Punto 18 b) :

Sabemos que $H_n(\xi) = -1 \, e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$, en la funciones de probabilidad tenemos $\xi = x$ y $\sqrt{\frac{mw}{h}} = 1$, y por último tenemos $h_1(x) = 2x$

Con esto claro podemos empezar a reemplazar

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}(\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{1/4} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} \cdot \sqrt[2]{\sqrt{\pi \frac{mw}{h}}} \cdot e^{-x^2/2} \cdot H_n(x)$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot h_n(x)$$

cuando $n = 1$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{1/\pi} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot 2x$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(x)|^2 x^2 dx = 3/2$$

Seguimos reemplazando

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\sqrt[4]{1/\pi}\right)^2 \left(e^{-x^2/2}\right)^2 (2x)^2 \, dx = 3/2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^4}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot e^{-x^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2x^4 \sqrt{1/\pi} \cdot e^{-x^2} dx = 3/2$$

Vamos a comprobar esta integral por el método Gaus-Hermite