

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/228552358>

APLICACIÓN DE LOS FILTROS DE KALMAN A SISTEMAS DE CONTROL

Article · January 2001

CITATIONS

4

READS

4,089

3 authors, including:



José Gregorio Díaz

Universidad de Carabobo, UC

8 PUBLICATIONS 26 CITATIONS

SEE PROFILE



Francisco Javier Arteaga

Universidad de Carabobo, UC

41 PUBLICATIONS 84 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Curso de Inglés Conversacional Básico a ser dictado en la Facultad de ingeniería de la Universidad de Carabobo a través de PRODEFAIN-UC. Sábado 22 de julio y Sábado 29 de julio de 2017 de 8am a 4pm [View project](#)



Identificación de Proceso y Evaluación Comparativa de Métodos de Sintonización de Controlador PID en ambiente SCILAB-XCOS [View project](#)

INGENIERIA UC

Órgano de Divulgación
Científica y Tecnológica de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad de Carabobo

Ingeniería UC

Universidad de Carabobo

farteaga20@gmail.com

ISSN (Versión impresa): 1316-6832

VENEZUELA

2001

José Gregorio Díaz / Ana María Mejías / Francisco Arteaga

APLICACIÓN DE LOS FILTROS DE KALMAN A SISTEMAS DE CONTROL

Ingeniería UC, junio, año/vol. 8, número 001

Universidad de Carabobo

Valencia, Venezuela

pp. 1-18

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal

Universidad Autónoma del Estado de México

<http://redalyc.uaemex.mx>



APLICACIÓN DE LOS FILTROS DE KALMAN A SISTEMAS DE CONTROL

José Gregorio Díaz (1); Ana María Mejías (2); Francisco Arteaga (3)

(1) Universidad de Carabobo, Escuela de Ing. Eléctrica. Dpto. de Sistemas y Automática. Email: jpdiaz@uc.edu.ve

(2) Universidad de Carabobo, Area de Estudios de Postgrado, Postgrado de Ingeniería Eléctrica.

(3) Universidad de Carabobo, Escuela de Ing. Eléctrica, Dpto. de Sistemas y Automática. Email: farteaga@uc.edu.ve

Resumen

Las señales de ruido pueden afectar en forma muy negativa a los sistemas de control automático. La aplicación de los filtros de Kalman en estos casos constituye una alternativa capaz de producir notables mejoras en su desempeño. En el presente artículo, se desarrolla un ejemplo de aplicación del filtro de Kalman en tiempo continuo al caso del péndulo invertido accionado por un servomotor DC, el cual ha sido simulado mediante Matlab.

Palabras claves: Filtro de Kalman, espacio de estados, simulación en MATLAB, señales aleatorias.

Abstract

Noise signals can affect automatic control system very badly. In these cases, the application of Kalman filters becomes an alternative capable of producing improvements in their performance. In this article, an example of kalman filter application in continuous time is developed, an inverted pendulum with the action of a dc servomotor simulated in Matlab.

Key Words: Kalman filter, state space, Matlab Simulation, random signals.

1. INTRODUCCIÓN

Las perturbaciones a que está sujeto un sistema de control automático provocan que su salida se aleje del comportamiento ideal. Por ello, un buen diseño debe contemplar medidas que le permitan mantener un desempeño satisfactorio, incluso en la presencia de este tipo de señales, las cuales pueden considerarse de naturaleza determinística o aleatoria.

El estudio sistemático de las señales aleatorias y de los medios que podrían utilizarse para minimizar sus efectos ya había originado en la década de los años cuarenta los filtros de error medio cuadrático (filtro de Wiener). Sin embargo, su aplicación en aquella época enfrentaba limitaciones, tales como su utilización con señales discretas y en problemas complejos de múltiples entradas y salidas.

En marzo de 1960, el Dr. Rudolph Kalman publica su artículo "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", con lo que realiza un aporte monumental a la solución del problema de diseño de filtros óptimos, utilizando la técnica de espacios de estado. Kalman consideraba la recursividad, así como casos de múltiples entradas y salidas, además de que permitía el uso de métodos digitales modernos para su implantación.

Un año después, Kalman en conjunto con Bucy realiza otra publicación ("New Results in Linear Filtering and Prediction Theory"). En esta oportunidad, se enfoca en el desarrollo de sus ideas, aplicadas al filtro de tiempo continuo.

A partir de ese momento, ha sido enorme el número de publicaciones relacionadas con los Filtros de Kalman, en las cuales se han explorado diferentes aplicaciones, la profundización del enfoque teórico, etc.

2. FILTRO DE KALMAN.

Sea un sistema de una sola entrada de control $u(t)$ y una sola salida $y(t)$, cuya descripción de estado es:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u + \underline{F} v \\ y &= \underline{C} \underline{x} + w\end{aligned}$$

donde \underline{x} es el vector de estado, u es una entrada escalar conocida, y es la salida escalar, y v y w son procesos escalares aleatorios gaussianos del tipo de ruido blanco, cuyas densidades espectrales de potencia son V y W , respectivamente.

Para diseñar un observador o estimador óptimo de Kalman para el vector de estado, se recurre a la estructura básica del observador. La ecuación que describe a este observador es:

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{A} \hat{\underline{x}} + \underline{B} u + \underline{K}_k (y - \underline{C} \hat{\underline{x}})$$

siendo $\hat{\underline{x}}$ el vector de estado estimado y \underline{K}_k la matriz de diseño del estimador.

Si las señales v y w no están correlacionadas, el valor de \underline{K}_k se determina mediante la fórmula:

$$\underline{K}_k = \underline{P}_{opt} \underline{C}^T \underline{W}^{-1}$$

Siendo \underline{P}_{opt} la matriz de covariancia óptima del error del estimador de estado, obtenida a partir de la ecuación de Riccati:

$$0 = \underline{A} \underline{P}_{opt} + \underline{P}_{opt} \underline{A}^T - \underline{P}_{opt} \underline{C}^T \underline{W}^{-1} \underline{C} \underline{P}_{opt} + \underline{F} \underline{V} \underline{F}^T$$

El diagrama de estado de la figura 1 muestra la configuración del Filtro de Kalman para el presente caso. Se observa que sus entradas son las señales $u(t)$ e $y(t)$ y su salida es el vector de estado estimado $\hat{\underline{x}}$.

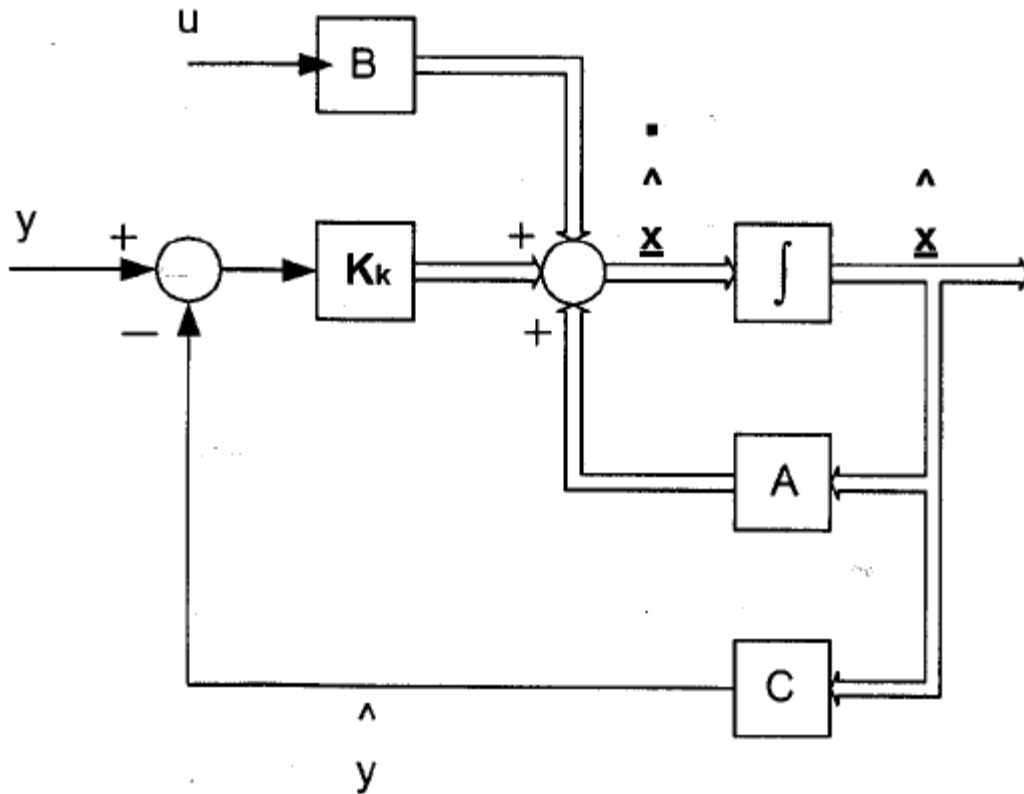


Fig. 1 Configuración del Filtro de Kalman.

3. APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN AL CONTROL DEL PÉNDULO INVERTIDO.

Como ejemplo de aplicación del Filtro de Kalman al control de un proceso específico, se escogió el péndulo invertido accionado directamente por un servomotor DC (ver figura 2).

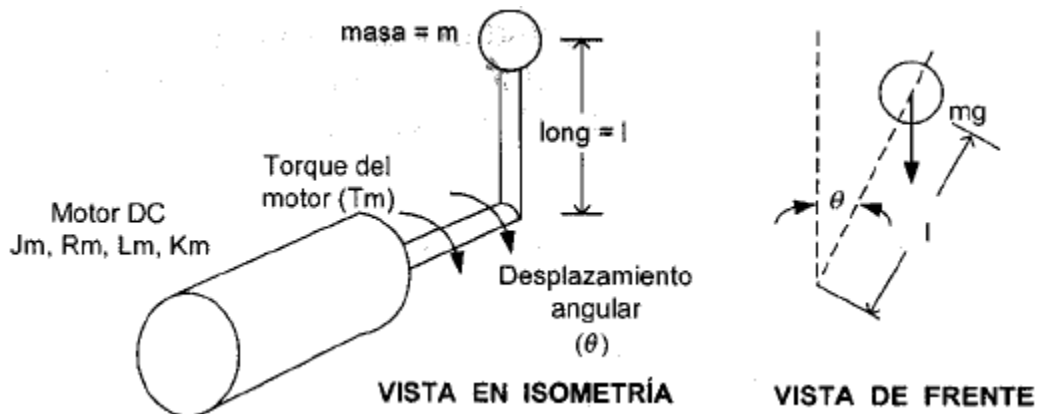


Figura 2. Péndulo invertido.

En este sistema se tiene que J_m es el momento de inercia propio del motor, R_m su resistencia eléctrica, L_m la auto inductancia y K_m la constante del servomotor.

Si T_m es el par generado por el motor DC, entonces la ecuación de los pares aplicados al eje del motor resulta Ser:

$$T_m + mgl \sin(\theta) = (J_m + ml^2) \ddot{\theta} \quad \text{Ec. 1} \quad \text{Ec. 1}$$

Suponiendo que el desplazamiento angular sólo puede tomar valores pequeños, la ecuación 1 puede aproximarse a:

$$T_m = (J_m + ml^2) \ddot{\theta} - (mgl)\theta \quad \text{Ec. 2}$$

Por otra parte, en el motor DC se cumplen las siguientes relaciones:

$$T_m = K_m i \quad \text{Ec. 3}$$

$$L_m \frac{di}{dt} + R_m i = u - K_m \dot{\theta} \quad \text{Ec. 4}$$

donde i es la corriente de armadura del motor y u es su tensión aplicada.

Si se desprecia la constante de tiempo eléctrica del motor frente a su constante de tiempo mecánica, y después de haber sustituido la ecuación 4 en la 3, resulta:

$$T_m = -\frac{K_m^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{K_m}{R_m} u \quad \text{Ec. 5}$$

la cual, al introducirse en la ecuación 2 produce:

$$\ddot{\theta} + \frac{K_m^2}{J_T R_m} \dot{\theta} - \frac{mgl}{J_T} \theta = \frac{K_m}{J_T R_m} u \quad \text{Ec. 6}$$

en donde J_t es el momento de inercia total, resultante de sumar el momento de inercia del motor (J_m) y el momento de inercia de la esfera de masa m (ml^2).

Se definen como variables de estado:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

con lo que las ecuaciones de los estados quedan así:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u$$

siendo:

$$a_{21} = \frac{mgl}{J_T}$$

$$a_{22} = -\frac{K_m^2}{J_T R_m}$$

$$b_2 = \frac{K_m}{J_T R_m}$$

Como salida se tomará la posición angular, por lo cual la ecuación de salida será;

$$y = x_1$$

Puestas en forma matricial, las ecuaciones de estado y salida quedan así:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad \text{Ec. 7}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \quad \text{Ec. 8}$$

correspondientes a la descripción general de estado del sistema:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u$$

$$y = \underline{C} \underline{x}$$

Obsérvese que este sistema es inestable en cadena abierta, ya que uno de los autovalores de la matriz A es un número real positivo.

A continuación, se darán valores a los parámetros del sistema, a fin de realizar las simulaciones posteriores: $m = 0.2$, $I = 0.3$, $g = 9.8$, $J_m = 0.2$, $R_m = 2$ y $K_m = 0.1$. Con ello, las matrices del sistema quedan así:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.7 & -0.0229 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.229 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1 Sistema en cadena cerrada (sin perturbaciones aleatorias).

Si al sistema original se le hace que cualquiera de sus dos estados adquiriera un valor diferente de cero, su propia inestabilidad provocará que la salida $y(t)$ tienda a crecer sin ningún control (el péndulo se caerá). Sin embargo, utilizando la realimentación lineal de estados (RLE), es posible estabilizarlo, de tal manera que, partiendo de un vector de condiciones iniciales no nulo, el sistema de control será capaz de devolver la masa m a su posición vertical. En la figura 3 se muestra la configuración característica de la técnica de RLE.

Esta configuración se describe mediante el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\dot{\underline{x}} = (A - BK) \underline{x}$$

$$y = C \underline{x}$$

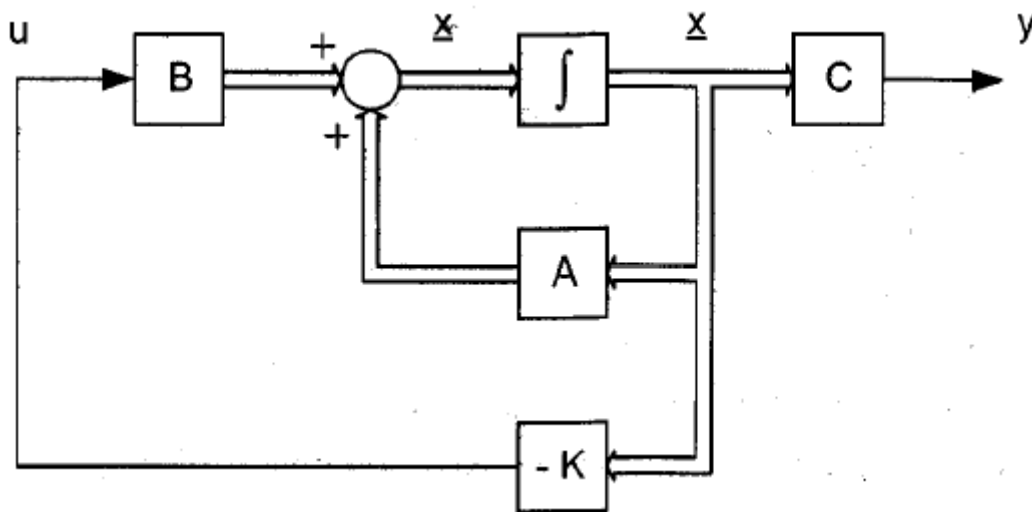


Fig. 3 Realimentación lineal de estados.

A continuación, se hará un diseño de este tipo, utilizando algunas de las herramientas proporcionadas por MatLab (en esta sección se indicarán directamente muchos de los comandos empleados para realizar los diseños y simulaciones, los mismos se señalarán mediante letra *itálica*).

En primer lugar, se verificará la controlabilidad del sistema original:

$$M=ctrb(A,B)$$

$$m=rank(M)$$

El rango de la matriz de controlabilidad M resulta ser 2, por lo que el sistema es controlable.
Se verifica la observabilidad:

$$N=obsv(A,C)$$

$$n=rank(N)$$

El sistema resulta ser observable.

Se define el vector fila H, el cual contiene los autovalores deseados para el sistema en cadena cerrada:

$$H=[-2+i*2*sqrt(3) \quad -2-i*2*sqrt(3)]$$

Mediante el comando place de MatLab se obtiene la matriz K de realimentación de los estados:

$$K=place(A,B,H)$$

resultando:

$$K=[81.6594 \quad 17.3672]$$

En la figura 4 se muestra la respuesta del sistema en cadena cerrada (CC) cuando la posición angular inicial es diferente de cero. Igualmente, en la figura 5 se representa la salida correspondiente a una velocidad angular inicial no nula.

A continuación se muestra el código MatLab que permitió generar ambas gráficas:

```

t=(0:0.01:4);
AA=A-B*K;
BB=[0; 0];
CC=C;
DD=D;
[Y,T,X]=initial(AA,BB,CC,DD,x0,t);
plot(t,Y'), title('Respuesta del sistema en CC para posición
angular inicial no nula'), ...
xlabel('Tiempo'), ylabel('Posición angular')
pause
Y,T,X]=initial(AA,BB,CC,DD,x00,t);
plot(t,Y'), title('Respuesta en CC para vel. angular inicial no
nula'), ...
xlabel('Tiempo'), ylabel('Posición angular')
pause

```

3.2 Sistema en cadena cerrada con perturbaciones aleatorias.

Ahora se comprobará la calidad del diseño cuando el sistema está sometido a señales de ruido (v,w). El nuevo diagrama de estados será el de la figura 6, cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= (\underline{A} - \underline{BK}) \underline{x} + \underline{G}w \\ y &= \underline{C} \underline{x} + v\end{aligned}$$

Respuesta del sistema en CC para posición angular inicial no nula

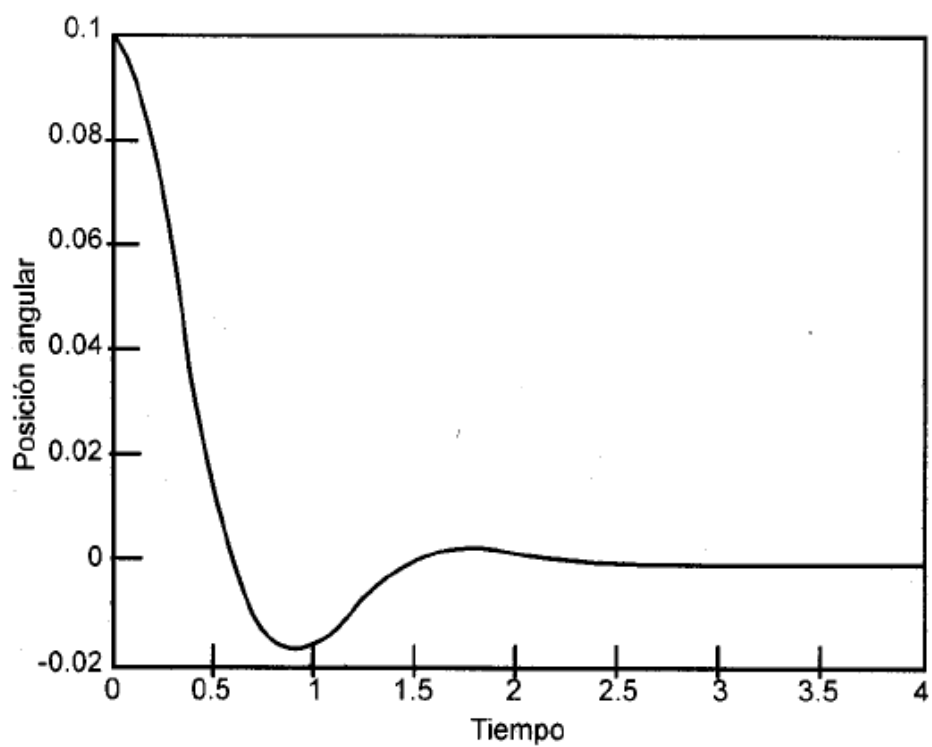


Fig. 4 Respuesta en CC con $x_1(0)0$.

Respuesta en CC para ver. angular inicial no nula

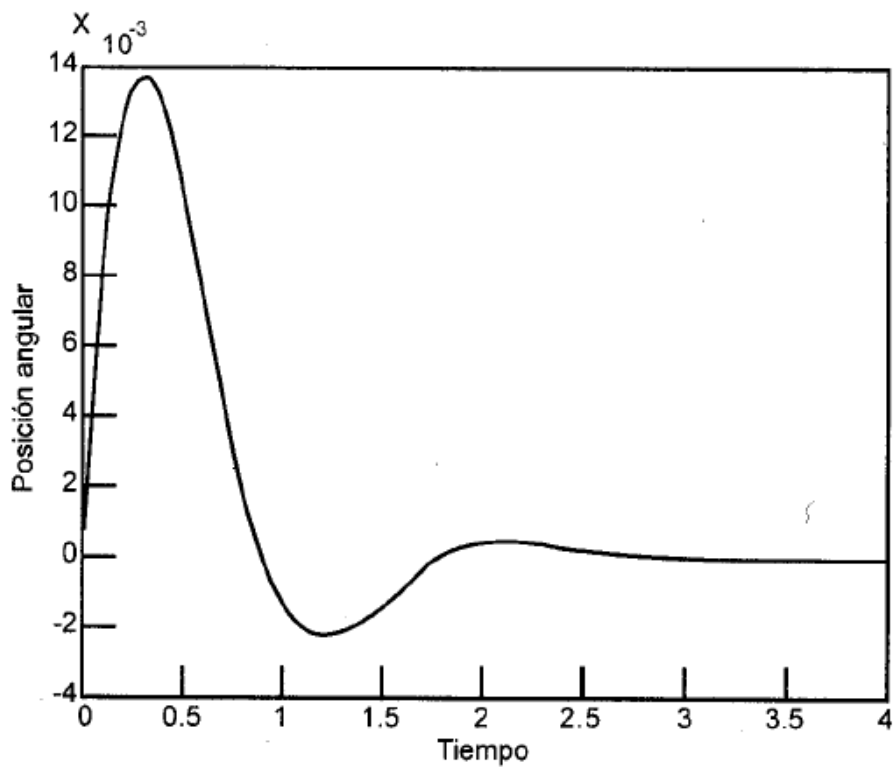


Fig. 5 Respuesta en CC con $x_2(0)0$.

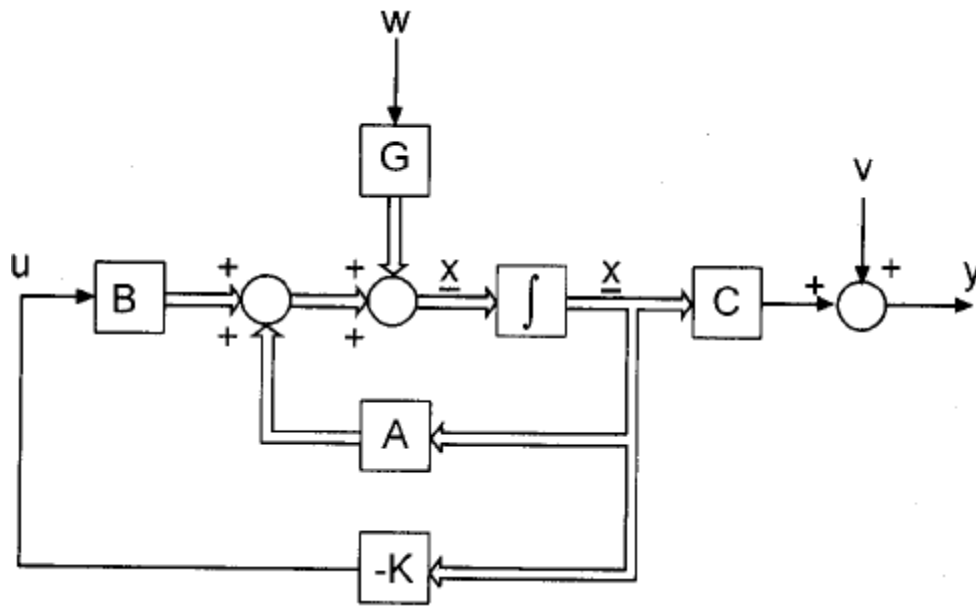


Fig. 6 Sistema en CC con perturbaciones v y w .

Las señales aleatorias se generan mediante el siguiente conjunto de instrucciones:

```
%Qn y Rn son las covariancias de w y v, respectivamente
%Nn es la covariancia entre w y v
Qn=1.0;
Rn=1.0;
Nn=0;
%Para comparaciones posteriores, se amplía la escala de
tiempo para las señales de
%ruido
t_aum=(0:0.01:50);
nn_aum=length(t_aum);
randn('seed',0);
w_aum=0.06*randn(nn_aum,1);
w_aum=sqrt(Qn)*randn(nn_aum,1);
randn('seed',0);
v_aum=0.03*randn(nn_aum,1);
```

El siguiente código MatLab permitió realizarla simulación del nuevo sistema:

```

%Se genera la nueva descripción de estado
Ar=AA;
Br=[1 0; 0 0];
Cr=CC;
Dr=[0 1];
SYS=ss(Ar,Br,Cr,Dr);
%Se crea el vector de las señales aleatorias
z_aum=[w_aum,v_aum];
%Se obtiene la respuesta del sistema a las primeras
condiciones iniciales
[YS,TS]=lsim(SYS,z_aum,t_aum,x0)
plot(TS,YS), title('Respuesta en CC con ruido, X1(0) no
nula'), ...
    xlabel('Tiempo'), ylabel('Posición angular')
pause

```

En la figura 7 aparece la forma de la respuesta del sistema con RLE frente a las perturbaciones. Puede observarse que, si bien éste sigue siendo estable y que su transitorio continúa desapareciendo tan rápido como antes, la posición angular de la masa está sometida a oscilaciones considerables, debido al ruido que afecta al sistema.

Respuesta en CC con ruido, X1(0) no nula

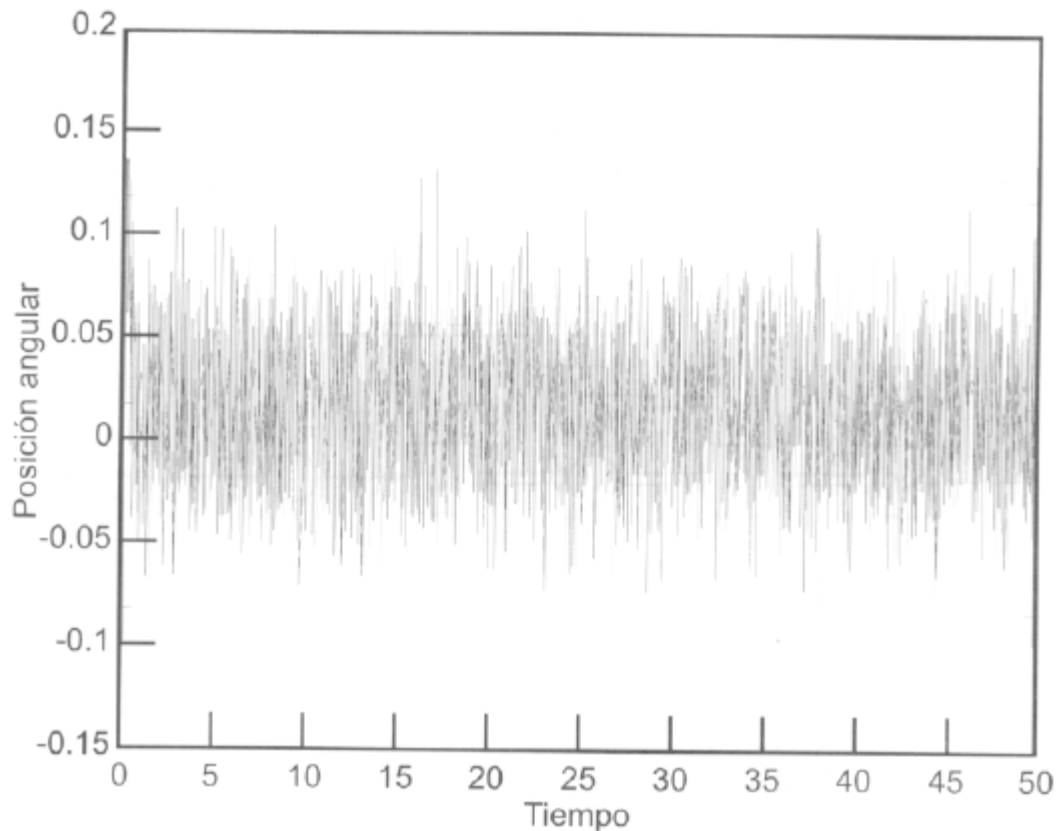


Fig. 7 Respuesta del sistema en cadena cerrada frente al ruido.

3.3 Sistema con realimentación de estados y filtro de Kalman.

Como una manera de minimizar los efectos del ruido sobre el sistema, se decidió trabajar con un filtro de Kalman, de manera que los estados realimentados no sean directamente los pertenecientes al vector x (altamente contaminados por las perturbaciones), sino emplear más bien los proporcionados a la salida del filtro \hat{x} . Además, la realimentación se hará a través de un regulador óptimo. Para ello se emplearán las instrucciones de MatLab `kalman`, `Iqr` y `Iqgreg`, las cuales se encargan de diseñar el filtro de Kalman, el regulador óptimo cuadrático y de integrarlos, respectivamente.

La configuración del nuevo sistema realimentado será la de la figura 8, a la cual corresponden las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B u + G w$$

$$y = C \underline{x}$$

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A \hat{\underline{x}} + B u + K_k (\hat{y} - C \hat{\underline{x}})$$

$$u = -B K_r \hat{\underline{x}}$$

en donde K_k y K_r representan a las matrices del filtro de Kalman y del regulador óptimo, respectivamente. A continuación se presenta el código MatLab que permitió realizar el diseño del filtro de Kalman:

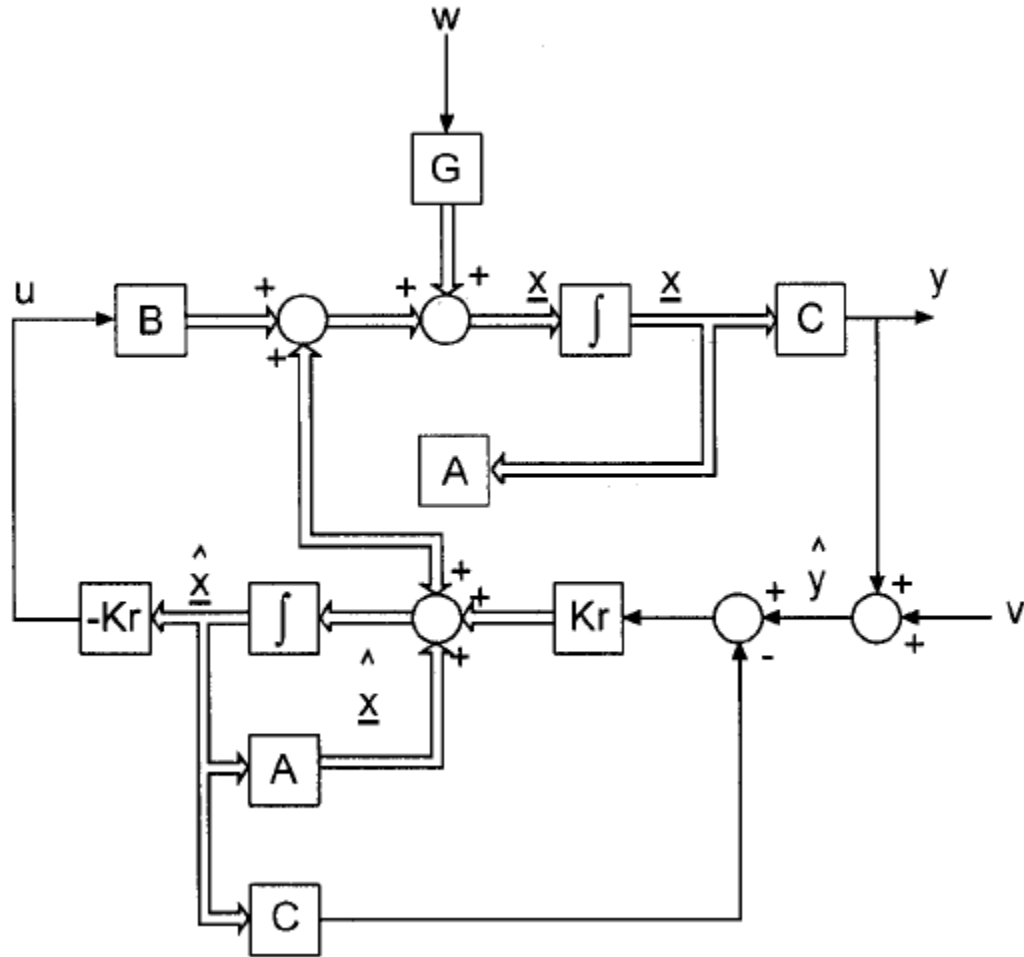


Fig. 8 Realimentación de los estados estimados por el filtro de Kalman a través de un regulador óptimo cuadrático.

```

%Se diseña el filtro de Kalman
%
%Descripción de la planta a la cual se le va a
%aplicar la fórmula de diseño del filtro de Kalman
%
%.
% $x = A x + B u + G w$ 
%
% $y = C x + D u + H w + v$ 
%
%(Se considerará que sólo hay ruido en la segunda ecuación
de estado)
G=[0; 1];
H=[0];
SYSk=ss(A,[B G],C,[D H]);
[KEST,Kk,PP]=kalman(SYSk,Qn,Rn,Nn);
%Matriz del estimador de Kalman (Kk)
disp('Matriz del estimador de Kalman:')
Kk

```

De acuerdo con el teorema de la separación para sistemas estocásticos, el diseño del regulador óptimo cuadrático se puede hacer independientemente, según las instrucciones:


```

%Diseño de un regulador lineal cuadrático óptimo tal que
la ley de control
%u = -Kr x minimice el índice J = int (x'Qx + u'Ru + 2x'Nu)
dt, siendo la
%planta:
%.
%x = A x + B u = (A - BKr) x
%
% Se definen las matrices Q, R y N que fijan el índice J
% que se va a optimizar
Q=[1 0; 0 0];
R=[1];
N=[0; 0];
%Matriz del regulador óptimo (Kr)
[Kr,S,Er]=lqr(A,B,Q,R,N);
disp('Matriz del regulador óptimo:')
Kr

```

Por último, se conforma el sistema realimentado:

```

%Interconexión del estimador de Kalman con el regulador
óptimo
disp('Interconexión del estimador de Kalman y el regulador
óptimo:')
RLQG=lqgreg(KEST,Kr);
%
%Se interconectan mediante realimentación positiva el
regulador y la
%planta y se forma un sistema en lazo cerrado
LAZO=feedback(PLANTA,RLQG,+1);

```

Las matrices del nuevo sistema en lazo cerrado (al cual se le llamará LAZO) son: Acc, Bcc, Ccc y Dcc, obtenidas de:

```

%Matrices de la descripción de estado del sistema en lazo
cerrado
[Acc,Bcc,Ccc,Dcc]=ssdata(LAZO);

```

Se calculan sus autovalores, resultando éstos ser: $-1.6703 + i 0.2991$ y $-1.6447 + i 0.0687$, los cuales resultan bastante satisfactorios, desde el punto de vista de la respuesta transitoria.

Finalmente, se simula la respuesta de este sistema a la señal de ruido, siendo primero no nulo el primer estado (posición angular) y luego el segundo (velocidad angular). A continuación se muestra el código MatLab que realiza esta simulación.

```
%Se aumenta el vector de condiciones iniciales para que
coincida con el
%nuevo sistema (de 2 n estados)
x0_aum=[x0; 0; 0];
x00_aum=[x00; 0; 0];
%Respuesta del sistema con regulador y filtro para el primer
vector de
%condiciones iniciales
[YS,TS]=lsim(LAZO,w_aum,t_aum,x0_aum);
plot(t_aum,YS), title('Respuesta del sistema final cuando
X1(0) es no nulo'), ...
    xlabel('Tiempo'), ylabel('Posición angular')
pause
%Respuesta del sistema con regulador y filtro para el
segundo vector de
%condiciones iniciales
[YS,TS]=lsim(LAZO,w_aum,t_aum,x00_aum);
plot(t_aum,YS), title('Respuesta del sistema final cuando
X2(0) es no nulo'), ...
    xlabel('Tiempo'), ylabel('Posición angular')
pause
```

Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 9 y 10.
Respuesta del sistema final cuando $X1(0)$ es no nulo

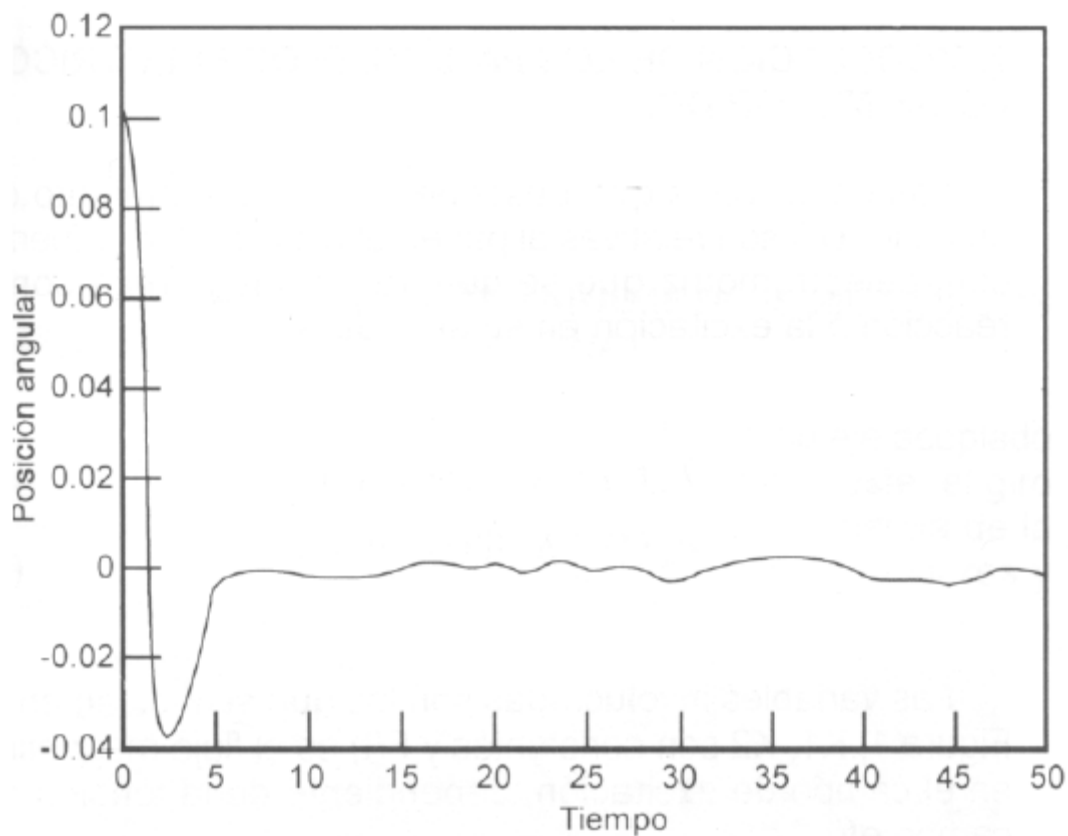


Fig. 9 Respuesta del sistema con filtro de Kalman a las perturbaciones, cuando la posición angular inicial no es cero.

Comparando las figuras 9 y 10 con la número 7 se ponen en evidencia las virtudes de la utilización del filtro de Kalman en este caso.

4. CONCLUSIONES.

El empleo de los filtros de Kalman en el control automático genera grandes ventajas, al minimizar los efectos que las señales aleatorias de ruido provocan en la respuesta de estos sistemas. Como se ve a partir del ejemplo desarrollado en el presente trabajo, los resultados finales son completamente satisfactorios y la respuesta transitoria no se ve apreciablemente perjudicada por la inserción del filtro, a diferencia de lo que ocurriría si se emplease un filtro tipo pasa bajo, el cual provocaría unos tiempos de respuesta mayores.

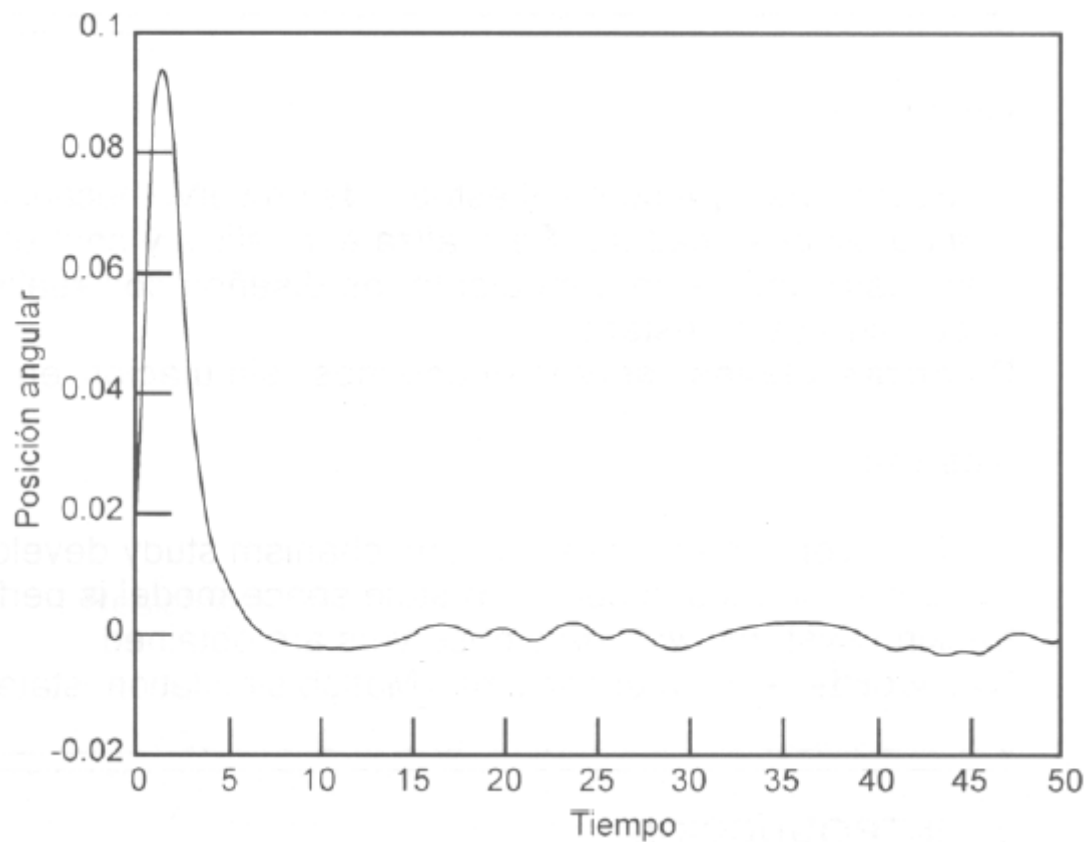


Fig. 10 Respuesta del sistema con filtro de Kalman a las perturbaciones, cuando la velocidad angular inicial no es cero.

5. REFERENCIAS

- 1.- FRIEDLAND, B. Control System Design. Editorial McGraw-Hill International Editions, 1987.
- 2.- GELB, A. Applied Optimal Estimation. Editorial The M.I.T. Press, 1974.
- 3.- GROVER BROWN, R. y HWANG, P. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering. Editorial John Wiley & Sons. Tercera edición, 1997.
- 4.- OGATA, K. Ingeniería de Control Moderna. Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.. Tercera edición, 1998.
- 5.- THE MATH WORKS. MatLab, Edición de Estudiante, Versión 4. Editorial Prentice-Hall International, 1995.