Parte teórica Parcial 1 punto

miércoles, 6 de septiembre de 2023 6:45 p. m.

$$\begin{aligned} a &= (f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1])/(h_2 - h_1) \\ b &= f[x_1, x_2] + a h_2 \\ c &= f(x_2) \end{aligned} \qquad (3.89)$$

donde $h_1 = x_1 - x_0$ y $h_2 = x_2 - x_1$. El cero se encuentra en una vecindad de x_2, en este caso, la formula de Bhaskara es:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}. \qquad (3.90)$$

Si $b < 0$ elegir el signo negativo, de otro modo ($b \geq 0$), elegir el signo positivo. El criterio de parada es:

$$\epsilon = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| < 1 \times 10^{-10}. \qquad (3.91)$$

(i) **Theoretical:** demuestre la afirmación: *Si $b < 0$ elegir el signo negativo, de otro modo ($b \geq 0$), elegir el signo positivo.* Sugerencia: en cada iteración $|x_3 - x_2|$ debe ser lo más pequeña posible.

i)

Como queremos $|x3 - x2|$ ser lo más chiquito posible:

$$x3 = x2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$f(x2) - f x1$

$$|x3 - x2| = \left|\frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}\right|$$

Esto muestra que para que $|x3 - x2|$ sea lo más chiquito posible:

$|b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}|$ tiene que ser lo más grande posible

Si tomo $b < 0$

$$|b - \sqrt{b^2 - 4ac}| > |b + \sqrt{b^2 - 4ac}|$$

Al contrario, Si tomo $b \geq 0$

$$|b - \sqrt{b^2 - 4ac}| < |b + \sqrt{b^2 - 4ac}|$$

Esto le da todo el sentido del mundo a la afirmación mencionada.

$$f(x) \cong f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

$$f(x) \cong a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c.$$

$$f(x2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x2) + c$$

$$f(x2) = c$$

Ahora $f(x1) = a(x1 - x2)^2 + b(x1 - x2) + f(x2)$

$$[\, f(x1) - f(x2) = a(x1 - x2)^2 + b(x1 - x2)$$

Sabemos que $h2 = x2 - x1$

$-h2 = x1 - x2$

$h1 = x_1 - x_0$

$h2 - h1 (x2 - x1 - x1 + x0) = x2 - x0$

$$f(x1) - f(x2) = a(-h2)^2 + b(-h2)$$

$$[f(x1) - f(x2) = a h_2^2 - b h_2](-1)$$

$$f(x2) - f(x1) = -a h_2^2 + b h2$$

$$\frac{f(x2) - f(x1)}{h2} = -a h2 + b$$

$$b = \frac{f(x2) - f(x1)}{h2} + a h2$$

$\longrightarrow f[x1, x2]$

$a[(x1 - x2)^2 +$

$a[(-h2)^2[$

$a[(h2)^2[(h$

$a[h]^2[(h2$

$a[1)$

$h2^{2} \quad)$

$2 \quad])$

$1 - h2) + h2]]) - 1$

$- h1) - h2]]$

h) Encontrar a

$$-(f(x_0)-f(x_2)) = \cancel{x_1-x_0}\,\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\cancel{x_1-x_0}} + \cancel{x_2-x_1}\,\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\cancel{x_2-x_1}}$$

① $(h_1-h_2)b - (h_1+h_2)^2 a = h_1 f[x_0,x_1] + h_2 f[x_1,x_2]$

② $b = a h_2 + f[x_1 x_2]$

Sustituir ② en ①

$$(h_1-h_2)(a h_2 + f[x_1,x_2]) - (h_1+h_2)^2 a =$$

$$h_1 + f[x_1,x_2] + h_2 \cancel{f[x_1,x_2]} + h_1 h_2 a + h_2^2 a - (h_1+h_2)^2 a = h_1 f[x_0,x_1] + \cancel{h_2 f[x_1,x_2]}$$

$$h_1 h_2 a + h_2 a - (h_1+h_2)^2 a = -h_1 f[x_1,x_2] + h_1 f[x_0,x_2]$$

$$h_1 h_2 a + h_2^2 a - (h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2) a =$$

$$(h_1 + h_1 h_2) a = -h_1 F[x_1,x_2] - h_1 f[x_0,x_1]$$

$$(h_1 - h_2) a = f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]$$

$$a = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{h_1 - h_2}$$

---

g)

$$f(x) \cong f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1). \qquad (3.83)$$

Podemos expandir esta fórmula de la siguiente manera.

$$f(x_0) + f[x_0,x_1]x - f[x_0,x_1]x_0 + f[x_0,x_1,x_2]x^2 + f[x_0,x_1,x_2]x_0x_1 - f[x_0,x_1,x_2]xx_0 - f[x_0,x_1,x_2]xx_1$$

Agrupamos términos

$$f[x_0,x_1,x_2]\,x^2 - \big(f[x_0,x_1] - (f[x_0,x_1,x_2]\,x_0 + f[x_0,x_1,x_2]\,x_1)\big)x + f(x_0) - f[x_0,x_1]x_0 + f[x_0,x_1,x_2]x_0x_1$$

Simplificamos

$$f[x_0,x_1,x_2]\,x^2 - \big(f[x_0,x_1] - (f[x_0,x_1,x_2](x_0+x_1))\big)x + f(x_0) - f[x_0,x_1]x_0 + f[x_0,x_1,x_2]x_0x_1$$

Al ver la fórmula general: $ax^2 + bx + c$

notamos → $a = f[x_0,x_1,x_2]$
$b = f[x_0,x_1] - f[x_0,x_1,x_2]\,(x_0+x_1)$
$c = f(x_0) - f[x_0,x_1]x_0 + f[x_0,x_1,x_2]\,x_0x_1$