Manip. Elec.3 BAC2INFO Circuits RLC en tension alternative

E4.1 But de la manipulation

Le but de la manipulation est l'étude de circuits alimentés en tension alternative et comprenant des associations de résistances, condensateurs et bobines.

E4.2 Circuits alimentés en tension alternative

E4.2.1 Rappels

♦ Les circuits étudiés ici comporteront les éléments suivants : résistances (R), capacités (C) et bobines d'induction (L). Ils seront alimentées en tension alternative :

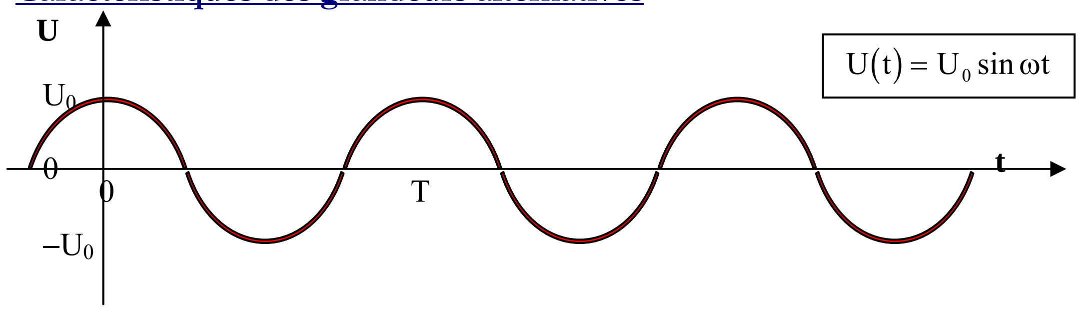
$$U(t) = U_0 \sin \omega t \qquad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

⇨ ils seront donc parcourus par un courant alternatif, de même fréquence que U, mais éventuellement déphasé par rapport à la tension d'alimentation :

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \Phi) \qquad \text{avec } \Phi \text{ le déphasage courant/tension.}$$

♦ Ces tensions et courants alternatifs sont des grandeurs variables dans le temps; en fait il s'agit de grandeurs périodiques dite alternatives car leur valeur moyenne sur une période est nulle. Une grandeur sinusoïdale est un cas particulier de grandeur alternative. Ces grandeurs variables peuvent être représentées par des nombres complexes, ce qui facilite le calcul des grandeurs physiques mesurables dans les circuits. Elles sont généralement représentées graphiquement par des vecteurs dans le plan complexe (représentation de Fresnel).

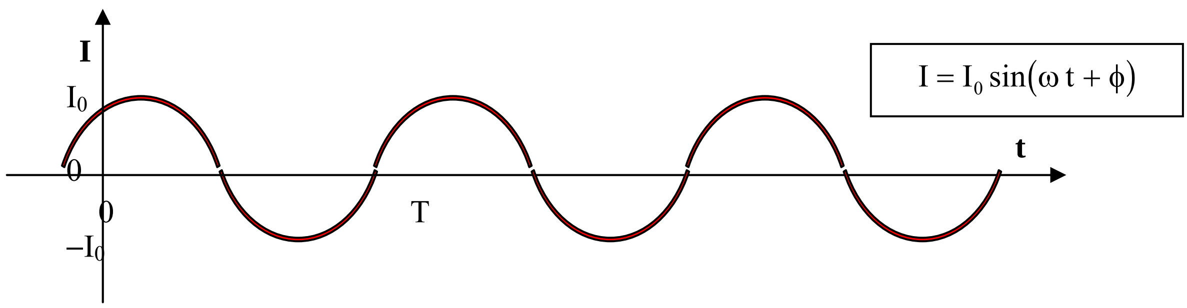
♦ **Caractéristiques des grandeurs alternatives**



1/ Valeur instantanée : valeur de la grandeur à un instant t donné : U(t).

2/ Valeur moyenne sur une période: $\langle U(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)\,dt = 0$

3/ valeur quadratique moyenne ou valeur efficace : $U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,dt} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$



Rappelons que les voltmètres et ampèremètres dont on dispose au laboratoire mesurent la valeur efficace des tensions et des courants alternatifs. Ainsi, lorsqu'on mesure, par exemple, la tension du réseau et qu'on lit sur le cadran du voltmètre 220 V, même si on le sous-entend généralement, il faut savoir qu'il s'agit d'une valeur efficace et que la tension de crête ou amplitude maximale vaut 220 /2 soit 311 V.

♦ Caractéristiques des éléments des circuits : R L C

• **résistance R** "pure" ou résistance ohmique : élément qui "s'oppose" au passage du courant I tel que il y a proportionnalité entre la tension appliquée à ses bornes et le courant qui le traverse (loi d'Ohm) : $\boxed{U_R = R \cdot I}$ ⇨ $\boxed{I_R = \frac{U_R}{R}}$

Unité SI de résistance : Ohm [Ω] ⇨ 1Ω = 1V /1A
Les résistances utilisées en pratique sont de l'ordre de quelques Ω à quelques MΩ.

• **condensateur de capacité C** : élément qui permet de stocker une quantité de charges proportionnelle à la tension appliquée à ses bornes : Q = CU ⇨ $\boxed{U_C = \frac{Q}{C}}$

Unité SI de capacité : Farad [F] ⇨ 1F = 1C/1V
Les capacités utilisées en pratique sont de l'ordre de 1pF à 1µF.

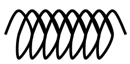
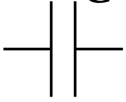
Rappelons la relation : $I = \frac{dQ}{dt}$ ⇨ $\boxed{I_C = C\frac{dU_C}{dt}}$

• **bobine d'induction** : la variation d'un courant I dans une bobine de n spires conduit à un changement du flux magnétique la traversant ⇨ induit une tension aux bornes de cette bobine proportionnelle à la variation de courant : $\boxed{U_L = -L\frac{dI}{dt}}$

où **l'inductance L** est une propriété de la bobine, facteur de proportionnalité entre la tension induite et la variation de courant. Le signe – provient de la loi de Lenz (la tension induite s'oppose à la tension initiale).
Unité SI d'inductance : Henry [L] ⇨ 1H = 1V.1s/1A
Les inductances utilisées en pratique sont de l'ordre de 1µH à 1H.

⇨ $\boxed{I_L = \frac{-1}{L}\int U_L\,dt}$

• En résumé:

R	L	C
		
$\boxed{U_R = R \cdot I}$	$\boxed{U_L = -L\frac{dI}{dt}}$	$\boxed{U_C = \frac{Q}{C}}$
$\boxed{I_R = \frac{U_R}{R}}$	$\boxed{I_L = \frac{-1}{L}\int U_L\,dt}$	$\boxed{I_C = C\frac{dU_C}{dt}}$

E4.2.2 Notation complexe et loi d'Ohm généralisée

♦ Pour représenter une grandeur alternative sinusoïdale, on peut adopter la notation des électroniciens c-à-d une forme mathématique complexe tel que les tensions et courants sont représentés par des nombres complexes : $U = U_0\, e^{j\omega t} = |U|\, e^{j\omega t}$ et

$$I = I_0\, e^{j(\omega t + \Phi)} = |I|\, e^{j(\omega t + \Phi)}$$

avec le nombre purement imaginaire j tel que $j^2 = -1$.

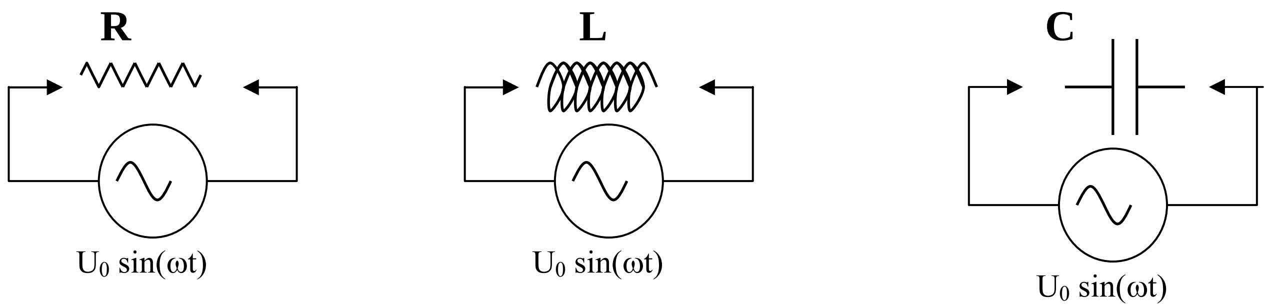
♦ On établit alors une relation reliant la tension et le courant (complexes) qui peut se comprendre comme une généralisation de la loi d'Ohm :

$$\boxed{\mathbf{U = Z\, I}}$$

avec Z défini comme impédance complexe du circuit.
En particulier on a les relations (entre nombres réels) : $|U| = |Z| \cdot |I|$ & $U_{eff} = |Z| \cdot I_{eff}$

E4.2.3 Eléments R L C alimentés en tension sinusoïdale

♦ Ceci vaut en particulier pour des circuits très simples ne comprenant qu'une résistance ou une bobine d'induction ou un condensateur pour lesquels on peut établir :



R	L	C
$U_R = Z_R \cdot I_R$	$U_L = Z_L \cdot I_L$	$U_C = Z_C \cdot I_C$
$\mathbf{Z_R = R}$	$Z_L = j\omega L$ ⇨ $\mathbf{\lvert Z_L \rvert = \omega L}$	$Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$ ⇨ $\lvert \mathbf{Z_C} \rvert = \dfrac{\mathbf{1}}{\omega \mathbf{C}}$
⇨ l'impédance d'une résistance est indépendante de la fréquence	⇨ l'impédance d'une bobine augmente avec la fréquence	⇨ l'impédance d'un condensateur diminue avec la fréquence
⇨ $\lvert I \rvert = \dfrac{\lvert U \rvert}{R}$	⇨ $\lvert I_L \rvert = \dfrac{\lvert U_L \rvert}{\omega L}$: le courant diminue avec la fréquence • hautes fréquences : $I \to 0$ *circuit ouvert (aucun courant ne circule)* • basses fréquences : $I \to 4$ $\to$ ***court-circuit***	⇨ $\lvert I_C \rvert = \lvert U_C \rvert \cdot \omega C$: le courant augmente avec la fréquence • hautes fréquences : $I \to 4$ $\to$ *court-circuit* • basses fréquences : $I \to 0$ *circuit ouvert :* ***un condensateur ne laisse pas passer le courant continu***

$\Phi_R = 0$	$\Phi_L = -\pi/2$	$\Phi_C = +\pi/2$
Pas de déphasage du courant par rapport à la tension du générateur	retard du courant par rapport à la tension du générateur d'un quart de période (T/4)	avance du courant par rapport à la tension du générateur d'un quart de période (T/4)

On a aussi : $Q = Q_{max} \sin(\omega t + \varphi_C)$ avec φ_C le déphasage de la charge du condensateur par rapport à la tension appliquée.

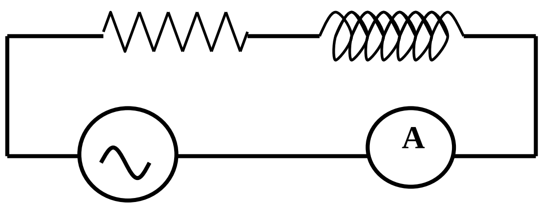
♦ <u>loi d'associations des impédances complexes</u>

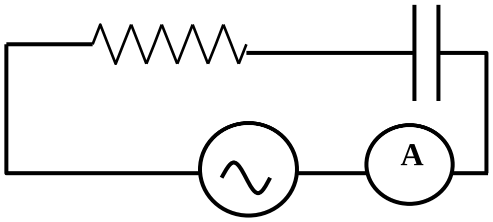
1/ les impédances des éléments connectés en série s'additionnent : $Z_{tot} = \sum_i Z_i$

2/ les impédances des éléments placés en parallèle se combinent comme suit : $\frac{1}{Z_{tot}} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$

E4.2.4 Circuits RL & RC en régime sinusoïdal

♦ En pratique, il faut considérer des circuits RL et RC car les bobines (fil conducteur enroulé) sont légèrement résistives; de même les fils de connexion aux différents éléments, générateur de tension et appareils de mesure présentent eux aussi une certaine résistance ohmique.





$U = U_0 \sin\omega t$ $I = I_0 \sin(\omega t + \Phi)$

• **on impose** U (donc ω) et **on veut connaître I** c-à-d les valeurs de I_0 et de Φ (déphasage courant/tension)

• **impédance du circuit** :

$$Z_{circuit} = Z_R + Z_L = R + j\omega L \qquad Z_{circuit} = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$|Z_{circuit}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \qquad |Z_{circuit}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

• **loi d'Ohm généralisée : I = U/Z** ⇨ **$I_{eff} = U_{eff}/|Z|$**

⇨ **I maximum quand Z minimum et vice versa.**

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

• à basses fréquences (ω → 0) :

$|Z_{circuit}| \approx R = Z$ minimum

⇨ I → I maximum : $I_{eff\ max} = U_{eff}/R$

En continu (ω = 0) : bobine = fil ⇨ court-circuit

$|Z_{circuit}|$ tel que $R \ll 1/\omega C$ → Z maximum

⇨ I → 0

En continu (ω = 0) : condensateur = isolant ⇨ pas de circulation de courant NB le condensateur se charge puis le courant ne circule plus

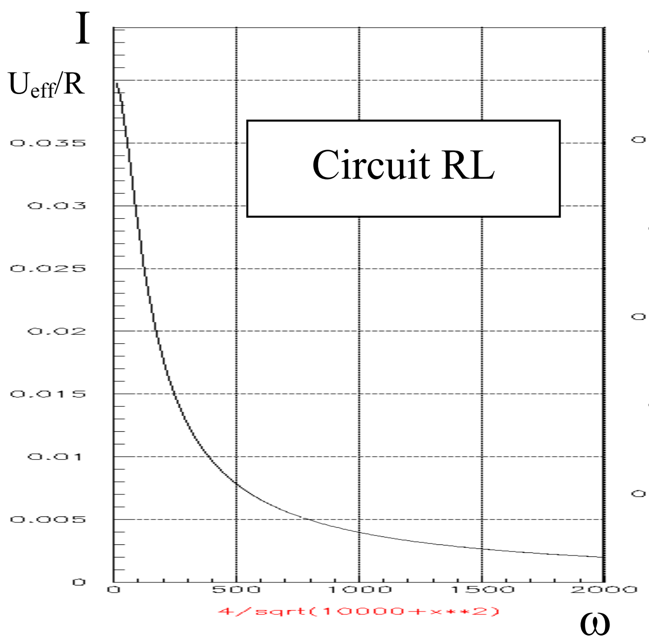
• à hautes fréquences (ω → 4) :

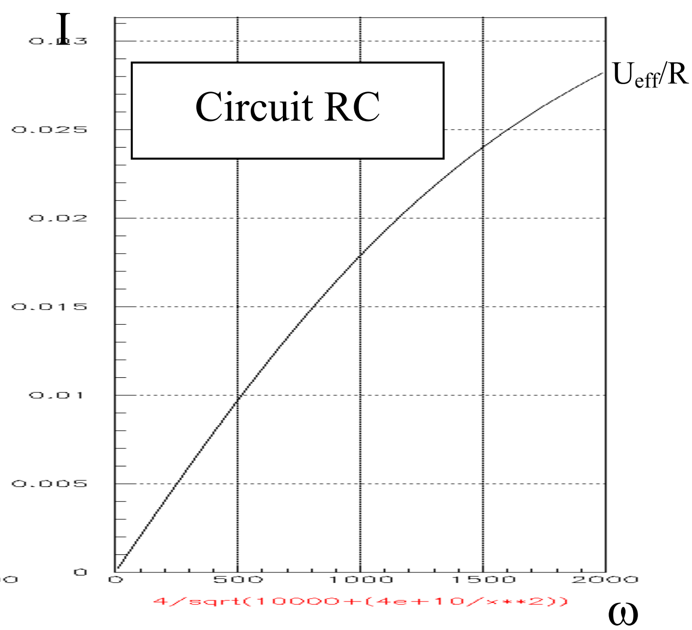
$|Z_{circuit}|$ tel que $R \ll \omega L$ → Z maximum

⇨ I → 0

$|Z_{circuit}| \approx R = Z$ minimum

⇨ I → I maximum: $I_{eff\ max} = U_{eff}/R$





• déphasage courant / tension :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_0\, e^{j\omega t}}{R + j\omega L} = \frac{U_0\, e^{j\omega t}(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)}$$

$$I = \frac{U_0\, e^{j\omega t}(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} \equiv I_0\, e^{j\omega t}\, e^{j\Phi}$$

$$⇨ \quad \mathrm{tg}\Phi = \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = \frac{-\omega L}{R}$$

⇨ basses → hautes fréquences :

Φ : 0 → −π/2 (−90°)

comportement R seule → "L seule"

$$I = \frac{U_0\, e^{j\omega t}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{U_0\, e^{j\omega t}\left(R + \frac{j}{\omega C}\right)}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

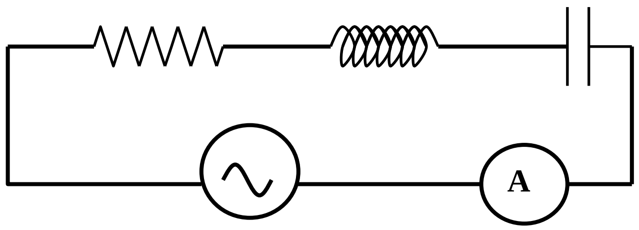
$$\mathrm{tg}\Phi = \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = \frac{1}{\omega R C}$$

Φ : +π/2 (90°) → 0

" C seule" → " R seule"

E4.2.5 Etude du circuit RLC série alimenté en tension sinusoïdale

♦ Considérons le circuit représenté ci-dessous constitué d'une bobine d'inductance propre L, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C connectés en série. Aux bornes du circuit est appliquée une tension alternative sinusoïdale.



U_0 sin(ωt) **I_0** sin(ωt +Φ)

• **impédance du circuit** :

$$Z_{circuit} = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$\Rightarrow Z_{circuit} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\Rightarrow |Z_{circuit}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

• **courant circulant dans le circuit**: $|I| = \frac{|U|}{|Z_{circuit}|}$ ou $I_{eff} = \frac{U_{eff}}{|Z_{circuit}|}$

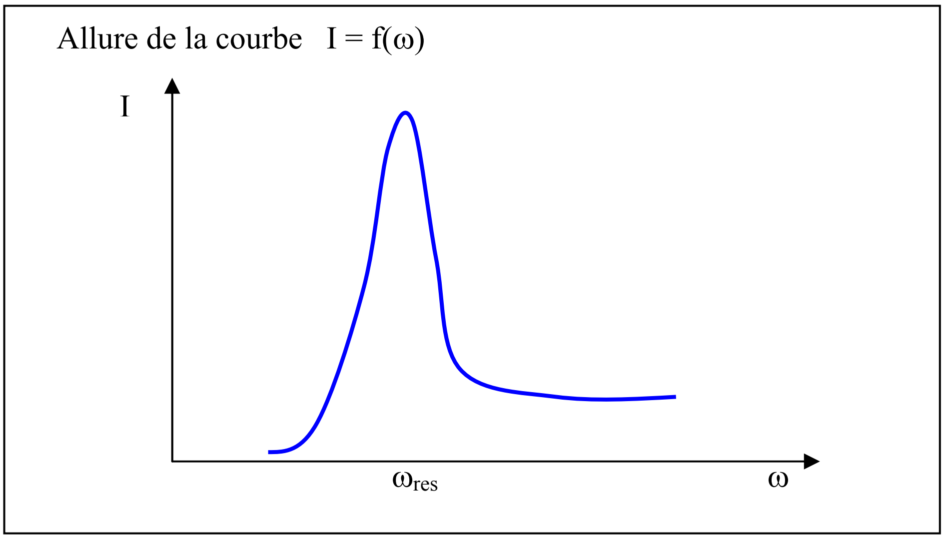
I maximum si Z minimum lorsque : $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

⇨ Cette fréquence angulaire particulière correspondant au maximum du courant est appelée **fréquence de résonance**

$$\boxed{\omega_{\mathbf{res}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{LC}}}}$$

⇨ la valeur du courant à la résonance vaut donc : $\boxed{I_{eff\,res} = \frac{U_{eff}}{R}}$

⇨ seule la résistance R limite le passage du courant.



• déphasage courant / tension :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_0\, e^{j\omega t}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_0\, e^{j\omega t}(R - j\alpha)}{(R + j\alpha)(R - j\alpha)} \qquad \text{avec} \quad \alpha = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$I = \frac{U_0\, e^{j\omega t}(R - j\alpha)}{R^2 + \alpha^2} \equiv I_0\, e^{j\omega t}\, e^{j\Phi}$$

$$\Rightarrow \quad tg\Phi = \frac{Im}{Re} = \frac{-\alpha}{R} = \frac{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)}{R}$$

⇨ **Basses fréquences** : $\omega L << 1/\omega C$ ⇨ $tg\Phi \to \frac{1}{\omega R C}$ ⇨ comportement circuit RC

$\omega \to 0$ ⇨ $tg\Phi \to +4$ ⇨ $\Phi \to \pi/2$ ⇨ comportement C

⇨ **Hautes fréquences** : $1/\omega C << \omega L$ ⇨ $tg\Phi \to \frac{-\omega L}{R}$ ⇨ comportement circuit RL

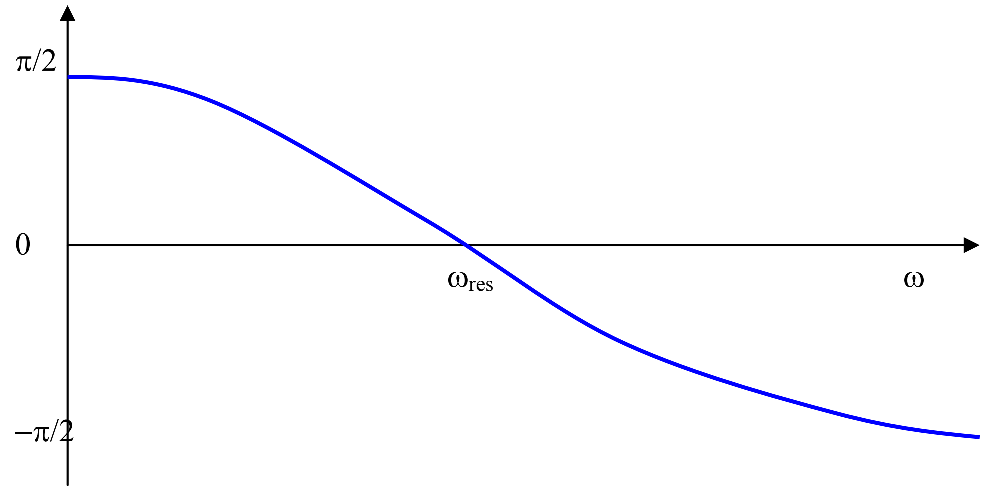
On dit que le circuit est inductif.

$\omega \to +4$ ⇨ $tg\Phi \to -4$ ⇨ $\Phi \to -\pi/2$ ⇨ comportement L

On dit que le circuit est capacitif.

⇨ **à la résonance** : $tg\,\Phi = 0$ ⇨ $\Phi = 0$ (comportement d'une résistance) ce qui confirme qu'à la résonance tout se passe comme si seule la résistance R était présente dans le circuit.

Allure de la courbe $tg\Phi = f(\omega)$



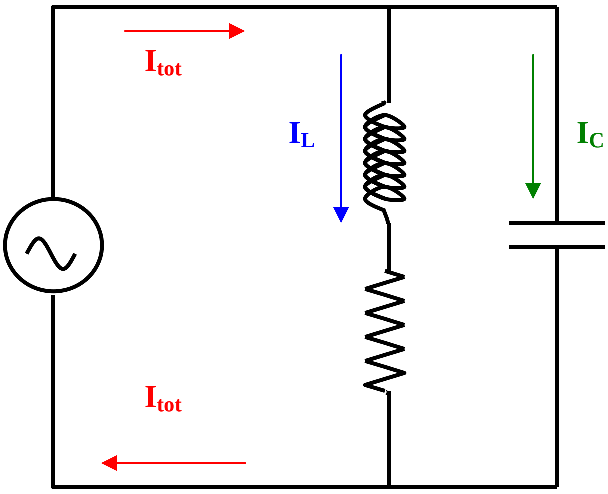
• En résumé, à la résonance, seule la résistance R limite le passage du courant et celui-ci est en phase avec la tension U appliquée. Le courant I_{eff} peut atteindre une valeur élevée. Il en est de même des **amplitudes des tensions** aux bornes de la bobine $U_{eff\,L}$ et du condensateur $U_{eff\,C}$ puisque celles-ci sont proportionnelles au courant :

$$U_{eff\,L} = Z_L \cdot I_{eff} = \omega L I_{eff} \qquad \& \qquad U_{eff\,C} = Z_C \cdot I_{eff} = \frac{I_{eff}}{\omega C}$$

E4.2.6 Etude d'un circuit RL et C en parallèle alimenté en tension sinusoïdale

♦ Chacun des cas envisagés ci-avant est un cas idéal. En effet, aucun circuit n'a une résistance nulle; un circuit, comme son nom l'indique, comporte au moins une boucle et son **inductance propre ne peut être nulle** : même très faible, elle peut donner une impédance non négligeable aux hautes fréquences. Finalement, le circuit RLC lui-même est un circuit idéal puisqu'il existe toujours des **capacités parasites**, qui interviennent **en parallèle**, et peuvent laisser passer un courant non négligeable aux très hautes fréquences**.**

♦ Considérons ici 2 circuits particuliers connectés en parallèle, l'un comprenant une bobine d'inductance propre L et une résistance R (qui peut se limiter à la résistance de la bobine), l'autre étant constitué d'un condensateur de capacité C. La tension sinusoïdale appliquée à ce circuit est de la forme $U(t) = U_0 \sin \omega t$.



3 courants sont ici à considérer :

I_{tot} : courant total fourni par le générateur

I_L : courant traversant la branche comprenant la bobine

I_C : courant traversant la branche comprenant le condensateur

ATTENTION: dans ce cas I_{tot} n'est plus la somme algébrique des 2 courants I_L et I_C

$$I_{tot} \neq I_L + I_C \quad \Rightarrow \quad I_{eff\,tot} \neq I_{eff\,L} + I_{eff\,C}$$

car les tensions & courants sont des nombres complexes, représentés par des vecteurs dans le plan complexe ⇨ I_{tot} est la somme de 2 nombres complexes I_L et I_C (ou somme de 2 vecteurs):

$$\vec{I}_{tot} = \vec{I}_L + \vec{I}_C$$

♦ Les courants I_{tot}, I_L et I_C peuvent se mettre sous la forme :

$$I_{tot}(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad I_{tot}(t) = I_0\, e^{j\omega t}$$

$$I_L(t) = I_{0L} \sin(\omega t + \varphi_L) \qquad \text{ou} \qquad I_L(t) = I_0\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi_L}$$

$$I_C(t) = I_{0C} \sin(\omega t + \varphi_C) \qquad \text{ou} \qquad I_C(t) = I_0\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi_C}$$

avec φ_{tot} le déphasage du courant I_{tot} par rapport à la tension
φ_L le déphasage du courant I_L par rapport à la tension
φ_C le déphasage du courant I_C par rapport à la tension

♦ **impédance du circuit** : $\dfrac{1}{Z_{circuit}} = \dfrac{1}{Z_R + Z_L} + \dfrac{1}{Z_C} = \dfrac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$

⇨ $Z_{circuit} = \dfrac{R + j\omega L}{1 + j\omega C(R + j\omega L)} = \dfrac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega\, RC}$

⇨ $|Z_{circuit}| = \dfrac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$

• **courant circulant dans le circuit**: $|I| = \dfrac{|U|}{|Z_{circuit}|}$ ou $I_{eff} = \dfrac{U_{eff}}{|Z_{circuit}|}$

I minimum si Z maximum c-à-d si le dénominateur de Z est minimum, c-à-d lorsque :

$1 - \omega^2 LC = 0$ ⇨ $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$ ⇨ $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ ⇨ $\boxed{\omega_{\mathbf{antires}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{LC}}}}$

⇨ il s'agit dans ce cas d'un minimum de courant c-à-d d'une antirésonance.

On remarque que la valeur de cette fréquence est identique à celle de la résonance lorsque les éléments R, L et C sont connectés en série.

La valeur du courant à l'antirésonance est donnée par :

$$I_{eff\,min} = \frac{U_{eff}}{|Z_{circuit\,max}|} = \frac{U_{eff}\,\omega RC}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_{eff}\dfrac{R}{\omega L}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_{eff}\,R}{\omega L\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

⇨ si R<< ωL :

$$\boxed{I_{eff\,min} = \frac{U_{eff}}{\dfrac{\omega^2 L^2}{R}}}$$

♦ Examinons les courants dans les 2 branches du circuit : I_L et I_C

$$\begin{cases} I_{eff\,L} = \dfrac{U_{eff}}{|Z_R + Z_L|} = \dfrac{U_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} & \text{⇨ diminue avec } \omega \\ I_{eff\,C} = \dfrac{U_{eff}}{|Z_C|} = \omega C U_{eff} & \text{⇨ augmente avec } \omega \end{cases}$$

♦ Les déphasages par rapport à la tension sont définies à partir des relations du type établies pour les circuits RL ou RC (§E4.2.4) :

$$tg\varphi_L = -\frac{\omega L}{R}$$

$$tg\varphi_C = \frac{1}{\omega C R'}$$

avec R' la faible (mais jamais non nulle) résistance de la branche comprenant le condensateur.

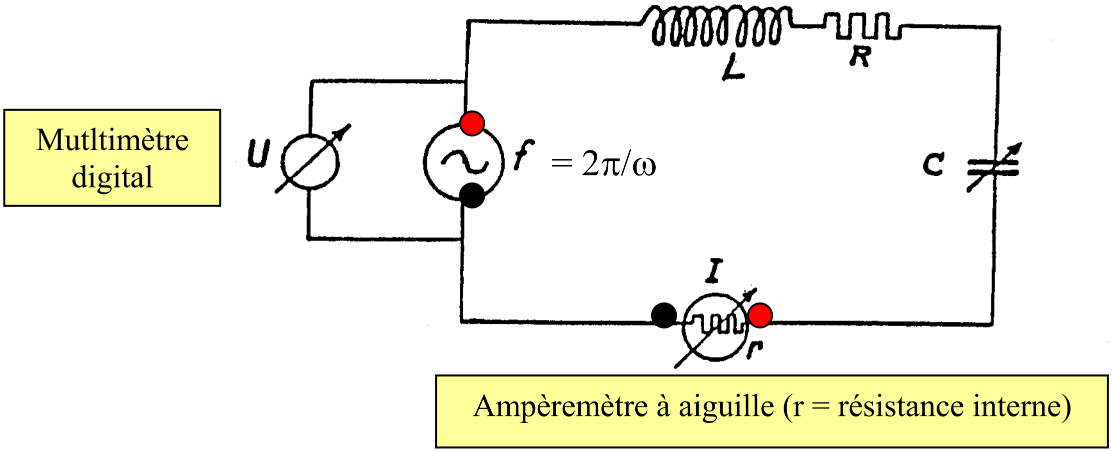
⇨ si on peut négliger R' (R' ≈0) : $tg\varphi_C = \infty \Rightarrow \varphi_C = \pi / 2$ (cf. §E4.2.3).

E4.3 Manipulation

E4.3.1 Etude du circuit RLC série en tension alternative : résonance

♦ Vérifier, par l'analyse dimensionnelle, que l'unité de TL et de $1/(\omega C)$ est l'Ohm [Ω].

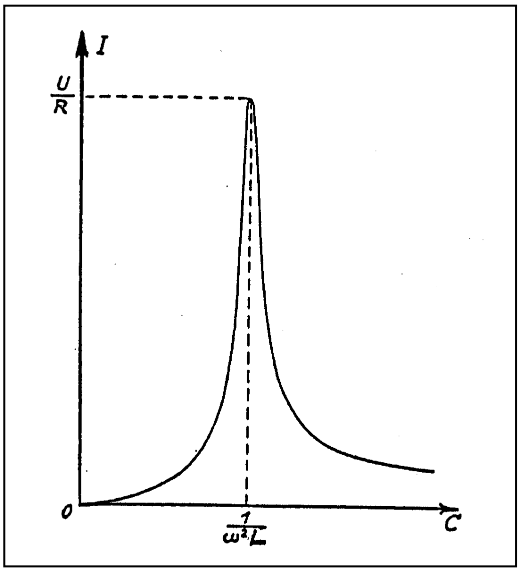
♦ Réaliser le circuit schématisé ci-dessous. Le faire vérifier. Le schématiser dans le rapport.



• **1ière expérience - conditions de travail:**

Tension efficace appliquée au circuit : U_{eff} = 3,5 V
bobine résistive **: L = 1,458 H R = 75,78 Ω**
Fréquence = f = ν = 200 Hz
⇨ faire varier la capacité du condensateur : 0,1 < C < 1 μF
par pas de 0,1 μF mais 0,01 μF autour du maximum

►► **vous mesurerez I_{eff} en fonction de C.**



ATTENTION: veiller à maintenir la tension U_{eff} constante pendant toute la durée de l'expérience ainsi qu'à éloigner le plus possible la bobine de la table et des différents appareils de mesure, la présence de parties ferromagnétiques risquant de modifier son inductance propre.
Ne pas oublier de noter la sensibilité adoptée pour l'ampèremètre lors de la mesure du courant maximum. En déduire la valeur de la résistance interne r que l'on ajoutera à la résistance de la bobine pour les calculs.

A la résonance, **mesurer les valeurs de la tension U_c** aux bornes du condensateur et **U_L aux bornes de la bobine**

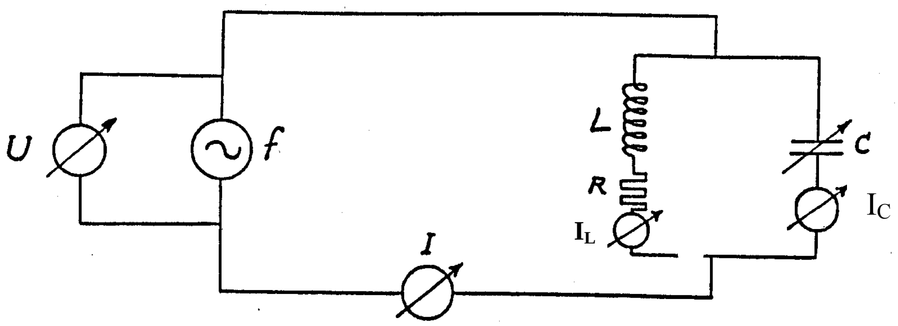
♦ ⇨ Porter en graphique les valeurs mesurées de I_{eff} en fonction de C (cf. figure).

♦ Comparer la valeur de C pour laquelle vous avez observé la résonance de courant à la valeur théoriquement attendue. Observez-vous une différence ? Si oui, expliquez. Utilisez un oscilloscope afin de vérifier la valeur de la fréquence.

♦ Calculer la valeur du courant à la résonance (valeur maximale). Comparer cette valeur à celle obtenue expérimentalement. Doit-on tenir compte de la résistance interne de l'ampèremètre dans le calcul ?
♦ Calculer les valeurs théoriquement attendues pour U_L et U_C à la résonance et comparer aux valeurs mesurées.

E4.3.2 Etude d'un circuit RL & C en parallèle: anti-résonance

♦ Réaliser le circuit schématisé ci-dessous. Le faire vérifier. Le schématiser dans le rapport.



♦ Les conditions de travail sont les suivantes :

Tension efficace appliquée au circuit : U_{eff} = 40 V
***bobine résistive* : L = 1,478 H R = 75,78 Ω**
Fréquence = f = ν = 200 Hz
⇨ vous ferez varier la capacité du condensateur : 0,1 < C < 1 µF.

ATTENTION : faire varier C suffisamment lentement au voisinage de l'antirésonance (I_{min}) et ne pas oublier de noter la sensibilité adoptée pour l'ampèremètre lors de la mesure du courant minimum afin d'en déduire la valeur de la résistance interne de l'ampèremètre que l'on ajoutera à la valeur de la résistance de la bobine dans les calculs

►► vous mesurerez 3 courants I, I_L' et I_C" en fonction de C.

♦ Tracer sur un même graphique les 3 courants mesurés en fonction de C.
►► justifier l'allure des courbes à partir de la partie théorique (E4.2.6).
♦ Calculer la valeur de C correspondant à l'anti-résonance (comparer à la valeur mesurée)
♦ Calculer la valeur minimale attendue pour I (comparer à la valeur expérimentale).
♦ ⇨ En déduire la valeur de la résistance équivalente du circuit antirésonant (comparer à la valeur expérimentale).

ANNEXES

♦ **En notations non complexes: Considérons** tension fournie par le générateur telle que:

$$U(t) = U_0 \cos\omega t$$

1/ **tension aux bornes du condensateur** :

sachant que $Q = \int_{t_0}^{t} I\,dt = I_0 \int_{t_0}^{t} \cos(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$ (E4.10)

où t_0 est un instant choisi avant la fermeture du circuit, étant entendu qu'à ce moment le condensateur n'était pas chargé.

⇨ $U_C = \frac{Q}{C} = \frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi) = \frac{I_0}{\omega C}\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ (E4.11)

⇨ la tension aux bornes de C est **déphasée de "−π/2"** par rapport au courant (le signe − indique que U_C est en retard sur le courant).

2/ **tension aux bornes de la bobine** :

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_0 \sin(\omega t + \varphi) = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(E4.12)}$$

⇨ la tension aux bornes de L est **déphasée de "+π/2"** par rapport au courant (le signe + indique que U_L est en avance sur le courant).

3/ **tension aux bornes de la résistance** :

$$U_R = R I = R I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(E4.13)}$$

⇨ le tension aux bornes de R est **en phase** avec le courant

+ ma feuille sur les calculs des courants !!!

♦♦ **Circuit RLC résonnant** : la largeur du pic de résonance à $\frac{I_{res}}{\sqrt{2}}$ serait de R/L

En fait : quand $\frac{1}{\omega C} - \omega L = \pm R$, on a $Q = \frac{Q_{res}}{\sqrt{2}}$ ⇨ cela vaut pour la courbe de résonance de U_C en fonction de ω. ⇨ idem en largeur pour la courbe I = f(ω) ?? je pense que oui, à vérifier!

♦ ♦ ♦ **Circuit RLC antirésonnant** : $|Z_{circuit}| = \dfrac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega R C)^2}}$ ω, L et R étant fixés, si **on fait varier C**, seul le dénominateur de Z varie. Il présente un **extremum** pour les valeurs de C annulant sa dérivée partielle par rapport à C, soit:

$$\frac{\partial\, \text{dén}(Z)}{\partial C} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(\omega C R')(\omega R') + 2\left(1-\omega^2 L C\right)\left(-\omega^2 L\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad C R'^2 - L\left(1-\omega^2 L C\right) = 0$$

⇨ $$C = \frac{L}{R'^2 + \omega^2 L^2}$$

⇨ ou $$\omega^2 L C = \frac{1}{1 + \dfrac{R'^2}{\omega^2 L^2}}$$

↳ Cet extremum du dénominateur de Z est un minimum puisque la dérivée seconde est positive. ⇨ Z est maximum et le courant total **I_0 est minimum** :

$I_{0min} = U_0/Z_{max}$. ⇨ on parle **d'anti-résonance**.

$$I_{0\,min} = U_0 \sqrt{\frac{\left(\dfrac{C R'^2}{L}\right)^2 + (\omega C R')^2}{R'^2 + \omega^2 L^2}} = U_0\, C \sqrt{\frac{\dfrac{R'^2 R'^2}{L^2} + \omega^2 R'^2}{R'^2 + \omega^2 L^2}} = U_0 \frac{L}{R'^2 + \omega^2 L^2} \sqrt{\frac{\dfrac{R'^2}{L^2}\left(R'^2 + \omega^2 L^2\right)}{R'^2 + \omega^2 L^2}}$$

⇨ $$I_{0\,min} = U_0 \frac{R'}{R'^2 + \omega^2 L^2} = \frac{U_0}{R' + \dfrac{\omega^2 L^2}{R'}}$$