

Univerza v Ljubljani
Fakulteta *za matematiko in fiziko*



Navadne diferencialne enačbe: robni problemi

Avtor: Simon Perovnik

Predavatelj: prof. dr. Simon Širca

Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

Druga naloga pri Modelske analizi II

Ljubljana, marec 2022

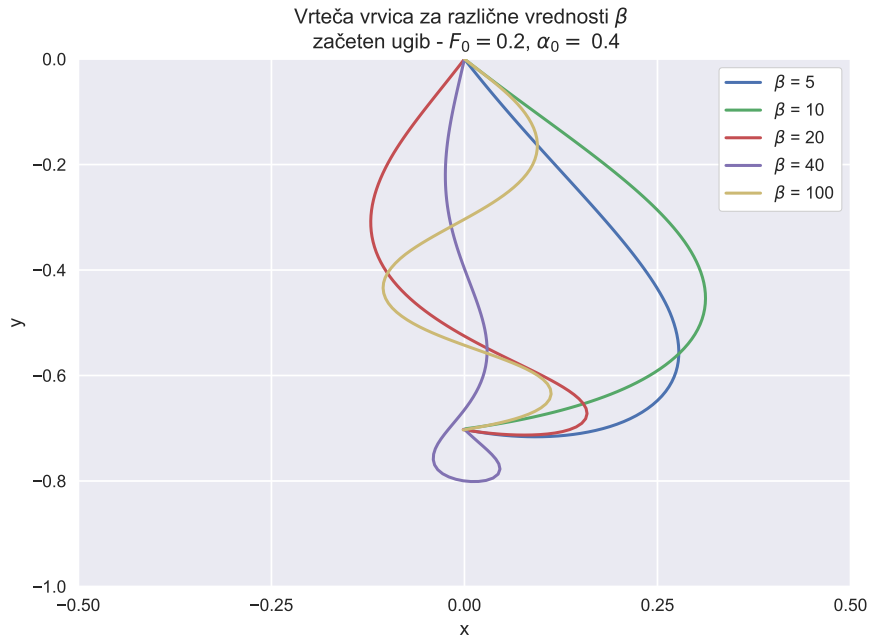
1 Vrtenje vpete vrvice

1.1 Ideja reševanja

Za obešeno vrv vrtečo se okoli navpične osi nam navodila naloge podajo naslednje enačbe

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \cos(\alpha) \\ \frac{dy}{ds} &= \sin(\alpha) \\ \frac{dF}{ds} &= \sin(\alpha) - \beta x \cos(\alpha) \\ \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{1}{F}(\cos(\alpha) + \beta x \sin(\alpha)),\end{aligned}\tag{1}$$

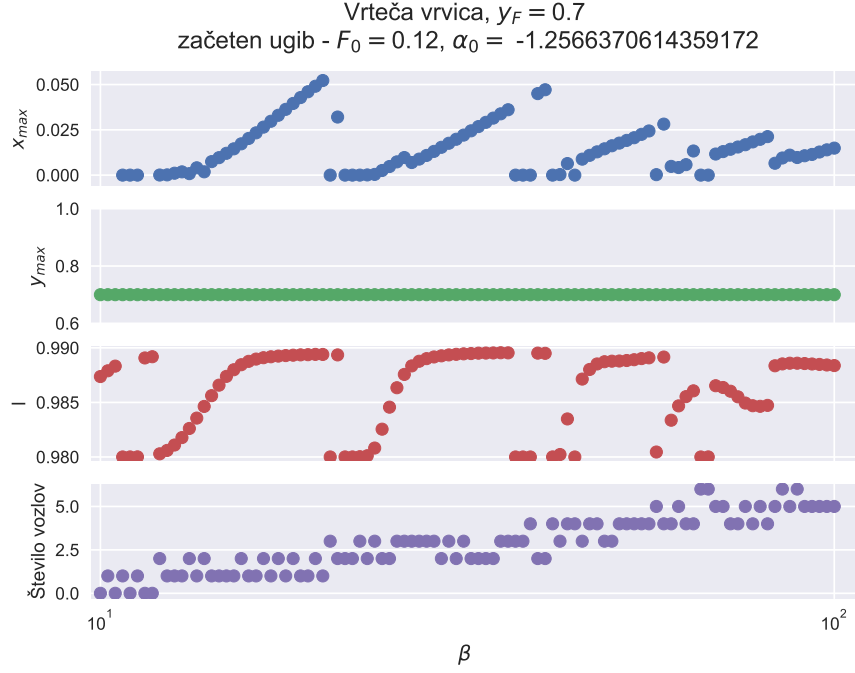
kjer smo upoštevali substitucije $x \rightarrow x/L$, $y \rightarrow y/L$, $F \rightarrow F/\rho g L$, $s \rightarrow s/L$ in uvedli $\beta = \omega^2 L/g$. Enačbe predstavljajo sistem diferencialnih enačb. Za ta sistem imamo podanih nekaj robnih pogojev - vrv smo namreč vpeli v točki $(0, 0)$ in $(0, y_F)$. Ta pogoja nam sicer podata začetni vrednosti koordinat x in y , še vedno pa ostaneta neznana α_0 in F_0 . Ker pa imamo podano tudi končno točko, se nam ponuja možnost, da problem rešujemo s strelsko metodo - sami bomo določili začetni vrednosti α_0 in F_0 in pogledali, ali nas taka izbira pripelje v točko $(0, y_F)$. Tako bomo spreminjali vrednosti α_0 in F_0 dokler ne "ustrelimo" oziroma zadanemo želene končne vrednosti. To bomo realizirali s pomočjo funkcije *root* iz knjižnice Scipy, s katero bomo iskali minimum razlike $|y_F - y_K(\alpha_0, F_0)|$, kjer smo z y_K označili končno vrednost koordinate y - rešitve sistema diferencialnih enačb. Obenem bomo minimizirali, tudi končni $x_K(\alpha_0, F_0)$.



Slika 1: Vrteče se vpete vrvice pri različnih vrednostih parametra β .

Na sliki (1) so prikazane rešitve našega sistema za različne vrednosti β . Pri tem smo začeli iskati minimum pri vedno enakih začetnih pogojih. Zdi se, da so rešitve pri manjših vrednostih parametra β enostavnejših oblik in so tipično bolj razpotegnjene v x smeri. Kar nas preseneti, saj bi pričakovali, da bo hitrejše vrtenje vrvico bolj

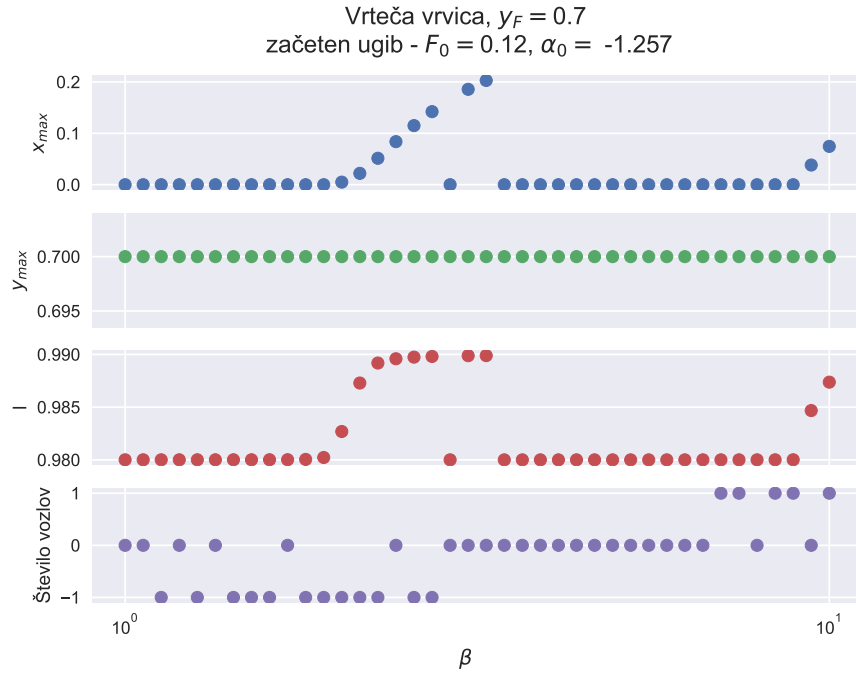
"vleklo ven". Slutimo, da rešitve, ki smo jih našli morda niso enolične za vsak β . To bomo podrobneje raziskali kasneje. Vidimo lahko, da se rešitve med seboj razlikujejo v kar nekaj lastnostih. Podrobneje si pogledjmo, kako se za različne vrednosti β spreminjajo x_{max} , y_{max} , l in N , kjer l predstavlja numerično dolžino vrvice, N pa število vozlišč na osi $x = 0$.



Slika 2: Karakteristike vrteče vrvice pri različnih vrednostih β .

Opazimo lahko:

- Pojavljajo se režimi na katerih raste x_{max} in numerična dolžina vrvice l . Pravtako ostaja na istih področjih število vozlov približno enako, ko pa presežemo neko kritično vrednosti β pa se nam "odpre" nova rešitev, ki vsebuje več vozlov. Ta vzorec se skoraj periodično ponavlja, a vidimo, da se s časom maksimumu x_{max} nižajo, medtem ko je obnašanje dolžine l še nekoliko bolj nenavadno.
- y_{max} je ostal vse skozi enak minimalnemu, določenemu z vpetjem vrvice, kar je presenetljivo saj bi vsaj pri manjših β pričakoval, da se bodo pojavile tudi rešitve kjer bo teža vrvice nekako "premagala" njeno vztrajnost zaradi vrtenja in se bo vrstica povsila preko točke vpetja.
- Dolžina l ostaja vseskozi pod 1, česar ne znam smiselno pojasniti. Zgleda kot da gre za nekakšno sistematično numerično napako, ki doda off-set enak 0.015.

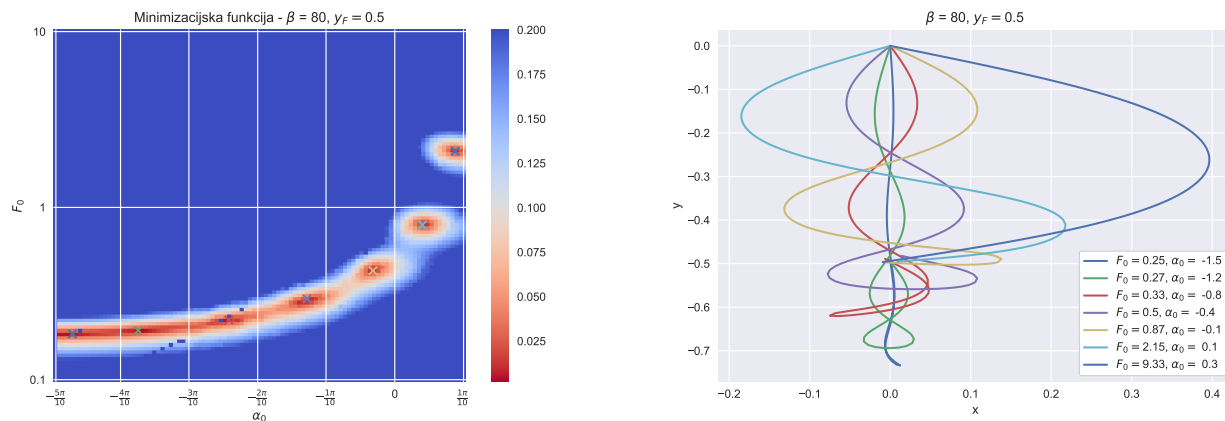


Slika 3: Karakteristike vrteče vrvice pri različnih vrednostih β .

Graf smo izrisali tudi pri manjših vrednostih β , z željo, da bi našli rešitve, ki bi ustrezale deloma povešeni vrvici, a je ostal y_{max} še vedno enak 0.7, kar nas napeljuje na misel, da je morda prisotna kakšna napaka v kodi, ki pa je sam nisem uspel najti.

Pojavile so se tudi rešitve kjer je število vozlov (glede na implementacijo) negativno, kar pomeni, da vrvica ni bila več vpeta v obe točki in je tako izbrana rešitev napačna. To pripisujem slabši stabilnosti minimizacijske funkcije pri manjših β .

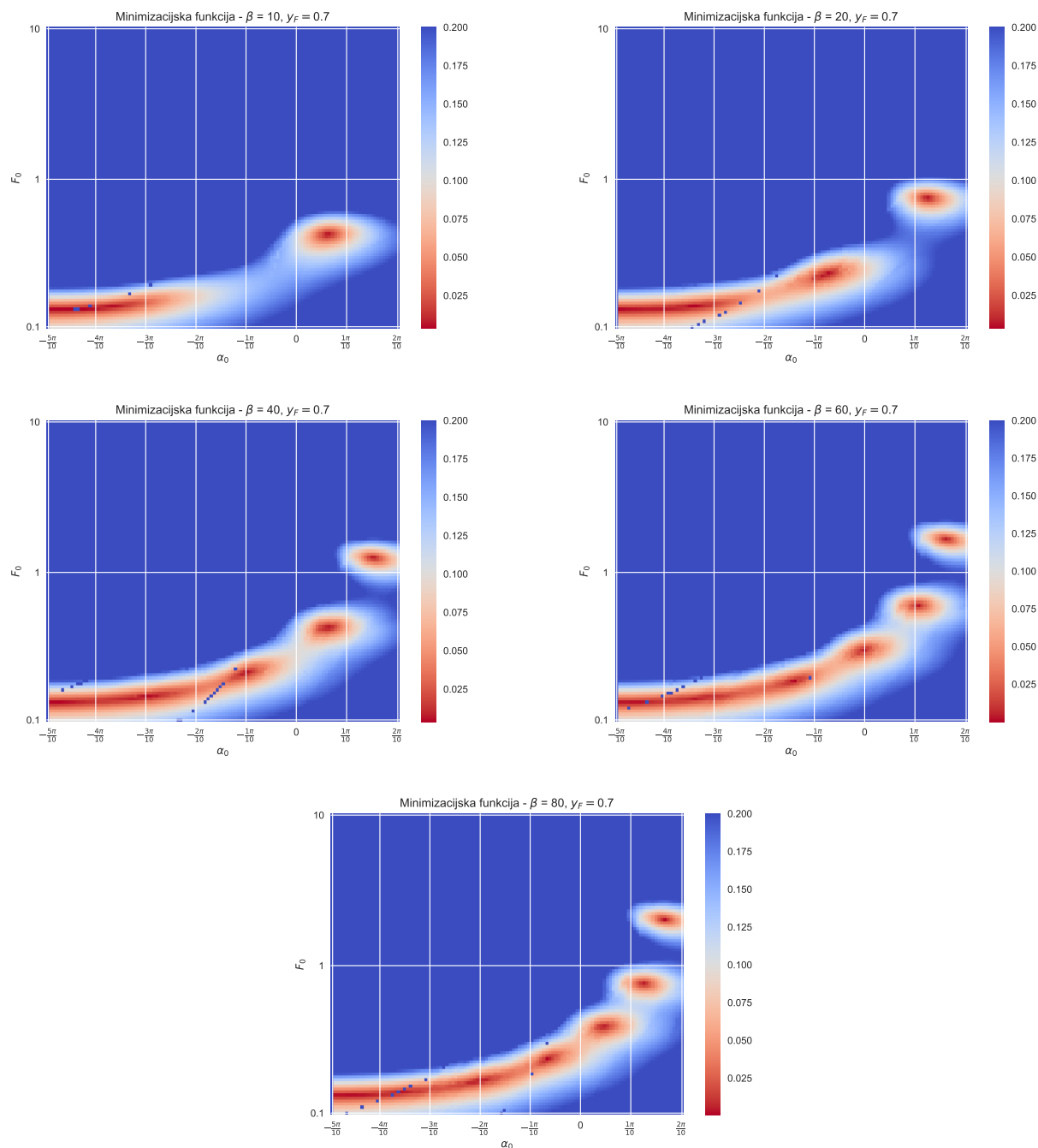
Na obeh slikah pa lahko opazimo, da kakšna točka grafa x_{max} ne sledi povsem trendu. Zdi se kot da, je rešitev h kateri je konvergirala minimizacija že višja vzbuditev, ki nam načeloma postanejo dostopne šele ko dosežemo primeren β . To nas napeljuje na misel, da je rešitev pri posamezni β pravzaprav več in lahko poiščemo višje vzbuditve. To bomo podrobno raziskali tako, da bomo analizirali minimizacijsko funkcije za različne začetne vrednosti parametrov F_0 in α_0 .



Slika 4: Minimizacijska funkcija za $\beta = 80$ in $y_F = 0.5$.

Naš sum se je izkazal za pravilnega, saj smo pri posamezni β res našli več lokalnih minimumov in s tem več različnih rešitev. Vsak od teh minimumov je bil osnova za začetne ugibe, pri katerih so izrisane oblike vrvice na desni sliki. Rešitve so med seboj res vse različne in se dobro prilegajo minimumom, najdenih v minimizacijski funkciji. V tem (vsaj "na oko") kvadratičnem trendu minimumov lahko prepoznamo nekaj vzorcev - s povečevanjem kota postanejo rešitve po obliki vse bolj enostavne oblike. S tem mislimo predvsem rešitve, ki vsebujejo manj vozlov. Pravitako lahko potrdimo našo hipotezo, da so minimumi za majhne vrednosti parametra β med seboj bolj skupaj in so manj intenzivni, zato je iskanje ekstremov v tem območju bolj nestabilno. Zdi se tudi, da bi lahko našli za manjše kote še kakšno kompleksno rešitev, ki pa bi bila zagotovo še manj stabilna.

Sedaj si lahko podrobneje pogledamo kako parametra β in pa točka vpetja y_F vplivata na obliko in rešitve minimizacijske funkcije.

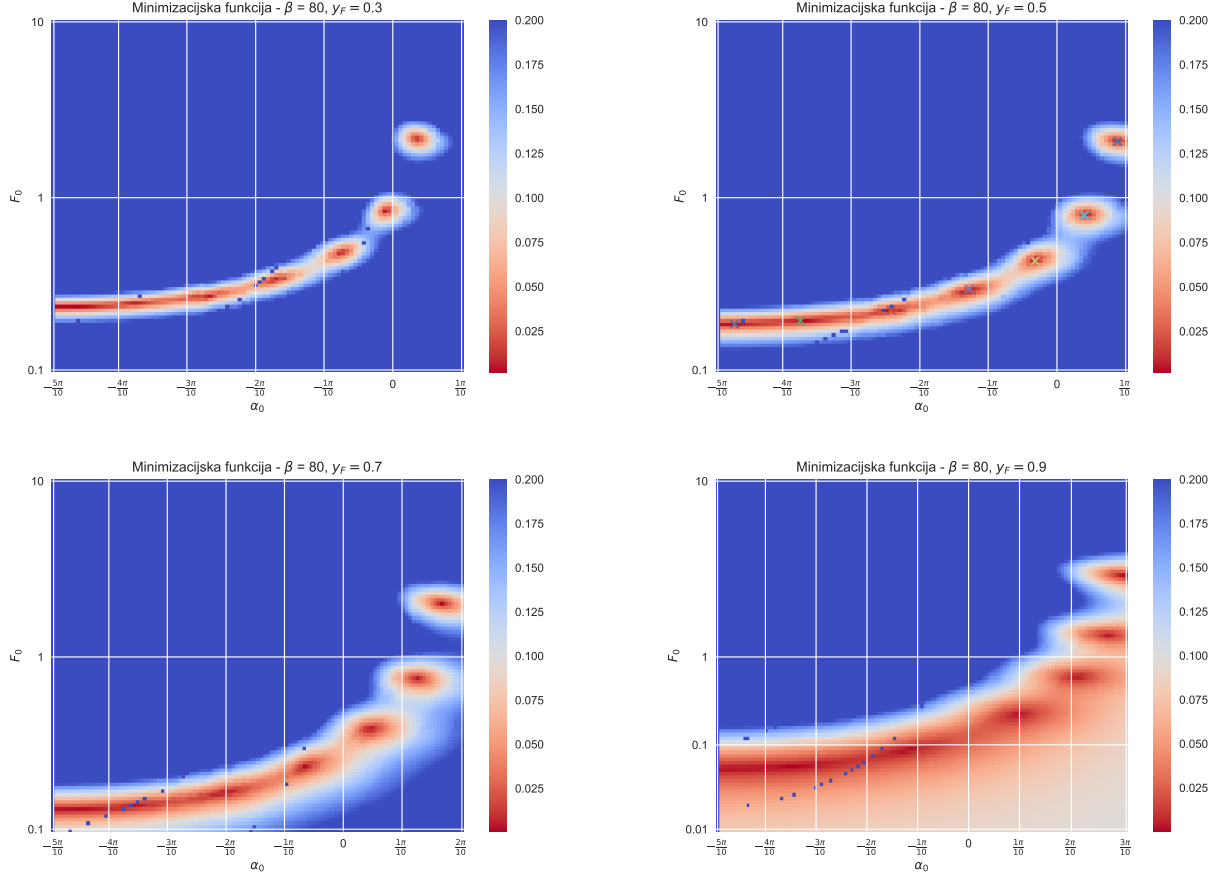


Slika 5: Vpliv parametra β na minimizacijsko funkcijo.

Zgornja slika nam razkrije kar nekaj pomembnih lastnosti minimizacijske funkcije.

- Z večanjem parametra β se nam najmočnejši minimum širi proti večjim kotom. Ko dosežemo dovolj velik β se formira nov lokalni minimum nam in pojavi se nova možna stabilna rešitev.
- Za velike vrednosti β so minimumi med seboj po začetnem pogoju za kot vse bolj skupaj.
- Enostavne rešitve se z večanjem β pomikajo proti večjim kotom. Kar se sklada z našimi rezultati, ki smo jih

dobili na sliki (2), saj smo imeli takšne začetne ugibe, da smo vedno "padli" v minimum, ki je ustrezal najbolj kompleksni rešitve sistema. Povečevanje β je tako res rezultiralo v kompleksnejše rešitve. Pri majhnih β pa je bila to oblika brez vozlov.



Slika 6: Vpliv točke vpetja y_F na minimizacijsko funkcijo.

Točka vpetja ne vpliva bistveno na rešitve problema, jih zgolj premika po osi za začetni pogoj za silo in krči/razteza minimume, število rešitev pa ostaja enako. Zdi se, da s povečevanjem y_F proti 1 rešitve postanejo vse bolj nestabilne, saj so lokalni minimumi vse bolj stisnjeni skupaj.

2 Henon-Heilesov potencial

Reševali bomo problem gibanja delca v 2D potencialu, ki ga poznamo pod imenom Henon-Heilesov potencial. Potencial je oblike

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (2)$$

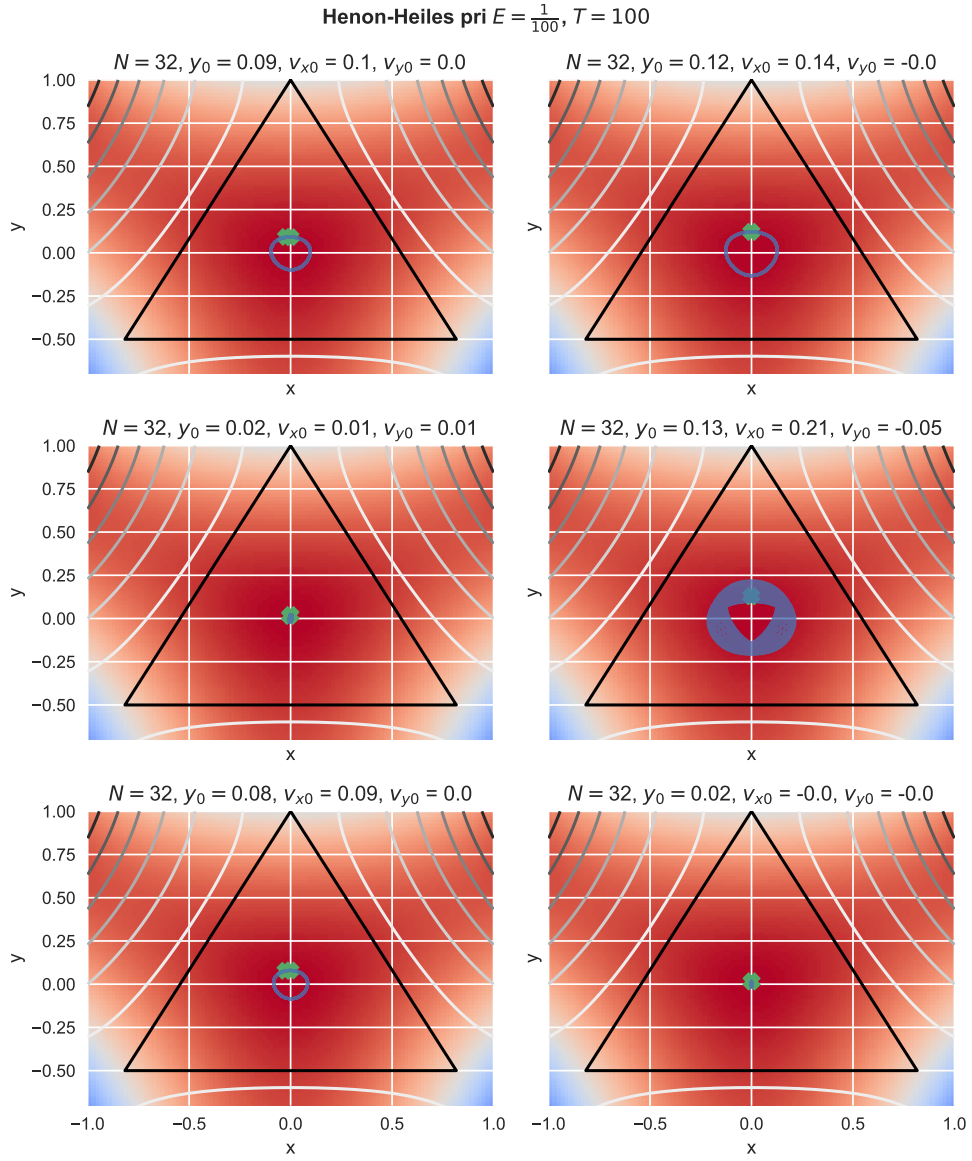
Izkaže se, da je delec v potencialu z energijo manjšo od $\frac{1}{6}$ vanj ujet. V tem razdelku bomo raziskali različne periodične orbite, ki jih lahko oriše delec znotraj takšnega potenciala.

Najprej bomo zapisali gibalne enačbe in jih prevedli na sistem sklopljenih diferencialnih enačb prvega reda. Na ta način pridelamo sistem

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v \\
\dot{u} &= -x - 2xy \\
\dot{v} &= -y - x^2 + y^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Sistem enačb bomo reševali kot problem začetnih pogojev, pri čemer bomo preko strelske metode iskali periodične rešitve. To realiziramo tako, da najprej določimo energijo delca E , pri kateri nas zanima gibanje, nato pa žrebamo vrednost koordinate y (x zaradi simetrije problema postavimo kar na 0) z daljice $(0, 1)$. Žrebamo tudi vrednost v_x , pri čemer ta seveda ne sme rezultirati v kinetični energiji večji od izbrane celotne energije. v_y je določen preko pogoja $E_{kin} = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)$, kjer je $E_{kin} = E - U(x, y)$. Pri takem postopku rabimo biti pozorni tudi na to, da izžrebana lega y ni tako velika, da bi bil $U > E$. Ko imamo tako izbrane začetne pogoje, pa začnemo s strelsko metodo, s katero želimo zadeti končno točko (po času periode T), za katero velja, da so vrednosti koordinat x, y, v_x in v_y enake kot na začetku. Ta pogoj implementiramo z iskanjem takih začetnih pogojev, da so razlike med končnimi in začetnimi vrednostmi koordinat minimalne. Problem smo tako prevedli na iskanje minimuma 4-dimenzionalne funkcije. To je seveda numerično velik zalogaj za naš računalnik, saj je iskanje lokalnih minimumov v tako velikem prostoru zelo zahtevno.

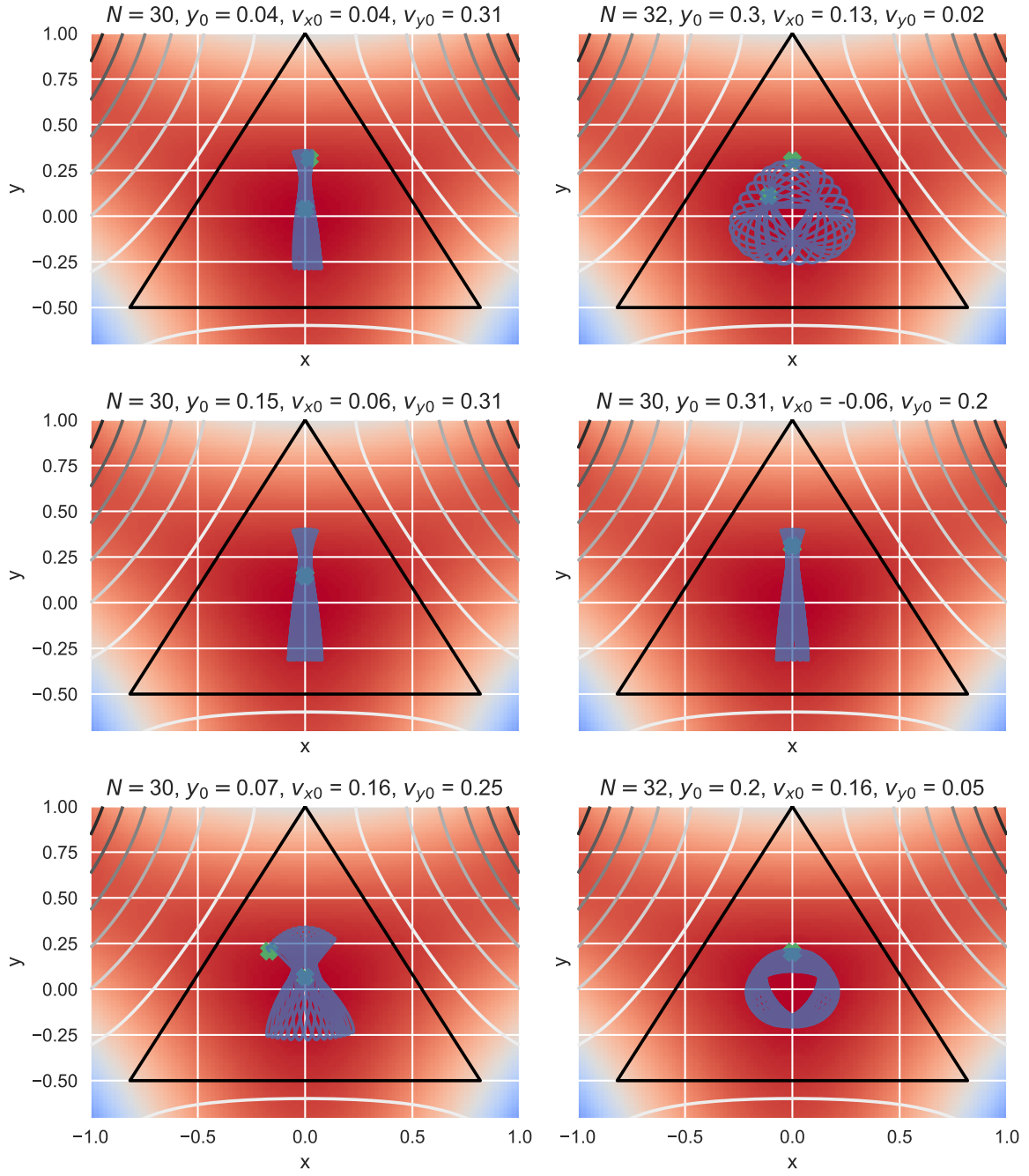
Poglejmo si, kakšne vse rešitve lahko najdemo. Čeprav naš način iskanja rešitev ni sistematičen, nam lahko razkrije nekaj o možnih rešitvah takšnega sistema.



Slika 7: Gibanje delca pri energiji $E = \frac{1}{100}$.

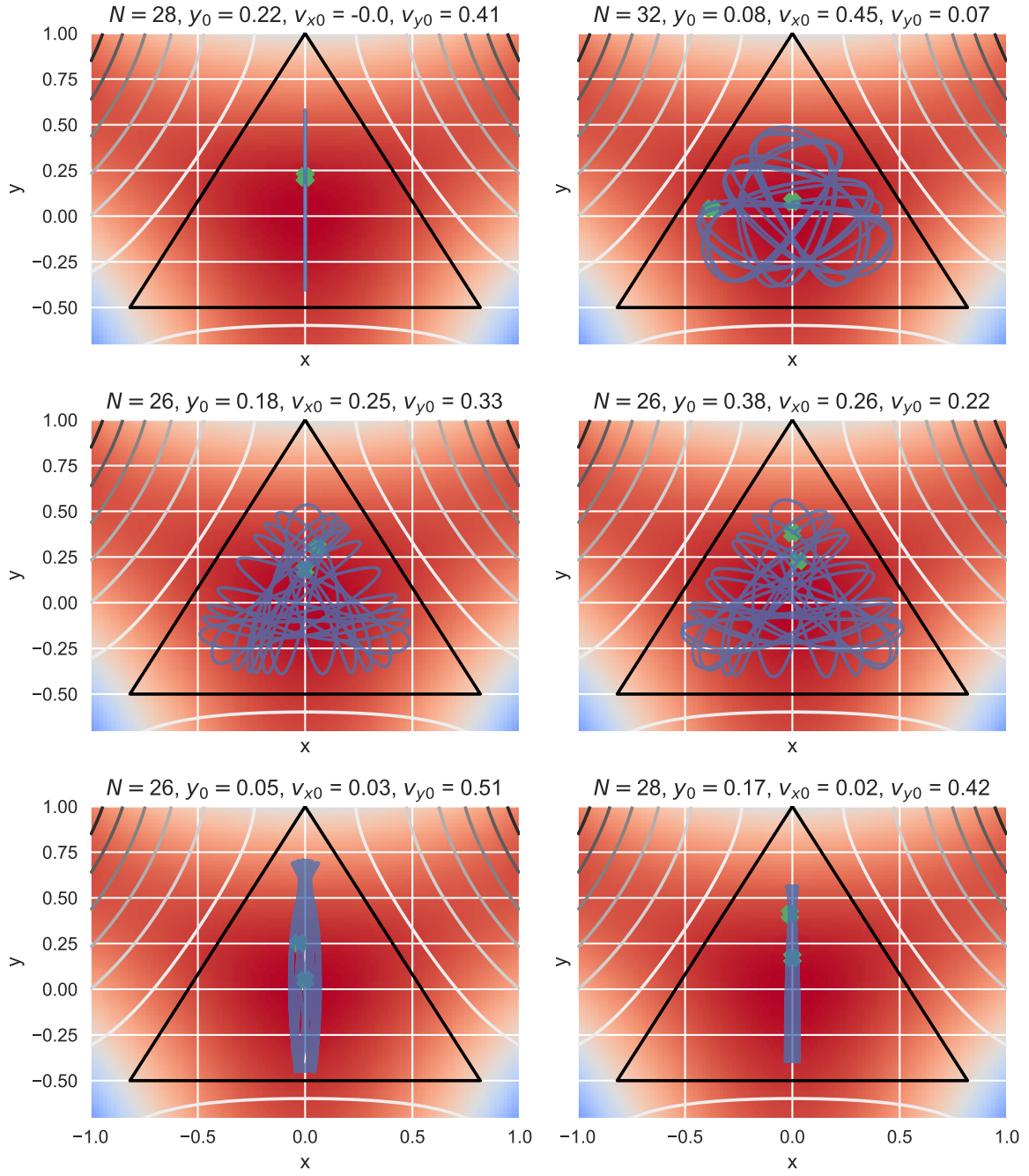
Za zelo majhne energije se delec vseskozi nahaja blizu izhodišča, njegove orbite pa so preprostejših oblik. Opazimo lahko tudi trivialno rešitev, ko delec miruje v točki $(0, 0)$.

Henon-Heiles pri $E = \frac{1}{20}$, $T = 100$



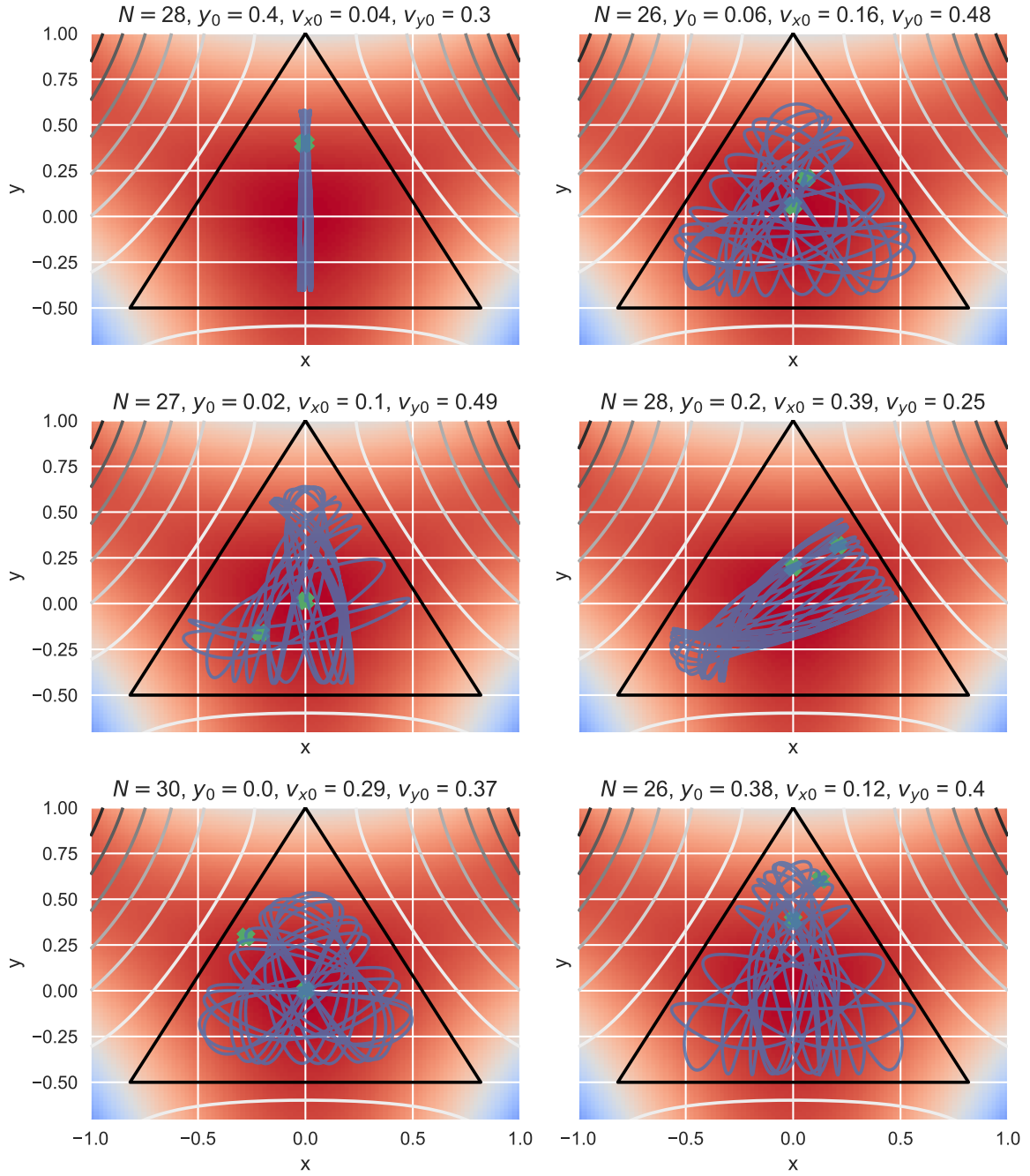
Slika 8: Gibanje delca pri energiji $E = \frac{1}{20}$.

Henon-Heiles pri $E = \frac{1}{10}$, $T = 100$



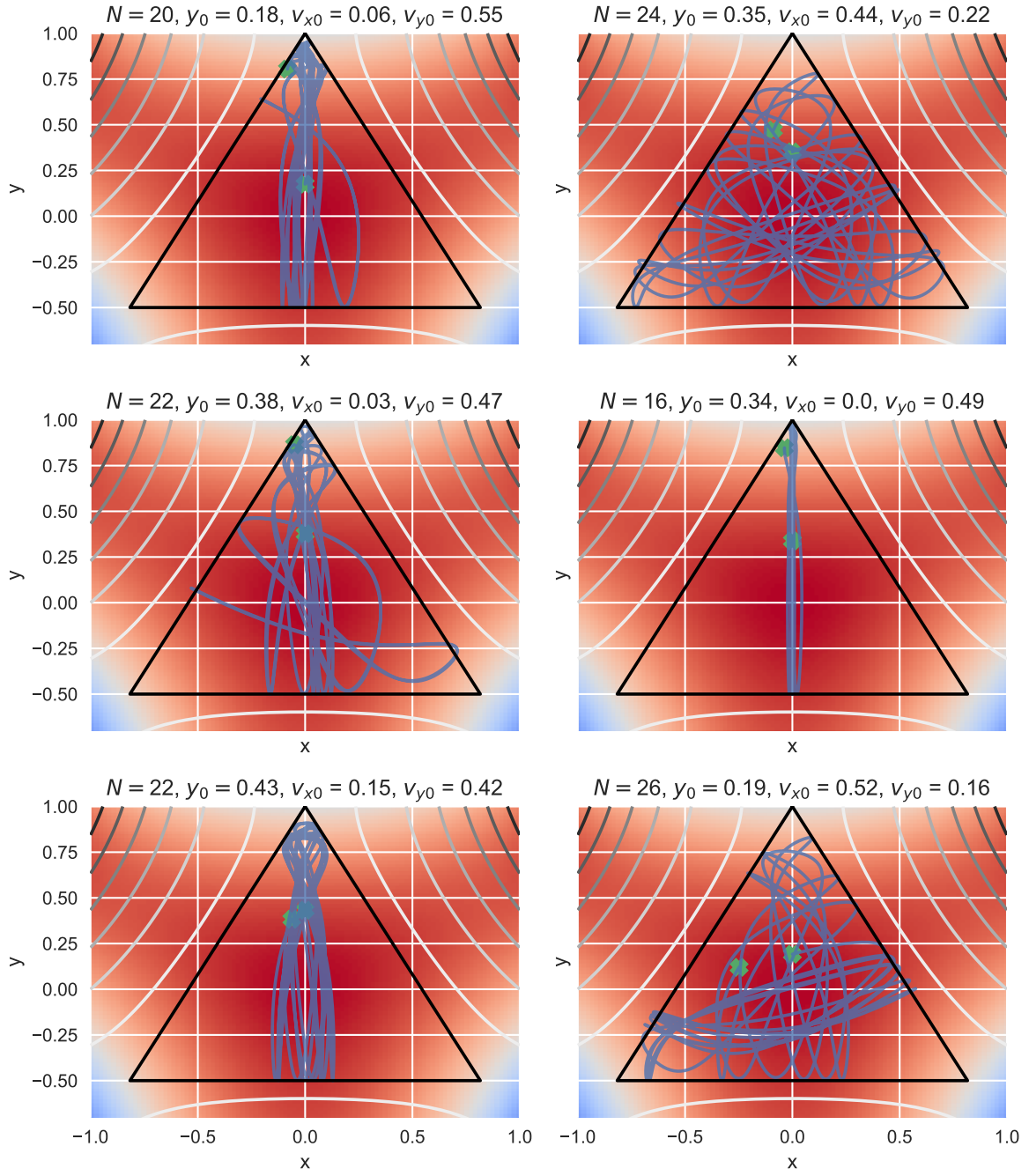
Slika 9: Gibanje delca pri energiji $E = \frac{1}{10}$.

Henon-Heiles pri $E = \frac{1}{8}$, $T = 100$



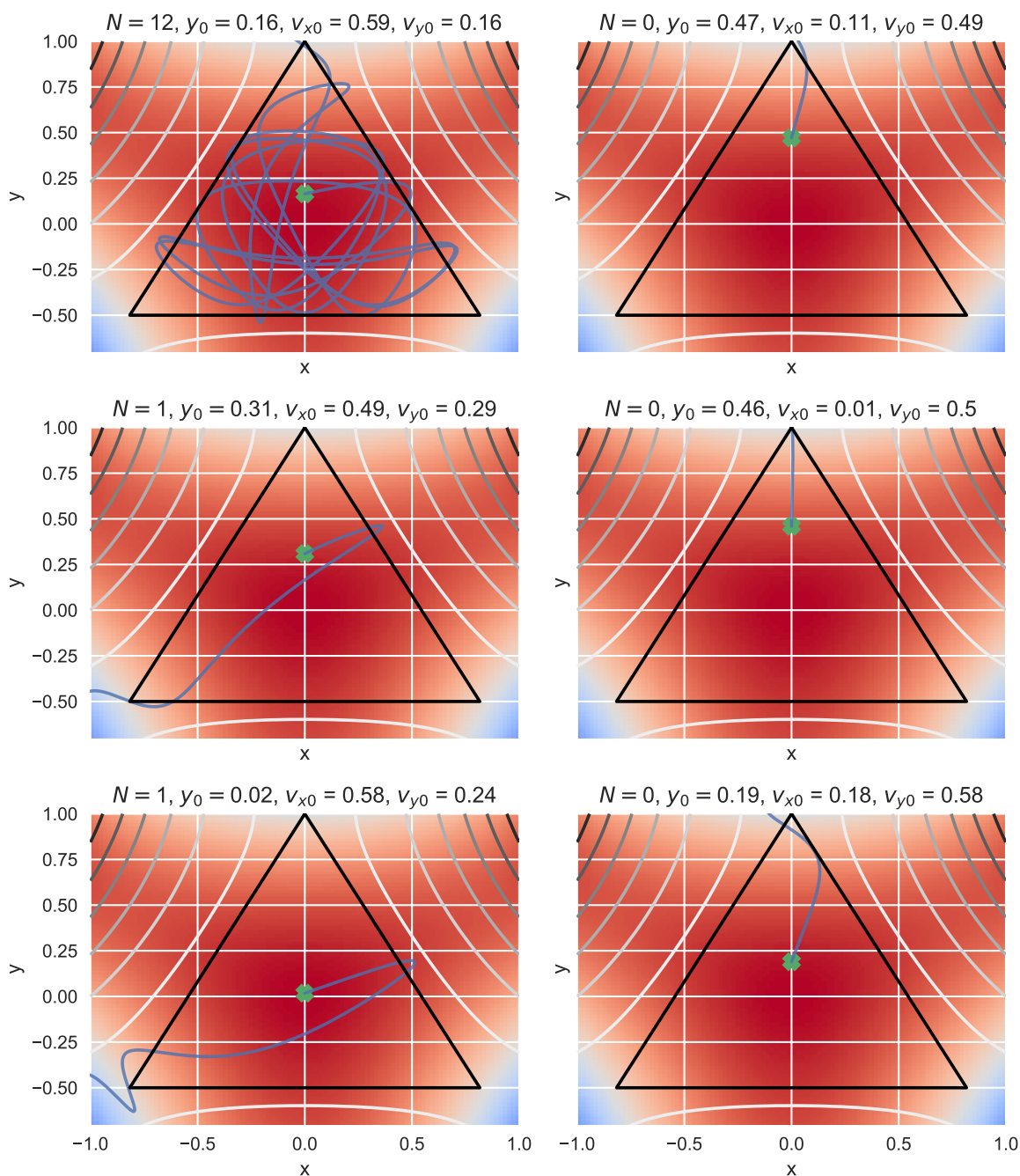
Slika 10: Gibanje delca pri energiji $E = \frac{1}{8}$.

Henon-Heiles pri $E = \frac{1}{6}$, $T = 100$



Slika 11: Gibanje delca pri energiji $E = \frac{1}{6}$.

Henon-Heiles pri $E = \frac{1}{5}$, $T = 100$



Slika 12: Gibanje delca pri energiji $E = \frac{1}{5}$.

Za energije do $1/10$ so orbite vsaj na videz periodične. Lahko prepoznamo nekaj tipičnih oblik rešitev. Predvsem sta očitni rešitvi daljica preko izhodišča in pa približno trikotna orbita okoli izhodišča. Pojavijo se tudi variacije teh dveh rešitev, kjer orbita precesira okoli izhodišča (najbolj so očitne pri energiji $E = \frac{1}{20}$). Ko energijo povečujemo, pa dobimo kar nekaj rešitev, ki jih lahko klasificiramo kot kvazi-periodične, saj nakazujejo neko ponavljajočo se obliko, a je le-ta precej komplicirana. Pri energij $E = \frac{1}{6}$ pa so orbite že zelo popačene in predvsem kaotične.

Vseeno se najde tudi nekaj rešitev, ki spominjajo na enostavnejše orbite, ki jih je moč opaziti pri nižjih energijah. Kot preizkus delovanja modela je izrisana tudi slika orbit pri energiji večji od $\frac{1}{6}$, za katere delec ni več omejen v potencialu. Delec pri takšni energiji res pobegne.

Še nekaj opomb:

- Z zelenim križcem sta označeni začetna in končna točka. Čeprav v algoritmu zahtevamo, da se ujemata, se to pogosto ne zgodi, vseeno pa najdemo periodično rešitev. To odstopanje bi pripisal problemu, da najverjetneje nismo našli povsem pravega minimuma minimizacijske funkcije.
- V naslovih slik nastopa tudi količina N , s katero sem želel preveriti, kako enostavna oziroma komplicirana je rešitev. Ideja je bila v tem, da bi preštel število obhodov, ki so bili potrebni, da je delec spet prišel po času T v začetno točko. Žal pa N ni pravo merilo za kompliciranost periodičnih orbit, saj je lahko T večkratnik periode in bi rabili to možnost upoštevati tudi pri štetju obhodov. Pravtako N nima nobene smiselne interpretacije pri kvazi-periodičnih in kaotičnih orbitah.
- Za karakterizacijo orbit bi si lahko pomagali tudi s Fourierjevo transformacijo tirov, saj je frekvenca gibanja za periodično gibanje konstantna.