

2. Para demostrar la fórmula de Simpson 3/8 tomamos la fórmula básica de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)]$$

Vamos a dividir el intervalo $[a, b]$ en cuatro intervalos de igual longitud

$$a, a + \frac{h}{3}, a + \frac{2h}{3} \text{ y } a + h \quad \text{donde } h = \frac{b-a}{4}$$

Aplicamos Simpson básico en los dos pares de la partición y sumamos los resultados

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{3}\right) + f\left(a + \frac{2h}{3}\right) \right] + \frac{h}{3} \left[f\left(a + \frac{2h}{3}\right) + 4f\left(a + \frac{h}{3}\right) + f(a+h) \right] \\ &= \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{3}\right) + f\left(a + \frac{2h}{3}\right) + f\left(a + \frac{2h}{3}\right) + 4f\left(a + \frac{h}{3}\right) + f(a+h) \right] \\ &= \frac{3h}{8} \left[f(a) + 3f\left(a + \frac{h}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2h}{3}\right) + f(a+h) \right] \end{aligned}$$