Université de Picardie Jules Verne
Faculté mathématiques

Analyse complexe et applications

Mémoire M2

Décembre 2022 – Avril 2023

Simon LOIN

Encadrant : M. Gabriel VIGNY

Table des matières

Introduction

Tout d'abord, commençons par répondre à la question : "Qu'est-ce que l'analyse complexe ?". L'analyse complexe est un domaine des mathématiques traitant des fonctions à variable complexe. Nous pouvons dire que c'est une sorte d'"extension" de l'analyse réelle, où nous avons remplacer le corps des réels par le corps des nombres complexes. Il est ainsi assez naturel de se poser alors comme question : l'analyse complexe est-elle alors si différente de l'analyse réelle ? Et avons nous des propriétés similaires ? Pour répondre à ces questions nous allons en premier lieu aborder les fonctions à variables complexes par un ensemble de ces fonctions que sont les séries entières.

Les séries entières sont très importantes en analyse complexe et c'est pourquoi nous prenons ces fonctions comme point de départ. Nous verrons les points essentiels de cette notion comme les questions de convergence, continuité, dérivabilité ou encore intégrabilité. Ensuite, nous aborderons le cas des fonctions analytique qui sont une brique essentielle dans cette théorie. En effet, les propriétés de celles-ci comme le principe du prolongement analytique ou encore le principe des zéros isolés seront des outils essentiels. Viendra ensuite la classe des fonctions holomorphes, nous verrons que les fonctions usuelles comme les polynômes sont des fonctions holomorphes. La notion d'holomorphie est une des premières différences notables avec l'analyse réelle. Nous verrons que ces fonctions sont les fonctions analytiques, et la démonstration de ce résultat constituera une partie importante de ce mémoire, et une des nombreuses propriétés de ces fonctions qui diffère terriblement avec les fonctions à variables réelles est le fait que la dérivabilité entraîne le fait d'être indéfiniement dérivable. Une autre différence frappante est la notion d'intégration. Celle-ci diffère totalelement du cas réel et apporte un outil central à l'analyse complexe : la formule de Cauchy.

Nous nous intéresserons ensuite aux propriétés des fonctions holomrphes comme l'inégalité de Cauchy, le principe du maximum ou encore le lien entre holomorphie et intégration. Cependant, ces fonctions holomorphes, aussi impressionnant ou déroutant au premier abord que ces propriétés puissent paraître, un "problème" persiste. Les pôles des fonctions holomorphes. C'est pourquoi nous spécifierons cette notion de fonctions holomorphes aux fonctions méromorphes. Cette nouvelle classe de fonctions formera un corps, et permettra de "résoudre" ce problème. Un outil puissant viendra de ces fonctions : le théorème des résidus qui permet en outre de calculer des intégrales.

Enfin, nous terminerons ce mémoire par quelques exemples de fonctions spéciales, puis par deux applications que sont la densité des polynômes orthogonaux dans l'espace des fonctions de carré intégrable, et par l'espace de Bergman.

Somme toute ce mémoire est un condensé d'un premier cours d'analyse complexe pour un étudiant de licence.

Résumé

Ce mémoire est une introduction à l'analyse complexe. Après quelques rappels sur les séries entières et les fonction analytique. Nous établissons, pour les fonctions d'une variable complexe, l'équivalence entre holomorphie et analyticité (Cauchy, Morera). Nous discutons de la question du logarithme et plus généralement des primitives, des pôles et autres singularités. Pour ce faire, nous intègrons les fonctions sur les chemins, ce qui amène le théorème des résidus et ses applications plus ou moins calculatoires. Nous traitons des exemples de fonctions comme la fonction gamma d'Euler, et nous abordons deux applications dont la densité des polynômes orthogonaux dans l'espace de fonctions de carré intégrable.

1 Série entières réelles ou complexes

Dans ce chapitre, nous allons étudier des séries qui sont parfaitement adaptés à la représentation de fonctions de variable réelle ou complexe, de classe C^∞, et jouent un rôle considérable dans de nombreuses branches des mathématiques comme la combinatoire ou la théorie des nombres, et sont au coeur de la théorie des fonctions analytiques réelles ou complexes, comme nous le verrons dans les chapitres suivant.

1.1 Rayon de convergence

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1. *Nous appellons série entière complexe de variable complexe toute série de fonctions $\sum f_n$ dans laquelle f_n est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la fonction $z \mapsto a_n z^n$, où (a_n) est une suite donnée de nombres complexes. Une telle série est notée $\sum a_n z^n$, et (a_n) est appelée la suite des coefficients de la série entière.*

Définition 1.1.2. *Nous appelons somme de la série entière $\sum a_n z^n$ l'application S définie en tout point où cela a un sens par :*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Lemme 1.1.3 (Abel). *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors, pour tout nombre complexe z tel que $0 \leq |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Démonstration. Nous pouvons supposer $z_0 \neq 0$ (sinon il n'y a rien à démontrer). Posons

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n z_0^n|.$$

Si $0 \leq |z| < |z_0|$, alors nous avons

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \times \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M q^n, \text{ où } 0 \leq q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1.$$

Puisque $q \in \,]0, 1[$, $\sum q^n$ est une série géométrique convergente. La règle de comparaison permet d'en déduire que la série $\sum |a_n z^n|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

□

Théorème 1.1.4. *Il existe un unique nombre R tel que*

1. *si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument,*

2. *si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge.*

Démonstration. Soit E l'ensemble des nombres réels $r \geq 0$ tels que la suite $(|a_n| r^n)$ soit bornée. L'ensemble E est non-vide car contient 0. Si E est non majoré, nous posons $R = +\infty$, sinon nous posons $R = \sup E$.

1. Supposons $|z| < R$. Alors il existe $r_0 \in E$ tel que $|z| < r_0 < R$. La suite $(|a_n| r_0^n)$ est bornée, et en prenant $z_0 = r_0$ dans le Lemme d'Abel, nous avons que la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

2. Supposons $|z| > R$. Alors $|z|$ n'est pas dans l'ensemble E. Donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée. Ainsi la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

Procédons maintenant à la preuve de l'unicité. S'il existait R et R' tels que $0 \leq R < R' \leq +\infty$ satisfaisant tous deux les propriétés 1 et 2, alors pour un nombre r choisi tel que $R < r < R'$, la série $\sum a_n r^n$ devrait à la fois converger et diverger, ce qui est absurde.

□

Remarque : On peut avoir $R = 0$ ou $R = +\infty$. Si $R = +\infty$, alors $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, et la somme de cette série entière définit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dite fonction entière.

Définition 1.1.5. *L'élément R de $\overline{\mathbb{R}}_+$ défini par*

$$R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est le disque de convergence de la série, il est vide si $R = 0$, et coïncide avec $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$.

Remarque : L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ s'appelle le cercle d'incertitude. Si R est fini, on ne peut pas prévoir le comportement de la série sur ce cercle.

Exemples 1.1.6.

1. *La série $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. Cependant en tout point tel que $|z| = 1$, la série diverge.*

2. *La série $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. Cependant en tout point tel que $|z| = 1$, la série converge.*

1.1.2 Méthodes pratiques pour calculer le rayon de convergence

Dans ce paragraphe, nous allons quelques résultats permettant en pratique de calculer le rayon de convergence des séries entières.

Si la série $\sum a_n z^n$ est telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors nous avons le résultat suivant qui découle de la règle de D'Alembert pour les séries numériques.

Proposition 1.1.7 (Règle de D'Alembert). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et notons R son rayon de convergence. Si la suite de terme général $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers $L \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R = \frac{1}{L}$.*

Exemple 1.1.8. *Pour la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$, nous avons :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Le rayon de convergence de la série est donc égal à $+\infty$.

Remarque : La règle de D'Alembert est inapplicable pour les séries du type

$$\sum a_n z^{2n}, \quad \sum a_n z^{2n+1}, \quad \sum a_n z^{n^2} \dots$$

Parfois un effectuer un changement de variable est suffisant.

En fait nous avons le résultat suivant qui découle de la règle de Cauchy pour les séries numériques et qui permet de résoudre les difficultés soulevées par la remarque précédente.

Théorème 1.1.9 (Formule de Hadamard). *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par*

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{avec} \quad L = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{C}$ et appliquons la règle de Cauchy sur les séries numériques à la série numérique $\sum a_n z^n$. L'égalité

$$|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} |z|$$

montre que la série converge absolument pour $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ et diverge pour $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$. Par conséquent la série converge absolument si $|z| < \frac{1}{L}$, et diverge si $|z| > \frac{1}{L}$.
Donc $R = \frac{1}{L}$. □

Exemple 1.1.10. *Calculons le rayon de convergence de* $\sum 2^n z^{2n}$. *Nous avons*

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}} & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$$

Nous obtenons que $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}$, *donc* $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corollaire 1.1.11 (Règle de Cauchy). *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. Si la suite de terme général* $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ *converge vers* $L \in \overline{\mathbb{R}}_+$, *alors* $R = \frac{1}{L}$.

1.1.3 Comparaison de rayons de convergence

Dans ce paragraphe, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Proposition 1.1.12. *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *nous avons* $|a_n| \leq |b_n|$, *alors* $R_a \geq R_b$.

Démonstration. La preuve vient de la définition du rayon de convergence. En effet, soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(b_n r^n)$ soit bornée. Puisque $|a_n r^n| \leq |b_n r^n|$, la suite $(a_n r^n)$ est aussi bornée. Nous avons donc bien l'inégalité : $R_a \geq R_b$.

□

Exemple 1.1.13. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *nous avons* $e^{-1} \leq e^{\cos n} \leq e$. *Les séries* $\sum e^{-1} z^n$ *et* $\sum e z^n$ *étant de rayon de convergence 1, la série* $\sum e^{\cos n} z^n$ *est elle aussi de rayon de convergence égal à 1.*

Proposition 1.1.14. *Si* $a_n = O(b_n)$, *alors* $R_a \geq R_b$.

Démonstration. Par définition, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel nous avons $|a_n| \leq M\,|b_n|$. La série $\sum M b_n z^n$ ayant pour rayon de convergence R_b, la proposition précédente permet de conclure que nous avons bien $R_a \geq R_b$.

□

Remarque : Pour les deux derniers résultats nous sommes revenus à la définition pour faire la preuve, mais c'est en fait des conséquences immédiate de la Formule de Hadamard.

Proposition 1.1.15. *Si* $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$, *alors* $R_a = R_b$.

Démonstration. Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$, donc par la proposition précédente, nous avons $R_a = R_b$.

□

Corollaire 1.1.16. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle qu'il existe une fraction rationnelle non nulle F avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = F(n)$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à 1.*

Démonstration. Il existe deux polynômes P, Q non nuls tels que $F = \frac{P}{Q}$. En notant λX^α et μX^β les termes de plus haut degré de P et Q respectivement, on a $\lambda\mu \neq 0$ et

$$|a_n| \sim_{n\to+\infty} \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| n^{\alpha-\beta}.$$

Comme

$$\frac{(n+1)^{\alpha-\beta}}{n^{\alpha-\beta}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| n^{\alpha-\beta} z^n$$

est égal à 1 d'après la règle de D'Alembert. Donc celui de $\sum a_n z^n$ est lui aussi égal à 1 d'après la proposition précédente.

□

1.2 Opérations sur les séries entières

1.2.1 Structure algébrique

Définition 1.2.1. *Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières, nous appelons*

- □ *série somme : la série $\sum (a_n + b_n) z^n$.*
- □ *série produit (appelé aussi produit de Cauchy), la série $\sum c_n z^n$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{1.2.1}$$

- □ *série scalaire (produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$) : la série $\sum (\lambda a_n) z^n$ ou $\lambda \sum a_n z^n$.*

Muni de ces trois lois, l'ensemble des séries entières a une structure de $\mathbb{C}$-algèbre commutative.

Théorème 1.2.2. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergences respectifs R_a et R_b. Alors*

1. *Le rayon de convergence R de la série somme vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$. De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

2. *En multipliant $\sum a_n z^n$ par $\lambda \neq 0$, nous ne changeons pas le rayon de convergence. De plus, si $|z| < R_a$, nous avons*

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) z^n.$$

3. *Le rayon de convergence R de la série produit vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, nous avons*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

où c_n est donné par la formule (1.2.1).

Démonstration.

1. Si $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, les deux séries entières convergent absolument. La série entière somme converge également puisque l'inégalité triangulaire donne

$$|(a_n + b_n) z^n| \leq |a_n z^n| + |b_n z^n|.$$

Nous avons donc $R \geq \min(R_a, R_b)$.
Si $R_a \neq R_b$, supposons par exemple que $R_a < R_b$, alors pour tout z tel que $R_a < |z| < R_b$, nous avons convergence de la série $\sum b_n z^n$ et divergence de $\sum a_n z^n$. Il ne peut donc ainsi avoir convergence, donc a fortiori convergence absolue, de la série somme. Nous avons bien dans ce cas $R = \min(R_a, R_b)$.
La formule finale vient de celle donnant la somme de deux séries convergentes.

2. La preuve est immédiate. Notons tout de même que si l'on multiplie par 0, nous obtenons la série nulle, de rayon de convergence égal à $+\infty$.

3. Pour $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, les deux séries entières convergent absolument. Leur produit converge absolument par le produit de Cauchy sur les séries numériques. Nous avons donc $R \geq \min(R_a, R_b)$. La formule donnant le produit est la même que pour les séries numériques.

$\square$

Remarque : Pour le rayon de convergence R de la série somme et de la série produit, on peut avoir $R > \max(R_a, R_b)$. Par exemple, les séries $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ sont de convergence 1, mais la série somme est la série nulle, donc de rayon de convergence $+\infty$.

1.2.2 Série entière dérivée

Définition 1.2.3. *On appelle série entière dérivée d'une série entière $\sum a_n z^n$, la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$.*

Proposition 1.2.4. *La série entière dérivée d'une série entière a le même rayon de convergence que celle-ci.*

Démonstration. Notons R et R' les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ respectivement.
Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée donc a fortiori la suite $((n+1)a_{n+1}z^n)$ n'est pas bornée, d'où $|z| \geq R'$. Donc $R \geq R'$.
Si $|z| > R'$, choisissons r tel que $|z| > r > R'$. La suite

$$|a_n z^n| = n\,|a_n|\,r^{n-1} \times \frac{r}{n}\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

est le produit de deux suites à termes positifs dont l'une n'est pas bornée (car $r > R'$) et l'autre tend vers $+\infty$ (car $|z| > r$). La suite $(|a_n z^n|)$ n'est donc pas bornée, d'où $|z| \geq R$. Donc $R' \geq R$.

□

Remarque : En appliquant le résultat précédent à une série entière primitive, ie $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ à la place de $\sum a_n z^n$, nous remarquons que $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

1.3 Convergence uniforme des séries entières

Théorème 1.3.1. *Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans le disque de convergence.*

Démonstration. Soit K un compact inclus dans le disque de convergence $D(0,R)$ de $\sum a_n z^n$. Comme la fonction $\varphi : z \mapsto |z|$ est continue sur le compact K, elle est donc bornée sur K et atteint ses bornes. Il existe donc $r \in [0, R[$ tel que

$$K \subset \overline{D}(0,r) \subset D(0,R).$$

Puisque $0 \leq r < R$, la série numérique $\sum |a_n| r^n$ converge. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{z \in K} |a_n z^n| \leq |a_n| r^n,$$

il en résulte que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur K.

□

Remarque : En général, il n'y a pas convergence uniforme sur le disque de convergence. Par exemple, la série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 et ne converge pas uniformément sur le disque de convergence. En effet, la suite (z^n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur ce disque.

Proposition 1.3.2. *Supposons $R \neq +\infty$. Si $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur son disque de convergence D, alors elle converge aussi uniformément sur le disque fermé $\overline{D}$.*

Démonstration. La convergence uniforme sur D se traduit par le critère de Cauchy uniforme sous la forme suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N,\ \forall p \geq N,\ \forall z \in D,\ \left| \sum_{k=0}^{p} a_{n+k} z^{n+k} \right| \leq \varepsilon.$$

Pour n et p fixés, la fonction $z \mapsto |a_n z^n + \ldots + a_{n+p} z^{n+p}|$ est continue, d'où l'inégalité ci-dessus est aussi vrai sur le disque fermé $\overline{D}$.

□

Remarque : Nous en déduisons que s'il existe un point du cercle d'incertitude en lequel la série diverge, alors la série entière $\sum a_n z^n$ ne converge pas uniformément sur son disque de convergence.

1.4 Propriétés de la fonction somme

1.4.1 Continuité

Théorème 1.4.1. *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence, et S sa somme. Alors la fonction S est continue sur le disque ouvert $D(0, R)$.*

Démonstration. La série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur tout compact inclus dans le disque de convergence, et toutes les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues sur $D(0, R)$. Donc par le théorème de convergence uniforme et continuité sur les séries de fonctions, la fonction S est continue sur le disque ouvert $D(0, R)$.

□

Exemple 1.4.2. *La règle de D'Alembert permet de voir facilement que la série entière* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *est de rayon de convergence* $R = +\infty$. *Sa fonction somme* $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *est donc continue sur* $\mathbb{C}$ *tout entier.*

Corollaire 1.4.3. *Pour tout entier* $p \geq 0$, *la fonction somme* S *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *admet un développement limité à l'ordre* p *au voisinage de l'origine dont la partie régulière est donnée par* $a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p$.

Démonstration. Si $|z| < R$, nous avons

$$S(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p + z^{p+1} \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n z^{n-p-1}.$$

Or, $\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n z^{n-p-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p+1} z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, dont la fonction somme est continue à l'origine et tend vers a_{p+1} quand $z \to 0$. Nous en déduisons que

$$z^{p+1} \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n z^{n-p-1} = O(z^{p+1}).$$

Ce qui démontre le résultat énoncé.

□

1.4.2 Intégration

Théorème 1.4.4. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière complexe de variable réelle, de rayon de convergence* $R > 0$. *Si* $[a, b]$ *est un segment inclus dans l'intervalle de convergence* $]R, R[$, *alors*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

Démonstration. La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[a, b]$, de plus les fonctions $x \mapsto x^n$ sont intégrables sur $[a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous concluons par le théorème de convergence uniforme sur les séries de fonctions.

□

Corollaire 1.4.5. *La fonction somme* S *de la série entière* $\sum a_n x^n$ *est continue sur l'intervalle de convergence* $]-R, R[$, *et ses primitives sont de la forme*

$$x \mapsto C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad où \quad C \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent sur un segment $[0, x]$ pour $x > 0$ et sur $[x, 0]$ pour $x < 0$.

$\square$

1.4.3 Dérivabilité

Théorème 1.4.6. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction somme S définie sur $D(0, R)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est de classe C^1 et sa dérivée S' est la fonction somme de la série entière dérivée.*

Démonstration. Soient R le rayon de convergence commun à la série et à sa série dérivée, et $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z_0| < r < R$. Pour $z \in D(0, r) \setminus \{z_0\}$, nous avons :

$$\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} \right).$$

Considérons à présent la série de fonctions $\sum f_n$, où :

$$f_n : D(0, r) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto a_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} \right).$$

Chaque f_n est continue sur $D(0, r)$. Nous avons

$$\sup_{z \in \overline{D}(0,r)} |f_n(z)| \leq n \, |a_n| \, r^{n-1}.$$

Comme $r < R$, la série de terme général $n \, |a_n| \, r^{n-1}$ est convergente. Ainsi, la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $D(0, R)$. Sa somme F est donc continue sur $D(0, R)$. Or,

$$F(z) = \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} \text{ si } z \neq z_0 \quad ; \quad F(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^n.$$

La continuité de F en z_0 fournit le résultat souhaité.

$\square$

Corollaire 1.4.7. *Dans le disque de convergence, la fonction somme de la série entière est infiniment dérivable et ses dérivées successives sont les fonctions sommes des séries entières dérivées successives.*

Avec les notations précédentes, si $p \in \mathbb{N}$ et $z \in D(0, R)$, alors

$$S^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n. \tag{1.4.1}$$

En particulier, si $R > 0$, nous obtenons :

$$S^{(p)}(0) = p! a_p. \tag{1.4.2}$$

1.5 Fonctions développables en série entière

Définition 1.5.1. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. f est développable en série entière au point z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence non nul, et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Définition 1.5.2. *Soit f une fonction définie et indéfiniment dérivable dans une voisinage de 0. Nous appelons série de Taylor à l'origine de f la série entière*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Remarque : La notion de fonction développable en série entière est une notion locale, donc si une fonction f coïncide au voisinage de 0 avec une fonction g développable en série entière en 0, alors f l'est aussi.

Théorème 1.5.3. *Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0 et admettant un développement en série entière à l'origine. Alors,*

i) Il existe un voisinage de 0 sur lequel f est indéfiniment dérivable.

ii) Le développement en série entière de f à l'origine est son développement de Taylor.

Démonstration. Il existe $R > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence au moins égal à R tels que $D(0, R)$ soit inclus dans le domaine de définition de f, et

$$f(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

pour tout $z \in D(0, R)$.
Comme S est indéfiniment dérivable dans $D(0, R)$, f l'est aussi. En particulier par (1.4.2), nous avons $f^{(p)}(0) = S^{(p)}(0) = p! a_p$.

□

Corollaire 1.5.4. *i) S'il existe, le développement en série entière à l'origine d'une fonction f est unique.*

ii) Si f est développable en série entière à l'origine, alors ses dérivées successives le sont aussi, et leurs développements en séries entières sont les séries entières dérivées successives du développement de f.

iii) Soient f, g développables en série entière à l'origine, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f + g$, λf et fg le sont aussi.

2 Fonctions analytiques

2.1 Définition des fonctions analytiques

Définition 2.1.1. *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-analytique dans Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω.*
Autrement dit, si pour chaque point $z_0 \in \Omega$, il existe une suite de coefficient (a_n) (dépendant bien sûr de z_0) et un nombre $R > 0$ tels que pour $z \in D(z_0, R)$, nous pouvons écrire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Remarque : Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, nous notons $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω. Compte tenu des propriétés sur les séries entières vu dans la partie précédente, il est clair que $\mathcal{A}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre contenant la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions polynômes sur $\mathbb{C}$. D'après ce que nous avons vu précédemment, une fonction analytique sur Ω est indéfiniment dérivable sur Ω et ses dérivées sont analytiques. En particulier, nous verrons que toute fonction analytique est holomorphe sur Ω.

Théorème 2.1.2. *Si une série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, sa somme f est analytique sur le disque ouvert $D(0, R)$.*

Démonstration. Soient $z_0 \in D(0, R)$ et $r_0 = |z_0|$. Nous allons prouver que :

$$|z - z_0| < R - r_0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Fixons z et r tels que $|z - z_0| < r - r_0 < R - r_0$ Soit, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Par (1.4.1), nous avons

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k}.$$

D'où,

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k.$$

Écrivons à présent, $S_p = S'_p + S''_p$, avec :

$$S'_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=k}^{p} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k,$$

$$S''_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k.$$

En intervertissant les deux sommes finies dans S'_p, nous obtenons :

$$S'_p = \sum_{n=0}^{p} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_0^{n-k} (z - z_0)^k \right) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n,$$

par la formule du binôme de Newton.
Comme $|z| < R$, nous avons donc

$$\lim_{p \to +\infty} S'_p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z).$$

De même,

$$\begin{aligned} \left| S''_p \right| &\leq \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{k!(n-k)!} r_0^{n-k} (r - r_0)^k \right) \\ &\leq \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} r_0^{n-k} (r - r_0)^k \right) \\ &= \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| \, r^n. \end{aligned}$$

De nouveau, comme $r < R$, nous avons

$$\lim_{p \to +\infty} S''_p = 0.$$

Nous avons ainsi bien obtenu le résultat voulu.

□

2.2 Principe du prolongement analytique

Théorème 2.2.1 (Prolongement analytique). *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) f est identiquement nulle sur Ω.

ii) f est identiquement nulle sur un voisinage de a.

iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.

Démonstration. L'implication $i) \Rightarrow ii)$ est immédiate.
Montrons $ii) \Rightarrow iii)$. Comme f est analytique sur Ω, pour tout $z \in \Omega$, il existe une suite de coefficients complexes (a_n) tels que $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$ sur un voisinage de a. Par l'absurde, soit n_0 le plus petit entier tel que $a_{n_0} \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{n_0}(z-a)^{n_0} + \sum_{n>n_0} a_n(z-a)^n \\ &= a_{n_0}(z-a)^{n_0} + o((z-a)^{n_0}). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|o((z-a)^{n_0})| \leq \frac{1}{2}|a_{n_0}(z-a)^{n_0}|$ pour $|z-a| \leq \varepsilon$, alors $\forall z \in D(0,\varepsilon) \setminus \{a\}$, nous avons $f(z) \neq 0$. Absurde car par hypothèse f est identiquement nulle sur un voisinage de a.
Montrons $iii) \Rightarrow ii)$. Par définition de $\mathcal{A}(\Omega)$, au voisinage de a, nous avons

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Comme, par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$, f est identiquement nulle sur un voisinage de a
Montrons $ii) \Rightarrow i)$.
Soit $V = \{z \in \Omega \mid f \text{ est identiquement nulle sur un voisinage de } z\}$. Par construction V est ouvert de Ω. Il est non-vide car contient a par hypothèse. Soit (z_n) une suite de points de V convergeant vers $b \in \partial V$. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, nous avons $f^{(k)}(z_n) = 0$. Par continuité des $f^{(k)}$, il vient que $f^{(k)}(b) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La fonction f étant développable en série entière en b, nous en déduisons que f est nulle au voisinage de b, i.e. que $b \in V$. Nous venons de montrer que V est non-vide, ouvert et fermé dans Ω qui est connexe, donc $\Omega = V$, d'où $i)$.
□

Corollaire 2.2.2. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de Ω, alors $f = g$ sur Ω.*

2.3 Principe des zéros isolés

Définition 2.3.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et A une partie de Ω. Alors A est une partie discrète de Ω si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \cap A = \{a\}$.*

Proposition 2.3.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et A une partie de Ω. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Tout $z \in \Omega$ possède un voisinage V tel que $V \cap A$ soit fini.

ii) Pour tout compact K de Ω, l'ensemble $K \cap A$ est fini.

iii) A est une partie discrète et fermée de Ω.

Si ces conditions sont vérifiées, nous disons que A est une partie localement finie de Ω.

Démonstration. Montrons $i) \Rightarrow ii)$. Soit K un compact de Ω. Si $z \in K$, soit V_z un voisinage ouvert de z dans Ω tel que $A \cap V_z$ soit fini. Par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe $z_1, \ldots, z_n \in K$ tels que K soit contenu dans $\bigcup_{i=1}^n V_{z_i}$. Alors,

$$K \cap A \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{z_i} \right) \cap A = (V_{z_1} \cap A) \cup \ldots \cup (V_{z_n} \cap A)\,.$$

Donc $K \cap A$ est fini.
Montrons $ii) \Rightarrow iii)$. Soit $z \in A$. Par hypothèse, il existe un voisinage compact V_z de z tel que $V_z \cap A$ soit fini. De plus, $\mathbb{C}$ étant séparé, z possède un voisinage ouvert W_z dans Ω tel que $W_z \cap (V_z \cap A) = \{z\}$. Ainsi, A est une partie discrète de Ω.
Soit $z \in \overline{A}$, l'adhérence de A dans Ω. Supposons $z \notin A$. Si V est un voisinage compact de z dans Ω, alors $V \cap A$ est fini. De plus, comme précédemment, il existe un voisinage ouvert W_z de z tel que $W_z \cap A = \emptyset$. Ce qui est absurde, tout voisinage d'un point de l'adhérence d'une partie, rencontre la partie.
Montrons $iii) \Rightarrow i)$. Soit $z \in \Omega$. Si $z \in A$, alors il existe un voisinage V de z tel que $V \cap A = \{z\}$, car A est une partie discrète de Ω. Si $z \notin A$, alors il existe un voisinage V de z tel que $V \cap A = \emptyset$, car A est un fermé de Ω.

□

Théorème 2.3.3 (Principe des zéros isolés). *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ non identiquement nulle. L'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de Ω.*

Démonstration. Comme f est continue, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est un fermé de Ω. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{Z}(f)$ est une partie discrète de Ω. Soit $\omega \in \mathcal{Z}(f)$. Par le principe du prolongement analytique, comme f est non identiquement nulle sur Ω, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(p)}(\omega) \neq 0$. Notons k le plus petit de ces entiers. Au voisinage de ω, nous avons donc

$$f(z) = a_k(z-\omega)^k + (z-\omega)^k g(z) \quad \text{avec} \quad a_k \neq 0 \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+k}(z-\omega)^n.$$

Nous avons ainsi que $g(\omega) = 0$. Comme g est développable en série entière en ω, g est continue en ω. Il existe donc un voisinage V_ω de ω dans Ω tel que $|g(z)| < |a_k|$ pour tout $z \in V_\omega$. Ainsi, si $z \in V_\omega \setminus \{\omega\}$, nous avons alors $|f(z)| \geq |z-\omega|^k \left(|a_k| - |g(z)|\right) > 0$. D'où le résultat.

$\square$

Remarque : La multiplicité d'un zéro $a \in \mathcal{Z}(f)$ est le plus petit entier m tel que $f^{(m)}(a) \neq 0$, autrement dit l'indice du premier coefficient non-nul dans le développement en série entière de f au voisinage de a.

Remarque : Le principe des zéros isolés est en réalité une généralisation du principe du prolongement analytique.

Une autre formulation de ce théorème donne :

Corollaire 2.3.4. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Si l'ensemble $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans Ω, alors $f = g$ sur Ω.*

Corollaire 2.3.5. *Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{A}(\Omega)$ est intègre.*

De la preuve du principe des zéros isolés, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 2.3.6. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ non-identiquement nulle, et $u \in \Omega$ un zéro de f. Il existe un unique entier k vérifiant les conditions équivalentes suivantes :*

i) $f^k(u) \neq 0$ *et* $f^{(p)}(u) = 0$ *si* $p \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

ii) *Le premier terme non nul du développement de f en série entière au voisinage de u est de la forme $a_k(z-u)^k$, avec $a_k \neq 0$.*

iii) *Il existe un voisinage V de u dans Ω, et $h \in \mathcal{A}(V)$ telle que, au voisinage de u, nous ayons :*

$$f(z) = (z-u)^k h(z) \text{ et } h(u) \neq 0.$$

k est appelé l'ordre (ou la multiplicité) du zéro u de f.

3 Fonctions holomorphes

Dans toute cette partie, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

3.1 Définition

La notion de $\mathbb{C}$-dérivabilité est, pour les fonctions d'une variable complexe, l'analogue direct de la notion de dérivabilité pour les fonctions d'une variable réelle.

Définition 3.1.1. *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$ si la limite*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \text{ existe dans } \mathbb{C}.$$

Nous appelerons $f'(a)$ la dérivée de f en a.
Si $f'(a)$ existe pour tout $a \in \Omega$, nous dirons que f est holomorphe sur Ω. La classe de toutes les fonctions holomorphes sera notée $\mathcal{H}(\Omega)$.

Remarque : On peut de manière équivalente l'énoncé sous la forme "différentielle" suivante : $f(z+h) = f(z) + hf'(z) + o(|h|)$.

Exemples 3.1.2.

1. *La fonction $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, et sa dérivée est la fonction 1.*
2. *La fonction $z \mapsto \overline{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point. En effet, $\frac{\overline{h}}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0, car pour h réel nous avons $\frac{\overline{h}}{h} = 1$, tandis que pour h imaginaire pur nous avons $\frac{\overline{h}}{h} = -1$.*

De la même façon que pour les fonctions d'une variable réelle, on démontre que la somme et le produit de deux fonctions $\mathbb{C}$-dérivables est $\mathbb{C}$-dérivable, et que l'inverse d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable qui ne s'annule pas est aussi $\mathbb{C}$-dérivable, avec les formules habituelles. En particulier toute fonction polynomiale est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, et toute fonction rationnelle sans pôles dans Ω est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω. De même la composition de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables est $\mathbb{C}$-dérivable, et la formule est la même que dans le cas réel.

Corollaire 3.1.3. *$\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre qui contient les fonctions polynômiales.*

3.2 Formule de Cauchy-Riemann

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. La bijection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto z = x + iy$ permet d'identifier l'ouvert Ω à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, la fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ s'identifie à une fonction de deux variables réelles x et y. Par abus de notations, nous noterons $f(x, y)$ pour $f(z)$.

Supposons $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ différentiable. Alors

$$\forall z,\ f(z + h) = f(z) + df(z)(h) + o(h),$$

avec

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \tag{3.2.1}$$

Posons $dz := dx + idy$ et $d\overline{z} := dx - idy$. Ce qui nous donne $dx = \frac{dz+d\overline{z}}{2}$ et $dy = \frac{dz-d\overline{z}}{2i}$. En réinjectant dans (3.2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{dz + d\overline{z}}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dz - d\overline{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\overline{z}. \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Notons que l'application $h \mapsto df(z)(h)$ est $\mathbb{R}$-linéaire.
Pour obtenir la $\mathbb{C}$-différentiabilité, il nous faut la $\mathbb{C}$-linéarité.

Corollaire 3.2.1 (**Cauchy-Riemann**). *Soit f une application différentiable sur Ω. Alors,*

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Remarque : En notant P et Q les parties réelles et imaginaires de f, le corollaire précédent se réécrit :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ces conditions sont appelés les conditions de Cauchy-Riemann.

Proposition 3.2.2. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f' est identiquement nulle sur Ω, alors f est constante.*

Démonstration. Soient $z_0 \in \Omega$ et D un disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Si $z_1 \in D(z_0, r)$, alors le point $z_2 := \Re(z_1) + i\Im(z_0)$

appartient au disque $D(z_0, r)$. Les segments de droites compacts $[z_0, z_2]$ et $[z_2, z_1]$ sont compacts et contenus dans $D(z_0, r)$, nous avons donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow f(z_1) = f(z_2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f(z_0) = f(z_2).$$

Ainsi $f(z_0) = f(z_1)$. Nous en déduisons que f est localement constante, mais comme Ω est connexe, f est constante sur Ω tout entier.

□

3.3 Détermination continue du logarithme

Définition 3.3.1. *Si $z \in \mathbb{C}^*$, un nombre complexe w est appelé un logartihme de z si $e^w = z$, et qu'un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z si nous avons $z = |z|e^{i\theta}$.*

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ admet une infinité de logarithmes et d'arguments. Deux logarithmes de z diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$, et deux arguments de z diffèrent d'un multiple entier de 2π. D'autre part, logarithmes et arguments se correspondent de manière très simple : si θ est un argument de z, alors $\ln(|z|) + i\theta$ est un logarithme de z ; et si w est un logarithme de z, alors on a $\Re(w) = \ln(|z|)$, et le nombre $\theta = \Im(w)$ est un argument de z.

Définition 3.3.2. *Soit X une partie de $\mathbb{C}^*$, nous appellerons détermination du logarithme sur X toute fonction $g : X \to \mathbb{C}$ vérifiant $e^{g(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. De même nous définissons les déterminations de l'argument.*

Définition 3.3.3. *Les déterminations principales du logarithme et de l'argument sont les fonctions* log *et* arg *définies sur $\mathbb{C}^*$ de la façon suivante :* $\arg(z)$ *est l'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$, et* $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$.

Si $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, nous avons donc

$$\log(z) = \log(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta.$$

Remarque : L'identité $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ n'est pas valable dans $\mathbb{C}^*$ tout entier (elle est vrai modulo $2i\pi$). Cependant si $|\arg(a)|$ et $|\arg(b)|$ sont strictement inférieurs à $\frac{\pi}{2}$, alors nous avons bien $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. En effet, dans ce cas nous avons bien $\arg(a) + \arg(b) \in]-\pi, \pi]$, donc $\arg(a) + \arg(b) = \arg(ab)$ puisque $\arg(a) + \arg(b)$ est un argument de ab.

Les fonctions arg et log ne sont pas continues sur $\mathbb{C}^*$. Plus précisément, pour tout $r > 0$, la restriction de arg au cercle $\{|z| = r\}$ est discontinue au point $-r$, et il en est donc de même pour log. En effet, $\arg(z)$ tend vers π quand z tend vers $-r$ en restant sur le demi-cercle supérieur, et $\arg(z)$ tend vers $-\pi$ quand z tend vers $-r$ en restant sur le demi-cercle inférieur. Ce phénomène n'est pas lié à la définition particulière de arg et log : il se trouve qu'il n'existe aucune détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.3.4. *Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur le cercle unité* $\mathbb{T}$.

Démonstration. Si g est une détermination continue du logarithme sur $\mathbb{T}$, alors $\exp(g(e^{i\theta})) = e^{i\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donc $g(e^{i\theta}) = i\theta + 2i\pi k(\theta)$ pour un certain entier $k(\theta)$. Si g était continue, alors k serait continue sur $\mathbb{R}$, et serait donc constante par connexité de $\mathbb{R}$. Nous aurions alors $g(e^{i\theta}) = i\theta + 2ik\pi$ pour un certain entier k. Or nous obtiendrions à la fois $g(1) = g(e^{i0}) = 2ik\pi$ et $g(1) = g(e^{2i\pi}) = 2i\pi + 2ik\pi$, d'où une contradiction.

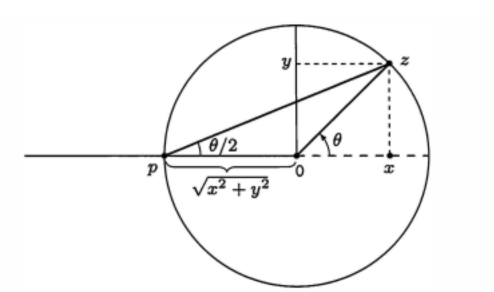
□

Nous pouvons cependant montrer que les fonctions arg et log sont extrêmement régulières sur un domaine plus petit que $\mathbb{C}^*$.

Proposition 3.3.5. *La fonction* arg *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. *La fonction* log *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, *et* $\log'(z) = \frac{1}{z}$.

Démonstration. Si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, écrivons $z = x + iy = re^{i\theta}$, où $x, y \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Soit p le point d'intersection du cercle $\{|z| = r\}$ avec $\mathbb{R}_-$. D'après le théorème de l'angle inscrit, la mesure de l'angle orienté (pO, pz) est égale à $\frac{\theta}{2}$. Nous avons donc $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{x+r}$, et comme $\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, nous obtenons

$$\theta = \arg(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$



Ce qui prouve que arg est de classe C^∞ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, il en est donc de même pour log.

Soit $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$. De $e^{\log(z)} = z$ si $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, nous avons

$$\frac{\log(z) - \log(a)}{z - a} = \frac{\log(z) - \log(a)}{\exp(\log(z)) - \exp(\log(a))}.$$

Si z tend vers a, $\log(z)$ tend vers $\log(a)$ par continuité de la fonction log. D'autre part, la fonction exp est dérivable en $\log(a)$, et sa dérivée en ce point est $\exp(\log(a))$. Nous en déduisons que log est dérivable en a et que :

$$\log'(a) = \frac{1}{\exp(\log(a))} = \frac{1}{a}.$$

Donc la fonction log est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$.

□

Corollaire 3.3.6. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit L_α la demi-droite $\left\{te^{i\alpha}\ ;\ t \in \mathbb{R}^+\right\}$. Pour $z \in \mathbb{C} \backslash L_\alpha$, notons $\arg_\alpha(z)$ l'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]\alpha, 2\pi + \alpha[$, et posons*

$$\log_\alpha(z) = \log(|z|) + i \arg_\alpha(z).$$

Alors $\arg_\alpha$ est une détermination C^∞ de l'argument dans $\mathbb{C} \backslash L_\alpha$, et $\log_\alpha$ est une détermination du logarithme dans $\mathbb{C} \backslash L_\alpha$.

Démonstration. Par rotation, la preuve est immédiate avec la proposition précédente.

□

Proposition 3.3.7. *Dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0, 1)$, nous avons*

$$\log(1 - h) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^n}{n}.$$

Démonstration. Nous avons par définition du log, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\exp(\log(1 - z)) = 1 - z.$$

Or, en posant

$$f(z) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right),$$

nous obtenons par dérivation, qui est possible dans le disque de convergence $\mathbb{D}$,

$$f'(z) = f(z)\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} z^n\right).$$

Donc,

$$f'(z) = \frac{-f(z)}{1 - z}.$$

Remarquons que la fonction $z \mapsto 1-z$ est solution de cette équation différentielle. De plus, nous avons que $f(0) = 1$. Ainsi, nous obtenons que $f(z) = 1 - z$. D'où,

$$\log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} + 2ik\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Nous obtenons l'égalité voulu en évaluant en 0.

$\square$

4 Analycité et holomorphie

Dans toute cette partie, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.
Nous avons vu précédemment que $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$. L'un des enjeux de cette partie est de prouver que $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$.

4.1 Quelques rappels sur les chemins et lacets

Nous appelons arcs toute application continue γ d'un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Nous le noterons parfois $([a, b], \gamma)$. $\gamma(a)$ est appelée l'origine et $\gamma(b)$ l'extrémité. Nous dirons que γ est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Un chemin est un application γ continue et C^1 par morceaux, et un lacet est un chemin fermé.

Définition 4.1.1. *Deux chemins $([a, b], \gamma)$ et $([c, d], \delta)$ sont dits équivalents s'il existe un C^1-difféomorphisme par morceaux croissant (i.e. $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$) $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ tel que $\gamma = \delta \circ \varphi$. Nous noterons $\gamma \sim \delta$.*

Exemple 4.1.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Les chemins $[a, b] \to \mathbb{C}$; $t \mapsto t$ et $[0, 1] \to \mathbb{C}$; $t \mapsto (1 - t)a + tb$ sont équivalents.*

Donnons quelques exemples de chemins importants :

1. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Le lacet
$$[0, 2\pi] \to \mathbb{C};\ t \mapsto z_0 + re^{it}$$
est appelé le cercle de centre z_0 et de rayon r, parcouru dans le sens trigonométrique (direct).

2. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Le chemin
$$[0, 1] \to \mathbb{C};\ t \mapsto (1 - t)u + tv$$
est le segment orienté d'origine u et d'extrémité v, on le note $[u, v]$.

3. Soient $u, v, w \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Notons $\Delta = \Delta(u, v, w)$ le triangle ayant pour sommets u, v, w, c'est-à-dire :
$$\Delta = \{t_1 u + t_2 v + t_3 w \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}_+,\ t_1 + t_2 + t_3 = 1\}.$$
Le bord orienté $\partial\Delta$ de Δ est le lacet obtenu en composants les segments $[u, v]$, $[v, w]$ et $[w, u]$.

4.2 Intégration complexe

Définition 4.2.1. *Soient* $([a,b],\gamma)$ *un chemin et* f *une fonction continue sur* $Im(\gamma)$*. L'intégrale de* f *sur* γ *est définie par :*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Remarque : Nous noterons aussi parfois $\int_\gamma f$ pour désigner $\int_\gamma f(z)dz$.

Proposition 4.2.2. *Si* $\gamma \sim \delta$*, alors* $\int_\gamma f = \int_\delta f$*.*

Démonstration. Comme $\gamma \sim \delta$, il existe $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ C^1-difféomorphisme par morceaux vérifiant 4.1.1. Ainsi, quitte à découper en intervalles où la fonction φ est C^1 on peut supposer que c'est le cas sur $[a,b]$, d'où par la formule de changement de variables,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b f(\delta\circ\varphi(t))(\delta\circ\varphi)'(t)dt \\
&= \int_a^b f(\delta\circ\varphi(t))(\delta)'(\varphi)(t)\varphi'(t)dt \\
&= \int_c^d f(\delta(u))\delta'(u)du \\
&= \int_\delta f
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

□

Soient $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ deux chemins, f une fonction continue sur $Im(\gamma) \cup Im(\delta)$.

- Supposons que δ soit le chemin opposé de γ. Alors,

$$\int_\delta f = -\int_\gamma f.$$

- Supposons $\gamma(b) = \delta(c)$. Alors on définit la concaténation de chemins par

$$\begin{array}{cccc} \gamma\star\delta & : & [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \le \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \text{si } t \ge \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

Et nous obtenons

$$\int_{\gamma\star\delta} f = \int_\gamma f + \int_\delta f.$$

- Posons :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \mid z \in Im(\gamma)\}, \quad \text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

long(γ) est appelé la longueur du chemin γ. Il est immédiat que

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \|f\|_\infty \text{long}(\gamma).$$

4.3 Indice

Théorème 4.3.1. *Soit $([a,b],\gamma)$ un lacet. Pour $z \in U = \mathbb{C}\backslash Im(\gamma)$, posons*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt.$$

Alors l'application $U \to \mathbb{C}\,;\, z \mapsto Ind_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U, et nulle sur la composante connexe non bornée de U. Nous disons que $Ind_\gamma(z)$ est l'indice de z par rapport à γ.

Démonstration. Nous savons que $e^\zeta = 1$ si, et seulement si, $\zeta \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Notons $a = a_0 < a_1 < \ldots a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que γ soit de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$. Pour $t \in [a,b]$, posons

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds\right).$$

Ainsi, la première assertion du théorème qui est que $\text{Ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est équivalente à $\varphi(b) = 1$. Montrons donc tout d'abord que $\varphi(b) = 1$.
Sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$, nous obtenons en dérivant φ :

$$\begin{aligned}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} &\Longrightarrow \varphi'(t)\left[\gamma(t)-z\right] - \varphi(t)\gamma'(t) = 0 \\ &\Longrightarrow \left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}\right)' = 0.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que l'application $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ a une dérivée nulle sur $[a_i, a_{i+1}]$, donc est constante sur cet intervalle, et donc constante sur $[a,b]$. De plus, comme $\gamma(a) = \gamma(b)$, nous obtenons :

$$\frac{\varphi(a)}{\gamma(a)-z} = \frac{\varphi(b)}{\gamma(b)-z} \Longrightarrow 1 = \varphi(a) = \varphi(b).$$

Ce qui démontre que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, par la remarque initiale. Soient $w, z \in U$. Comme $Im(\gamma)$ est compact (donc U est ouvert), il existe $d > 0$ tel que $|\zeta - z| \geq d$ et $|\zeta - w| \geq d$ pour tout $\zeta \in Im(\gamma)$. Nous obtenons donc

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z) - \mathrm{Ind}_\gamma(w)| \leq \frac{1}{2\pi d^2} |z - w| \, \mathrm{long}(\gamma).$$

Ceci nous montre que l'application $z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est continue sur U. De plus, comme elle est à valeurs entière, elle est localement constante, donc constante sur chaque composante connexe de U.
Enfin, prenons z tel que $|z| > \sup\{|\gamma(t)| \mid t \in [a,b]\}$, il vient que

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| \leq \frac{\mathrm{long}(\gamma)}{2\pi \inf\{|z - \gamma(t)| \mid t \in [a,b]\}}.$$

Comme $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est un entier, on obtient que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ si $|z|$ est assez grand. D'où le dernier point.

□

Remarque : Intuitivement, $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est le "nombre de tours" (avec un signe pour le sens) que fait le chemin γ autour de z.

Proposition 4.3.2. *Soit γ le chemin qui décrit le cercle $C(a,r)$ orienté dans le sens direct. Nous obtenons que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ si $|z - a| > r$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$ si $|z - a| < r$.*

Démonstration. Si $|z - a| > r$, z appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \backslash Im(\gamma)$, donc $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$, par le théorème précédent. Si $|z - a| < r$, alors $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a)$, toujours d'après le théorème précédent. Or,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 1.$$

D'où le résultat.

□

4.4 Existence de primitives, théorème de Cauchy

Il y a plusieurs formes du théorème de Cauchy. Toutes affirment que si γ est un lacet dans Ω, et si γ et Ω vérifient certaines propriétés topologiques, l'intégrale le long de γ de toute fonction f holomorphe sur Ω est nulle. Tout d'abord, nous allons établir une version simple de ce théorème, parfois suffisante pour certaines applications.

Pour cela commençons par définir ce qu'est une primitive et donnons quelques résultats sur cette notion, son existence et le lien avec l'intégration le long de chemins.

Définition 4.4.1. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Une primitive $F : \Omega \to \mathbb{C}$ pour f est une fonction holomorphe telle que $F' = f$.*

Théorème 4.4.2. *Soit f une fonction continue sur Ω. Nous avons l'équivalence des assertions suivantes :*

i) f possède une primitive dans Ω.

ii) Pour tout lacet γ dans Ω, $\int_\gamma f = 0$.

Démonstration. Montrons $i) \Rightarrow ii)$. Soient $([a,b],\gamma)$ un lacet dans Ω et F une primitive de f dans Ω. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma F'(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt \\ = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0\end{aligned}$$

car γ est un lacet, donc $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Montrons $ii) \Rightarrow i)$. Les composantes connexes de Ω étant des ouverts deux à deux disjoints, il suffit de construire une primitive de f sur chacune de ces composantes connexes. Nous pouvons donc supposer Ω connexe.
Fixons $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, il est connexe par arcs. Ainsi si $z \in \mathbb{C}$, il existe un chemin d'origine z_0 et d'extrémité z. Soient $([a,b],\gamma_1)$ et $([c,d],\gamma_2)$ deux tels chemins. Le chemin γ, obtenu en composant γ_1 et le chemin opposé à γ_2 est un lacet dans Ω (la composition est licite, car $\gamma_1(b) = \gamma_2(d) = z$). Compte tenu de l'hypothèse, nous obtenons :

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f.$$

Définissons la fonction F sur Ω par :

$$F(z) = \int_\delta f,$$

où δ est un chemin quelconque dans Ω d'origine z_0 et d'extrémité z.
Soient $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset \Omega$ et $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < r$. Désignons par $\gamma(z_0, z+w)$ un chemin d'origine z_0 et d'extrémité $z+w$. Enfin, notons γ le chemin composé de δ, du segment orienté $[z, z+w]$, et du chemin opposé à $\gamma(z_0, z+w)$. Nous avons :

$$0 = \int_\gamma f = \int_\delta f + \int_{[z,z+w]} f - \int_{\gamma(z_0,z+w)} f.$$

Ceci s'écrit aussi :
$$F(z+w)-F(z)=\int_{[z,z+w]} f.$$
Comme $\int_{[z,z+w]} d\zeta = w$, nous avons donc, pour $w \neq 0$:
$$\frac{F(z+w)-F(z)}{w}-f(z)=\frac{1}{w}\int_{[z,z+w]} (f(\zeta)-f(z))\, d\zeta.$$
La longueur du segment $[z, z+w]$ étant $|w|$, nous obtenons la majoration suivante :
$$\left|\frac{F(z+w)-F(z)}{w}-f(z)\right| \leq \sup\{|f(\zeta)-f(z)| \mid \zeta \in [z,z+w]\}.$$
La fonction f est continue en z, nous en déduisons que F est dérivable en ce point et que $F'(z) = f(z)$. Nous venons donc de prouver que F est une primitive de f sur Ω.

□

Corollaire 4.4.3. *Soient $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$, et γ un lacet. Alors $\int_\gamma z^n dz = 0$ dans les deux cas suivants :*

i) $n \geq 0$ *et* γ *quelconque.*

ii) $n < -1$ *et* $0 \notin Im(\gamma)$.

Démonstration. Cela vient du théorème précédent, et du fait que, pour $n \neq -1$, $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $z \mapsto z^n$, dans $\mathbb{C}$ si $n \geq 0$, et dans $\mathbb{C}^*$ si $n < -1$.

□

Rappelons brièvement quelques notions topologiques. Soit A une partie de $\mathbb{C}$.

- On dit que A est convexe si $tu + (1-t)v \in A$ pour tous $u, v \in A$, et tout $t \in [0,1]$. Cela signifie que, pour tous $u, v \in A$, le segment d'extrémités u et v est contenu dans A.
- Si $u \in A$, A est dit étoilée en u si le segment $[u, v]$ est contenu dans A pour tout $v \in A$. Dire que A est convexe signifie qu'elle est étoilée en tous ses points.
- Si A est bornée, nous posons
$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{|u-v| \mid u, v \in A\}$$
que l'on nomme diamètre de A.
- Soient $(K_n)_n$ une suite décroissante de compacts non-vides de $\mathbb{C}$ et K leur intersection. Alors K est non-vide. Si $\operatorname{diam}(K_n)$ tend vers 0, alors quand n tend vers $+\infty$, K est réduit à un point.

Théorème 4.4.4. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue sur Ω telle que*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0$$

pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$. Alors f possède une primitive.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0, z]$ est contenu dans Ω. Nous définissons ainsi une fonction F sur Ω par :

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f.$$

Si z et $z+w$ sont des points de Ω et si $\Delta = \Delta(z_0, z, z+w)$, alors l'intégrale de f sur $\partial\Delta$ est nulle par hypothèse. Ceci s'écrit :

$$F(z+w) - F(z) = \int_{[z,z+w]} f.$$

Nous obtenons alors,

$$\frac{F(z+w) - F(z)}{w} - f(z) = \frac{1}{w} \int_{[z_0,z+w]} f(\zeta) - f(z) d\zeta,$$

et nous montrons de la même manière que dans la preuve du théorème 4.4.2 que F est dérivable en z et que $F'(z) = f(z)$.

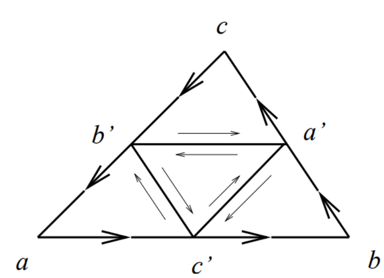
□

Théorème 4.4.5 (Lemme de Goursat). *Soit f une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{w\}$. Pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$, nous avons :*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$

Démonstration. Dans la preuve, si Δ est un triangle, on note $I(\Delta)$ l'intégrale de f sur $\partial\Delta$.
1ER CAS : Supposons tout d'abord que $w \notin \Delta$. Notons $\Delta = \Delta(a, b, c)$, et soient a', b', c' les milieux respectifs des segments $[b, c], [c, a], [a, b]$. Posons :

$$\Delta^1 = \Delta(a, c', b'), \quad \Delta^2 = \Delta(b, a', c'),$$
$$\Delta^3 = \Delta(c, b', a'), \quad \Delta^4 = \Delta(a', b', c')$$



Nous avons directement que :

$$I(\Delta) = I(\Delta^1) + I(\Delta^2) + I(\Delta^3) + I(\Delta^4).$$

Donc il existe $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\left|I(\Delta^j)\right| \geq \frac{1}{4}\left|I(\Delta)\right|$. Notons Δ_1 un triangle vérifiant cette propriété. De la même manière que précédemment, nous construisont un triangle Δ_2 vérifiant $|I(\Delta_2)| \geq \frac{1}{4}|I(\Delta_1)|$. Posant $\Delta = \Delta_0$, nous obtenons par récurrence une suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de triangles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_{n+1} \subset \Delta_n, \quad |I(\Delta_{n+1})| \geq \frac{1}{4}|I(\Delta_n)|$$

$$\operatorname{diam}(\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\Delta_n), \quad \operatorname{long}(\partial\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\operatorname{long}(\partial\Delta_n).$$

Nous obtenons que

$$|I(\Delta)| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = 4^n|I(\Delta_n)|. \tag{4.4.1}$$

Soit z_0 l'unique point d'intersection des Δ_n (voir les quelques rappels de topologie). Comme $z_0 \in \Delta \subset \Omega$ et $w \notin \Delta$, f est dérivable en z_0. Ainsi, soit $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$, tel que :

$$D(z_0, r) \subset \Omega, \text{ et } z \in D(z_0, r) \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|.$$

Comme $\operatorname{diam}(\Delta_n) = 2^{-n}\operatorname{diam}(\Delta)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta_n \subset D(z_0, r)$ pour tout $n \geq N$. Pour $n \geq N$, par le Corollaire 4.4.3, nous avons

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \left(f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\right) dz.$$

Ceci entraîne que

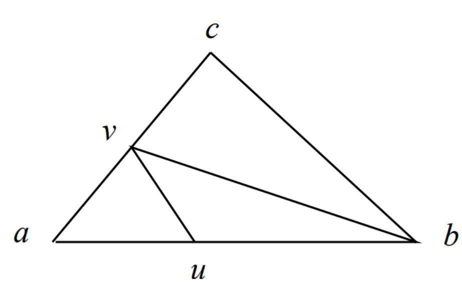
$$|I(\Delta_n)| \leq \varepsilon\operatorname{diam}(\Delta_n)\operatorname{long}(\partial\Delta_n) = \frac{\varepsilon}{4^n}\operatorname{diam}(\Delta)\operatorname{long}(\partial\Delta).$$

Ainsi, par (4.4.1),

$$|I(\Delta)| \leq \varepsilon\operatorname{diam}(\Delta)\operatorname{long}(\partial\Delta).$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons $I(\Delta) = 0$.

2ÈME CAS : Supposons que w soit un sommet de Δ, par exemple $w = a$.



Soient $u \in]a,b]$ et $v \in]a,c]$. Alors $I(\Delta)$ est somme des intégrales de f sur les triangles

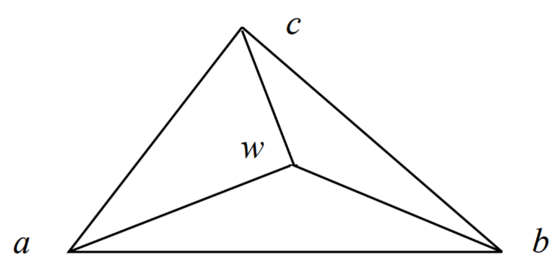
$$\Delta_1 = \Delta(a,u,v), \quad \Delta_2 = \Delta(u,b,v), \quad \Delta_3 = \Delta(b,c,v).$$

D'après le premier cas, nous avons $I(\Delta_2) = I(\Delta_3) = 0$, donc $I(\Delta) = I(\Delta_1)$. Comme f est continue sur Ω, il existe $r, M \in \mathbb{R}_+$ tels que $|f(z)| \leq M$ si $|z-a| \leq r$. Si u et v sont assez proches de a, nous obtenons donc

$$|I(\Delta)| = |I(\Delta_1)| \leq M \mathrm{long}(\Delta_1).$$

En faisant tendre u et v vers a, nous obtenons $I(\Delta) = 0$.

3ème Cas : Supposons que w ne soit pas un sommet de Δ, et que $w \in \Delta$. En considérant les triangles $\Delta(w,a,b)$, $\Delta(w,b,c)$ et $\Delta(w,c,a)$, nous nous ramenons au 2ème cas.



Ce qui achève la démonstration.

□

Théorème 4.4.6 (Théorème de Cauchy pour un convexe). *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$. Soient $w \in \Omega$, f une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{w\}$. Alors f possède une primitive sur Ω, et pour tout lacet γ dans Ω, nous avons*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Démonstration. Le résultat est immédiat par le lemme de Goursat, le théorème 4.4.4 et le théorème 4.4.2.

□

Théorème 4.4.7 (Formule de Cauchy pour un convexe). *Soient γ un lacet dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$, $z \in \Omega \setminus Im(\gamma)$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors*

$$f(z) Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Démonstration. Définissons $g : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = f'(z), \quad g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ si } \zeta \neq z.$$

La fonction g est continue sur Ω et holomorphe dans $\Omega \backslash \{z\}$. Par le théorème de Cauchy sur un convexe, nous obtenons

$$0 = \int_\gamma g(\zeta) d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

D'où immédiatement le résultat par la définition de l'indice.

$\square$

Corollaire 4.4.8. *Sous les hypothèses de la Formule de Cauchy pour un convexe, si γ est un cercle de rayon $r > 0$ parcouru dans le sens direct, et si $|z| < r$, alors*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

4.5 Analycité des fonctions holomorphes

Soient $z \in \mathbb{C}$ et A une partie non-vide de $\mathbb{C}$. Posons

$$d(z, A) = \inf \{|z - a| \mid a \in A\}.$$

$d(z, A)$ est appelé la distance de z à la partie A.

Théorème 4.5.1. *Soient Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors,*

i) $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C} \backslash \Omega)$.

ii) Si Ω est connexe, et si γ est un lacet dans Ω tel que $a \notin Im(\gamma)$, alors

$$f^{(n)}(a) Ind_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. 1ère Étape : Supposons que Ω est convexe.
Soit $a \notin Im(\gamma)$. Comme $Im(\gamma)$ est compact, il existe $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$ et $D(a, r) \cap Im(\gamma) = \emptyset$.
Pour $z \in D(a, r)$ et $\zeta \in Im(\gamma)$, nous avons $|z - a| < r < |\zeta - a|$. De plus, comme

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \times \frac{\zeta - a}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \times \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}.$$

D'où

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta).$$

De plus, si $M = \sup\{|f(\zeta)| \mid \zeta \in Im(\gamma)\}$, alors

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta) \right| \leq M \frac{|z-a|^n}{r^{n+1}}.$$

Ce qui nous donne convergence normale donc uniforme de la série de fonctions, de plus ces fonctions $t \mapsto \frac{(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)$ sont continues quitte à subdiviser l'intervalle (ce qui justifie l'interversion série-intégrale qui suit), ainsi compte tenu de la formule de Cauchy pour un convexe, nous obtenons :

$$f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n. \tag{4.5.1}$$

Si nous prenons pour γ le cercle de centre a et de rayon R parcouru dans le sens direct tel que $D(a,r) \subset C(a,R) \subset \Omega$, nous avons $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1$. Nous obtenons ainsi que $f \in \mathcal{A}(D(a,R))$. Nous avons ainsi prouvé que $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, et obtenu *ii*). L'assertion concernant le rayon de convergence résulte de (4.5.1) par unicité du développement en série entière et par le théorème 1.5.3.

2ème Étape : Supposons que Ω est non convexe. Alors $d(a, \mathbb{C}\backslash\Omega)$ est le rayon du plus grand disque ouvert $D(a,R)$ contenu dans Ω. Comme $D(a,R)$ est convexe, il suffit d'appliquer la première étape.

□

Corollaire 4.5.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors f est indéfiniment dérivable sur Ω.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent, et des propriétés des fonctions analytiques.

□

Remarque : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de $x \mapsto |x|$. Alors f est dérivable mais n'est pas deux fois dérivable. Il y a donc des différences conséquentes entre les fonctions de variable réelle et les fonctions de variable complexe.

Le lemme de Goursat a une réciproque utile :

Théorème 4.5.3 (Théorème de Morera). *Soit f une fonction continue sur Ω telle que pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Démonstration. Soit U un ouvert connexe de Ω. Comme pour la démonstration du théorème 4.4.2, nous pouvons construire $F \in \mathcal{H}(U)$ telle que $F' = f$. Les dérivées des fonctions holomorphes étant holomorphes (corollaire précédent), pour tout ouvert connexe $U \subset \Omega$, nous avons $f \in \mathcal{H}(U)$, d'où $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

$\square$

Corollaire 4.5.4. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $w \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{w\})$ continue sur Ω. Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Démonstration. Le résultat est immédiat en appliquant le lemme de Goursat, puis le théorème de Morera.

$\square$

Théorème 4.5.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. Supposons que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de Ω. Alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Comme la fonction f est limite uniforme sur le compact $\overline{D}(a, r)$ des fonctions continues f_n, alors elle est aussi continue sur $\overline{D}(a, r)$. Soit $b, c, d \in \overline{D}(a, r)$, comme $\overline{D}(a, r)$ est convexe, alors $\Delta = \Delta(b, c, d) \subset \overline{D}(a, r)$. Ainsi, par le lemme de Goursat,

$$\int_{\partial\Delta} f_n = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par passage à la limite, et par interversion limite-intégrale, nous obtenons

$$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$

Ainsi par le critère de Morera, nous obtenons que f est holomorphe sur $D(a, r)$. Ceci étant valable pour tout $a \in \Omega$, nous obtenons que f est holomorphe sur Ω.

$\square$

Corollaire 4.5.6. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω. Alors sa somme f est holomorphe sur Ω.*

5 Propriété des fonctions holomorphes

5.1 Inégalité de Cauchy

Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$. En prenant γ le cercle $C(a,r)$ avec $0 < r < R$ parcouru dans le sens direct. Par la formule de Cauchy, nous avons pour $z \in D(a,r')$, avec $r' < r$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{a+re^{i\theta}-z}ire^{i\theta}d\theta$$

En posant $F(\theta,z) := \frac{f(a+re^{i\theta})}{a+re^{i\theta}-z}ire^{i\theta}$, nous avons :

i) $\forall z \in D(a,r')$, $\theta \mapsto F(\theta,z)$ est intégrable, car continue sur un segment.

ii) $\forall \theta$, $z \mapsto F(\theta,z)$ est de classe C^1 et

$$\frac{\partial F(\theta,z)}{\partial z} = \frac{f(a+re^{i\theta})ire^{i\theta}}{(a+re^{i\theta}-z)^2}$$

iii) $\forall z \in D(a,r')$,

$$\left|\frac{\partial F(\theta,z)}{\partial z}\right| \leq \frac{\|f\|_{\infty,\overline{D}(a,r)}r}{(r-r')^2}$$

car $|a+re^{i\theta}-z| \geq d(z,C(a,r)) \geq r-r'$.
Et $r \mapsto \frac{\|f\|_{\infty,C(a,r)}r}{(r-r')^2}$ est intégrable sur un segment.

Donc, par le théorème de dérivabilité sous le signe intégral, f est dérivable et nous avons :

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}.$$

De même nous obtenons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

Si z est le centre du disque, comme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, nous en déduisons le résultat suivant :

Théorème 5.1.1 (Inégalités de Cauchy). *Avec les notations qui précèdent, pour tout $r \in]0,R[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :*

$$|a_n| = \frac{\left|f^{(n)}(z)\right|}{n!} \leq \frac{\|f\|_{\infty,\overline{D}(z,r)}}{r^n}.$$

Corollaire 5.1.2 (Théorème de Liouville). *Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ bornée est constante.*

Démonstration. Si $M \geq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors pour tout $r > 0$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ par l'inégalité de Cauchy. En faisant tendre $r \to \infty$, nous obtenons $a_n = 0$ si $n \geq 1$.

□

Corollaire 5.1.3 (Théorème de D'Alembert). *Tout polynôme d'une variable à coefficients complexes et non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{C}$. Il est clair que $|P(z)|$ tend vers $+\infty$ si $|z|$ tend vers $+\infty$. Supposons que P n'a aucune racine dans $\mathbb{C}$, alors $z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Liouville, elle est constante, donc le polynôme P est constant. Contradiction.

□

5.2 Principe du maximum

Nous allons démontrer tout d'abord le principe du maximum en utilisant le fait que les fonctions holomorphes sont analytiques. Puis dans en second temps, nous verrons le principe du maximum comme conséquence de la propriété de la moyenne.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω. Nous disons que f a un maximum local en $a \in \Omega$ s'il existe un voisinage V de a dans Ω tel que pour tout $z \in V$, $|f(z)| \leq |f(a)|$.

Proposition 5.2.1 (Principe du maximum). *Soit f une fonction holomorphe non-constante sur un ouvert connexe Ω. Alors $|f|$ n'admet pas de maximum local sur Ω. Ainsi, si Ω est borné et que f est aussi définie sur $\overline{\Omega}$, le maximum de f sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur la frontière $\partial\Omega$. En d'autres termes, en tout point $z \in \Omega$:*

$$|f(z)| \leq \sup \{|f(\zeta)| \mid \zeta \in \partial\Omega\}.$$

Remarque : Notons que f vérifie le principe du maximum dans Ω si elle est constante au voisinage de tout point $a \in \Omega$ en lequel elle a un maximum relatif.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. La fonction $f - f(z_0)$ n'est pas identiquement nulle sur Ω, donc par unicité du prolongement analytique, il existe un entier $k > 0$ et un complexe α non nul tels que

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0)^k + (z - z_0)^k \varepsilon(z),$$

où ε est une fonction de limite nulle en z_0.

- Si $f(z_0) = 0$, alors au voisinage de z_0, f ne s'annule pas.
- Si $f(z_0) \neq 0$,
$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h^k + o(h^k).$$
En prenant $h = t\beta$ avec $t > 0$ et β une racine k-ième de $\frac{f(z_0)}{\alpha}$, nous obtenons
$$f(z_0 + t\beta) = f(z_0)\left(1 + t^k + o(t^k)\right).$$
Pour t assez petit, $|o(t^k)| \leq |\frac{1}{2}t^k|$, ainsi $|f(z_0 + t\beta)| > |f(z_0)|$.

Par conséquent dans les deux cas, $|f|$ n'admet pas de maximum local en z_0. $\square$

Proposition 5.2.2 (Propriété de la moyenne). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et f une fonction continue sur Ω. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Pour tout disque $D(a, r) \subset \Omega$,
$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt.$$

ii) Pour tout disque $D(a, r) \subset \Omega$,
$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int\int_{D(a,r)} f(x + iy)dxdy.$$

Si elles sont vérifiées, nous disons que f possède la propriété de la moyenne dans Ω.

Démonstration. En utilisant les coordonnées polaires, nous obtenons :
$$\frac{1}{\pi r^2}\int\int_{D(a,r)} f(x + iy)dxdy = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})d\theta\right)\rho d\rho.$$

L'implication $i) \Rightarrow ii)$ est alors immédiate. A présent, supposons $ii)$ vérifiée. Soit $R > 0$ tel que $D(a, R) \subset \Omega$. Pour $0 \leq r < R$, nous avons
$$\frac{r^2}{2}f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})d\theta\right)\rho d\rho.$$

En prenant la dérivée des deux membres par rapport à r, nous obtenons $i)$. $\square$

Proposition 5.2.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors f possède la propriété de la moyenne dans Ω.*

Démonstration. Si $D(a,r) \subset \Omega$, il existe $R > r$ tel que $D(a,R) \subset \Omega$. Si γ est le cercle $C(a,r)$ parcouru dans le sens direct, en appliquant la formule de Cauchy au convexe $D(a,r)$, nous obtenons :

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

D'où l'assertion.

□

Proposition 5.2.4. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω vérifiant la propriété de la moyenne dans Ω. Alors f vérifie le principe du maximum.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ en lequel f a un maximum relatif et soit $R > 0$ vérifiant $D(a,R) \subset \Omega$ et $|f(z)| \leq |f(a)|$ pour tout $z \in D(a,R)$. Le résultat est immédiat si $f(a) = 0$, supposons donc ce cas exclu. Quitte à changer f en $\left(\frac{\overline{f(a)}}{|f(a)|^2}\right) f$, nous pouvons supposer que $f(a) = |f(a)| > 0$. Puisque f vérifie la propriété de la moyenne, pour $0 < r < R$, nous obtenons :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(a) - f(a + re^{it}\right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[|f(a)| - f(a + re^{it}\right] dt.$$

En particulier,

$$\int_0^{2\pi} \left[|f(a)| - \Re(f(a + re^{it}))\right] dt.$$

Or a est un maximum relatif pour la fonction f, donc la fonction $t \mapsto |f(a)| - \Re(f(a + re^{it}))$ qui est continue est à valeurs positives ou nulles sur $[0, 2\pi]$, et d'intégrale nulle sur cet intervalle. Elle est donc nulle. Ainsi, pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et $r < R$, nous obtenons :

$$|f(a)| = \Re(f(a + re^{it})).$$

Comme $|f(z)| \leq |f(a)|$ pour tout $z \in D(a,R)$, alors $\Im(f(z)) = 0$ pour tout $z \in D(a,R)$. Autrement dit, f est constante sur $D(a,R)$.

□

Corollaire 5.2.5. *Si Ω est un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non constante sur Ω, alors f n'admet pas de maximum relatif dans Ω.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que f possède un maximum relatif en $a \in \Omega$. Puisque f est holomorphe, elle satisfait la propriété de la moyenne et d'après la proposition précédente, elle est donc constante au voisinage de a. La connexité de Ω implique alors que f est constante, ce qui contredit l'hypothèse. □

5.3 Holomorphie et intégration

Soit X un espace topologique et μ une mesure positive sur X, telle que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ soit un espace mesuré. Fixons Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.
Considérons une fonction $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$, $(z, x) \mapsto f(z, x)$. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.3.1 (**Théorème d'holomorphie sous le signe intégral**). *En reprenant les notations précédentes, supposons que f vérifie les hypothèses suivantes :*

i) Pour tout $z \in \Omega$, l'application $x \mapsto f(z, x)$ est μ-mesurable.

ii) Pour tout $x \in X$, l'application $f_x : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω.

iii) Pour tout compact K de Ω, il existe une application $g_K : X \to \mathbb{R}_+$ μ-intégrable telle que

$$|f(z, x)| \leq g_K(x)$$

pour tout $(z, x) \in K \times X$.

Alors la formule $F(z) = \int_X f(z, x) d\mu(x)$ définie une fonction holomorphe dans Ω. De plus, pour tout $z \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, x) d\mu(x).$$

Exemple 5.3.2 (**Fonction Gamma**). *La formule $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ définie une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Omega = \{\Re(z) > 0\}$.*

La fonction $(z, t) \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est holomorphe en $z \in \Omega$ et mesurable en $t \in]0, +\infty[$. Fixons un compact K de Ω, et choisissons a et b tels que $0 < a \leq \Re(z) \leq b < +\infty$ pour tout $z \in K$. Pour tout $z \in K$, nous avons alors

$$|t^{z-1} e^{-t}| \leq t^{a-1} e^{-t} \text{ si } t \in [0, 1]$$
$$|t^{z-1} e^{-t}| \leq t^{b-1} e^{-t} \text{ si } t \geq 1$$

Comme $a - 1 > -1$, la fonction g définie par

$$g(t) = t^{a-1} e^{-t} \text{ si } t \in [0, 1]$$
$$g(t) = t^{b-1} e^{-t} \text{ si } t \geq 1$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc la condition iii) est vérifiée avec $g_K = g$. Ainsi, par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, la fonction Γ est bien définie, et est holomorphe sur le demi-plan Ω.

6 Fonctions méromorphes

Nous nous intéressons dans cette section aux fonctions holomorphes définies au voisinage épointé d'un certain $z_0 \in \mathbb{C}$. Cela signifie que nous considèrons une fonction f holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ qui contient $D(z_0, r)$ pour un certain $r > 0$, mais pas forcément z_0. Par exemple, les fonctions suivantes sont bien définies et holomorphes sur $\mathbb{C}^*$, voisinage épointé de 0 :

$$z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}, \quad z \mapsto e^{\frac{1}{z}}.$$

Nous dirons que 0 est une singularité isolée pour ces fonctions.

6.1 Singularités isolées

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, nous avons

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Nous observons que le membre de droite se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Il en est donc de même pour la fonction $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$. Dans ce genre de situation, nous prolongeons la fonction et nous oublions qu'il y avait un problème, qui n'en était donc pas un.

Définition 6.1.1. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$. z_0 est appelée une singularité artificielle (ou point régulier, ou singularité enlevable, ou singularité illusoire) de f si f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(z_0, R)$.*

En fait, si f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de z_0, le prolongement est alors unique par le principe du prolongement analytique.

Proposition 6.1.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que la fonction f soit bornée sur $\Omega \cap D^*(a, r)$. Alors a est un point régulier de f.*

Démonstration. Définissons une fonction g sur Ω par :

$$g(a) = 0, \; g(z) = (z - a) f(z) \text{ si } z \neq a.$$

Nous avons que g est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Par 4.5.4, nous obtenons que g est holomorphe sur Ω. Si $r > 0$ est assez petit, nous avons $D(a,r) \subset \Omega$ et g admet un développement

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$$

pour $|z-a| < r$. Nous avons $\alpha_0 = 0$ puisque $g(a) = 0$. Ainsi

$$z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z-a)^{n-1}$$

prolonge f au voisinage de a.

□

Nous venons de mettre de côté les singularités qui n'en sont pas vraiment. Mais ce n'est pas si simple ne général. Ainsi, par exemple, les fonctions $z \mapsto \frac{1}{z}$ et $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ données au début de cette partie ne se prolongent pas en 0.

Théorème 6.1.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Alors f vérifie une et une seule des propriétés suivantes :*

i) f a une singularité artificielle en a.

ii) Il existe une unique suite finie de nombres complexes $(a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-m})$, avec $m \geq 1$ et $a_{-m} \neq 0$, telle que la fonction

$$z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

ait une singularité artificielle en a.
a est alors appelé un pôle d'ordre m (ou de multiplicité m) de f et le polynôme

$$\sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-a)^{-k}$$

en $(z-a)^{-1}$ est la partie principale de f en a.

iii) Pour tout $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$, l'ensemble $f\left(D^*(a,r)\right)$ est dense dans $\mathbb{C}$. a est alors appelé une singularité essentielle de f.

Démonstration. Supposons *iii*) non réalisé. Il existe $b \in \mathbb{C}$, $r, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tels que $D(a,r) \subset \Omega$ et $f\left(D^*(a,r)\right) \cap D(b,\varepsilon) = \emptyset$, i.e. que $|f(z) - b| \geq \varepsilon$ pour tout $z \in D^*(a,r)$.
La fonction $z \mapsto \frac{1}{f(z)-b}$ est holomorphe sur $D^*(a,r)$ et est majorée en module par $\frac{1}{\varepsilon}$. De plus, par la proposition précédente, elle se prolonge en $g \in \mathcal{H}(D(a,r))$.

- Si $g(a) \neq 0$, $f(z) = b + \frac{1}{g(z)}$ a une singularité artificielle en a, et $i)$ est vérifié.
- Supposons $g(a) = 0$, et notons m la multiplicité du zéro a de g. Par 2.3.6, il existe $h \in \mathcal{H}(D(a,r))$ vérifiant $h(a) \neq 0$ et

  $$g(z) = (z-a)^m h(z) \tag{6.1.1}$$

  si $z \in D(a,r)$. D'après (6.1.1), nous pouvons supposer r assez petit pour que $h(z) \neq 0$ si $z \in D(a,r)$. Ainsi $l = \frac{1}{h} \in \mathcal{H}(D(a,r))$. De plus, $l(a) \neq 0$, et dans $D^*(a,r)$ nous avons :

  $$f(z) - b = \frac{l(z)}{(z-a)^m}.$$

  En écrivant

  $$l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n,$$

  nous obtenons

  $$f(z) = b + \frac{\alpha_0}{(z-m)^m} + \ldots + \frac{\alpha_{m-1}}{z-a} + \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n (z-a)^{n-m}.$$

  La condition $ii)$ est vérifiée avec $(a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-m}) = (\alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_0)$. L'unicité de la suite des a_i est immédiate via le principe du prolongement analytique.

$\square$

Proposition 6.1.4. *Avec les notations du théorème précédent, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *f a un pôle d'ordre m en a.*

ii) *Il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$ et $h \in \mathcal{H}(D(a,r))$ vérifiant $h(a) \neq 0$ et*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} \tag{6.1.2}$$

pour tout $z \in D^*(a,r)$.

Démonstration. Montrons $i) \Rightarrow ii)$. Supposons que a est un pôle d'ordre m de f et notons h le prolongement de la fonction $z \mapsto (z-a)^m f(z)$ sur $D(a,r)$. En particulier, h est bien holomorphe sur $D(a,r)$ et (6.1.2) est bien vérifiée. Supposons par l'absurde que $h(a) = 0$, alors il existe $g \in \mathcal{H}(D(a,r))$ tel que $h(a) = (z-a)g(z)$ pour tout $z \in D(a,r)$. Ainsi, la fonction $z \mapsto (z-a)^{m-1} f(z)$ coïncide avec g sur $D^*(a,r)$, et admet donc une singularité enlevable en a. C'est une contradiction avec la définition de m. Ce qui montre que $h(a) \neq 0$.

Montrons $ii) \Rightarrow i)$. S'il existe une telle fonction h, alors a est un pôle d'ordre au plus m de f. Supposons par l'absurde que $z \mapsto (z-a)^{m-1}f(z)$ admet une singularité enlevable en a. Donc $z \mapsto (z-a)^{-1}h(z)$ admet une singularité enlevable en a. Ce qui est absurde car $h(a) \neq 0$. D'où a est un pôle d'ordre inférieur à m. Ce qui montre le résultat voulu.

$\square$

Exemple 6.1.5. *Donnons un exemple de fonction vérifiant la condition iii). Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ définie par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $z \mapsto z^p f(z)$ n'est bornée dans aucun disque épointé $D^*(0,r)$, car*

$$\lim_{n \to +\infty} n^p f\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

Les conditions i) et ii) n'étant pas vérifiées, la condition iii) l'est.

6.2 Fonctions méromorphes

Considérons Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 6.2.1. *Une fonction f est dite méromorphe sur $\mathbb{C}$ s'il existe une partie localement finie A de Ω telle que $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash A)$ et telle que tout point de A soit un pôle de f. $\mathcal{M}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions méromorphes dans Ω.*

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ non identiquement nulle. D'après le principe des zéros isolés, l'ensemble Z des zéros de h est une partie localement finie de Ω. Notons $f = \frac{g}{h} \in \mathcal{H}(\Omega \backslash Z)$. Soient $a \in Z$ et m la multiplicité du zéro a de h. Au voisinage de a, nous avons :

$$h(z) = (z-a)^m h_1(z),$$

avec $h_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $h_1(a) \neq 0$ par 2.3.6.

- Si $g(a) \neq 0$, a est un pôle d'ordre m de f.
- Supposons $g(a) = 0$. Comme $g \not\equiv 0$, nous pouvons écrire $g(z) = (z-a)^p g_1(z)$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $g_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $g_1(a) \neq 0$ par 2.3.6. Ainsi

  $$f(z) = (z-a)^{p-m} f_1(z),$$

  où $f_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$. Il vient que :

- Si $p \geq m$, f a une singularité enlevable en a.
- Si $p < m$, a est un pôle d'ordre $m - p$ de f.

Nous avons donc prouvé que $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. La réunion de deux parties localement finies de Ω l'étant aussi, il est immédiat que l'on peut définir la somme et le quotient de deux fonctions holomorphes dans Ω, et que $\mathcal{M}(\Omega)$ a une structure naturelle de $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire.

Proposition 6.2.2. *Si l'ouvert Ω est connexe, alors l'ensemble $\mathcal{M}(\Omega)$ est un corps.*

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{H}(\Omega) \setminus \{0\}$ et A l'ensemble de ses pôles. Comme Ω est connexe, par le principe des zéros isolés, l'ensemble des zéros $\mathcal{Z}$ de f est une partie localement finie de Ω. Ainsi $A \cup \mathcal{Z}$ est une partie localement finie de Ω, et $g = \frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega \setminus (A \cup \mathcal{Z}))$. Il est immédiat que si a est un zéro d'ordre m de f, alors a est un pôle d'ordre m de g. De plus, par 6.1.4, si a est un pôle de f, alors a est un singularité enlevable de g. Ainsi $g \in \mathcal{M}(\Omega)$.

□

Proposition 6.2.3. *Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Alors :*

i) $f' \in \mathcal{M}(\Omega)$. De plus, f et f' ont mêmes pôles. Si a est un pôle d'ordre m de f, c'est un pôle d'ordre $m+1$ de f'.

ii) Supposons Ω connexe et $f \not\equiv 0$. Si $g = \frac{f'}{f}$, alors $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, et tous les pôles de g sont simples.

6.3 Théorème des résidus

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, et $a \in \Omega$ un pôle d'ordre de m de f. Rappelons que la partie principale de f en a est :

$$P(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{-k}(z-a)^{-k}.$$

Définition 6.3.1. *En reprenant les notations précédentes, α_{-1} est appelé le résidu de f en a, que nous noterons $\alpha_{-1} = Res(f, a)$.*

Lemme 6.3.2. *Si γ est un lacet dans Ω tel que $a \notin Im(\gamma)$, nous avons :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma P(z)dz = Ind_\gamma(a) Res(f, a).$$

Démonstration. Par 4.4.3, nous avons :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma P(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \alpha_{-1}\frac{dz}{z-a} = \alpha_{-1}\mathrm{Ind}_\gamma(a).$$

D'où l'assertion.

□

Indiquons comment calculer en pratique les résidus.

Proposition 6.3.3. *Soient $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et a un pôle d'ordre m de f. Au voisinage de a, nous pouvons écrire*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

où g, h sont holomorphes et $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$, avec $h_1(a) \neq 0$.

Démonstration. Le résultat s'obtient directement par 6.1.3.

□

- Si $m = 1$ (pôle simple), nous avons :

  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)h_1(z)} = \frac{\alpha_{-1}}{z-a} + l(z).$$

  D'où :

  $$\mathrm{Res}(f,a) = \alpha_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{g(z)}{h_1(z)} = \frac{g(a)}{h_1(a)}.$$

  De $h(z) = (z-a)h_1(z)$, nous en déduisons $h_1(a) = h'(a)$. Ainsi,

  $$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

- Si $m > 1$, le résidu se calcul en faisant un développement limité de $(z-a)^m f(z)$ à l'ordre $m-1$ au voisinage de a, ou en utilisant la formule de Taylor qui donne :

  $$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}.$$

Exemple 6.3.4. *Soit $g : z \to \frac{e^{-iz\xi}}{z^2+1}$, nous avons $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}\setminus\{-i;i\})$. Calculons le résidu de g en $-i$.*
Nous avons $g(z) = \frac{e^{-iz\xi}}{z^2+1} = \frac{e^{-iz\xi}}{(z-i)(z+i)}$, donc

$$Res(g,-i) = \lim_{z\to -i} g(z)(z+i) = \lim_{z\to -i}\frac{e^{-iz\xi}}{z-i} = \frac{e^{i^{-2}\xi}}{-2i} = \frac{i}{2}e^{-\xi}.$$

Théorème 6.3.5 (**Théorème des résidus**). *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \ldots, a_n$ des point deux à deux distincts de Ω, et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$. Supposons que chaque a_k soit un pôle de f. Si γ est un lacet dans Ω dont l'image ne contient pas les a_k, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Ind_\gamma(a_k) Res(f, a_k).$$

Démonstration. Notons P_k la partie principale de f en a_k pour $k \in \{1, \ldots, n\}$. La fonction $f - P_1 - \ldots - P_n$ a une singularité enlevable en chaque a_k. Elle se prolonge donc en une fonction holomorphe sur Ω. Par le théorème de Cauchy (Ω est connexe), nous obtenons :

$$\int_\gamma f(z) - P_1(z) - \ldots - P_n(z)dz = 0.$$

Le résulat est alors immédiat par le lemme précédent.

$\square$

6.4 Exemples de calculs d'intégrales réelles à l'aide du théorème des résidus

Exemple 6.4.1.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

Exemple 6.4.2. *L'intégration complexe nous permet de calculer la transformée de Fourier d'une gaussienne.*
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi_a(x) = e^{-ax^2}$. (Notons que $\varphi_a \in L^1(\mathbb{R})$).
On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\varphi_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

7 Exemples de fonctions spéciales

7.1 Fonction Γ d'Euler

Définition 7.1.1. *Pour $z \in \mathbb{C}$, tel que $\Re(z) > 0$, posons*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Pout t réel, on utilise la détermination principale du logarithme, qui coïncide avec le logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, dans la définition de Γ, le facteur t^{z-1} n'est rien d'autre que $e^{(z-1)\ln(t)}$.

Nous noterons par la suite $\mathbb{C}_+$ pour désigner $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$.

Proposition 7.1.2. *La fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{C}_+$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}_+$. La fonction $f : t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t > 0$, nous avons

$$|f(t)| \leq e^{-t} \left| e^{(z-1)\ln(t)} \right| = e^{-t} e^{(\Re(z)-1)\ln(t)} = e^{-t} t^{\Re(z)-1}.$$

Nous avons

$$|f(t)| = \underset{t \to 0}{O}\left(t^{\Re(z)-1}\right), \text{ et } |f(t)| = \underset{t \to +\infty}{O}(t^{-2}).$$

Par le critère de Riemann, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

□

Proposition 7.1.3. *La fonction Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}_+$.*

Démonstration. Voir 5.3.2. □

Proposition 7.1.4. *Pour tout $z \in \mathbb{C}_+$, nous avons*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}_+$. Par intégration par parties, nous obtenons

$$z\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} z t^{z-1} dt = \left[e^{-t} t^z\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = \Gamma(z+1).$$

□

Corollaire 7.1.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\Gamma(n+1) = n!$.*

Démonstration. Nous avons

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Nous concluons par récurrence, et en utilisant le fait que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. □

Théorème 7.1.6. *La fonction Γ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ (toujours noté Γ) dont les pôles sont les entiers négatifs. Les résidus correspondant sont*

$$Res(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Démonstration. Pour z et t fixés, nous avons

$$t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1} = t^{z-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}.$$

Si $\Re(z) > 0$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$ par rapport à la variable t, et la fonction $t \mapsto t^{z-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. Par le théorème de Fubini-Lebesgue, nous pouvons donc écrire, $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$, autrement dit

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Nous cherchons à prolonger le premier terme en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Soit $R > 0$, et fixons $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > 2R$. La somme $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$ s'étend en une fonction méromorphe sur $D(0,R)$, dont l'ensemble des pôles est $D(0,R) \cap \mathbb{Z}_-$ et dont les résidus sont donnés par

$$\text{Res}(f, -k) = \lim_{z \to -k} (z+k) \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Pour $n > N$, et $z \in D(0,R)$, nous avons

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \right| \leq \frac{1}{n!},$$

donc la série $\sum_{n \geq N+1} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ converge normalement sur $D(0,R)$. Sa somme définit donc une fonction holomorphe sur $D(0,R)$.

Ceci étant vrai pour tout $R > 0$, l'unicité du prolongement assure que le terme de gauche définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs. D'autre part, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ a un sens pour tout $z \in \mathbb{C}$, et elle définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral. Nous obtenons donc le prolongement souhaité. □

7.2 Fonction ζ de Riemann

Définition 7.2.1. *Pour $z \in \mathbb{C}$, tel que $\Re(z) > 1$, posons*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Proposition 7.2.2. *La série ζ est normalement convergente sur tout compact de $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$.*

Démonstration. Soit K un compact de $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$. Il existe $\alpha > 1$ tel que $\Re(z) \geq \alpha$ pour tout $z \in K$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\frac{1}{|n^z|} = \frac{1}{|e^{z\ln(n)}|} = \frac{1}{e^{\Re(z)}} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Ce qui achève la preuve, puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-\alpha}$ est convergente.

□

Ainsi, comme $\left(\frac{1}{n^z}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$ et par 4.5.6, nous avons que ζ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$.

Théorème 7.2.3. *La fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et admet un pôle simple en 1.*

8 Exemples d'utilisations de l'analyse complexe

8.1 Densité des polynômes orthogonaux

Nous nous plaçons sur $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, nous disons que $\rho : I \to \mathbb{R}_+$ est une fonction poids si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty.$$

Par l'algorithme de Gram-Schmidt, nous pouvons alors exhiber une famille de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de degrés échelonnés et orthogonaux dans l'espace de Hilbert $L^2(I, \rho)$, dont le produit scalaire est donné par

$$\langle f, g\rangle_\rho := \int_I f(x)\overline{g}(x)\rho(x)dx.$$

Théorème 8.1.1. *S'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty,$$

(i.e. que $e^{\alpha|x|} \in L^1(I, \rho)$) alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Il s'agit ici en fait de montrer que les polynômes sont denses dans $L^2(I, \rho)$. Pour ce faire, nous allons utiliser la caractérisation de la densité avec l'orthogonal, c'est-à-dire que nous allons montrer que l'orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ dans $L^2(I, \rho)$ est réduit à $\{0\}$.

Démonstration. Commençons par remarquer que si $x^n \in L^1(I, \rho)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\|x^n\|_2^2 = \int_I |x^n|^2\rho(x)dx = \int_I |x^{2n}|\rho(x)dx = \|x^{2n}\|_1^2 < +\infty,$$

donc les polynômes appartiennent à $L^2(I, \rho)$ et l'utilisation de l'algorithme de Gram-Schmidt a du sens. Pour conclure, comme $\text{Vect}(x^n; n \in \mathbb{N}) = \text{Vect}(P_n; n \in \mathbb{N})$, il suffit de monter que l'orthogonal de la famille $\text{Vect}(x^n; n \in \mathbb{N})$ est réduit à $\{0\}$.
Soit f un élément dans l'orthogonal de $\text{Vect}(x^n; n \in \mathbb{N})$ dans $L^2(I, \rho)$, posons

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Remarquons que pour tout $t \geq 0$, nous avons $t \leq \frac{(1+t^2)}{2}$. Ainsi, nous avons

$$\forall x \in I, \quad |f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x).$$

Comme ρ et $f^2\rho$ sont intégrables sur I, nous en déduisons que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Nous pouvons donc considérer sa transformée de Fourier, donnée par

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_I f(x)\rho(x)e^{-ix\xi}dx.$$

Montrons à présent que la fonction $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ensemble $B_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| < \frac{\alpha}{2}\right\}$.
Posons pour tout $z \in B_\alpha$,

$$F(z) := \int_I f(x)\rho(x)e^{-ixz}dx.$$

Cette fonction est bien définie sur B_α, puisque pour tout $z \in B_\alpha$,

$$\begin{aligned}\int_I |f(x)\rho(x)e^{-ixz}|dx &\leq \int_I |f(x)|\rho(x)e^{\frac{\alpha}{2}|x|}dx \\ &\leq \left(\int_I \rho(x)e^{\alpha|x|}dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &< +\infty \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En posant $g(x,z) := e^{-ixz}f(x)\rho(x)$ pour $x \in I$ et $z \in B_\alpha$, nous avons

i) $\forall z \in B_\alpha$, $x \mapsto g(x,z)$ est mesurable sur I,

ii) $\forall x \in I$, $z \mapsto g(x,z)$ est holomorphe sur l'ouvert B_α,

iii) $\forall z \in B_\alpha, \forall x \in I$,

$$|g(x,z)| \leq h(x) := e^{\frac{\alpha}{2}|x|}f(x)\rho(x),$$

et $h \in L^1(I)$ par (8.1.1).

Ainsi, par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, la fonction F est holomorphe sur B_α. Bien sûr, F prolonge la fonction $\hat{\varphi}$ à B_α en une fonction holomorphe. De plus, toujours par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, nous avons que pour tout $z \in B_\alpha$,

$$F^{(n)}(z) = \int_I (-i)^n x^n e^{-ixz}f(x)\rho(x)dx.$$

Et donc

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)dx = (-i)^n \langle f, x \mapsto x^n\rangle_\rho = 0$$

par hypothèse sur f. Ainsi, par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, la fonction F est nulle sur un voisinage de 0. Par le principe des zéros isolés, puisque B_α est connexe, F est nulle sur l'ouvert B_α. Donc, comme $F = \hat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$, $\hat{\varphi}$ est nulle. Par injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, φ est nulle sur $\mathbb{R}$, et donc finalement la fonction f est nulle sur I. Ce qui achève la preuve. $\square$

8.2 Espace de Bergman

Nous allons nous intéresser aux fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D} = D(0,1)$ de carré intégrable sur $\mathbb{D}$. Cet espace est appelé l'espace de Bergman du disque unité que nous noterons

$$H := L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

Théorème 8.2.1. *L'espace de Bergman du disque unité est un espace de Hilbert (pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$).*

Démonstration. 1ÈRE ÉTAPE : Commeçons par montrer une inégalité "inverse" entre la norme infinie et la norme L^2.
Soit $f \in H$ et $z \in \mathbb{D}$ tel que $d(z, \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}) > r > 0$, et nous développons f en série entière autour de z :

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(\zeta - z)^n.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\int_{D(z,r)} f(\zeta)d\zeta &= \int_{D(z,r)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(\zeta - z)^n d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^n e^{in\theta} \rho d\theta d\rho \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \int_0^r \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta \\
&= f(z)\frac{r^2}{2} 2\pi = r^2 \pi f(z)
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{1}{r^2\pi} \int_{D(z,r)} |f(\zeta)| d\zeta \\
&\leq \frac{1}{r^2\pi} \left(\int_{D(z,r)} |f(\zeta)|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{D(z,r)} d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2
\end{aligned}$$

2ÈME ÉTAPE : Montrons à présent que H est un espace de Hilbert.
H muni du produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$ est un espace préhilbertien. Il reste donc à montrer qu'il est complet. Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H (donc pour la norme $\|.\|_2$), pour $K \subset \mathbb{D}$, il existe $r > 0$ tel que $d(K, \mathbb{D}^c) > r$, nous avons alors, pour $z \in K$, $n, m \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_2.$$

Donc

$$\|f_n - f_m\|_{\infty,K} \leq C_K \|f_n - f_m\|_2.$$

Donc comme la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy pour $\|.\|_2$, la suite est uniformément de Cauchy sur K : elle converge uniformément vers une fonction continue f sur K. Nous obtenons donc sur $\mathbb{D}$ une limite f de la suite $(f_n)_n$ holomorphe comme limite d'une suite convergeant uniformément sur tout compact.
Il reste à montrer que $f \in L^2(\mathbb{D})$ et $(f_n)_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{D})$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m, n \geq N, \quad \int_{\mathbb{D}} |f_n - f_m|^2 d\lambda < \varepsilon^2.$$

En faisant tendre $m \mapsto +\infty$, et par le lemme de Fatou, nous obtenons pour tout $n \geq N$,

$$\int_{\mathbb{D}} |f_n - f|^2 d\lambda \leq \liminf_{m \to +\infty} \int_{\mathbb{D}} |f_n - f_m|^2 d\lambda < \varepsilon^2.$$

Nous obtenons ainsi que $f_n - f \in L^2(\mathbb{D})$, donc $f \in L^2(\mathbb{D})$.
De plus, $\|f_n - f\|_2 < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, d'où la convergence souhaitée.
Ainsi H est bien un espace de Hilbert. $\square$

Bibliographie

[1] E. Amar et E. Matheron — Analyse complexe — Cassini, 2004.

[2] P. Tauvel — Analyse complexe pour la Licence 3 — Dunod, 2020.

[3] W. Rudin — Analyse réelle et complexe — Dunod, 2001.

[4] M. El Amrani — Suites et séries de numériques, suites et séries de fonctions — Ellipses, 2011.

[5] V. Beck, J. Malick, G. Peyré — Objectif agrégation — H&K, 2005.