, y)$ est harmonique en $x \in \Omega$ (donc aussi en particulier au point $x = y$).

Nous assumons à présent qu'une fonction de Green $G(x, y)$ sur Ω existe (ce qui est vrai pour tout Ω sous les conditions que nous avons ici). À présent on remplace $v(x)$ par $h(x, y)$ dans (1.1.3), que l'on soustrait (1.1.5), on obtient :

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} d\sigma(x) + \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(x) dx. \quad (1.1.10)$$

L'équation (1.1.10) implique particulièrement qu'une fonction harmonique u est déterminée par ses valeurs sur le bord $u|_{\partial\Omega}$.

Cette construction soulève la question suivante : Si nous avons les fonctions $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pouvons nous obtenir une solution au problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= f(x) \text{ pour } x \in \Omega \\ u(x) &= \varphi(x) \text{ pour } x \in \partial\Omega\end{aligned}\tag{1.1.11}$$

par la formule de représentation

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} d\sigma(x) + \int_{\Omega} G(x, y) f(x) dx \quad ? \tag{1.1.12}$$

Après tout, si u est solution, alors u vérifie cette formule par (1.1.10).

Essentiellement, la réponse est oui. Cependant pour que cela fonctionne réellement, nous devons imposer des conditions sur φ et f . Une condition naturelle est la continuité de ces deux fonctions. Pour φ , cette condition se révèle être suffisante, sous condition que $\partial\Omega$ soit d'une certaine régularité. Si Ω est une boule, nous le vérifions dans le Théorème 1.1.7 dans le cas $f = 0$, c'est-à-dire le problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques. Pour f , la situation est plus subtile. Même si f est continue, la fonction u définie par (1.1.12) n'est pas nécessairement deux fois différentiable, par conséquent il faut faire attention au sens que l'on donne à l'équation $\Delta u = f$. En réalité, il faudrait demandé une régularité légèrement plus forte pour f , à savoir, f doit être Hölder continue, ainsi la fonction u donnée par (1.1.12) est deux fois différentiable and satisfait $\Delta u = f$.

De manière analogue, si pour $x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y$, on définit $H(x, y)$ par

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} H(x, y) = \frac{-1}{\|\partial\Omega\|} \text{ pour } x \in \partial\Omega$$

(où ici $\|\partial\Omega\|$ désigne la mesure de $\partial\Omega$, la bordure de Ω , donné par $\int_{\partial\Omega} d\sigma(x)$) et la différence $H(x, y) - \Gamma(x, y)$ harmonique comme précédemment, grâce à (1.1.5) on obtient

$$\begin{aligned}u(y) &= \frac{1}{\|\partial\Omega\|} \int_{\partial\Omega} u(x) d\sigma(x) - \int_{\partial\Omega} H(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) d\sigma(x) \\ &\quad + \int_{\Omega} H(x, y) \Delta u(x) dx.\end{aligned}\tag{1.1.13}$$

Si maintenant nous avons u_1 et u_2 deux fonctions harmoniques tels que

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \text{ sur } \partial\Omega.$$

En appliquant (1.1.13) à la différence $u = u_1 - u_2$, on obtient

$$u_1(y) - u_2(y) = \frac{1}{\|\partial\Omega\|} \int_{\partial\Omega} (u_1(x) - u_2(x)) d\sigma(x) \tag{1.1.14}$$

Puisque le membre de droite de (1.1.14) ne dépend pas de y , $u_1 - u_2$ est constant sur Ω . En d'autres termes, une fonction harmonique u est déterminé par $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur $\partial\Omega$ à une constante près.

Nous voulons à présent calculer la fonction de Green G pour une boule $B(0, R)$. Pour $y \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\bar{y} := \begin{cases} \frac{R^2}{|y|^2} y & \text{pour } y \neq 0, \\ \infty & \text{pour } y = 0. \end{cases}$$

(\bar{y} est le point obtenu depuis y par réflexion à travers $\partial B(0, R)$). Nous posons ensuite

$$G(x, y) := \begin{cases} \Gamma(|x - y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R} |x - \bar{y}|\right) & \text{pour } y \neq 0, \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & \text{pour } y = 0. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

Pour $x \neq y$, $G(x, y)$ est harmonique en x , puisque pour $y \in \overset{\circ}{B}(0, R)$, le point \bar{y} réside à l'extérieur de $B(0, R)$. La fonction $G(x, y)$ a une unique singularité dans $B(0, R)$, à savoir $x = y$, et cette singularité est la même que $\Gamma(x, y)$. Nous allons tout d'abord donner une autre expression pour $G(x, y)$ avec $y \neq 0$.

$$|x - y| = \left(|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{|y|}{R} |x - \bar{y}| = \frac{|y|}{R} \left| x - \frac{R^2}{|y|^2} y \right| = \left| \frac{|y|}{R} x - \frac{R}{|y|} y \right| = \left(\frac{|x|^2 |y|^2}{R^2} + R^2 - 2\langle x, y \rangle \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous obtenons la formule

$$G(x, y) = \Gamma\left(\left(|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle\right)^{\frac{1}{2}}\right) - \Gamma\left(\left(\frac{|x|^2 |y|^2}{R^2} + R^2 - 2\langle x, y \rangle\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad (1.1.16)$$

qui montre que pour $x \in \partial B(0, R)$, c'est-à-dire, $|x| = R$, nous avons en effet

$$G(x, y) = 0.$$

Par conséquent, la fonction $G(x, y)$ définie par (1.1.15) est la fonction de Green pour $B(0, R)$.

L'équation (1.1.16) implique aussi la symétrie

$$G(x, y) = G(y, x). \quad (1.1.17)$$

De plus, comme $\Gamma(|x - y|)$ est monotone en $|x - y|$, de (1.1.16) on obtient

$$G(x, y) \leq 0 \text{ pour } x, y \in B(0, R). \quad (1.1.18)$$

Puisque pour $x \in \partial B(0, R)$ on a

$$|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle = \frac{|x|^2 |y|^2}{R^2} + R^2 - 2\langle x, y \rangle,$$

l'équation (1.1.16) implique pour $x \in \partial B(0, R)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_x} G(x, y) &= \frac{\partial}{\partial |x|} G(x, y) = \frac{1}{d\omega_d} \frac{|x|}{|x - y|^d} - \frac{1}{d\omega_d} \frac{|x|}{|x - y|^d} \frac{|y|^2}{R^2} \\ &= \frac{R^2 - |y|^2}{d\omega_d R} \frac{1}{|x - y|^d} \end{aligned}$$

En insérant ce résultat dans (1.1.10), nous obtenons une formule de représentation pour une fonction harmonique $u \in C^2(B(0, R))$ en fonction de ses valeurs sur le bord $\partial B(0, R)$

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{d\omega_d R} \int_{\partial B(0, R)} \frac{u(x)}{|x - y|^d} d\sigma(x). \quad (1.1.19)$$

Cette condition de régularité peut être affaiblie ; en effet, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.1.7 (Formule de représentation de Poisson ; solution du problème de Dirichlet sur la boule). *Soit $\varphi : \partial B(0, R) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.*

Alors u définie par

$$u(y) := \begin{cases} \frac{R^2 - |y|^2}{d\omega_d R} \int_{\partial B(0, R)} \frac{\varphi(x)}{|x - y|^d} d\sigma(x) & \text{pour } y \in \overset{\circ}{B}(0, R), \\ \varphi(y) & \text{pour } y \in \partial B(0, R), \end{cases} \quad (1.1.20)$$

est harmonique sur la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(0, R)$ et continue sur la boule fermée $B(0, R)$.

Démonstration. Comme G est harmonique en y , alors le noyau de la formule de représentation de Poisson

$$K(x, y) := \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x, y) = \frac{R^2 - |y|^2}{d\omega_d R} |x - y|^{-d}.$$

l'est aussi. On notera que le noyau est positif.

Donc u est aussi harmonique.

Il reste à montrer la continuité de u sur le bord $\partial B(0, R)$. Nous commençons par insérer la fonction harmonique $u \equiv 1$ dans l'équation (1.1.19), ce qui nous donne

$$\int_{\partial B(0, R)} K(x, y) d\sigma(x) = 1 \text{ pour tout } y \in \overset{\circ}{B}(0, R). \quad (1.1.21)$$

Nous considérons à présent $y_0 \in \partial B(0, R)$. Comme φ est continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon \text{ pour } |y - y_0| < \delta.$$

On pose

$$\mu := \sup_{y \in \partial B(0, R)} |\varphi(y)|.$$

Par (1.1.20), (1.1.21) nous avons pour $|y - y_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |u(y) - u(y_0)| &= \left| \int_{\partial B(0, R)} K(x, y) (\varphi(x) - \varphi(y_0)) \, do(x) \right| \\ &\leq \int_{|x - y_0| \leq 2\delta} K(x, y) |\varphi(x) - \varphi(y_0)| \, do(x) \\ &\quad + \int_{|x - y_0| > 2\delta} K(x, y) |\varphi(x) - \varphi(y_0)| \, do(x) \\ &\leq \varepsilon + 2\mu \frac{R^2 - |y|^2}{d\omega_d R} \int_{|x - y_0| > 2\delta} |x - y|^{-d} \, do(x) \\ &\leq \varepsilon + 2\mu \left(R^2 - |y|^2 \right) \frac{R^{d-2}}{\delta^d} \end{aligned}$$

(Pour estimer la seconde intégrale, notons que puisque $|y - y_0| < \delta$, pour $|x - y_0| > 2\delta$ on a $|x - y| \geq \delta$.)

Puisque $|y_0| = R$, par continuité de la fonction norme au carré, nous avons qu'il existe $\eta > 0$ avec $\eta < \delta$, tel que pour $|y - y_0| < \eta$,

$$\left| |y_0|^2 - |y|^2 \right| = R^2 - |y|^2 \leq \frac{\varepsilon \delta^d}{4\mu R^{d-2}}$$

Ainsi pour $|y - y_0| < \eta$, nous avons

$$|u(y) - u(y_0)| \leq \varepsilon$$

On en conclut que u est continu en y_0 . □

Corollaire 1.1.8. *Pour $\varphi \in C^0(\partial B(0, R))$, il existe une unique solution $u \in C^2(\overset{\circ}{B}(0, R)) \cap C^0(B(0, R))$ du problème de Dirichlet*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \text{ pour } x \in \overset{\circ}{B}(0, R), \\ u(x) &= \varphi(x) \text{ pour } x \in \partial B(0, R). \end{aligned}$$

Démonstration. Le Théorème 1.1.7. montre l'existence.

L'unicité vient de l'équation (1.1.10). Cependant dans l'équation (1.1.10) nous avons supposé $u \in C^2(B(0, R))$, tandis qu'ici, plus généralement, nous avons considéré la continuité sur le bord. Cette difficulté est assez aisément contournée :

puisque u est harmonique sur $\overset{\circ}{B}(0, R)$, u est de classe C^2 sur $\overset{\circ}{B}(0, R)$, par exemple grâce au Corollaire 1.1.9. ci-dessous.

Par conséquent, pour $|y| < r < R$, appliquant (1.1.19) avec r à la place de R , nous obtenons

$$u(y) = \frac{r^2 - |y|^2}{d\omega_d r} \int_{\partial B(0, r)} \frac{u(x)}{|x - y|^d} d\sigma(x).$$

Comme u est continue sur $B(0, R)$, nous pouvons faire tendre r vers R pour obtenir la formule de représentation de Poisson en toute généralité. \square

Corollaire 1.1.9. *Toute fonction harmonique $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction analytique réelle sur Ω .*

Démonstration. Soit $z \in \Omega$, et prenons R tel que $B(z, R) \subset \Omega$. Alors par (1.1.19), pour $y \in B(z, R)$,

$$u(y) = \frac{R^2 - |y - z|^2}{d\omega_d R} \int_{\partial B(z, R)} \frac{u(x)}{|x - y|^d} d\sigma(x),$$

est une fonction analytique réelle de $y \in \overset{\circ}{B}(z, R)$. \square

1.2 Propriétés de la valeur moyenne des fonctions harmoniques. Fonctions sous-harmoniques. Principe du maximum

Théorème 1.2.1 (Formule de la valeur moyenne). *Une application continue $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si, et seulement si, pour tout boule $B(x_0, r) \subset \Omega$,*

$$u(x_0) = S(u, x_0, r) := \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\sigma(x) \text{ (moyenne sphérique)} \quad (1.2.1)$$

ou de manière équivalente, si pour toute boule $B(x_0, r) \subset \Omega$,

$$u(x_0) = K(u, x_0, r) := \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B(x_0, r)} u(x) dx. \quad (1.2.2)$$

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons u harmonique. Alors (1.2.1) vient de la formule de Poisson (1.1.19) (comme nous avons uniquement écrit (1.1.19) pour la boule $B(0, R)$, il suffit de prendre la fonction harmonique $v(x) := u(x + x_0)$ et appliquer la formule au point $x = 0$). De manière alternative, nous pouvons

prouver (1.2.1) grâce à l'observation suivante :

Supposons $u \in C^2(\mathring{B}(y, r))$, $0 < \rho < r$. Alors par (1.1.1)

$$\begin{aligned}
\int_{B(y, \rho)} \Delta u(x) dx &= \int_{\partial B(y, \rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial B(0, 1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y + \rho\omega) \rho^{d-1} d\sigma(\omega) \\
&\quad \text{en coordonnées polaires } \omega = \frac{x - y}{\rho} \\
&= \rho^{d-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_{\partial B(0, 1)} u(y + \rho\omega) d\sigma(\omega) \right) \\
&= d\omega_d \rho^{d-1} \frac{\partial}{\partial \rho} S(u, y, \rho). \tag{1.2.3}
\end{aligned}$$

Comme u est harmonique, on a que $\frac{\partial}{\partial \rho} S(u, y, \rho) = 0$, et donc $S(u, y, \rho)$ est constant en ρ .

De plus, par continuité de u on a

$$u(y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} S(u, y, \rho), \tag{1.2.4}$$

ce qui implique la propriété de la valeur moyenne sphérique.

Comme

$$K(u, x_0, r) = \frac{d}{r^d} \int_0^r S(u, x_0, \rho) \rho^{d-1} d\rho \tag{1.2.5}$$

nous obtenons (1.2.2) si (1.2.1) est vrai pour tout rayon ρ avec $B(x_0, \rho) \subset \Omega$.

(\Leftarrow) Nous venons juste de voir que la formule valeur moyenne de la sphère implique celle de la boule.

L'implication réciproque est aussi vraie :

Si $K(u, x_0, r)$ est constant en tant que fonction de r , c'est-à-dire, par (1.2.5)

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} K(u, x_0, r) = \frac{d}{r} S(u, x_0, r) - \frac{d}{r} K(u, x_0, r),$$

alors $S(u, x_0, r)$ est aussi constant en r , et par (1.2.4) cela doit donc toujours être égal à $u(x_0)$.

Supposons à présent (1.2.1) pour $B(x_0, r) \subset \Omega$. Nous voulons d'abord montrer que u doit alors être régulière. Pour cela, nous utilisons la construction générale suivante :

Posons

$$\phi(t) := \begin{cases} c_d \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la constante c_d est choisie telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(|x|) dx = 1.$$

On notera que la fonction $\phi(|x|)$ est C^∞ . [cf. Appendice]
 Pour $f \in L^1(\Omega)$, $B(y, r) \subset \Omega$ on considère la régularisation

$$f_r(y) := \frac{1}{r^d} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|y-x|}{r}\right) f(x) dx. \quad (1.2.6)$$

On a que f_r est infiniment dérivable par rapport à la variable y [cf. Proposition A.0.1]. Maintenant, comme (1.2.1) est vrai par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} u_r(y) &= \frac{1}{r^d} \int_0^r \int_{\partial B(y,s)} \phi\left(\frac{s}{r}\right) u(x) d\sigma(x) ds \\ &= \frac{1}{r^d} \int_0^r \phi\left(\frac{s}{r}\right) d\omega_d s^{d-1} S(u, y, s) ds \\ &= u(y) \int_0^1 \phi(\sigma) d\omega_d \sigma^{d-1} d\sigma \\ &= u(y) \int_{B(0,1)} \phi(|x|) dx \\ &= u(y). \end{aligned}$$

Ainsi, une fonction vérifiant la formule de la valeur moyenne sphérique satisfait aussi

$$u_r(x) = u(x), \text{ à condition que } B(x, r) \subset \Omega.$$

Donc, avec u_r infiniment dérivable, u l'est aussi. Nous pouvons donc reconsidérer (1.2.3), c'est-à-dire,

$$\int_{B(y,\rho)} \Delta u(x) dx = d\omega_d \rho^{d-1} \frac{\partial}{\partial \rho} S(u, y, \rho). \quad (1.2.7)$$

Si (1.2.7) est satisfait, et comme $S(u, x_0, \rho)$ est constant en ρ , par conséquent, le membre de droite de (1.2.7) disparaît pour tout y et ρ tel que $B(y, \rho) \subset \Omega$. Alors, on a

$$\Delta u(y) = 0, \text{ pour tout } y \in \Omega$$

et u est harmonique. □

Au lieu d'exiger la continuité de u , il suffit d'exiger que u soit mesurable et intégrable sur Ω . Le théorème précédent et sa preuve reste valide puisque dans la seconde partie nous n'avons pas utilisé la continuité de u .

Avec ces observations, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.2 (Lemme de Weyl). *Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et intégrable sur Ω . Supposons que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0.$$

Alors u est harmonique. De plus, u est régulière.

Démonstration. Nous considérons une nouvelle fois la suite régularisante

$$u_r(x) := \frac{1}{r^d} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|y-x|}{r}\right) u(y) dy.$$

Pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $r < \text{dist}(\text{supp}(\varphi), \partial\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_r(x) \Delta\varphi(x) dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{r^d} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|y-x|}{r}\right) u(y) dy \Delta\varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} u(y) \frac{1}{r^d} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|y-x|}{r}\right) \Delta\varphi(x) dx dy \\ &= \int_{\Omega} u(y) \Delta\varphi_r(y) dy \end{aligned}$$

En échangeant les intégrales, on observe que

$(\Delta\varphi)_r = \Delta(\varphi_r)$, donc le laplacien commute

avec la suite régularisation.

$$= 0$$

La dernière égalité vient du fait que par notre hypothèse sur r , nous avons $\varphi_r \in C_0^\infty(\Omega)$.

Comme u_r est assez régulière, cela implique

$$\int_{\Omega} \Delta u_r(x) \varphi(x) dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega_r),$$

avec $\Omega_r := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > r\}$.

Ainsi,

$$\Delta u_r = 0 \text{ sur } \Omega_r.$$

Donc, u_r est harmonique sur Ω_r .

Nous posons $R = \text{dist}(\partial\Omega, \text{supp}(\varphi)) > 0$, et nous considérons $0 < r \leq \frac{1}{2}R$.

Alors u_r satisfait la formule de la valeur moyenne sur toute boule de centre dans Ω_r et de rayon $\leq \frac{1}{2}R$. Comme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} |u_r(y)| dy &\leq \int_{\Omega_r} \frac{1}{r^d} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|x-y|}{r}\right) |u(x)| dx dy \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x)| dx \end{aligned}$$

qui est obtenu en interchangeant les intégrales et utilisant le fait que $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{r^d} \phi\left(\frac{|x-y|}{r}\right) dy = 1$.

Ainsi u_r a une norme uniformément bornée dans $L^1(\Omega)$, puisque $u \in L^1(\Omega)$.

Comme les fonctions u_r satisfont la formule de la valeur moyenne sur toutes les boules de rayon $\frac{1}{2}R$, alors elles sont aussi uniformément bornées (en gardant R fixé, et faisant tendre r vers 0). De plus, du fait de

$$\begin{aligned} |u_r(x_1) - u_r(x_2)| &= \left| \frac{1}{\omega_d} \left(\frac{2}{R} \right)^d \left(\int_{B(x_1, R/2)} u_r(x) dx - \int_{B(x_2, R/2)} u_r(x) dx \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_d} \left(\frac{2}{R} \right)^d \int_{B(x_1, R/2) \setminus B(x_2, R/2) \cup B(x_2, R/2) \setminus B(x_1, R/2)} |u_r(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{\omega_d} \left(\frac{2}{R} \right)^d \sup |u_r| 2\text{Vol}(B(x_1, R/2) \setminus B(x_2, R/2)) \end{aligned}$$

la suite (u_r) est équicontinue [cf. Définition A.0.3]. Ainsi, par le théorème d'Ascoli-Arzelà [cf. Théorème A.0.4], pour $r \rightarrow 0$, une sous-suite de (u_r) converge uniformément vers une fonction continue v . Comme u est dans $L^1(\Omega)$, et pour presque tout $x \in \Omega$, $u(x)$ est la limite de $u_r(x)$ pour $r \rightarrow 0$ [cf. Lemme A.0.2], nous devons avoir $u = v$. Donc u est continue, et comme tous les u_r satisfont la formule de la valeur moyenne, u la vérifie aussi. Le Théorème 1.2.1 implique donc le résultat. \square

Remarque : L'hypothèse intégrable peut être affiné en localement intégrale. En effet, dans la preuve nous disons que u_r est borné uniformément en norme $L^1(\Omega)$ si $u \in L^1(\Omega)$, or si u est uniquement localement intégrable le raisonnement fait doit être appliqué localement dans Ω pour obtenir intégrabilité uniforme locale de u_r .

Définition 1.2.3. Soit $v : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction semie-continue supérieurement mais non identiquement $-\infty$. Une telle fonction v est appelée sous-harmonique si pour tout sous domaine $\Omega' \subset \subset \Omega$, et pour toute fonction harmonique $u : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ (on suppose $u \in C^0(\overline{\Omega'})$) avec

$$v \leq u \text{ sur } \partial\Omega'$$

nous avons

$$v \leq u \text{ sur } \Omega'.$$

Une fonction $w : \Omega \rightarrow]-\infty, \infty]$, semie-continue inférieurement, $w \not\equiv \infty$, est appelée surharmonique si $-w$ est sous-harmonique.

Théorème 1.2.4. Une fonction $v : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$ (semie-continue supérieurement, $\not\equiv -\infty$) est sous-harmonique si, et seulement si, pour toute boule $B(x_0, r) \subset \Omega$,

$$v(x_0) \leq S(v, x_0, r), \tag{1.2.8}$$

ou de manière équivalente, si pour tout boule

$$v(x_0) \leq K(v, x_0, r). \tag{1.2.9}$$

Démonstration. (\implies) Comme v est semie-continue supérieurement, il existe [cf. Théorème A.0.5] une suite décroissante monotone $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues avec $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Par le Théorème 1.1.7, pour toute fonction v_n , il existe une fonction harmonique

$$u_n : B(x_0, r) \longrightarrow \mathbb{R}$$

avec

$$u_n|_{\partial B(x_0, r)} = v_n|_{\partial B(x_0, r)} \quad (\geq v_n|_{\partial B(x_0, r)}),$$

donc par conséquent,

$$S(u_n, x_0, r) = S(v_n, x_0, r).$$

Comme v est sous-harmonique et u_n est harmonique, nous obtenons

$$v(x_0) \leq u_n(x_0) = S(u_n, x_0, r) = S(v_n, x_0, r).$$

A présent, en faisant tendre $n \rightarrow \infty$, on obtient (1.2.8). L'inégalité de la valeur moyenne pour la boule vient de celle pour la sphère (cf. (1.2.5)).

(\impliedby) Pour montrer cette implication, nous utiliserons ce lemme suivant :

Lemme 1.2.5. *Supposons que v satisfait l'inégalité de la valeur moyenne (1.2.8) ou (1.2.9) pour toute boule $B(x_0, r) \subset \Omega$. Alors v satisfait aussi le principe du maximum, c'est-à-dire que si il existe $x_0 \in \Omega$ tel que*

$$v(x_0) = \sup_{x \in \Omega} v(x),$$

alors v est constante. En particulier, si Ω est borné et $v \in C^0(\overline{\Omega})$, alors

$$v(x) \leq \max_{y \in \partial \Omega} v(y) \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Démonstration. Supposons

$$v(x_0) = \sup_{x \in \Omega} v(x) =: M.$$

Alors

$$\Omega_M := \{y \in \Omega \mid v(y) = M\} \neq \emptyset.$$

Soit $y \in \Omega_M$, $B(y, r) \subset \Omega$. Comme (1.2.8) implique (1.2.9) (cf. (1.2.5)), nous appliquons (1.2.9) pour obtenir

$$0 = v(y) - M \leq \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B(y, r)} v(x) - M dx. \quad (1.2.10)$$

Comme M est le supremum de v , nous avons toujours $v(x) \leq M$, et nous obtenons donc $v(x) = M$ pour tout $x \in B(y, r)$. Ainsi, Ω_M contient avec y toutes les boules $B(y, r) \subset \Omega$, et donc doit être égal avec Ω , puisque Ω est supposé connexe. Donc, $u(x) = M$ pour tout $x \in \Omega$, ce qui achève la preuve du lemme. \square

Nous pouvons alors conclure la preuve du Théorème 1.2.4 :
 Soit u comme dans la Définition 1.2.3. Alors $v - u$ vérifie aussi l'inégalité de la valeur moyenne, donc par le lemme, $v - u$ vérifie aussi le principe du maximum.
 Ainsi,

$$v \leq u \text{ sur } \Omega', \text{ si } v \leq u \text{ sur } \partial\Omega'.$$

□

Corollaire 1.2.6. *Une fonction v de classe $C^2(\Omega)$ est sous-harmonique si, et seulement si,*

$$\Delta v \geq 0 \text{ sur } \Omega.$$

Démonstration. (\Leftarrow) Soient $y \in \Omega$, $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset \Omega$ et $0 < \rho < r$.
 Alors par (1.2.3),

$$0 \leq \int_{B(y, \rho)} \Delta v(x) = d\omega_d \rho^{d-1} \frac{\partial}{\partial \rho} S(v, y, \rho).$$

Pour $0 < \rho < r$, nous avons

$$d\omega_d \rho^{d-1} \geq 0,$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial \rho} S(v, y, \rho) \geq 0,$$

ce qui implique que $S(v, y, \rho)$ est croissante en ρ .
 D'où, pour $0 < \rho < r$,

$$S(v, y, \rho) \leq S(v, y, r).$$

Comme le côté gauche de l'inégalité tend vers $v(y)$ quand $\rho \rightarrow 0$, nous obtenons

$$v(y) \leq S(v, y, r).$$

Ainsi par le Théorème 1.2.4, v est sous-harmonique.

(\Rightarrow) Procédons par contraposée. Supposons $\Delta v(y) < 0$. Comme $v \in C^2(\Omega)$, nous pouvons trouver une boule $B(y, r) \subset \Omega$ tel que $\Delta v < 0$ sur $B(y, r)$. En appliquant la première partie de la preuve à la fonction $-v$, nous obtenons

$$v(y) > S(v, y, r),$$

et alors v n'est pas sous-harmonique.

□

Donnons à présent quelques fonctions sous-harmoniques :

1. Soit $d \geq 2$. Nous avons

$$\Delta |x|^\alpha = (d\alpha + \alpha(\alpha - 2)) |x|^{\alpha-2}.$$

En effet,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} |x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-1} \frac{x_j}{|x|}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} |x|^\alpha = \alpha(\alpha-1) |x|^{\alpha-2} \frac{x_j^2}{|x|^2} + \alpha |x|^{\alpha-1} \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3}$$

Donc $|x|^\alpha$ est sous-harmonique pour $\alpha \geq 2-d$. (Ce n'est pas surprenant puisque $|x|^{2-d}$ est harmonique.)

2. Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique et positive, $\beta \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta u^\beta &= \sum_{j=1}^d (\beta u^{\beta-1} u_{x_j x_j} + \beta(\beta-1) u^{\beta-2} u_{x_j} u_{x_j}) \\ &= \sum_{j=1}^d \beta(\beta-1) u^{\beta-2} u_{x_j} u_{x_j}, \end{aligned}$$

puisque u est harmonique. Comme u est supposée positive et $\beta \geq 1$, alors u^β est sous-harmonique.

3. Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de nouveau harmonique et positive. Alors

$$\Delta \log u = \sum_{j=1}^d \left(\frac{u_{x_j x_j}}{u} - \frac{u_{x_j} u_{x_j}}{u^2} \right) = - \sum_{j=1}^d \frac{u_{x_j} u_{x_j}}{u^2},$$

puisque u est harmonique. Donc, $\log u$ est sur-harmonique, et $-\log u$ est donc sous-harmonique.

4. L'exemple précédent peut se généraliser :

Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique, $f : u(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors $f \circ u$ est sous-harmonique. Pour commencer, on suppose $f \in C^2$. On a alors

$$\begin{aligned} \Delta f(u(x)) &= \sum_{j=1}^d (f'(u(x)) u_{x_j x_j} + f''(u(x)) u_{x_j} u_{x_j}) \\ &= \sum_{j=1}^d f''(u(x)) (u_{x_j})^2 \quad (\text{puisque } u \text{ est harmonique}) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

puisque pour une fonction convexe de classe C^2 , $f'' \geq 0$.

Si la fonction convexe n'est pas de classe C^2 , il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions convexes de classe C^2 convergeant uniformément vers f localement. Par ce qui précède, $f_n \circ u$ est sous-harmonique, et donc satisfait l'inégalité de la valeur moyenne. Comme $f_n \circ u$ converge vers $f \circ u$ localement uniformément, $f \circ u$ satisfait aussi l'inégalité de la valeur moyenne, et donc est sous-harmonique par le Théorème 1.2.4.

Nous retournons à présent étudier les fonctions harmoniques. Si u est harmonique, alors u et $-u$ sont toutes les deux sous-harmoniques, et nous obtenons par le Lemme 1.2.5 le résultat suivant :

Corollaire 1.2.7 (Principe du maximum version forte). *Soit u une fonction harmonique sur Ω . Si il existe $x_0 \in \Omega$ tel que*

$$u(x_0) = \sup_{x \in \Omega} u(x) \text{ ou } u(x_0) = \inf_{x \in \Omega} u(x),$$

alors u est constant sur Ω .

Une version plus faible du Corollaire 1.2.7 est le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.8 (Principe du maximum version faible). *Supposons Ω borné et soit $u \in C^0(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique. Alors pour tout $x \in \Omega$,*

$$\min_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y).$$

Démonstration. Sinon, u atteindrait son supremum ou infimum en un point intérieur de Ω . Alors u serait constante par le Corollaire 1.2.7, et l'inégalité serait toujours vraie. \square

Corollaire 1.2.9 (Unicité des solutions de l'équation de Poisson). *Soient $f \in C^0(\Omega)$, Ω borné, $u_1, u_2 \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ solutions de l'équation de Poisson*

$$\Delta u_i(x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega \quad (i = 1, 2).$$

Si $u_1(z) \leq u_2(z)$ pour tout $z \in \partial\Omega$, alors

$$u_1(x) \leq u_2(x) \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

En particulier, si

$$u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega},$$

alors

$$u_1 = u_2.$$

Démonstration. En appliquant le principe du maximum à la fonction harmonique $u_1 - u_2$, on obtient le résultat voulu. En effet par le Corollaire 1.2.8, on obtient $u_1(x) - u_2(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$. \square

En particulier, pour $f = 0$, on obtient de nouveau l'unicité des fonctions harmoniques pour des valeurs de bord données.

Remarque : L'implication réciproque du Théorème 1.2.1 peut se voir de la façon suivante : Nous observons que le principe du maximum requière uniquement l'inégalité de la valeur moyenne. Donc, l'unicité du Corollaire 1.2.9 reste vraie pour les fonctions qui satisfont l'inégalité de la valeur moyenne. D'autre part, par le Théorème 1.1.7, pour des valeurs continues sur le bord il existe une extension harmonique sur la boule, et cette extension harmonique satisfait aussi l'inégalité de la valeur moyenne par l'implication directe du Théorème 1.2.1. De ce fait, par unicité, toute fonction continue qui satisfait la propriété de la valeur moyenne doit être harmonique sur toute boule de son domaine de définition Ω ,

par conséquent Ω tout entier.

Comme application de la version faible du principe du maximum, nous allons montrer la possibilité d'enlever les singularités isolées des fonctions harmoniques :

Corollaire 1.2.10. *Soit $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), $u : \Omega \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique et bornée. Alors u peut être étendue en une fonction harmonique sur Ω tout entier ; c'est-à-dire, il existe une fonction harmonique*

$$\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

qui coïncide avec u sur $\Omega \setminus \{x_0\}$.

Démonstration. Par une simple transformation, on peut supposer $x_0 = 0$ et que Ω contient la boule $B(0, 2)$. Par le Théorème 1.1.7, nous pouvons résoudre le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= 0 \text{ dans } \overset{\circ}{B}(0, 1), \\ \tilde{u} &= u \text{ sur } \partial B(0, 1). \end{aligned}$$

Nous considérons la fonction de Green sur $B(0, 1)$ pour $y = 0$ suivante :

$$G(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{pour } d = 2, \\ \frac{1}{d(2-d)\omega_d} (|x|^{2-d} - 1) & \text{pour } d > 2. \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$u_\varepsilon(x) := \tilde{u}(x) - \varepsilon G(x) \quad (0 < |x| \leq 1).$$

Tout d'abord,

$$u_\varepsilon(x) = \tilde{u}(x) = u(x) \text{ pour } |x| = 1 \quad (1.2.11)$$

Premièrement, u étant une fonction assez régulière, elle possède une dérivée bornée sur le bord $\partial B(0, 1)$. Deuxièmement (avec $r = |x|$), $\frac{\partial}{\partial r} G(x) > 0$. Nous obtenons, pour ε suffisamment grand,

$$u_\varepsilon(x) > u(x) \text{ pour } 0 < |x| < 1.$$

Mais nous avons aussi

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_\varepsilon(x) = \infty \text{ pour } \varepsilon > 0$$

Comme u est bornée, pour tout $\varepsilon \geq 0$ il existe $r(\varepsilon) > 0$ tel que

$$u_\varepsilon(x) > u(x) \text{ pour } |x| < r(\varepsilon). \quad (1.2.12)$$

Nous savons que u_ε est harmonique sur $\overset{\circ}{B}(0, 1)$ et u est harmonique sur $\overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus \{0\}$, donc

$$\Delta(u_\varepsilon - u) = 0 \text{ sur } \overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus \{0\}$$

i.e. $u_\varepsilon - u$ est harmonique sur $\overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus \{0\}$, donc à fortiori sur la région annulaire $\overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus B(0, r(\varepsilon))$.

De plus, par (1.2.11) et (1.2.12) nous avons

$$\begin{aligned} u_\varepsilon - u &= 0 \text{ sur } \partial B(0, 1) \\ u_\varepsilon - u &> 0 \text{ sur } \partial B(0, r(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Donc par le principe du maximum version faible, pour tout $\varepsilon \geq 0$,

$$u_\varepsilon - u \geq 0 \text{ sur } \overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus B(0, r(\varepsilon)).$$

Ainsi

$$u_\varepsilon - u \geq 0 \text{ sur } \overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus \{0\},$$

et en choisissant $\varepsilon = 0$, nous obtenons

$$\tilde{u} \geq u \text{ sur } \overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus \{0\}.$$

En itérant un raisonnement similaire, c'est-à-dire que nous considérons $-u$, que nous cherchons à prolonger harmoniquement en $-\tilde{u}$.

Nous posons la suite, pour $\varepsilon \geq 0$,

$$v_\varepsilon(x) := -\tilde{u}(x) - \varepsilon G(x) \quad (0 < |x| \leq 1).$$

Nous avons

$$\Delta(v_\varepsilon - (-u)) = 0,$$

et par le principe du maximum version faible,

$$v_\varepsilon + u \geq 0 \text{ sur } \overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus \{0\}.$$

En choisissant de nouveau $\varepsilon = 0$, nous obtenons

$$\tilde{u} \leq u \text{ sur } \overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus \{0\}.$$

Ainsi, u coïncide avec \tilde{u} dans $B(0, 1) \setminus \{0\}$. Comme \tilde{u} est harmonique dans toute la boule $B(0, 1)$, nous avons trouver l'extension désirée. □

Grâce au Corollaire 1.2.10, nous remarquons que tous les problèmes de Dirichlet pour les fonctions harmoniques n'ont pas de solutions. Par exemple, il n'y a pas de solution au problème suivant :

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \text{ dans } \overset{\circ}{B}(0, 1) \setminus \{0\}, \\ u(x) &= 0 \text{ pour } |x| = 1, \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

En effet, par le Corollaire 1.2.10 toute solution u peut être étendue en une fonction harmonique sur toute la boule $\mathring{B}(0, 1)$, mais une telle fonction harmonique doit être nulle partout par le Corollaire 1.2.8 car la solution s'annule sur le bord $\partial B(0, 1)$, et donc la fonction harmonique ne peut pas atteindre 1 en $x = 0$.

Une autre conséquence du principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques est une estimation du gradient pour les solutions de l'équation de Poisson :

Corollaire 1.2.11. *Supposons que dans Ω*

$$\Delta u(x) = f(x)$$

avec une fonction f bornée. Soit $x_0 \in \Omega$ et $R := \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Alors

$$|u_{x_j}(x_0)| \leq \frac{d}{R} \sup_{\partial B(x_0, R)} |u| + \frac{R}{2} \sup_{B(x_0, R)} |f| \text{ pour } j = 1, \dots, d. \quad (1.2.13)$$

Démonstration. Nous considérons le cas où $j = 1$. Pour ce qui est des notations, posons

$$\mu := \sup_{\partial B(x_0, R)} |u|, \quad M := \sup_{B(x_0, R)} |f|.$$

Sans perdre de généralité, supposons de plus $x_0 = 0$.

Posons la fonction auxiliaire suivante définie sur $B(0, R)$

$$v(x) := \frac{\mu}{R^2} |x|^2 + x_1 (R - x_1) \left(\frac{d\mu}{R^2} + \frac{M}{2} \right).$$

Calculons ses dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} v(x) = 2 \frac{\mu}{R^2} x_j + \begin{cases} R \left(\frac{d\mu}{R^2} + \frac{M}{2} \right) - 2x_1 \left(\frac{d\mu}{R^2} + \frac{M}{2} \right) & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} v(x) = 2 \frac{\mu}{R^2} + \begin{cases} -2 \frac{d\mu}{R^2} - M & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j \neq 1 \end{cases}$$

Ainsi, v définie sur $B(0, R)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= -M, \\ v(0, x_2, \dots, x_d) &\geq 0 \text{ pour tout } x_2, \dots, x_d, \\ v(x) &\geq \mu \text{ pour } |x| = R, x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Nous considérons à présent

$$\tilde{u}(x) := \frac{1}{2} (u(x_1, \dots, x_d) - u(-x_1, \dots, x_d)).$$

Nous avons la majoration suivante de Laplacien

$$\begin{aligned} |\Delta \tilde{u}(x)| &= \left| \frac{1}{2} \Delta u(x) - \frac{1}{2} \Delta u(-x_1, \dots, x_d) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |f(x)| + \frac{1}{2} \sup_{B(x_0, R)} |\Delta u(x)| \\ &\leq \sup_{B(x_0, R)} |f(x)| = M \end{aligned}$$

Ainsi, sur la boule $B(0, R)$, nous avons

$$\begin{aligned} |\Delta \tilde{u}(x)| &\leq M, \\ \tilde{u}(0, x_2, \dots, x_d) &= 0 \text{ pour tout } x_2, \dots, x_d, \\ |\tilde{u}(x)| &\leq \mu \text{ pour } |x| = R. \end{aligned}$$

Considérons à présent la demie-boule $B^+ := \{|x| \leq R \mid x_1 > 0\}$. Les inégalités précédentes impliquent

$$\begin{aligned} \Delta(v \pm \tilde{u}) &\leq 0 \text{ dans } B^+, \\ v \pm \tilde{u} &\geq 0 \text{ sur } \partial B^+. \end{aligned}$$

Le principe du maximum (Lemme 1.2.5) implique

$$|\tilde{u}| \leq v \text{ dans } B^+.$$

Nous pouvons à présent conclure que

$$|u_{x_i}(0)| = \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \left| \frac{\tilde{u}(x_1, 0, \dots, 0)}{x_1} \right| \leq \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \frac{v(x_1, 0, \dots, 0)}{x_1} = \frac{d\mu}{R} + \frac{R}{2} M,$$

c'est-à-dire (1.2.13). \square

Voyons à présent d'autres conséquences de la formule de la valeur moyenne.

Corollaire 1.2.12 (Théorème de Liouville). *Soit $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique et bornée. Alors u est constante.*

Démonstration. Pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, par (1.2.2) pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} u(x_1) - u(x_2) &= \frac{1}{\omega_d r^d} \left(\int_{B(x_1, r)} u(x) dx - \int_{B(x_2, r)} u(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\omega_d r^d} \left(\int_{B(x_1, r) \setminus B(x_2, r)} u(x) dx - \int_{B(x_2, r) \setminus B(x_1, r)} u(x) dx \right) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Par hypothèse

$$|u(x)| \leq M,$$

et pour $r \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{\omega_d r^d} \|B(x_1, r) \setminus B(x_2, r)\| \rightarrow 0.$$

Ceci implique que le membre de droite de l'égalité (1.2.14) converge vers 0 pour $r \rightarrow \infty$.

Par conséquent, nous obtenons

$$u(x_1) = u(x_2).$$

Comme x_1 et x_2 sont quelconques, u doit être constante. \square

Une autre preuve du Corollaire 1.2.12 vient du Corollaire 1.2.11 :

Par le Corollaire 1.2.11, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$, $i = 1, \dots, d$,

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{d}{R} \sup_{\mathbb{R}^d} |u|.$$

Comme u est bornée par hypothèse, le membre de droite tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$, et nous concluons que u est constant.

Cette preuve fonctionne aussi sous une hypothèse plus faible

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sup_{B(x_0, R)} |u| = 0.$$

Corollaire 1.2.13 (Inégalité de Harnack). *Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique et positive. Alors pour tout sous-domaine $\Omega' \subset \subset \Omega$, il existe une constante $c = c(d, \Omega', \Omega)$ tel que*

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u \quad (1.2.15)$$

Démonstration. Nous nous plaçons d'abord dans le cas suivant : $\Omega' = \overset{\circ}{B}(x_0, r)$, en supposant que $B(x_0, 4r) \subset \Omega$.

Soient $y_1, y_2 \in B(x_0, r)$. Par (1.2.2), nous avons

$$\begin{aligned} u(y_1) &= \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B(y_1, r)} u(y) dy \\ &\leq \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B(x_0, 2r)} u(y) dy \\ &\quad \text{puisque } u \geq 0 \text{ et } B(y_1, r) \subset B(x_0, 2r) \\ &= \frac{3^d}{\omega_d (3r)^d} \int_{B(x_0, 2r)} u(y) dy \\ &\leq \frac{3^d}{\omega_d (3r)^d} \int_{B(y_2, 3r)} u(y) dy \\ &\quad \text{puisque } u \geq 0 \text{ et } B(x_0, 2r) \subset B(y_2, 3r) \\ &= 3^d u(y_2). \end{aligned}$$

Comme y_1 et y_2 étaient quelconques, nous obtenons en particulier

$$\sup_{B(x_0, r)} u \leq 3^d \inf_{B(x_0, r)} u,$$

ce qui est le résultat attendu dans notre cas particulier.

Pour un sous-domaine arbitraire $\Omega' \subset\subset \Omega$, nous choisissons $r > 0$ tel que

$$r < \frac{1}{4} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Comme Ω' est connexe, il existe un chemin dans Ω' qui relie tout points y_1, y_2 de Ω' . De plus, Ω' étant borné et inclus dans un compact, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que le chemin qui relie y_1 à y_2 soit recouvert par au plus m boules de rayon r et de centre dans Ω' . En composant les inégalités obtenus dans le cas précédent pour toutes les boules recouvrant notre chemin, nous obtenons

$$u(y_1) \leq 3^{md} u(y_2).$$

y_1 et y_2 étant quelconques, on obtient (1.2.15). \square

L'inégalité de Harnack implique le résultat suivant :

Corollaire 1.2.14 (Théorème de convergence de Harnack). *Soit $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions harmoniques. Si il existe $y \in \Omega$ pour lequel la suite $(u_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors u_n converge sur tout sous-domaine $\Omega' \subset\subset \Omega$ uniformément vers une fonction harmonique.*

Démonstration. La suite étant croissante et bornée, nous avons que $u_n(y)$ converge pour $n \rightarrow \infty$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq m \geq n_0$,

$$0 \leq u_n(y) - u_m(y) < \varepsilon.$$

Alors $u_n - u_m$ est une fonction harmonique positive (par croissance de la suite), et par le Corollaire 1.2.13,

$$\sup_{\Omega'} (u_n - u_m) \leq c\varepsilon$$

(en supposant, sans perdre de généralité, $y \in \Omega'$) avec c une constante qui dépend de d, Ω et Ω' .

Ainsi $(u_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément dans tout Ω' . De plus, la limite uniforme de fonctions harmoniques doit aussi satisfaire la formule de la valeur moyenne, et par conséquent être elle même harmonique par le Théorème 1.2.1. \square

Remarque : Nous pouvons supposer $y \in \Omega'$. En effet, supposons que $y \notin \Omega'$, alors comme Ω est ouvert, il existe \mathcal{O} un ouvert inclus dans Ω tel que $y \in \mathcal{O}$ et $\Omega' \subset \mathcal{O}$. D'où, par le même raisonnement, $(u_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément dans tout \mathcal{O} , donc à fortiori dans Ω' .

En résumé

Dans cette partie, nous avons rencontré quelques propriétés des fonctions harmoniques, c'est-à-dire, des solutions de l'équation de Laplace, ainsi que des solutions de l'équation de Poisson.

Nous avons trouvé l'unicité de la solution du problème de Dirichlet sur la boule (Théorème 1.1.7), et nous avons vu que les solutions sont régulières (Corollaire 1.1.9) et même satisfaisaient certaines estimations (Corollaire 1.2.11) et en particulier le principe du maximum (Corollaire 1.2.7, Corollaire 1.2.8), qui est aussi vrai pour les fonctions sous-harmoniques (Lemme 1.2.5). Tous ces résultats sont typiques et caractéristiques des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques.

2 Le principe du maximum

Dans toute cette partie, Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^d . Toutes fonctions u est supposée de classe $C^2(\Omega)$.

2.1 Le principe du maximum de E. Hopf

Nous souhaitons maintenant étudier les opérateurs différentiels elliptiques linéaires de la forme :

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x),$$

où nous imposons les conditions suivantes sur les coefficients :

1. Symétrie : $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ pour tout i, j et pour tout $x \in \Omega$.
2. Ellipticité : Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \text{ pour tout } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d$$

(Ceci est la condition clé). En particulier, la matrice $(a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$ est définie positive pour tout x , et la plus petite valeur propre est supérieure ou égale à λ .

3. Majoration des coefficients : Il existe une constante K telle que

$$|a_{ij}(x)|, |b_i(x)|, |c(x)| \leq K \text{ pour tout } i, j \text{ et pour tout } x \in \Omega.$$

Evidemment, l'opérateur de Laplace vérifie toutes ces conditions. Le but de cette partie est de prouver les principes du maximum pour les solutions de l'équation $Lu = 0$. Il s'avère que pour ce but, nous avons besoin d'imposer une condition supplémentaire sur le signe de $c(x)$, puisque dans le cas contraire aucun principe du maximum reste vrai, comme le montre l'exemple suivant : le problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} u''(x) + u(x) &= 0 \text{ sur } [0, \pi] \\ u(0) &= 0 = u(\pi), \end{aligned}$$

a pour solutions

$$u(x) = \alpha \sin(x)$$

pour un u quelconque, et selon le signe de α , ces solutions admettent un maximum ou un minimum à l'intérieur en $x = \pi/2$. Tandis que le problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} u''(x) - u(x) &= 0 \text{ sur } [0, \pi] \\ u(0) &= 0 = u(\pi), \end{aligned}$$

admet 0 comme unique solution.

Pour commencer, nous allons donner une preuve du principe du maximum version faible pour les fonctions sous-harmoniques (Lemme 1.2.5) qui ne dépend pas de la formule de la valeur moyenne :

Lemme 2.1.1. *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u \geq 0$ sur Ω . Alors*

$$\sup_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u. \quad (2.1.1)$$

(Comme u est continue et Ω est borné, et l'adhérence $\overline{\Omega}$ est un compact, le supremum de u sur Ω coïncide donc avec le maximum de u sur $\overline{\Omega}$.)

Remarque : Nous avons déjà que

$$\sup_{\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u.$$

La preuve ci-dessous montre l'inégalité inverse.

Démonstration. Nous considérons en premier lieu le cas où

$$\Delta u > 0 \text{ sur } \Omega.$$

Alors u ne peut pas atteindre son maximum en un point intérieur $x_0 \in \Omega$, puisque en un tel maximum, nous aurions

$$u_{x_j x_j}(x_0) \leq 0 \text{ pour } j = 1, \dots, d,$$

et donc aussi

$$\Delta u(x_0) \leq 0.$$

Nous revenons maintenant dans le cas général $\Delta u \geq 0$, et nous considérons la fonction auxiliaire suivante :

$$v(x) = e^{x_1},$$

qui vérifie

$$\Delta v = v > 0.$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\Delta(u + \varepsilon v) > 0 \text{ dans } \Omega,$$

et d'après le premier cas, nous obtenons

$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon v) = \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v).$$

Ainsi

$$\sup_{\Omega} u + \varepsilon \inf_{\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} v,$$

et en faisant tendre ε vers 0, nous obtenons (2.1.1). □

Théorème 2.1.2. Supposons $c(x) \equiv 0$, et $u \in C^2(\Omega)$ tel que

$$Lu \geq 0,$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) u_{x_i}(x) \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Alors

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial \Omega} u(x). \quad (2.1.3)$$

Dans le cas $Lu \leq 0$, nous obtenons un résultat analogue avec l'infimum.

Démonstration. Comme précédemment dans la preuve du Lemme 2.1.1, nous considérons tout d'abord le cas

$$Lu > 0.$$

Puisque en un maximum intérieur x_0 de u , nous avons

$$u_{x_i}(x_0) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, d,$$

et

$$(u_{x_i x_j}(x_0))_{i,j=1,\dots,d} \text{ est semie-définie négative,}$$

ainsi par la condition d'ellipticité, nous avons aussi

$$\begin{aligned} Lu(x_0) &= \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j}(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^d (AH)_{ii} \\ &= \text{tr}(AH) \leq 0, \end{aligned}$$

avec $A = (a_{ij}(x_0))_{i,j=1,\dots,d}$ et $H = (u_{x_i x_j}(x_0))_{i,j=1,\dots,d}$, et la dernière inégalité vient du fait que AH est une matrice semie-définie négative [le produit de deux matrices définies positives est symétrique définie positif] donc ses valeurs propres sont négatives.

Nous concluons donc qu'un tel maximum intérieur est impossible.

Retournons à présent au cas général $Lu \geq 0$, et considérons la fonction auxiliaire suivante

$$v(x) = e^{\alpha x_1}$$

avec $\alpha > 0$. Alors

$$Lv(x) = (\alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x)) v(x).$$

Comme Ω est borné, que les coefficients b_i sont aussi bornés, et que les coefficients vérifient $a_{ii} \geq \lambda$, nous avons pour un α suffisamment grand,

$$Lv \geq 0.$$

En procédant de la même manière que dans la preuve du Lemme 2.1.1, pour $\varepsilon > 0$ nous obtenons

$$L(u + \varepsilon v) > 0.$$

D'après le premier cas,

$$\sup_{\Omega}(u + \varepsilon v) = \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon v).$$

Et de même, nous avons

$$\sup_{\Omega} u + \varepsilon \inf_{\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} v.$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons (2.1.3).

Le cas $Lu \leq 0$ peut être ramené au cas précédent en considérant la fonction $-u$. \square

Corollaire 2.1.3. *Soit L comme dans le Théorème 2.1.2, et soient $f \in C^0(\Omega)$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ deux fonctions. Alors le problème de Dirichlet*

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x) \text{ pour } x \in \Omega, \\ u(x) &= \varphi(x) \text{ pour } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

admet au plus une solution.

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème de Dirichlet. La différence $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ satisfait alors

$$\begin{aligned} Lv(x) &= 0 \text{ pour } x \in \Omega, \\ v(x) &= 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

et par le Théorème 2.1.2, v est identiquement nulle sur Ω . \square

Le Théorème 2.1.2 suppose $c(x) \equiv 0$. Cette hypothèse peut être affaiblie comme nous le montre le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.4. *Supposons $c(x) \leq 0$ sur Ω . Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tel que*

$$Lu \geq 0 \text{ sur } \Omega.$$

En posant $u^+(x) := \max(u(x), 0)$, nous avons alors

$$\sup_{\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Démonstration. Posons $\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$. Comme $c(x) \leq 0$, nous avons pour tout $x \in \Omega^+$,

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x)u_{x_i}(x) \geq 0.$$

Par le Théorème 2.1.2, nous obtenons

$$\sup_{\Omega^+} u \leq \max_{\partial\Omega^+} u. \quad (2.1.4)$$

Nous avons

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega^+ \cap \Omega \text{ (par continuité de } u),$$

et

$$\max_{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Ainsi, comme $\partial\Omega^+ = (\partial\Omega^+ \cap \Omega) \cup (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega)$,

$$\max_{\partial\Omega^+} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \quad (2.1.5)$$

Comme nous avons aussi

$$\sup_{\Omega} u^+ = \sup_{\Omega^+} u, \quad (2.1.6)$$

par (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.6) nous obtenons le résultat voulu. \square

Nous arrivons à présent au principe du maximum fort de E. Hopf :

Théorème 2.1.5 (Principe du maximum de E. Hopf). *Supposons $c(x) \equiv 0$, et soit $u \in C^2(\Omega)$ tel que*

$$Lu \geq 0 \text{ sur } \Omega.$$

Si u atteint un maximum à l'intérieur de Ω , u doit alors être constant. De façon plus générale, si $c(x) \leq 0$, u doit alors être constant si la fonction atteint une maximum positif en un point intérieur.

Pour la preuve de ce théorème, nous avons besoin du lemme du point frontière de E. Hopf.

Lemme 2.1.6. *Supposons $c(x) \leq 0$ et*

$$Lu \geq 0 \text{ dans } \Omega' \subset \mathbb{R}^d,$$

et soit $x_0 \in \partial\Omega'$. De plus, supposons

1. *u est continue en x_0 ,*
2. *$u(x_0) \geq 0$ si $c(x) \not\equiv 0$,*
3. *$u(x_0) > u(x)$ pour tout $x \in \Omega'$,*
4. *il existe une boule $\mathring{B}(y, R) \subset \Omega'$ avec $x_0 \in \partial B(y, R)$.*

Nous avons alors, avec $r := |x - y|$,

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x_0) > 0,$$

à condition que cette dérivée (dans la direction de la normale extérieur de Ω') existe.

Démonstration. Nous supposons

$$\partial B(y, R) \cap \partial \Omega' = \{x_0\}.$$

Pour $0 < \rho < R$, sur l'anneau $\mathring{B}(y, R) \setminus B(y, \rho)$, nous considérons la fonction auxiliaire suivante

$$v(x) := e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2} \geq 0.$$

avec $\gamma > 0$.

Nous avons

$$\begin{aligned} Lv(x) = & \left[4\gamma^2 \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\gamma \sum_{i=1}^d b_i(x)(x_i - y_i) \right] e^{-\gamma|x-y|^2} \\ & + c(x) \left(e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2} \right) \end{aligned}$$

Pour γ suffisamment grand, du fait que les coefficients de L soient bornés et la condition d'ellipticité, nous avons

$$Lv \geq 0 \text{ dans } \mathring{B}(y, R) \setminus B(y, \rho). \quad (2.1.7)$$

Par 3. et 4.,

$$u(x) - u(x_0) < 0 \text{ pour } x \in \mathring{B}(y, R).$$

Par conséquent, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0 \text{ pour } x \in \partial B(y, \rho). \quad (2.1.8)$$

Comme $v = 0$ sur $\partial B(y, R)$, (2.1.8) reste vraie pour sur $\partial B(y, R)$.

D'autre part,

$$L(u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)) \geq -c(x)u(x_0) \geq 0 \quad (2.1.9)$$

par (2.1.7) et 2. et parce que $c(x) \leq 0$.

Ainsi, nous pouvons appliquer le Corollaire 2.1.4 sur $\mathring{B}(y, R) \setminus B(y, \rho)$ et nous obtenons

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0 \text{ pour } x \in \mathring{B}(y, R) \setminus B(y, \rho)$$

A condition que la dérivée existe, il vient que

$$\frac{\partial}{\partial r}(u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)) \geq 0 \text{ en } x = x_0,$$

et par conséquent pour $x = x_0$,

$$\frac{\partial}{\partial r}u(x) \geq -\varepsilon \frac{\partial}{\partial r}v(x) = \varepsilon \left(2\gamma R e^{-2\gamma R^2} \right) > 0$$

□

Nous pouvons à présent démontrer le Théorème 2.1.5.

Démonstration. Supposons par l'absurde que u n'est pas constante, et admet un maximum m (≥ 0 dans le cas $c \not\equiv 0$) dans Ω . Nous avons alors

$$\Omega' := \{x \in \Omega \mid u(x) < m\} \neq \emptyset,$$

et

$$\partial\Omega' \cap \Omega \neq \emptyset.$$

Nous choisissons $y \in \Omega'$ tel que $\text{dist}(y, \partial\Omega') < \text{dist}(y, \partial\Omega)$.

Soit $\overset{\circ}{B}(y, R)$ la plus grande boule de centre y contenu dans Ω' . Nous obtenons ainsi

$$u(x_0) = m \text{ pour un certain } x_0 \in \partial B(y, R),$$

et

$$u(x) < u(x_0) \text{ pour } x \in \Omega'.$$

Par le Lemme 2.1.6,

$$Du(x_0) \neq 0,$$

ce qui est impossible pour un maximum intérieur. Ceci contredit l'hypothèse u non constant, ce qui démontre le théorème. □

2.2 Le principe du maximum de Alexandrov et Bakelman

Dans cette partie, nous considérons des opérateurs différentiels du même type que dans la partie précédente, mais nous supposons que les coefficients $c(x)$ et $b_i(x)$ sont identiquement nuls. De résultats similaires à ce sont qui vont être présentés dans cette partie existe pour des coefficient $b_i(x)$ toujours nuls mais $c(x)$ négatifs. Nous voulons ici présenter les principales idées dans le cas le plus simple possible.

Théorème 2.2.1. *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tel que*

$$Lu(x) \geq f(x), \tag{2.2.1}$$

où la matrice $(a_{ij}(x))$ est symétrique définie positive pour $x \in \Omega$. De plus, si

$$\int_{\Omega} \frac{|f(x)|^d}{\det(a_{ij}(x))} dx < \infty, \tag{2.2.2}$$

alors nous avons

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u + \frac{\text{diam}(\Omega)}{d\omega_d^{1/d}} \left(\int_{\Omega} \frac{|f(x)|^d}{\det(a_{ij}(x))} dx \right)^{1/d}. \quad (2.2.3)$$

Pour la preuve du Théorème 2.2.1, nous avons besoin de quelques constructions géométriques. Pour $v \in C^0(\Omega)$, nous définissons l'ensemble supérieur de contact

$$T^+(v) := \{y \in \Omega \mid \exists p \in \mathbb{R}^d : \forall x \in \Omega, v(x) \leq v(y) + \langle p, x - y \rangle\}. \quad (2.2.4)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien usuel dans \mathbb{R}^d . Le p de la définition dépendra en général de y ; on notera $p = p(y)$.

L'ensemble $T^+(v)$ est un sous-ensemble de Ω dans lequel le graphe de v se trouve sous un hyperplan dans \mathbb{R}^{d+1} qui touche le graphe de v en $(y, v(y))$.

Si v est différentiable en $y \in T^+(v)$, alors nécessairement $p(y) = Dv(y)$. De plus, v est concave précisément si $T^+(v) = \Omega$.

Lemme 2.2.2. *Pour $v \in C^2(\Omega)$, la Hessienne*

$$(v_{x_i x_j})_{i,j=1,\dots,d}$$

est définie négative sur $T^+(v)$.

Démonstration. Pour $y \in T^+(v)$, nous considérons la fonction

$$w(x) := v(x) - v(y) - \langle p(y), x - y \rangle.$$

Alors $w(x) \leq 0$ sur Ω , comme $y \in T^+(v)$ et $w(y) = 0$. Donc, w atteint un maximum en y , ce qui implique que $(w_{x_i x_j})_{i,j=1,\dots,d}$ est semie-définie négative. De plus $w_{x_i x_j} = v_{x_i x_j}$ pour tout i, j , d'où le résultat. \square

Si v n'est pas différentiable en $y \in T^+(v)$, alors $p = p(y)$ n'est pas nécessairement unique, il peut exister plusieurs p vérifiant la condition (2.2.4). Nous associons donc à $y \in T^+(v)$ l'ensemble de tous ces p , c'est-à-dire, la carte

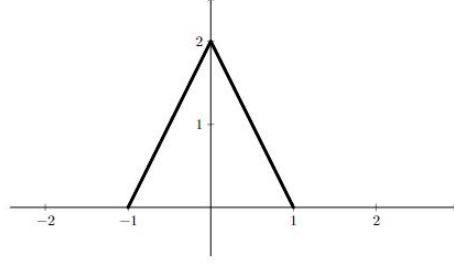
$$\tau_v(y) := \{p \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in \Omega, v(x) \leq v(y) + \langle p, x - y \rangle\}.$$

Pour $y \notin T^+(v)$, on pose $\tau_v(y) := \emptyset$.

Exemple : $\Omega = \overset{\circ}{B}(0, 1)$, $\beta > 0$,

$$v(x) = \beta(1 - |x|).$$

Le graphe de v est un cône de hauteur β en 0 et ayant pour base la sphère unité.



Pour le cas $d=1$.

Nous avons $T^+(v) = \overset{\circ}{B}(0, 1)$,

$$\tau_v(y) = \begin{cases} B(0, \beta) & \text{pour } y = 0 \\ -\beta \frac{y}{|y|} & \text{pour } y \neq 0. \end{cases}$$

Pour le cône de hauteur β en x_0 et de base $\partial B(x_0, R)$,

$$v(x) = \beta \left(1 - \frac{|x - x_0|}{R} \right)$$

et $\Omega = \overset{\circ}{B}(x_0, R)$, de façon analogue nous avons

$$\tau_v \left(\overset{\circ}{B}(x_0, R) \right) = \tau_v(x_0) = B(0, u(x_0)/R) = B(0, \beta/R) \quad (2.2.5)$$

Nous considérons à présent l'image de Ω par τ_y

$$\tau_y(\Omega) = \bigcup_{y \in \Omega} \tau_v(y) \subset \mathbb{R}^d.$$

Nous avons alors le lemme suivant

Lemme 2.2.3. *Soit $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Alors*

$$\mathcal{L}_d(\tau_v(\Omega)) \leq \int_{T^+(v)} |\det(v_{x_i x_j}(x))| dx. \quad (2.2.6)$$

où \mathcal{L}_d désigne la mesure de Lebesgue en dimension d .

Démonstration. Premièrement,

$$\tau_v(\Omega) = \tau_v(T^+(v)) = Dv(T^+(v)), \quad (2.2.7)$$

puisque v est différentiable. Nous noterons que la première égalité vient du fait que si $y \notin T^+(v)$, alors $\tau_v(y) = \emptyset$.

Par le Lemme 2.2.2, la matrice Jacobienne de $Dv : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire $(v_{x_i x_j})$,

est semie-définie négative sur $T^+(v)$. Alors $Dv - \varepsilon I_d$ est de rang maximal pour $\varepsilon > 0$. Par le théorème de changement de variables, nous obtenons

$$\mathcal{L}_d((Dv - \varepsilon I_d)(T^+(v))) = \int_{T^+(v)} |det(v_{x_i x_j}(x) - \varepsilon \delta_{ij})_{i,j=1,\dots,d}| dx.$$

Par le lemme de Fatou, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_{(Dv - \varepsilon I_d)(T^+(v))} d\lambda &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_{(Dv - \varepsilon I_d)(T^+(v))} d\lambda \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{T^+(v)} |det(v_{x_i x_j}(x) - \varepsilon \delta_{ij})_{i,j=1,\dots,d}| dx \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{T^+(v)} |det(v_{x_i x_j}(x) - \varepsilon \delta_{ij})_{i,j=1,\dots,d}| dx = \int_{T^+(v)} |det(v_{x_i x_j}(x))_{i,j=1,\dots,d}| dx,$$

et, par (2.2.7), nous avons

$$\int_{Dv(T^+(v))} 1 d\lambda = \mathcal{L}_d(Dv(T^+(v))) = \mathcal{L}_d(\tau_v(\Omega)).$$

Ainsi, nous obtenons le résultat voulu

$$\mathcal{L}_d(\tau_v(\Omega)) \leq \int_{T^+(v)} |det(v_{x_i x_j}(x))| dx.$$

□

Nous sommes dorénavant prêt pour démontrer le Théorème 2.2.1, nous pouvons supposer

$$u \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

en remplaçant u par $u - \max_{\partial\Omega} u$ si nécessaire.

Soit $x_0 \in \Omega$, $u(x_0) > 0$. Nous considérons la fonction κ_{x_0} sur $B(x_0, \delta)$, avec $\delta = \text{diam}(\Omega)$, dont son graphe est le cône de hauteur $u(x_0)$ en x_0 et de base $\partial B(x_0, \delta)$. Par définition du diamètre $\delta = \text{diam}(\Omega)$,

$$\Omega \subset B(x_0, \delta).$$

Comme nous avons supposé $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$, pour chaque hyperplan tangent au cône, il existe un hyperplan parallèle qui est tangent au graphe de u . (Pour voir cela, nous déplaçons simplement un tel hyperplan parallèlement à sa position d'origine vers le graphe de u jusqu'à ce qu'il devienne tangent. Comme le graphe de u est au moins de hauteur $u(x_0)$, c'est-à-dire la hauteur du cône, et comme $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$ et $\partial\Omega \subset B(x_0, \delta)$, un tel hyperplan ne peut pas être tangent en un point de la frontière de Ω , mais uniquement en un point intérieur x_1 . Ainsi l'hyperplan correspondant est contenu dans $\tau_u(x_1)$.) Ce qui signifie

$$\tau_{\kappa_{x_0}}(\Omega) \subset \tau_u(\Omega). \quad (2.2.8)$$

Par (2.2.5),

$$\tau_{\kappa_{x_0}}(\Omega) = B(0, u(x_0)/\delta). \quad (2.2.9)$$

Les relations (2.2.6), (2.2.8) et (2.2.9) impliquent

$$\mathcal{L}_d(B(0, u(x_0)/\delta)) \leq \int_{T^+(u)} |\det(u_{x_i x_j}(x))| dx,$$

et comme

$$\mathcal{L}_d(B(0, u(x_0)/\delta)) = \omega_d \left(\frac{u(x_0)}{\delta} \right)^d$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} u(x_0) &\leq \frac{\delta}{\omega_d^{1/d}} \left(\int_{T^+(u)} |\det(u_{x_i x_j}(x))| dx \right)^{1/d} \\ &= \frac{\delta}{\omega_d^{1/d}} \left(\int_{T^+(u)} (-1)^d \det(u_{x_i x_j}(x)) dx \right)^{1/d} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

par le Lemme 2.2.2. Sans supposer $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$, nous obtenons le terme $\max_{\partial\Omega} u$ en plus dans le membre de droite de (2.2.10). Puisque la formule est vraie pour tout $x_0 \in \Omega$, nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.2.4. *Pour $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$,*

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u + \frac{\text{diam}(\Omega)}{\omega_d^{1/d}} \left(\int_{T^+(u)} (-1)^d \det(u_{x_i x_j}(x)) dx \right)^{1/d}. \quad (2.2.11)$$

Pour déduire de ce résultat le Théorème 2.2.1, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.5. *Sur $T^+(u)$,*

$$(-1)^d \det(u_{x_i x_j}(x)) \leq \frac{1}{\det(a_{ij}(x))} \left(-\frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) \right)^d. \quad (2.2.12)$$

Démonstration. Nous avons que pour deux matrices symétriques définies positives A, B ,

$$\det(A)\det(B) \leq \left(\frac{1}{d} \text{trace}(AB) \right)^d.$$

[cf. Proposition A.0.6]

En insérant $A = (-u_{x_i x_j})$, et $B = (a_{ij})$ (ce qui est possible par le Lemme 2.2.2 et la condition d'ellipticité), nous obtenons (2.2.12). \square

Les inégalités (2.2.12) et (2.2.12) impliquent

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u + \frac{\text{diam}(\Omega)}{d\omega_d^{1/d}} \left(\int_{T^+(u)} \frac{\left(-\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) \right)^d}{\det(a_{ij}(x))} dx \right)^{1/d}. \quad (2.2.13)$$

Ainsi, (2.2.13) implique directement le Théorème 2.2.1, puisque par hypothèse $-\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) \leq -f$, et le membre de gauche de cette inégalité est positif sur $T^+(u)$ par le Lemme 2.2.2. La positivité du membre de gauche est obtenue de la même façon que dans la preuve du Théorème 2.1.2. Nous obtenons alors (2.2.3), ce qui achève la démonstration du Théorème 2.2.1.

Nous aimerions à présent appliquer le Théorème 2.2.1 à certaines équations non-linéaires. Par exemple, l'équation de Monge-Ampère en deux dimensions.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et soit $u \in C^2(\Omega)$ tel que

$$u_{x_1 x_1}(x) u_{x_2 x_2}(x) - u_{x_1 x_2}^2(x) = f(x) \text{ dans } \Omega, \quad (2.2.14)$$

avec une fonction donnée f .

Pour que (2.2.14) soit elliptique, il faut

1. la Hessienne de u doit être définie positive, et par conséquent
2. $f(x) > 0$ sur Ω .

La première condition signifie que u est une fonction convexe. Alors, u ne peut pas atteindre un maximum en un point intérieur de Ω , mais un minimum est possible. Pour contrôler ce minimum, nous observons que si u est solution de (2.2.14) alors $-u$ l'est aussi. Cependant l'équation (2.2.14) n'est plus elliptique en $-u$, puisque la Hessienne de $-u$ est définie négative (et non positive), le Théorème 2.2.1 ne peut pas être appliqué directement. Nous observons cependant que le Lemme 2.2.4 ne nécessite pas l'hypothèse d'ellipticité, nous obtenons donc le résultat suivant :

Corollaire 2.2.6. *Sous les hypothèses 1. et 2., une solution u de l'équation de Monge-Ampère (2.2.14) satisfait*

$$\inf_{\Omega} u \geq \min_{\partial\Omega} u - \frac{\text{diam}(\Omega)}{2\sqrt{\pi}} \left(\int_{\Omega} f(x) dx \right)^{1/2}.$$

Démonstration. Nous remarquerons que l'intégrale est sur Ω car u est convexe par 1. donc $-u$ est concave ce qui nous donne $T^+(-u) = \Omega$. \square

Le point crucial ici est que l'équation non-linéaire de Monge-Ampère peut être formellement écrite comme une équation différentielle linéaire. À savoir, avec

$$a_{11}(x) = \frac{1}{2} u_{x_2 x_2}(x), \quad a_{12}(x) = a_{21}(x) = -\frac{1}{2} u_{x_1 x_2}(x), \quad a_{22}(x) = \frac{1}{2} u_{x_1 x_1}(x)$$

ainsi (2.2.14) devient

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) = f(x).$$

Par conséquent, pour déduire les propriétés d'une solution u , nous avons seulement à vérifier si les conditions requises pour les coefficients $a_{ij}(x)$ sont vérifiées sous nos conditions concernant u . Cependant, il peut arriver que ces conditions soient vérifiées pour certaines solutions, mais pas toutes. Par exemple, sous les hypothèses 1. et 2. précédentes, (2.2.14) n'était plus elliptique pour la solution $-u$.

2.3 Principes du maximum pour des équations différentielles non-linéaires

Nous considérons à présent une équation différentielle générale de la forme

$$F[u] = F(x, u, Du, D^2u) = 0, \quad (2.3.1)$$

avec $F : S := \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S(d, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, où $S(d, \mathbb{R})$ est l'espace des matrices symétriques à coefficients réels de dimension d . Les éléments de S sont écrits de la forme (x, z, p, r) ; où $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$, $r = (r_{ij})_{i,j=1,\dots,d} \in S(d, \mathbb{R})$. Nous supposons que F est différentiable par rapport à r_{ij} .

Définition 2.3.1. *L'équation différentielle (2.3.1) est appelée elliptique en $u \in C^2(\Omega)$ si*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \right)_{i,j=1,\dots,d} \text{ est définie positive.} \quad (2.3.2)$$

Par exemple, l'équation de Monge-Ampère (2.2.14) est elliptique en ce sens si les conditions 1. et 2. de la fin de la partie 2.2 sont vérifiées.

Ce n'est pas complètement clair ce qu'est la généralisation du principe du maximum des équations linéaires aux équations non-linéaires, puisque dans le cas linéaire nous avons toujours besoin de faire des hypothèses sur le terme d'ordre le plus faible. Une interprétation suggère qu'une possible généralisation est de considérer le principe du maximum comme une assertion comparant une solution avec une constante qui sous certaines conditions est une solution de $Lu \leq 0$. Du fait de la structure linéaire, ceci amène immédiatement à un théorème de comparaison pour des solutions quelconques u_1, u_2 de $Lu = 0$. Pour cette raison, dans le cas non-linéaire, nous allons aussi commencer avec un théorème de comparaison :

Théorème 2.3.2. *Soient $u_0, u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, et supposons*

1. $F \in C^1(S)$,
2. F est elliptique pour toutes fonctions $tu_1 + (1-t)u_0$, $0 \leq t \leq 1$,
3. pour chaque (x, p, r) fixé, F est décroissante en z .

Si

$$u_1 \leq u_0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et

$$F[u_1] \geq F[u_0] \text{ dans } \Omega,$$

alors soit

$$u_1 < u_0 \text{ dans } \Omega$$

ou soit

$$u_0 \equiv u_1 \text{ dans } \Omega.$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} v &:= u_1 - u_0, \\ u_t &:= tu_1 + (1-t)u_0 \text{ pour } 0 \leq t \leq 1, \\ g(t) &= F(x, u_t(x), Du_t(x), D^2u_t(x)) = F[u_t(x)]. \end{aligned}$$

Dérivons à présent g , nous avons

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial z} F[u_t(x)]v(x) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial p_i} F[u_t(x)]v_{x_i}(x) + \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial r_{ij}} F[u_t(x)]v_{x_i x_j}(x).$$

Ainsi par le théorème fondamental du calcul intégral, nous obtenons

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt,$$

puis en remplaçant g par son expression

$$\begin{aligned} F[u_1(x)] - F[u_0(x)] &= v(x) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} F[u_t(x)]dt + \sum_{i=1}^d v_{x_i}(x) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p_i} F[u_t(x)]dt \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d v_{x_i x_j}(x) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_{ij}} F[u_t(x)]dt. \end{aligned}$$

Nous posons donc

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) &:= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u_t(x), Du_t(x), D^2u_t(x))dt, \\ b_i(x) &:= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, u_t(x), Du_t(x), D^2u_t(x))dt, \\ c(x) &:= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(x, u_t(x), Du_t(x), D^2u_t(x))dt. \end{aligned}$$

Notons tout de même que nous intégrons une dérivée total par rapport à t , à savoir, $\frac{d}{dt}F(x, u_t(x), Du_t(x), D^2u_t(x))$, et par conséquent nous pouvons convertir l'intégral en termes bornés, ce qui nous donne la représentation de Lv ci-dessous :

$$Lv := \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)v_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x)v_{x_i}(x) + c(x)v(x).$$

Alors,

$$Lv = F[u_1] - F[u_0] \geq 0 \text{ dans } \Omega.$$

L'équation L est elliptique grâce à 2., et par 3. $c(x) \leq 0$. Ainsi, nous pouvons appliquer le Théorème 2.1.5 pour v et nous obtenons le résultat annoncé. \square

Le théorème reste en vrai en particulier pour des solutions de $F[u] = 0$. Le point clé dans la preuve du Théorème 2.3.2 est alors que comme u_0 et u_1 sont des solutions données de l'équation non-linéaire $F[u] = 0$, nous pouvons interpréter des quantités qui dépendent de u_0 et u_1 et de leurs dérivées comme des coefficients d'une équation différentielle linéaire pour la différence.

Nous aimerions aussi formuler l'unicité du le problème de Dirichlet pour $F[u] = f$ avec une fonction donnée f :

Corollaire 2.3.3. *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.2, supposons $u_0 = u_1$ sur $\partial\Omega$, et*

$$F[u_0] = F[u_1] \text{ dans } \Omega.$$

Alors $u_0 = u_1$ dans Ω .

Démonstration. La démonstration découle immédiatement du Théorème 2.3.2. \square

Pour exemple, nous considérons l'équation de la surface minimale. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, l'équation de la surface minimale est alors l'équation quasi-linéaire

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0. \quad (2.3.3)$$

Corollaire 2.3.4. *Soient $u_0, u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ deux solutions de l'équation de surface minimale. Si la différence $u_0 - u_1$ admet un maximum ou un minimum en un point intérieur de Ω , alors nous avons*

$$u_0 - u_1 \equiv \text{cste dans } \Omega.$$

Démonstration. Vérifions que l'équation (2.3.3) est elliptique. Posons

$$F(u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy}) = (1 + p_2^2)r_{11} - 2p_1 p_2 r_{12} + (1 + p_1^2)r_{22}.$$

Nous obtenons

$$H_F = \begin{pmatrix} 1 + p_2^2 & -p_1 p_2 \\ -p_1 p_2 & 1 + p_1^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\chi_{H_F}(X) = 1 + p_1^2 + p_2^2 - (2 + p_1^2 + p_2^2)X + X^2.$$

Ainsi les valeurs propres de H_F sont 1 et $1 + |\nabla u|^2$, la matrice est donc définie positive, l'équation est donc elliptique.

De plus, $F \in C^1(S)$. On conclue en appliquant le Théorème 2.3.2. \square

Nous arrivons à présent au principe du maximum suivant :

Théorème 2.3.5. *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, et soit $F \in C^2(S)$. Supposons que pour $\lambda > 0$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, z, p, r) \xi_i \xi_j \quad (2.3.4)$$

pour $(x, p, z, r) \in S$, la condition d'ellipticité. De plus, supposons qu'il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout (x, z, p) ,

$$\frac{F(x, z, p, 0) \text{sign}(z)}{\lambda} \leq \mu_1 |p| + \frac{\mu_2}{\lambda}. \quad (2.3.5)$$

Si

$$F[u] = 0 \text{ dans } \Omega,$$

alors

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + c \frac{\mu_2}{\lambda}, \quad (2.3.6)$$

où la constante c dépend de μ_1 et du diamètre $\text{diam}(\Omega)$.

Ici, nous pouvons penser à (2.3.5) comme une condition analogue à la condition $c(x) \leq 0$ et la domination des coefficients $b_i(x)$, ainsi que la domination du membre de droite f dans l'équation $Lu = f$.

Démonstration. Nous allons suivre la même stratégie que dans la preuve du Théorème 2.3.1, et se ramener au principe du maximum dans la partie 2.1 pour les équations linéaires.

Ici, v est une fonction auxiliaire que l'on déterminera ultérieurement, et $w := u - v$. Nous considérons l'opérateur

$$Lw := \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) w_{x_i}(x)$$

avec

$$a_{ij}(x) := \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), Du(x), tD^2u(x)) dt \quad (2.3.7)$$

tandis que les coefficients $b_i(x)$ sont définis par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d b_i(x) w_{x_i} &= \sum_{i,j=1}^d \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), Du(x), tD^2u(x)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), Dv(x), tD^2u(x)) \right) dt \cdot v_{x_i x_j} \\ &\quad + F(x, u(x), Du(x), 0) - F(x, u(x), Dv(x), 0). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

En effet, en posant

$$g(t) = F(x, u(x), Du(x), tD^2u(x))$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) &= F(x, u(x), Du(x), 0) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), Du(x), tD^2u(x)) dt \right) u_{x_i x_j}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Lw &= L(u - v) \\ &= \sum_{i,j=1}^d \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), Du(x), tD^2u(x)) dt \right) u_{x_i x_j} + F(x, u(x), Du(x), 0) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^d \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), Dv(x), tD^2u(x)) dt \right) v_{x_i x_j} - F(x, u(x), Dv(x), 0) \\ &= F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) - \left(\sum_{i,j=1}^d \alpha_{ij}(x) v_{x_i x_j} + F(x, u(x), Dv(x), 0) \right), \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

avec

$$\alpha_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), Dv(x), tD^2u(x)) dt$$

(cela vient encore du fait que nous intégrons une dérivée totale en la variable t).

Par hypothèse (2.3.4), nous avons aussi

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d \alpha_{ij}(x) \xi_i \xi_j \text{ pour tout } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.3.10)$$

Nous cherchons maintenant une fonction auxiliaire v tel que

$$Mv := \sum_{i,j=1}^d \alpha_{ij}(x) v_{x_i x_j} + F(x, u(x), Dv(x), 0) \leq 0 \quad (2.3.11)$$

Nous supposons à présent que pour $\delta := \text{diam}(\Omega)$, Ω est contenu dans la bande $\{0 < x_1 < \delta\}$. (Nous le pouvons car Ω est borné.)

Nous essayons avec

$$v(x) = \max_{\partial\Omega} u^+ + \frac{\mu_2}{\lambda} \left(e^{(\mu_1+1)\delta} - e^{(\mu_1+1)x_1} \right),$$

où $u^+(x) = \max(0, u(x))$.

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x_i} v(x) = \begin{cases} -\frac{\mu_2}{\lambda} (\mu_1 + 1) e^{(\mu_1+1)x_1} & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v(x) = \begin{cases} -\frac{\mu_2}{\lambda} (\mu_1 + 1)^2 e^{(\mu_1+1)x_1} & \text{si } i, j = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} Mv &= -\frac{\mu_2}{\lambda} (\mu_1 + 1)^2 \alpha_{11}(x) e^{(\mu_1+1)x_1} + F(x, u(x), Dv(x), 0) \\ &\leq -\mu_2 (\mu_1 + 1)^2 e^{(\mu_1+1)x_1} + \mu_2 \mu_1 (\mu_1 + 1) e^{(\mu_1+1)x_1} + \mu_2 \\ &\quad (\text{par (2.3.5) et (2.3.10)}) \\ &= \mu_2 \left(1 - (\mu_1 + 1) e^{(\mu_1+1)x_1} \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ce qui établit (2.3.11). Même sous l'hypothèse $F[u] \geq 0$ à la place de $F[u] = 0$, l'équation (2.3.9) implique alors

$$Lw \geq 0.$$

Par définition de v , nous avons aussi

$$w = u - v \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Le Théorème 2.1.2 implique

$$u \leq v \text{ dans } \Omega,$$

et (2.3.6) est obtenu en posant $c = e^{(\mu_1+1)\text{diam}(\Omega)} - 1$.

De façon plus précise, sous l'hypothèse $F[u] \geq 0$, nous avons montré l'inégalité

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + c \frac{\mu_2}{\lambda},$$

mais l'inégalité dans le sens opposée vient de manière totalement analogue, c'est-à-dire,

$$\inf_{\Omega} u \geq \min_{\partial\Omega} u^- + c \frac{\mu_2}{\lambda}$$

(où $u^-(x) := \min(0, u(x))$).

□

Le théorème 2.3.5 est aussi intéressant dans le cas linéaire. Regardons cela pour une équation assez simple

$$\begin{aligned} f''(x) + kf(x) &= 0 \text{ pour } x \in [0, \pi], \\ f(0) &= f(\pi) = 0, \end{aligned}$$

avec k une constante.

Nous pouvons appliquer le théorème 2.3.5 avec $\lambda = 1$, $\mu_1 = 0$,

$$\mu_2 = \begin{cases} k \sup_{[0, \pi]} |f| & \text{pour } k > 0, \\ 0 & \text{pour } k \leq 0. \end{cases}$$

Il vient alors que

$$\sup_{[0, \pi]} |f| \leq ck \sup_{[0, \pi]} |f|,$$

c'est-à-dire que si $k < \frac{1}{c}$, nous devons avoir $f \equiv 0$.

De façon plus générale, à la place de k , nous pouvons prendre n'importe quelle fonction $c(x)$ avec $c(x) \leq k$ sur $[0, \pi]$ et considérer $f''(x) + c(x)f(x) = 0$, sans affecter la conclusion précédente. En particulier, cela nous permet d'affaiblir la condition du signe $c(x) \leq 0$. Le résultat le plus fin ici est que $f \equiv 0$ si k est plus petit que la plus petite valeur propre λ_1 de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sur $[0, \pi]$, à savoir, 1. De façon analogue, ceci se généralise à d'autres équations elliptiques, par exemple,

$$\begin{aligned} \Delta f(x) + kf(x) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ f(x) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Le théorème 2.3.5 implique un tel résultat, mais pas avec la borne optimale λ_1 .

En résumé

Le principe du maximum donne des exemples d'estimations dites "a priori", à savoir des estimations valables pour toute solution d'une équation différentielle ou d'une classe d'équations donnée, en fonction des informations initiales données (valeurs aux limites, membre de droite, etc.), sans la nécessité de connaître la solution à l'avance ou sans même avoir à garantir à l'avance qu'une solution existe. Inversement, de telles estimations "a priori" constituent souvent un outil important dans de nombreuses preuves d'existence. Les principes du maximum sont caractéristiques des solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques et ne se limitent pas aux équations linéaires. Souvent, ils sont même l'outil le plus important pour étudier certaines équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires.

A Appendice

Revenons sur la construction d'une fonction de classe C^∞ utilisé dans la démonstration du Théorème 1.2.1.

Posons

$$\phi(t) := \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifions que cette fonction est bien de classe C^∞ .
Commençons par montrer qu'elle est C^1 .

$$\phi'(t) = \begin{cases} \frac{-1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et nous avons

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = 0$$

Donc $\phi'(0) = 0$, nous en déduisons que ϕ est de classe C^1 .

Conjecture :

$$\phi^{(k)}(t) = \begin{cases} P(\frac{1}{t}) e^{\frac{1}{t}} & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $P \in \mathbb{R}[X]$.

Procédons par récurrence, nous venons de vérifier le cas $k = 1$. Supposons à présent le résultat vrai au rang k .

Pour $t < 0$,

$$\begin{aligned} \phi^{(k+1)}(t) &= \frac{-1}{t^2} P' \left(\frac{1}{t} \right) e^{\frac{1}{t}} + \frac{-1}{t^2} P \left(\frac{1}{t} \right) e^{\frac{1}{t}} \\ &= \frac{-1}{t^2} \left(P' \left(\frac{1}{t} \right) + P \left(\frac{1}{t} \right) \right) e^{\frac{1}{t}} \\ &= \tilde{P} \left(\frac{1}{t} \right) e^{\frac{1}{t}}, \end{aligned}$$

et évidemment pour $t \leq 0$,

$$\phi^{(k+1)}(t) = 0$$

Montrons à présent que $\phi^{(k)}$ est dérivable en $t = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\phi^{(k)}(t) - \phi^{(k)}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} P \left(\frac{1}{t} \right) e^{\frac{1}{t}} = 0,$$

donc $\phi^{(k+1)}(0) = 0$.

De plus $\phi^{(k)}$ est continue sur \mathbb{R} .

Nous concluons que ϕ est de classe C^∞ .

Pour obtenir la fonction C^∞ à support compact utilisé dans la démonstration du Théorème 1.2.1, nous composons par la fonction

$$t \longmapsto t^2 - 1$$

qui est elle aussi de classe C^∞ .

Nous obtenons ainsi

$$\phi(t) := \begin{cases} c_d \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la constante c_d est choisie telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(|x|) dx = 1.$$

Nous noterons que la fonction $\phi(|x|)$ est elle aussi C^∞ par composition de la fonction norme qui est C^∞ .

Pour $f \in L^1(\Omega)$, $B(y, r) \subset \Omega$, nous considérons la régularisation suivante :

$$f_r(y) := \frac{1}{r^d} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|y-x|}{r}\right) f(x) dx.$$

Proposition A.0.1. *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Si $\Omega' \subset\subset \Omega$ et $r < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, alors*

$$f_r \in C^\infty(\Omega').$$

Démonstration. Comme $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_k tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D^k \phi(|x|)| \leq C_k, \quad (\text{A.0.1})$$

où D^k dénote de façon abrégé les k -ième dérivées partielles.

Nous pouvons alors appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale, en effet

1. pour tout x , la fonction $y \mapsto \phi\left(\frac{|x-y|}{r}\right) u(y)$ est intégrable car u l'est et par (A.0.1),
2. pour tout y , la fonction $x \mapsto \phi\left(\frac{|x-y|}{r}\right) u(y)$ est dérivable car $\phi \in C^\infty$,
3. pour tout x ,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \phi\left(\frac{|x-y|}{r}\right) u(y) \right| \leq \|u\|_{L^1} C_k$$

Ainsi $f_r \in C^1(\Omega')$.

En itérant le même raisonnement, par récurrence on obtient que $f_r \in C^\infty(\Omega')$. \square

Lemme A.0.2. Soit $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Pour $r \rightarrow 0$, nous avons alors

$$\|u - u_r\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0.$$

De plus, u_r converge vers u ponctuellement presque partout (en prenant $u = 0$ en dehors de Ω).

Démonstration. Nous établirons ici la preuve pour $\Omega = \mathbb{R}^d$.
Notons que

$$u_r(x) = u * \rho_r(x),$$

où ρ_r est une suite régularisante, i.e,

$$\rho_r \in C_c^\infty(\Omega), \quad \text{supp} \rho_r \subset B(0, r), \quad \int_{\Omega} \rho_r(x) dx = 1.$$

Nous pouvons à présent débiter la preuve, nous allons raisonner par densité.

Soit $f \in C^0(\Omega)$, montrons que $\rho_r * f \rightarrow f$ uniformément sur tout compact de Ω .

Nous savons que toute fonction continue définie sur K (compact) est uniformément continue sur K .

$$\begin{aligned} \rho_r * f(x) - f(x) &= \int_{\Omega} \rho_r(y) f(x-y) dy - f(x) \\ &= \int_{B(0, r)} \rho_r(y) (f(x-y) - f(x)) dy \end{aligned}$$

De plus,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) | \forall x \in K, \forall y \in B(0, \delta), |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Il existe un $r_0 > 0$ tel que $\forall r \leq r_0$, $r < \delta$, nous en déduisons que

$$|\rho_r * f(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\Omega} \rho_r(y) dy = \varepsilon, \quad \forall x \in K.$$

A présent, montrons que $\|\rho_r * f - f\|_{L^p} \rightarrow 0$, pour $f \in C_c^0(\Omega)$.

D'après ce qui précède, nous avons

$$|\rho_r * f(x) - f(x)|^p \rightarrow 0.$$

Pouvons nous dominer $|\rho_r * f(x) - f(x)|^p$ par une fonction $g \in L^1(\Omega)$?

Nous avons que $\text{supp}(\rho_r * f) \subset \text{supp}(\rho_r) + \text{supp}(f) \subset K$ avec K un compact indépendant de r , car $\text{supp}(\rho_r) = B(0, r)$ ($r \leq 1$).

Donc

$$|\rho_r * f(x)| \leq \|\rho_r * f\|_{\infty} \mathbb{1}_K \leq \|f\|_{\infty} \mathbb{1}_K$$

Et

$$\begin{aligned}
|\rho_r * f(x) - f(x)|^p &\leq (|\rho_r * f(x)| + |f(x)|)^p \\
&\leq 2^{p-1} (|\rho_r * f(x)|^p + |f(x)|^p) \\
&\leq 2^{p-1} (\|f\|_\infty^p \mathbb{1}_K(x) + |f(x)|^p) \in L^1(\Omega)
\end{aligned}$$

Nous concluons donc par le théorème de convergence dominée.

Nous arrivons à la dernière partie de cette preuve, montrons que $\|\rho_r * f - f\|_{L^p} \rightarrow 0$, pour $f \in L^p(\Omega)$.

Soit $\varepsilon > 0$, nous savons que $C_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Donc il existe $f_1 \in C_c^0(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\rho_r * f - f\|_{L^p} &= \|\rho_r * f - \rho_r * f_1 + \rho_r * f_1 - f_1 + f_1 - f\|_{L^p} \\
&\leq \|\rho_r * f - \rho_r * f_1\|_{L^p} + \|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p} + \|f_1 - f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Or d'après ce qui précède, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \leq r_0$,

$$\|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Nous avons aussi $\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$, et

$$\|\rho_r * f - \rho_r * f_1\|_{L^p} = \|\rho_r * (f - f_1)\|_{L^p} \leq \|\rho_r\|_{L^p} \|f - f_1\|_{L^p} < 1\varepsilon$$

Donc, $\forall r \leq r_0$, nous avons

$$\|\rho_r * f - f\|_{L^p} < 3\varepsilon$$

ce qui achève la preuve. \square

Définition A.0.3. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs réelles. Nous disons que la suite (f_n) est équicontinue si :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Autrement dit, toutes les fonctions f_n sont continues sur I , et elles sont continues "de la même façon".

Théorème A.0.4 (Ascoli-Arzelà). Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle fermé borné I , à valeurs réelles. Nous supposons que cette suite de fonctions est équicontinue, et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f_n(x)| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$.

Alors, nous pouvons extraire une sous-suite (f'_n) qui converge uniformément sur I vers une fonction continue f .

Dans le début de la preuve du Théorème 1.2.4, une utilise une propriété sur les fonctions semies-continues supérieurement, cette propriété est le théorème de Baire qui est le suivant :

Théorème A.0.5 (Baire). *Une fonction semie-continue supérieurement (resp. inférieurement) est la limite d'une suite décroissante (resp. croissante) de fonctions continues.*

Nous admettrons ici ce théorème.

Revenons sur un résultat utilisé dans la démonstration du Lemme 2.2.5 :

Proposition A.0.6. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques, définies positives.*

$$\det(A)\det(B) \leq \left(\frac{1}{d} \text{trace}(AB) \right)^d ,$$

Remarque : L'inégalité pour une seule matrice symétrique définie positive M , à savoir

$$\det(M) \leq \left(\frac{1}{d} \text{trace}(M) \right)^d , \quad (\text{A.0.2})$$

est obtenue grâce à l'inégalité arithmético-géométrique, et les relations liant les valeurs propres à la trace et au déterminant.

Démonstration. Nous savons que le produit de deux matrices symétriques, définies positives est symétrique définie positif. En appliquant l'inégalité (A.0.2), nous obtenons le résultat voulu. \square

Conclusion

Dans ce mémoire intitulé "Principe du maximum et EDPs elliptiques", nous avons étudié la classe des équations aux dérivées partielles de type elliptiques.

Nous avons commencé par étudier certaines propriétés qualitatives des solutions de l'équation de Laplace, un prototype d'EDPs elliptiques. Dans un premier temps nous avons donné la formule de représentation de Poisson pour la solution du problème de Dirichlet sur une boule. Ensuite, en étudiant les fonctions sous-harmoniques et sur-harmoniques, nous en avons déduit un outil fondamental de l'étude qualitative des solutions : le principe du maximum. De cet outil en vient l'unicité des solutions de l'équation de Poisson, un résultat fort qui se démontre aisément en utilisant le principe du maximum. Nous avons vu que toujours grâce au principe du maximum une quantité de résultats découlent, nous avons rencontré une estimation du gradient des solutions de l'équation de Poisson, le théorème de Liouville ainsi que l'inégalité et le théorème de convergence de Harnack. Autre résultat fort venant du principe du maximum est la possibilité d'enlever les singularités isolés des fonctions harmoniques bornés, ce qui est en réalité une généralisation de la possibilité d'enlever une singularité éliminable pour les fonctions holomorphes puisque la partie réelle et la partie imaginaire sont des fonctions harmoniques.

La suite de ce mémoire consiste en l'étude du principe du maximum mais pour les opérateurs elliptiques du second ordre, généralisant l'opérateur de Laplace. Nous sommes restés dans le cas linéaire dans un premier temps, et nous avons étudié trois principes de maximum. Le premier est une généralisation du principe du maximum version faible pour le laplacien, en effet l'idée des deux démonstrations est la même. Ce principe du maximum nous a ainsi donné l'unicité du problème de Dirichlet. Le second est le principe du maximum de Hopf qui se démontre grâce au lemme du point frontière de Hopf. Troisième principe de maximum étudié dans le cas linéaire est celui de Alexandrov et Bakelman. Différent des deux autres, il donne une majoration uniforme de la solution. La preuve quant à elle requiert une certaine construction géométrique. Puis, nous avons appliqué ce résultat à l'équation de Monge-Ampère qui est une équation complètement non-linéaire. Enfin, nous avons étudié deux principes du maximum pour des équations non-linéaires. Le premier est un théorème de comparaison et la preuve consiste à se ramener au cas linéaire appliqué à la différence de deux solutions. De ce principe du maximum dans le cas non-linéaire en découle encore une sorte d'unicité. Par la suite, nous avons mis en pratique ce principe à l'équation de surface minimale.

Bibliographie

- [1] J. Jost — Partial Differential Equations — Springer, 2002.
- [2] D. Gilbard et N. Trudinger — Elliptic partial differential equations of second order — Springer, 1983.
- [3] J. Jost — Postmodern Analysis — Springer, 1982.