Ejercicio 1 Parameter Estimation

jueves, 30 de noviembre de 2023 1:44 p. m.

1. (**Theoretical**) Sea $\mathcal{A}(x_1, x_2, ..., x_n)$, donde $\mathcal{A} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ con parámetros μ y σ. Muestre que los estimadores máximo verosímiles son:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \end{aligned} \tag{9.49}$$

La función de densidad de probabilidad normal está dada por:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \tag{7.64}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ son los parámetros que caracterizan las distribución. Se puede demostrar que el valor medio está dado por $\mathbb{E}(X) = \mu$.

Ejemplo 1:

Sea $\mathcal{A}(x_1, x_2, ..., x_n)$, donde $\mathcal{A} \sim Pois(\lambda)$ tiene distribución de Poisson con parámetro λ.

$$\mathcal{L}(\vec{x}; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \tag{9.36}$$

Tomando logaritmo natural tenemos:

$$Ln(\mathcal{L}(\vec{x}; \lambda)) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i Ln(\lambda) - Ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!) \tag{9.37}$$

El parámetro máximo verosímil es la media muestral.

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X}. \tag{9.38}$$

$$\ln\left(\mathcal{L}(x, \mu, \sigma)\right) = \ln\left(\prod^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$\ln\left(\mathcal{L}(x, \mu, \sigma)\right) = \ln\left(\prod_{i=0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$\boxed{= \sum_{i=0}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ahora derivamos a ambos lados con respecto μ:

$$\frac{d\ln(\mathcal{L})}{d\mu} = \frac{d}{d\mu} \sum_{i=1}^{n} \cancel{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)} - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 0 + \cancel{2}\,\frac{x_i-\mu}{\cancel{2}\sigma^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i-\mu}{\sigma^2}$$

Cuando $\frac{d\ln(\mathcal{L})}{d\mu} = 0$:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \mu}{\sigma^2}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i - \mu$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i - \mu n$$

$$\mu n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Ahora derivamos con respecto a σ^2

$$\frac{d \ln (\mathcal{L})}{d \sigma^2} = \frac{d}{d\sigma} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{d}{d\sigma} \sum_{i=1}^{n} - \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} - \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\sigma} \cdot \cancel{\sqrt{2\pi}} + \frac{(x_i - \mu)^2}{2} \frac{1}{\sigma^3}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}$$

Cuando $\frac{d\ln(\mathcal{L})}{d\sigma^2} = 0$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}$$

$$\frac{n}{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^3}$$

$$\frac{\cancel{2}\sigma^{\cancel{3}} n}{\cancel{2}\,\cancel{\sigma}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

Teniendo en cuenta que $\mu = \bar{x}$:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$