

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta *za matematiko in fiziko*



# Navadne diferencialne enačbe: začetni problem

**Avtor: Simon Perovnik**

Predavatelj: prof. dr. Simon Širca

Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

Prva naloga pri Modelski analizi II

Ljubljana, februar 2022

# 1 Gibanje planeta na tiru okrog sonca

## 1.1 Naloga

S pomočjo podprogramov za metodo Runge-Kutta zasleduj gibanje planeta na tiru okrog sonca. Opazuj stabilnost razdalje obeh teles pri krožnem gibanju. Preveri točnost obhodnega časa ter natančnost povratka pri eliptičnih tirih, zlasti pri tistih z majhno začetno hitrostjo. Opazuj stalnost energije in vrtilne količine.

## 1.2 Matematičen opis problema

Gibanje planeta v okolici sonca opišemo z

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{mMG}{r^3}\vec{r} \quad (1)$$

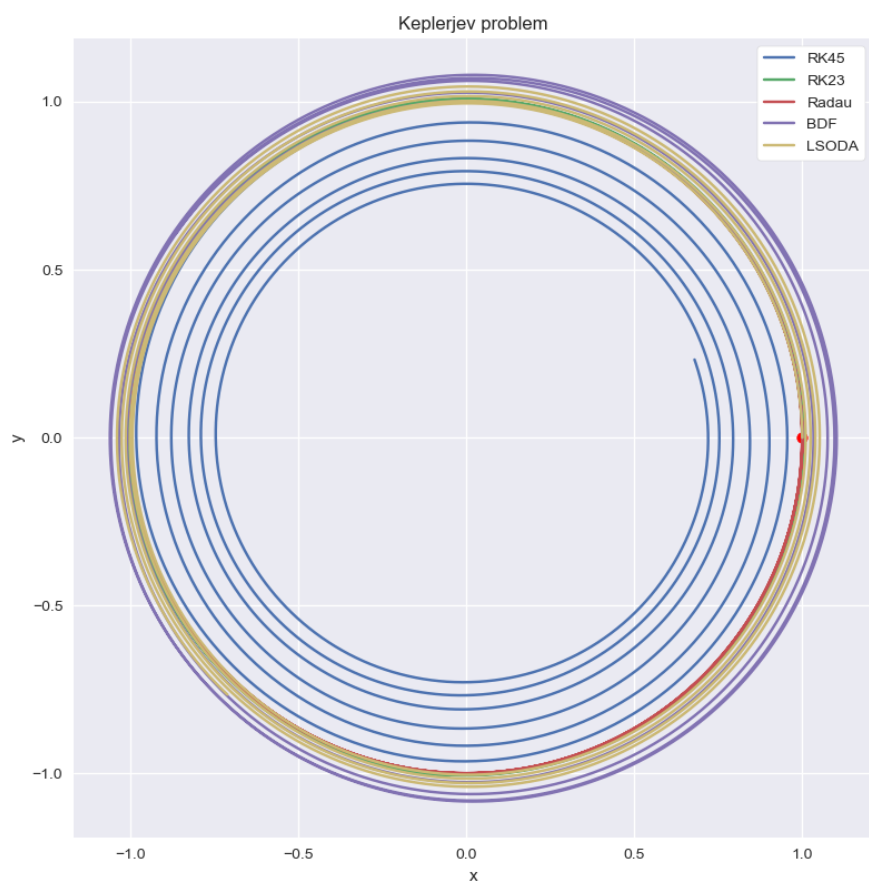
kjer lahko maso planeta  $m$  pokrajšamo iz enačbe in enote reskaliramo tako da postavimo  $MG = 1$ . Koordinatni sistem pa bomo orientirali na način, da bo problem postal ravninski. Zgornja zveza tako vsebuje dve enačbi - za  $x$  in  $y$  komponento. Sedaj lahko konstruiramo vektor

$$\dot{\vec{z}} := \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ -\frac{x}{r^3} \\ -\frac{y}{r^3} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

kjer smo preimenovali  $\dot{x} = u$  in  $\dot{y} = v$ . Pridelali smo sistem diferencialnih enačb, ki jih bomo numerično reševali s pomočjo Pythonove knjižnice Scipy. Ker je problem razmeroma enostaven in lahko vsaj za nekaj začetnih pogojev dobro napovemo orbito planeta, ga bomo uporabili tudi kot test točnosti različnih integratorjev.

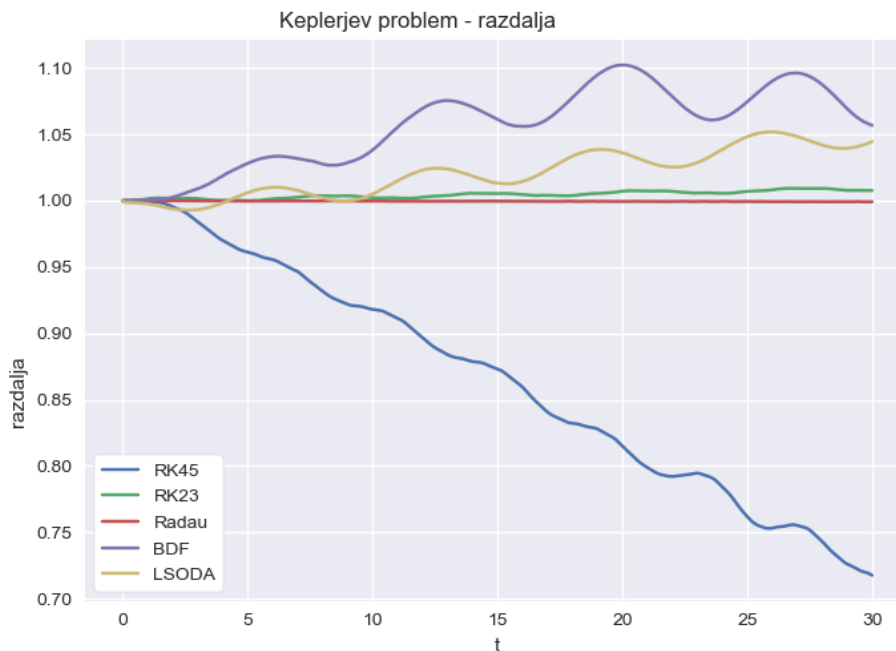
## 1.3 Primerjava integratorjev

V primeru, ko sta  $r = 1$  in  $v_0 = 1$ , začetna hitrost planeta pa kaže v smeri pravokotno na radij vektor, bo tirnica planeta kar krožnica. To teoretično napoved lahko sedaj primerjamo z orbitami, ki nam jih dajo integratorji, s čimer bomo ovrednotili njihove rešitve.



Slika 1: Orbite planeta pri uporabi različnih integratorjev. Z rdečo točko je označena začetna lega.

Kot vidimo rešitve pretežno variirajo ob uporabi različnih integratorjev. Najbolj izstopa *RK45*, ki najslabše ohranja radij kroženja, ki bi seveda moral biti konstanten. Še bolj nazorno se to vidi na naslednjem grafu, kjer je prikazana razdalja do sonca v odvisnosti od časa.

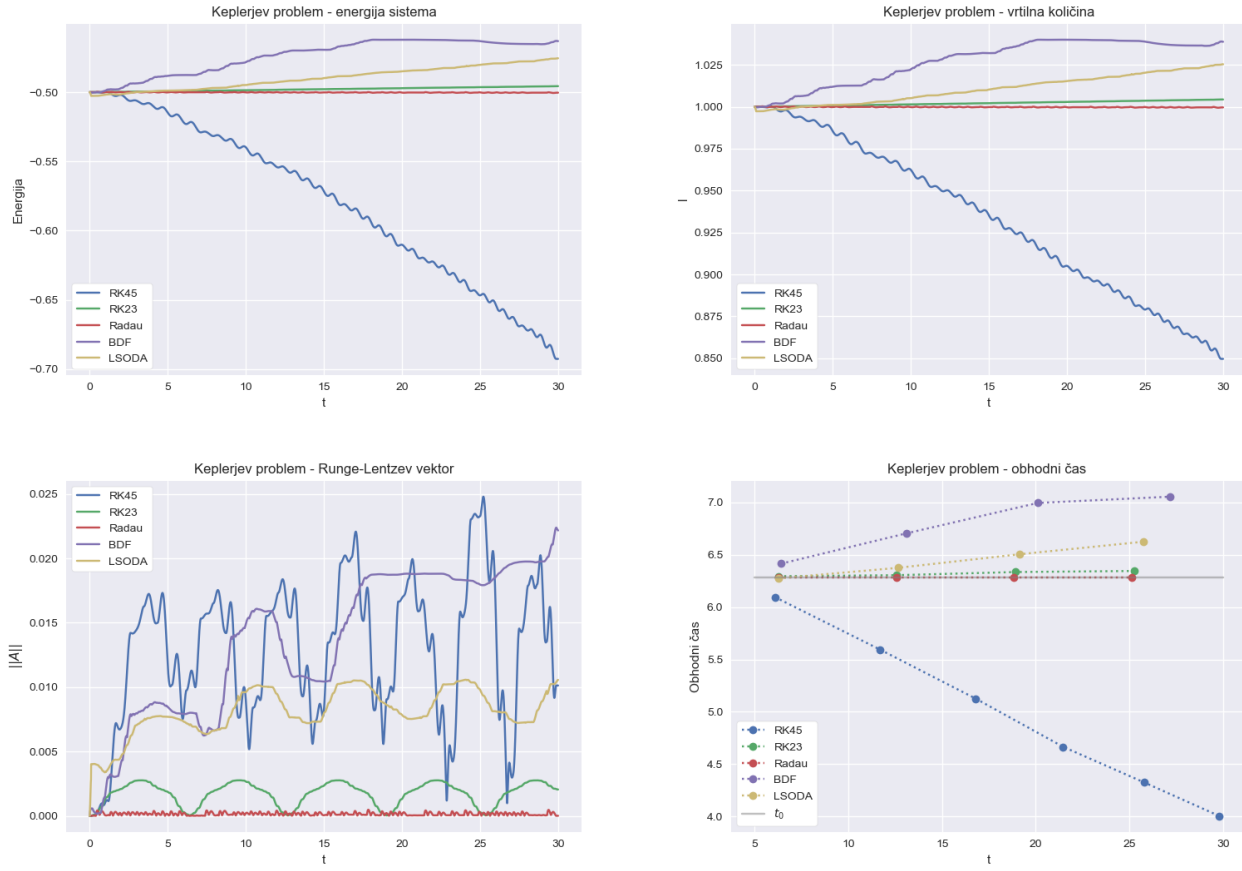


Slika 2: Razdalja med planetom in soncem.

Večina integratorjev vseskozi 'leze' k bodisi preveliki krožnici, bodisi k premajhni. Vsaj na oko se zdi, da se razdalja približno linearno spreminja, na to premico pa so modulirane še neke oscilacije, ki bi jih sam pojasnil takole; ko se integrator 'zmoti', pristane v nestabilni legi in zato nekako zaniha nazaj proti stabilni krožnici.

Očitno se je najboljša izkazala metoda *Radau*, ki je praktično popolnoma ohranila razdaljo do sonca. Zanimivo je, da se je metoda Runge-Kutta tretjega reda odrezala boljše, kot enaka metoda petega reda. Verjetno, pa bi se dalo tudi slab odziv *RK45* popraviti z ročnim določanjem parametrov integracije (največji korak, največje dovoljeno odstopanje, ipd. ). To razliko tako pripisujem ne povsem analogni implementaciji v knjižnici.

Izkaže se, da ima tak sistem poleg razdalje do sonca še kar nekaj ohranitvenih količin. Ohranjajo se tako energija,  $z$ -komponenta vrtilne količine, Laplace-Runge-Lenzev vektor in pa seveda obhodni čas. Spet si lahko pogledamo, kako uspešni so različni integratorji pri ohranjanju teh količin.



Slika 3: Ohranitvene količine pri krožnem gibanju.

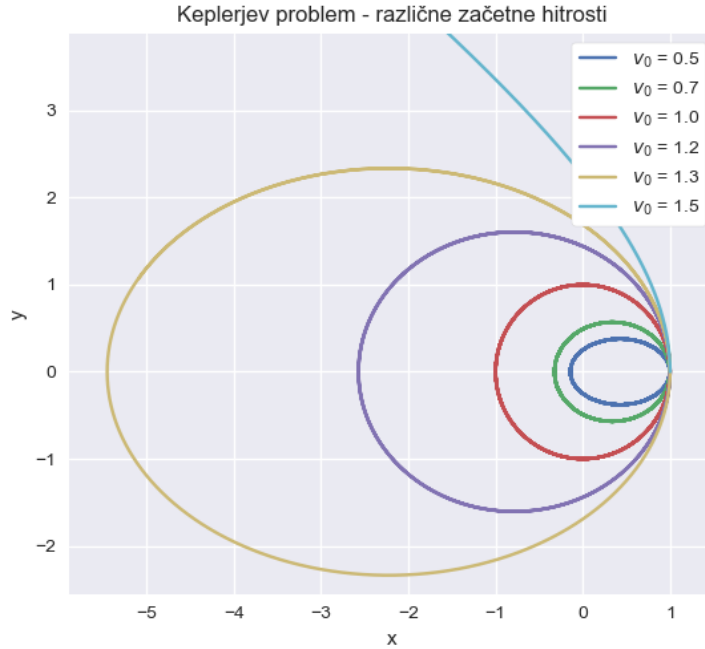
Vsi grafi nam razkrivajo pretežno enako zgodbo, saj sta vse količine najboljše ohranila integratorja *Radau* in *RK23*. Spet nas zmoti izrazito slabše obnašanje metode *RK45* - očitna žagasta modulacija pri odvisnosti energije in vrtilne količine nam da misliti, da je morda problem v prevelikih časovnih korakih integratorja, saj se zdi, kot da so le-ti tako veliki, da se na vsakem koraku integrator zmoti.

Na podlagi zaključkov pridobljenih s teh grafov, bom v nadaljnjem računanju uporabljal metodo *Radau*. V naslednjem razdelku si pogledjmo, kako se spremeni odziv sistema, če spreminjamo začetni pogoj za velikost vektorja hitrosti.

## 1.4 Različne hitrosti planeta

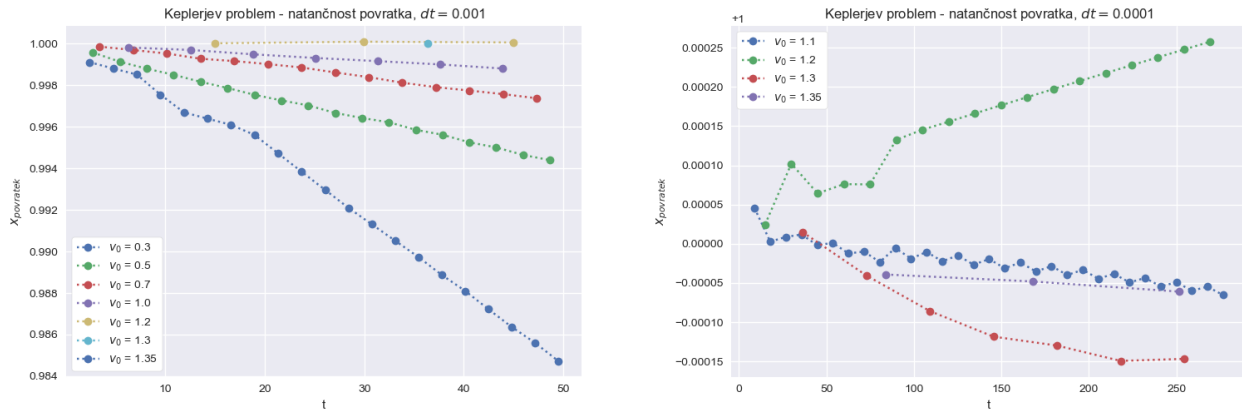
Ko je bila začetna hitrost planeta enaka 1, je planet krožil okoli sonca, če pa hitrost povečujemo, nam je nekako intuitivno jasno, da bo na neki točki hitrost presegla ubežno in planet ne bo več vezan na sonce. Izkaže se, da lahko glede na začetno hitrost kategoriziramo naslednje režime:

- $v_0 > \sqrt{2}$  : hiperbola
- $v_0 = \sqrt{2}$  : parabola
- $0 < v_0 < \sqrt{2}$  : elipsa, pri  $v_0 = 1$  krožnica



Slika 4: Orbite pri različnih začetnih hitrostih. Sonce je postavljeno v izhodišče sistema.

Integratorjeve rešitve se vsaj na oko dobro ujemajo z napovedanimi. Podrobneje pa si lahko pogledamo, kaj se dogaja v okolici točke  $(1, 0)$ . Predvsem nas zanima, kako točno se po vsakem obhodu planet vrne nazaj v to isto točko.



Slika 5: Natančnost povratka pri različnih začetnih hitrostih.

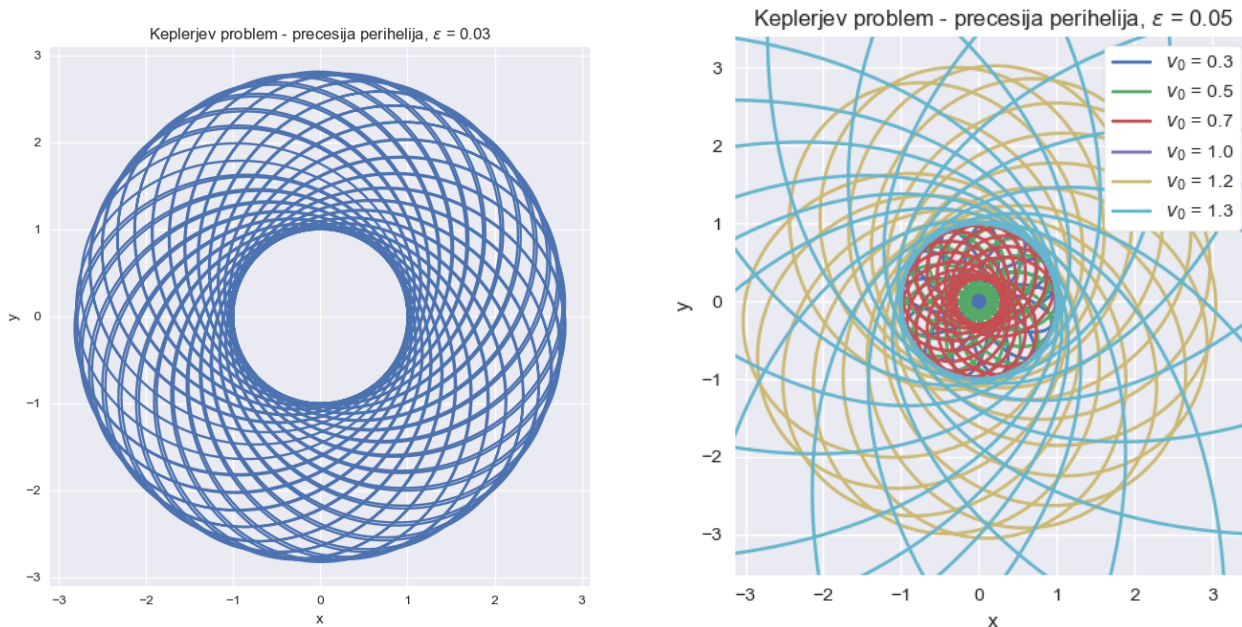
Prikazana sta dva grafa - levi z večjim razponom začetnih hitrosti in desni z manjšim. Opazimo lahko očiten trend, da ima integrator vse več težav pri točnih povratkih, ko zmanjšujemo hitrost. To bi lahko pojasnili z argumentom, da se takšne orbite bolj približajo izhodišču, kjer sam potencial divergira in zato pride do numeričnih napak.

Bolj nenavadna pa je slika na desni, ki prikazuje natančnost povratka za hitrosti večje od 1. Pri hitrostih 1.1 in 1.2 lahko na začetku opazimo razmeroma nenavadno obnašanje pri prvih nekaj obhodih, potem pa se trend nekako stabilizira pri obeh. Pravtako pa je nenavadna smer in velikost trenda - Le pri hitrosti 1.2 se razdalja povečuje,

obenem pa tudi ni vidnega nobenega vzorca, zakaj imamo pri kakšni hitrosti večja odstopanja. Možna razlaga bi bila, da je odstopanje po prvem obhodu zelo majhno in o smeri odloča neka arbitrarna lastnost metode - torej, da ne gre za posledico kakšne 'fizikalne' lastnosti sistema.

## 1.5 Precesija perihelija

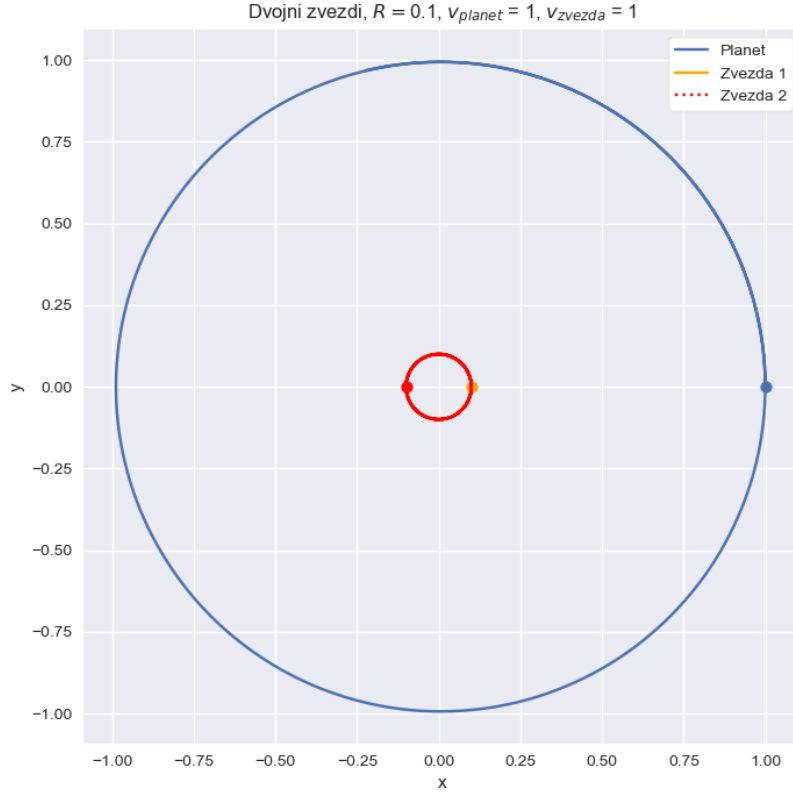
V dosednji obravnavi smo imeli opravka s potencialom, za katerega je veljalo  $V \propto r^{-1}$ . V kolikor pa potenca ni točno enaka  $-1$ , pač pa se za nek  $\epsilon$  razlikuje, tako da velja  $V \propto r^{-1+\epsilon}$ , pa se izkaže, da dobimo nekakšno precesijo orbit - planetu se orbita med vsakim prehodom nekoliko zamakne, kot da bi nekoliko "prehitevala". Temu pojavu pravimo precesija perihelija.



Slika 6: Precesija perihelija pri različnih začetnih hitrostih.

## 2 Dvojne zvezde

Obravnavajmo sistem, v katerem na sredini okoli izhodišča krožita dve sonci po isti orbiti. Sonci sta med seboj ves čas oddaljeni za  $2R$ , kjer  $R$  predstavlja radij kroženja. Okoli njiju pa se giba še planet, ki je na začetku postavljen v točko  $(1, 0)$ . Ta planet seveda čuti tako privlak prvega, kot tudi drugega sonca. V primeru, da razdalja med soncema bistveno manjša od razdalje do planeta, pa ju bo planet efektivno občutil kot eno veliko sonce, ki se nahaja v izhodišču. To predstavlja slika (17). Planet se v takem sistemu obnaša zelo podobno, kot smo si pogledali v prejšnjem razdelku - a le za dovolj velike hitrosti - ko se bo orbita preveč približala soncema, ne bo več veljalo, da je  $R \ll r$ .



Slika 7: Kroženje okoli sistema dvojnih zvezd.

Za reševanje takšnega sistema spet postopamo kot pri prejšnji nalogi. Zapišemo gibalno enačbo, ki je diferencialna enačba drugega reda in jo prevedemo na dve enačbi prvega reda. Ker je problem ravninski ponovno dobimo 4 diferencialne enačbe za 4 spremenljivke, ki jih lahko zložimo v vektor

$$\dot{\vec{z}} := \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

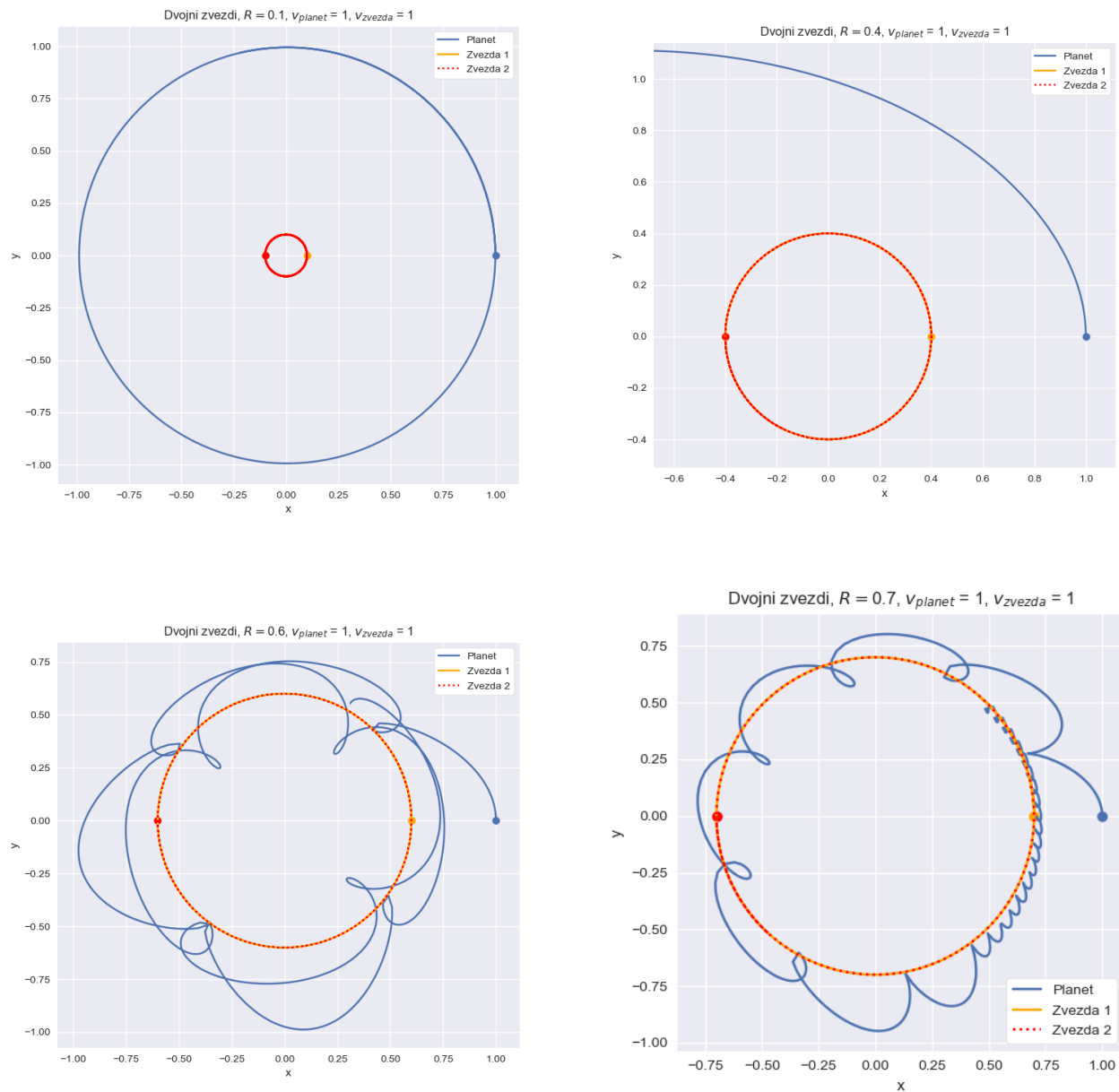
kjer sta

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2} \frac{(x_P - x_{Z1})}{((x_P - x_{Z1})^2 + (y_P - y_{Z1})^2)^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{(x_P - x_{Z2})}{((x_P - x_{Z1})^2 + (y_P - y_{Z2})^2)^{3/2}} \\ \dot{v} &= \frac{1}{2} \frac{(y_P - y_{Z1})}{((x_P - x_{Z1})^2 + (y_P - y_{Z1})^2)^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{(y_P - y_{Z2})}{((x_P - x_{Z1})^2 + (y_P - y_{Z2})^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Z  $x_P$  in  $y_P$  smo označili položaj planeta,  $x_{Z1}$  in  $y_{Z1}$  ter  $x_{Z2}$  in  $y_{Z2}$  pa položaja sonc, za kateri smo predpostavili da se vseskozi gibata po krožnici.

Sedaj razpolagamo z dvema prostima parametroma ( $r$  in  $v_Z$  - hitrost sonc) in prosto začetno hitrostjo planeta  $v_0$ . Tak sistem je težko sistematično analizirati, zato bomo zanimive rešitve iskali nekoliko po intuiciji.

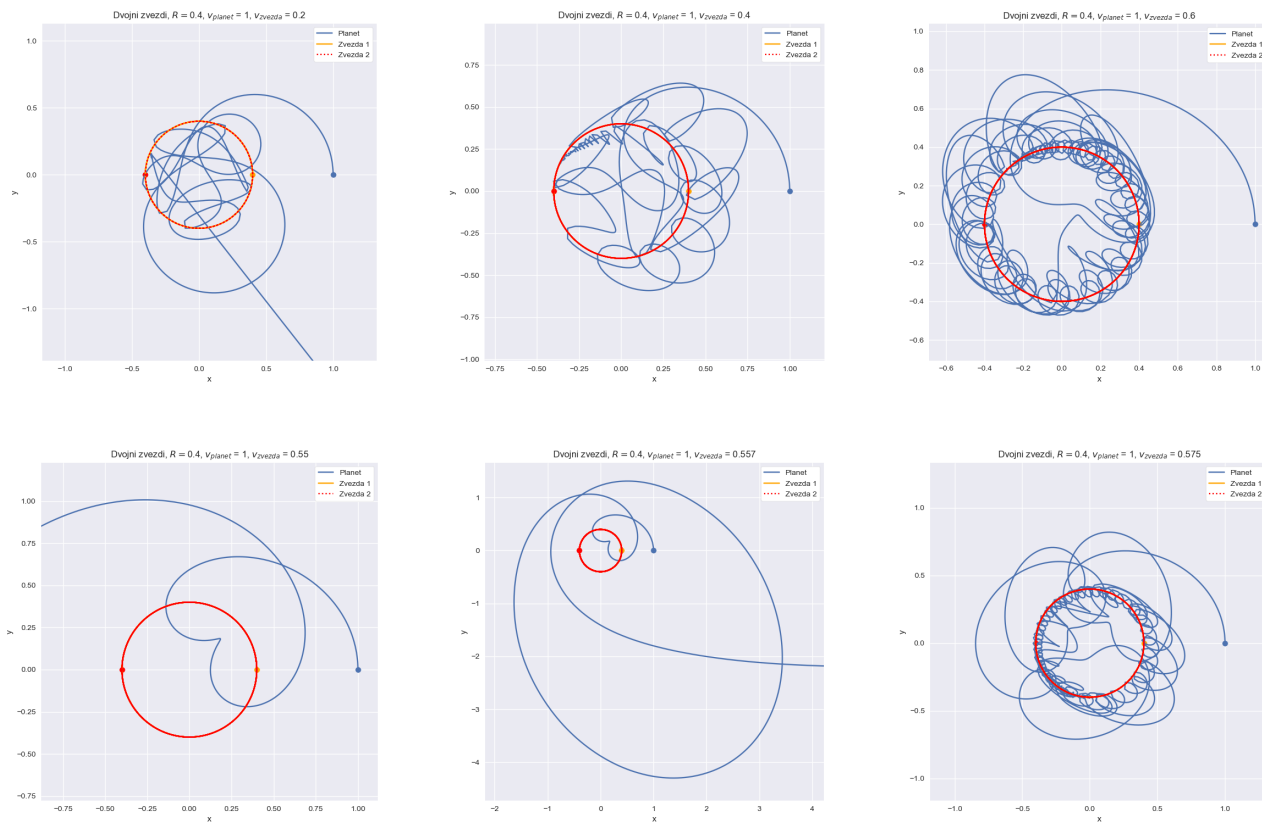




Slika 8: Orbite pri različnih  $R$ .

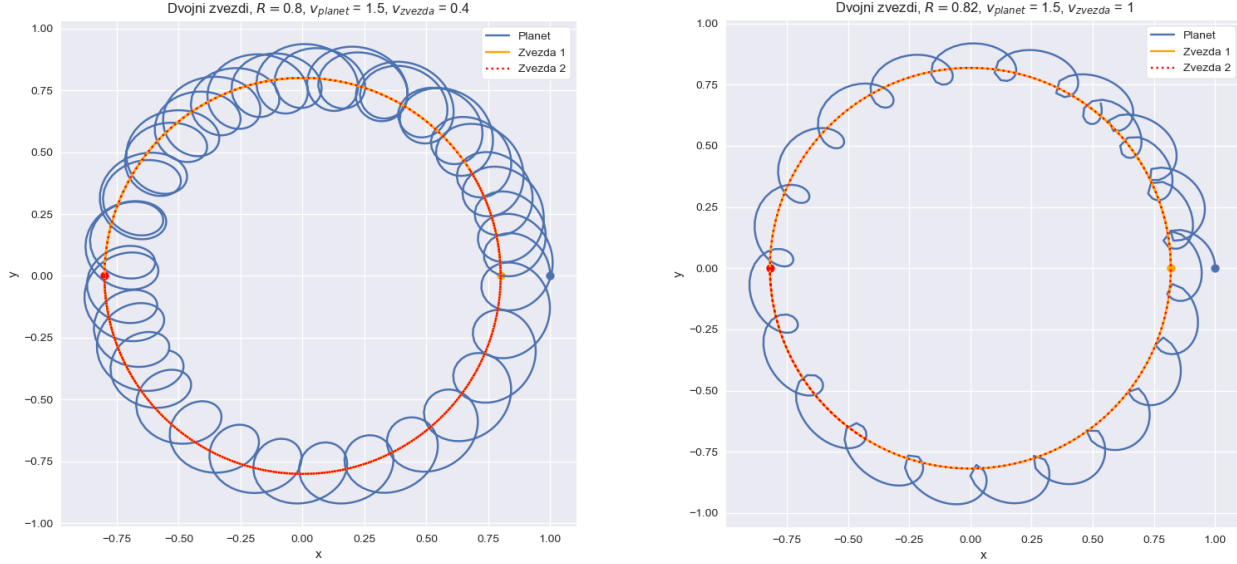
Velikost radija kroženja bistveno vpliva na obliko orbite sistema. Prikazanih je nekaj različnih scenarijev:

- planet kroži ( $R = 0.1$ )
- planet se "izstreli" iz orbite ( $R = 0.4$ )
- Planet se veže na orbito sonc in oscilira okoli nje. V limit lahko tudi trči v kakšno izmed sonc. ( $R = 0.6$  in  $R = 0.7$ )



Slika 9: Orbite pri različnih obodnih hitrostih dvojnih zvezd.

Orbite sistema hitro postanejo zelo nepregledne in na videz brez kakšne periodičnosti. Spodnje tri slike ponazarjajo kaotičnost sistema, saj so prikazane pri zelo podobnih začetnih pogojih, odziv pa se hitro bistveno spremeni. Zanimivo je tudi, da dobimo orbite, kjer planet oriše obliko srca.



Slika 10: Primera dveh navidez periodičnih orbit, ki sta naloženi okoli orbite sonca.

### 3 Mimobežna zvezda

Tretja naloga je zelo podobna prvi, s tem da ji dodamo še dodaten zaplet. Spet imamo sistem vezanega planeta in sonca, nato pa mimo prileti še ena zvezda enake mase kot je sonce sistema. Nalogo bomo poenostavili na način, da bomo v naprej fiksirali položaja obeh zvezd - ena bo ostala v izhodišču, mimobežna pa se bo gibala po premici. Fiksirajmo še nekaj količin, da bo problem enostavnejši za analizo.

- Položaj mimobežne zvezde ob  $t = 0$  :  $(-10, 1.5)$ .
- Velikost vektorja hitrosti mimobežne zvezde in planeta sta enaka :  $v_M = v_0$ .
- Položaj planeta ob  $t = 0$  je vezan na krožnico z  $R = 1$ , variiramo le začetni kot.

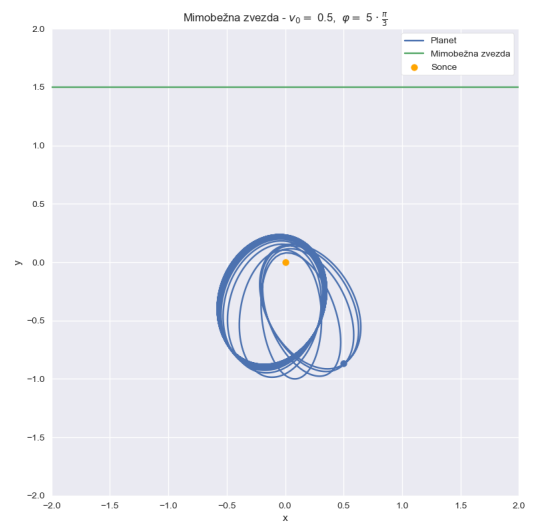
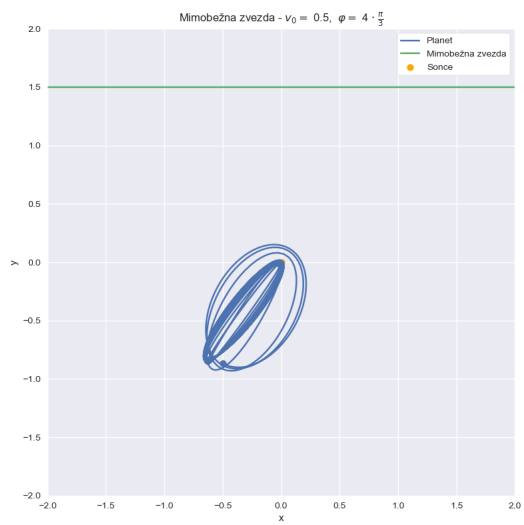
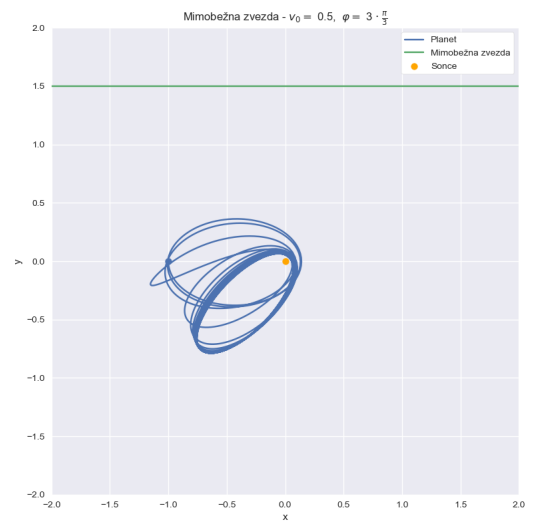
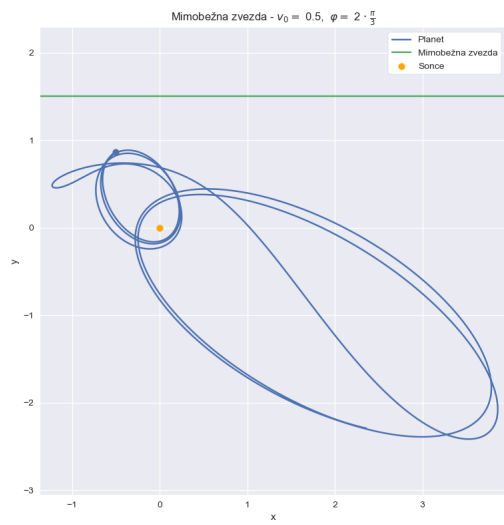
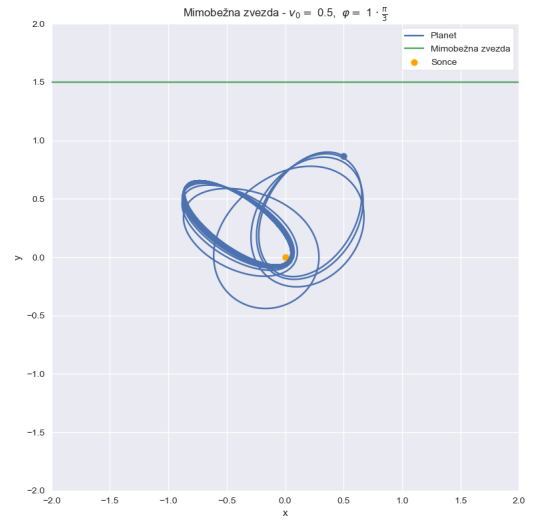
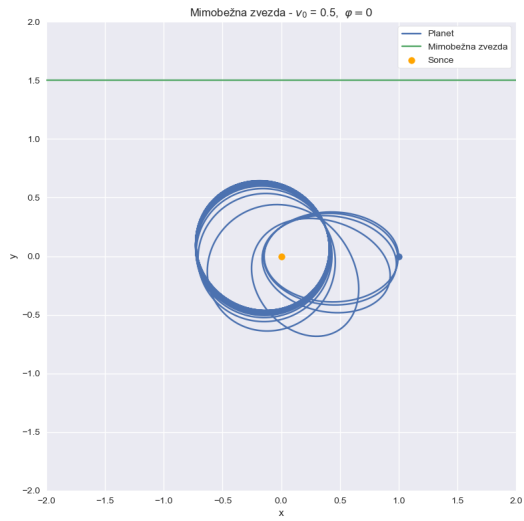
Podobno kot pri prvih nalogah spet zapišemo sistem diferencialnih enačb

$$\dot{\vec{z}} := \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

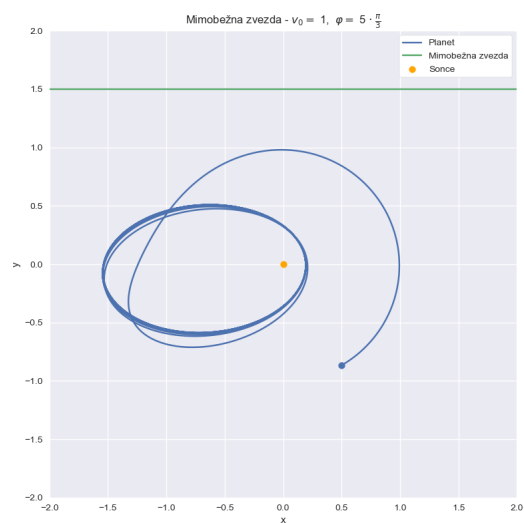
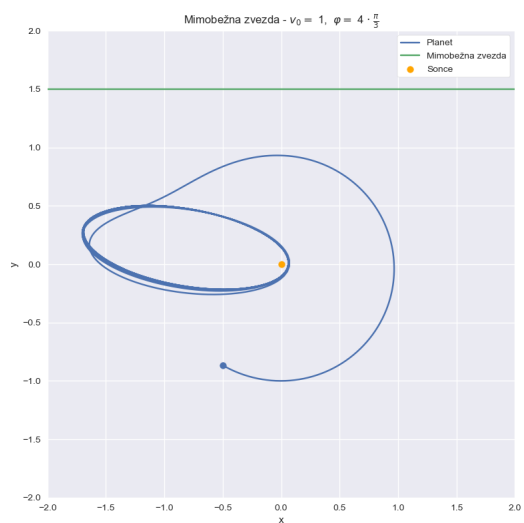
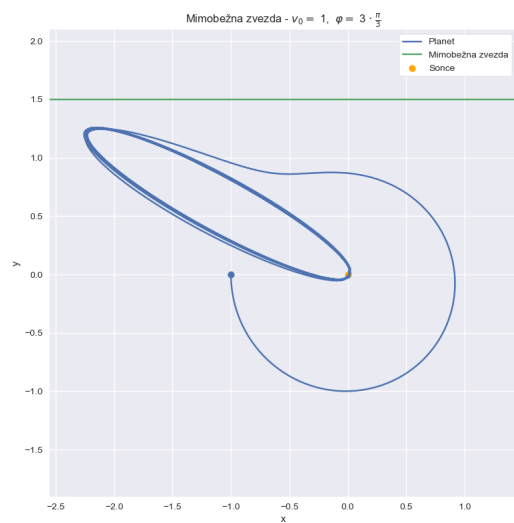
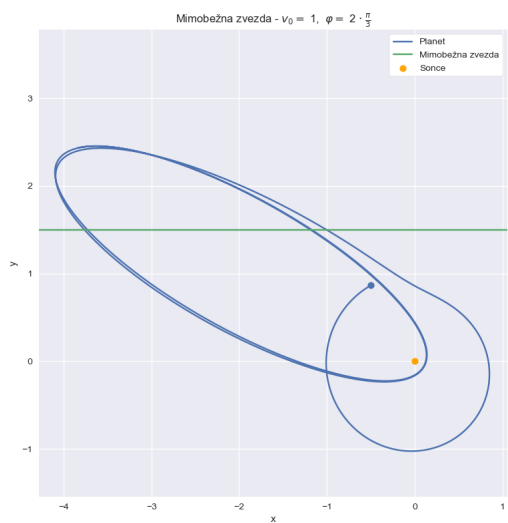
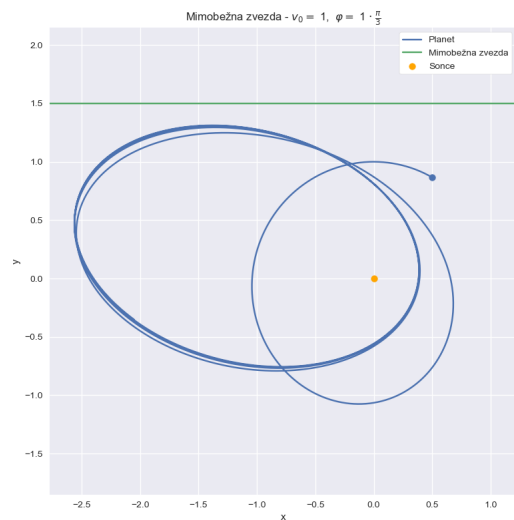
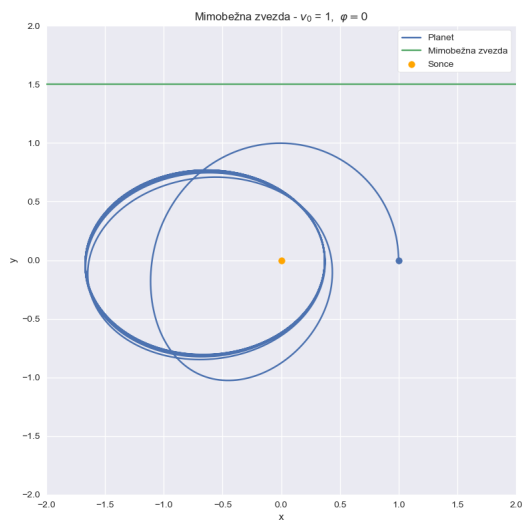
kjer sta

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{x_P}{(x_P^2 + y_P^2)^{3/2}} - \frac{(x_P - x_Z)}{((x_P - x_Z)^2 + (y_P - y_Z)^2)^{3/2}} \\ \dot{v} &= -\frac{y_P}{(x_P^2 + y_P^2)^{3/2}} - \frac{(y_P - y_Z)}{((x_P - x_Z)^2 + (y_P - y_Z)^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

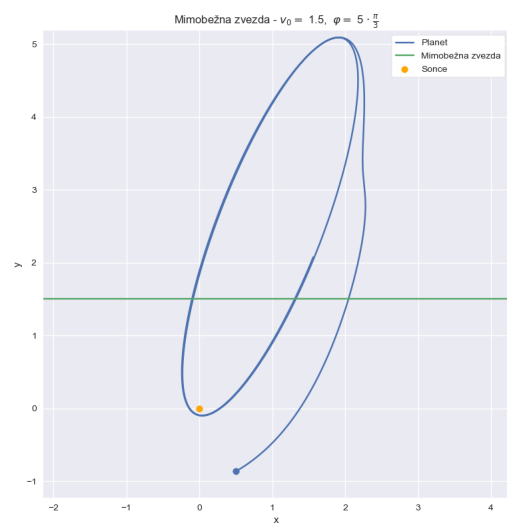
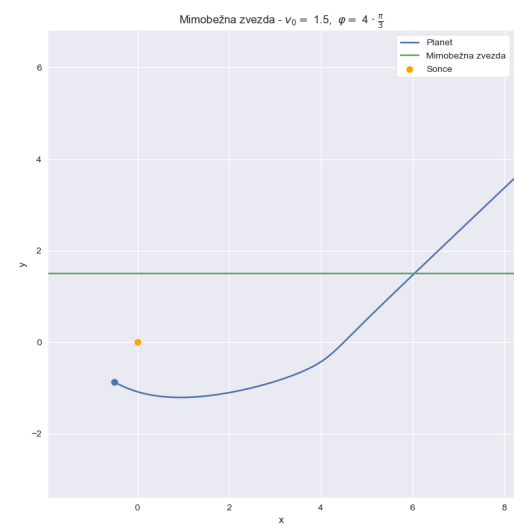
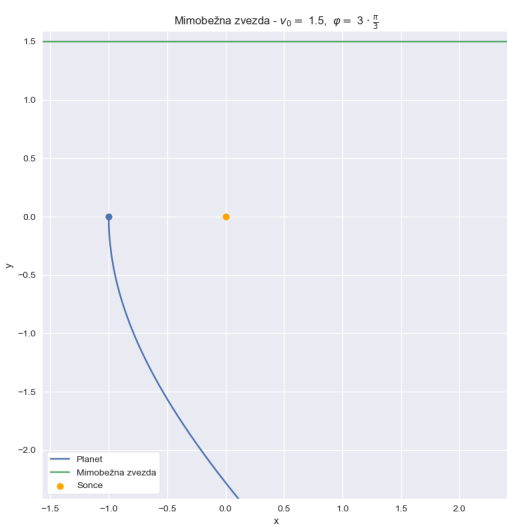
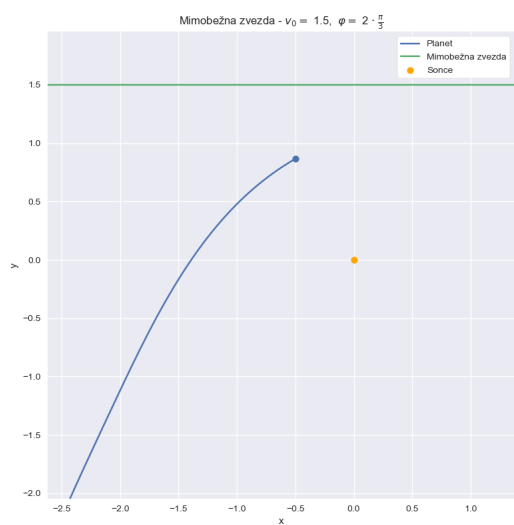
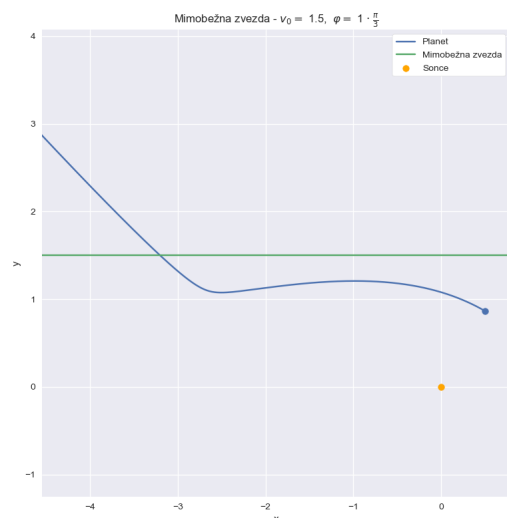
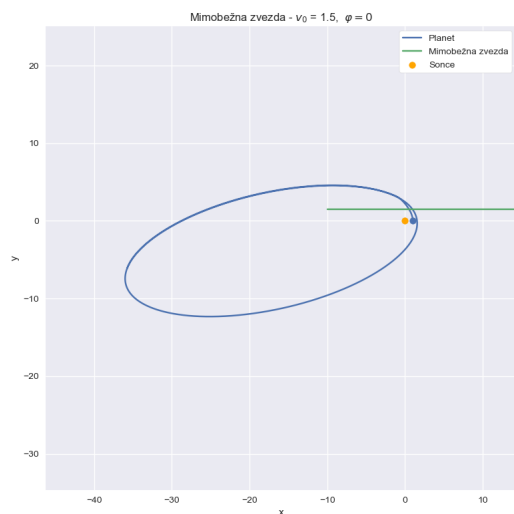
Z  $x_P$  in  $y_P$  smo označili položaj planeta,  $x_Z$  in  $y_Z$  pa položaj mimobežnega sonca.



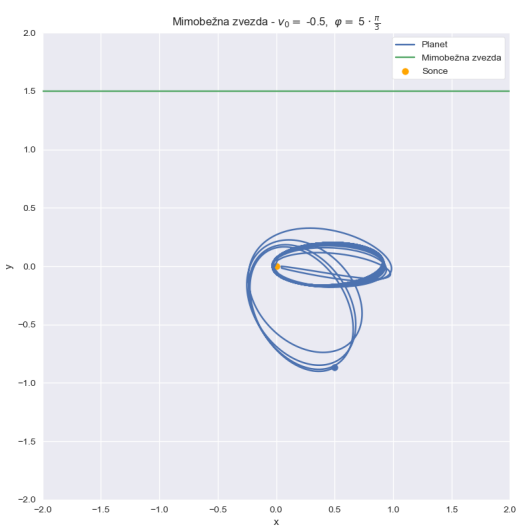
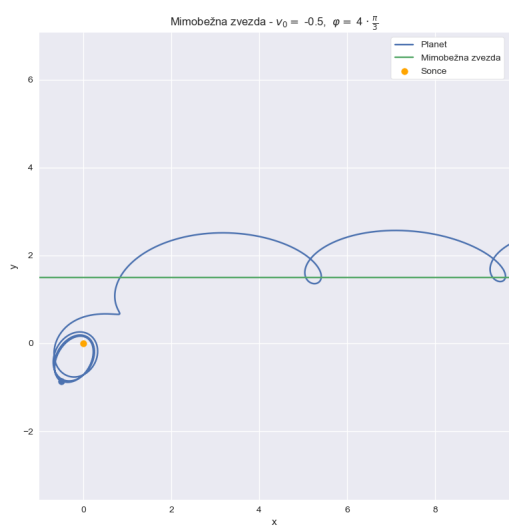
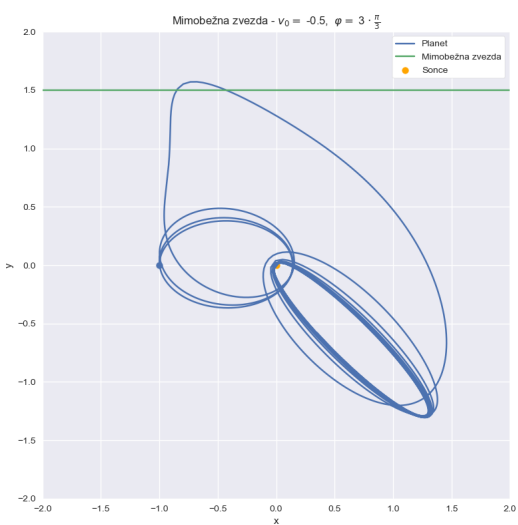
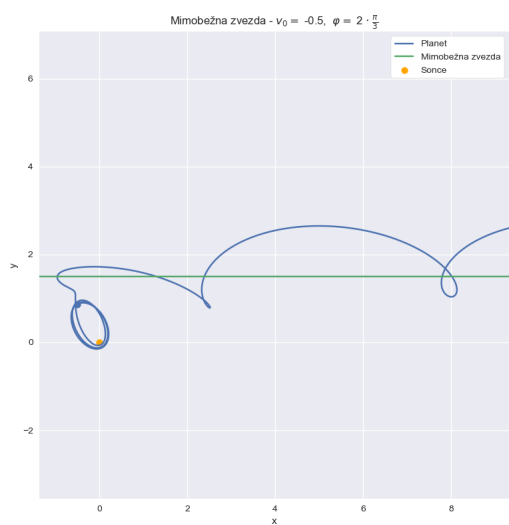
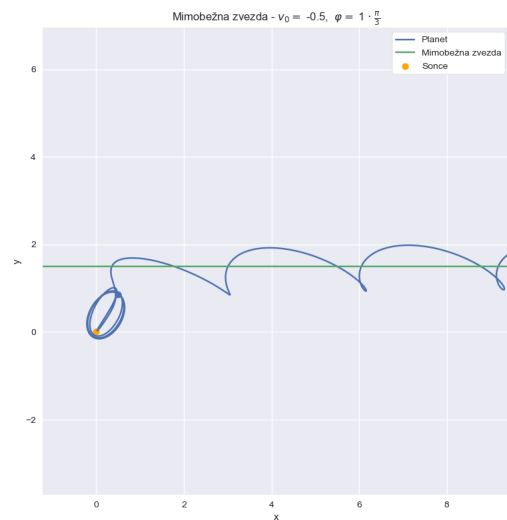
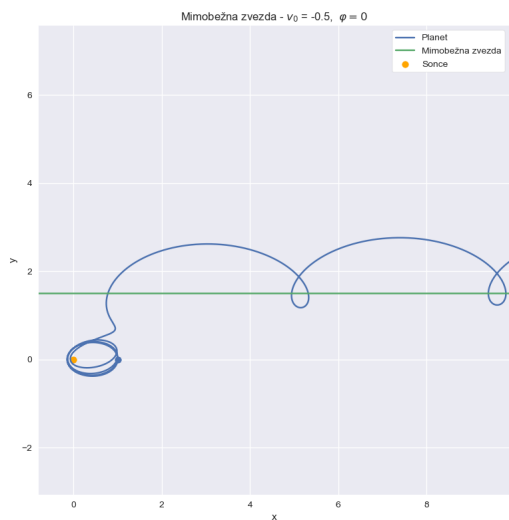
Slika 11: Orbite pri različnih začetnih položajih in  $v_0 = 0.5$ .



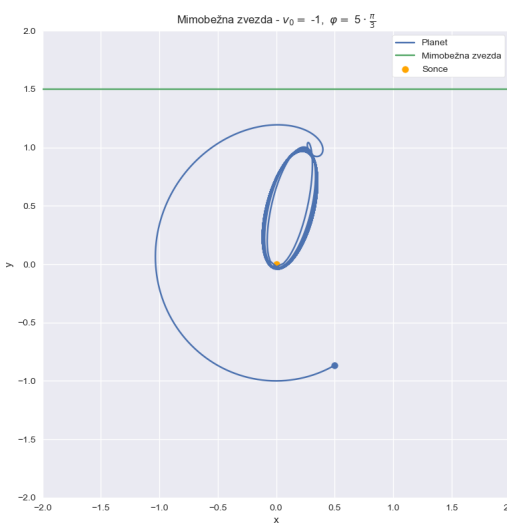
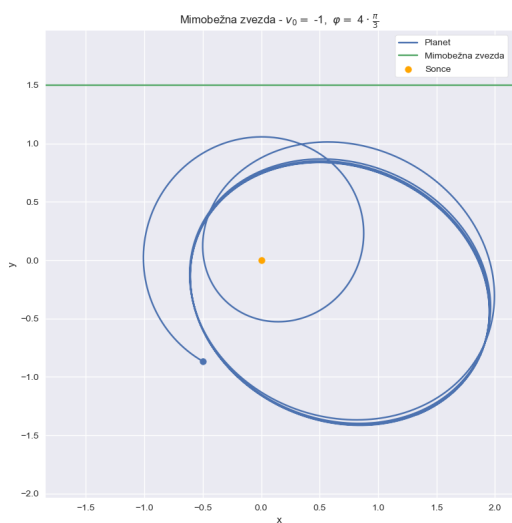
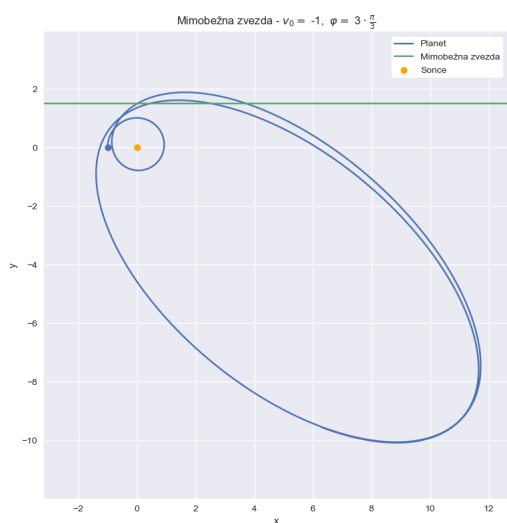
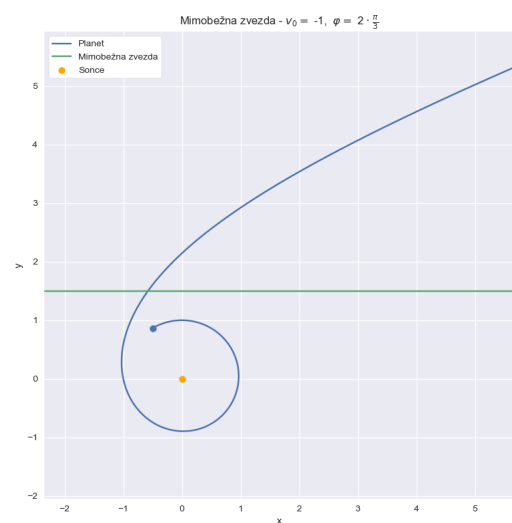
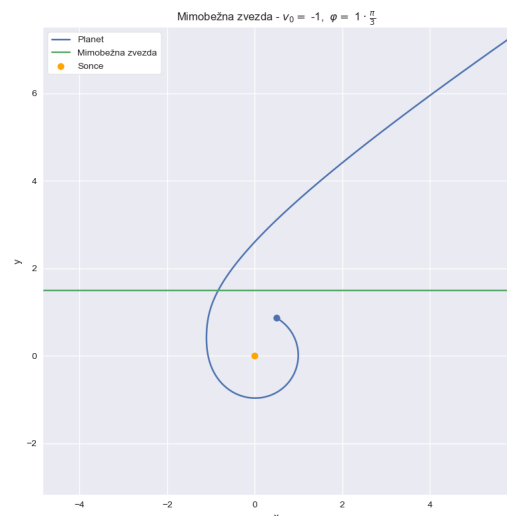
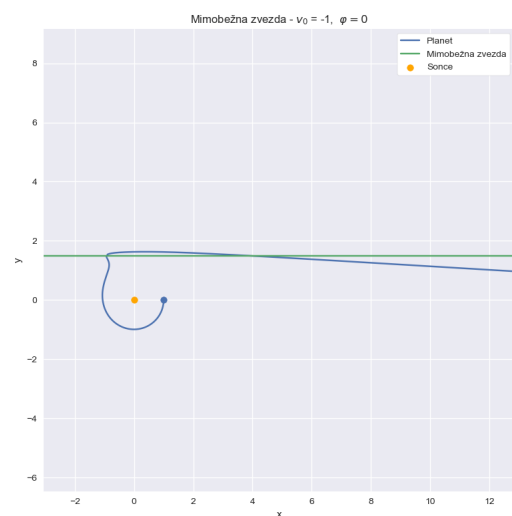
Slika 12: Orbite pri različnih začetnih položajih in  $v_0 = 1$ .



Slika 13: Orbite pri različnih začetnih položajih in  $v_0 = 1.5$ .

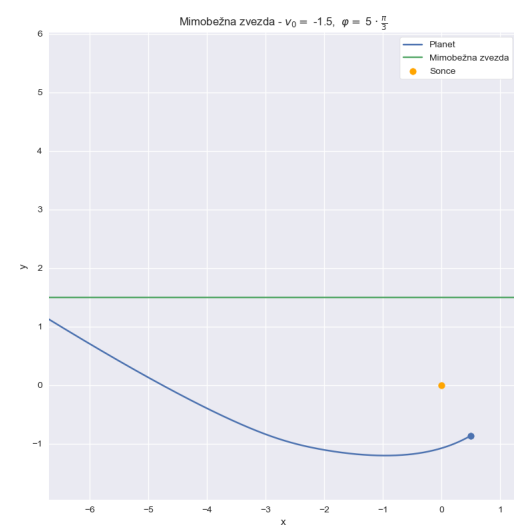
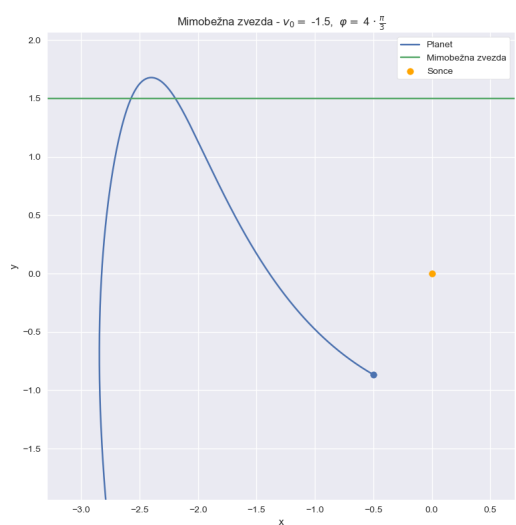
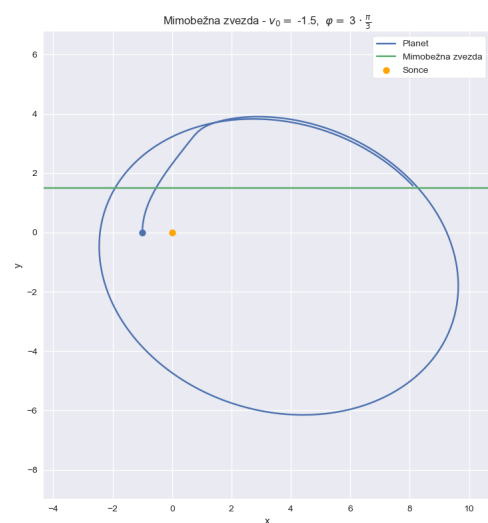
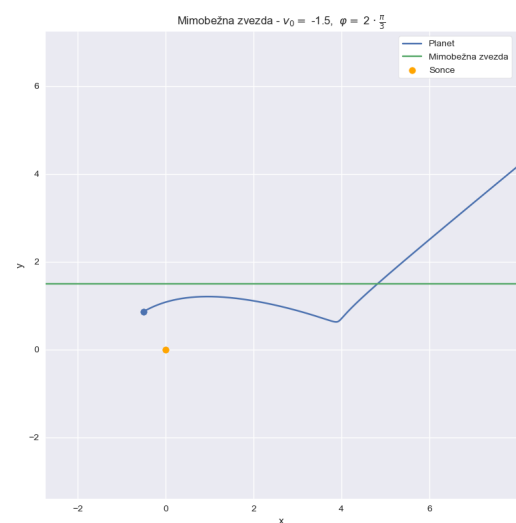
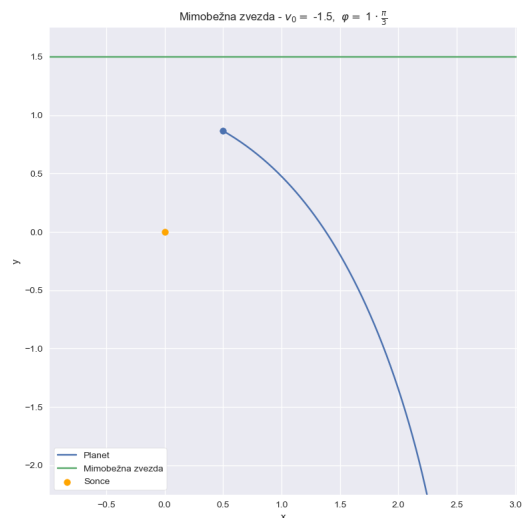
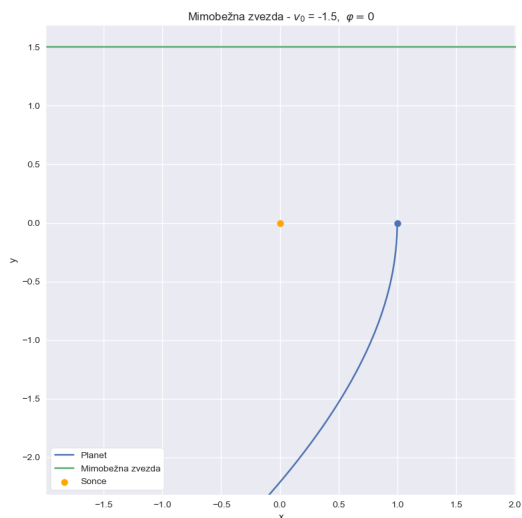


Slika 14: Orbite pri različnih začetnih položajih in  $v_0 = -0.5$ .



Slika 15: Orbite pri različnih začetnih položajih in  $v_0 = -1$ .





Slika 16: Orbite pri različnih začetnih položajih in  $v_0 = -1.5$ .

Mimobežen planet lahko zmoti sistem na različne načine. Kot je razvidno iz vseh slik, igra ključno vlogo pri

tem prav smer hitrosti planeta in pa njegova začetna lega, medtem ko sama velikost hitrosti ni tako bistvena. Pri pozitivnih hitrostih prehod mimobežne zvezde skoraj vedno rezultira žgolj"v deformacijo orbite planeta. Nekoliko bolj zanimivo postane vse skupaj, ko se pomikamo k višjim hitrostim ( $v_0 = 1.5$ ). Po ugotovitvah iz prve naloge bi pri takšni hitrosti, planet ubežal sončevem potencialu in postal nevezan, a ga v nekaterih primerih uspe mimobežna zvezda ravno dovolj pritegniti k sebi in spremeniti njegovo orbito in s tem smer v katero kaže vektor hitrosti planeta, da le-ta ostane še vedno vezan na sonce. Takšne orbite so tipično v obliki elipse in so razmeroma velike zaradi začetne velikosti vektorja hitrosti planeta. Morda se v teh ugotovitvah skriva neka uporabna vrednost, saj prikaže, kako je mogoče uporabiti mimobežno telo za vzpostavitev sistema, ki ga drugače morda ne bi mogli - recimo če bi želeli neko telo izstreliti z  $R = 1$  s hitrostjo  $v_0 = 1.5$ .

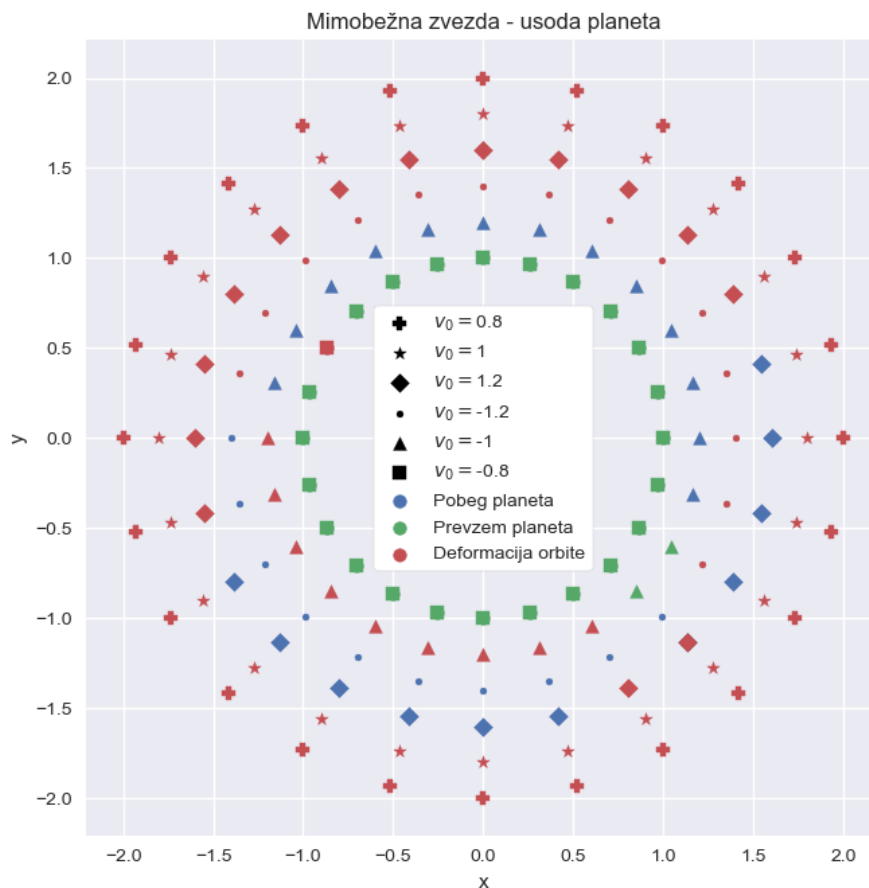
Če se planet giba v nasprotno smer, to je v matematično negativno, dobimo bolj pester nabor končnih scenarijev, saj je pri nižjih hitrosti mogoče, da planet prevzame mimobežna zvezda. V tem primeru dobimo tipične zanke okoli trajektorije mimobežne zvezde. Še vedno pa ostaneta možna tudi oba druga scenarija, ki smo jih prepoznali že prej. Zanimivo je tudi, da je lahko sedaj že hitrost  $v_0 = 1$  ustrezna za pobeg planeta. Tudi to se zdi uporabno znanje, če bi želeli kakšno raketo poslati iz našega osončja.

### 3.1 Usoda planeta

Kot smo prepoznali v prejšnjem razdelku, lahko ločimo tri končne scenarije planeta:

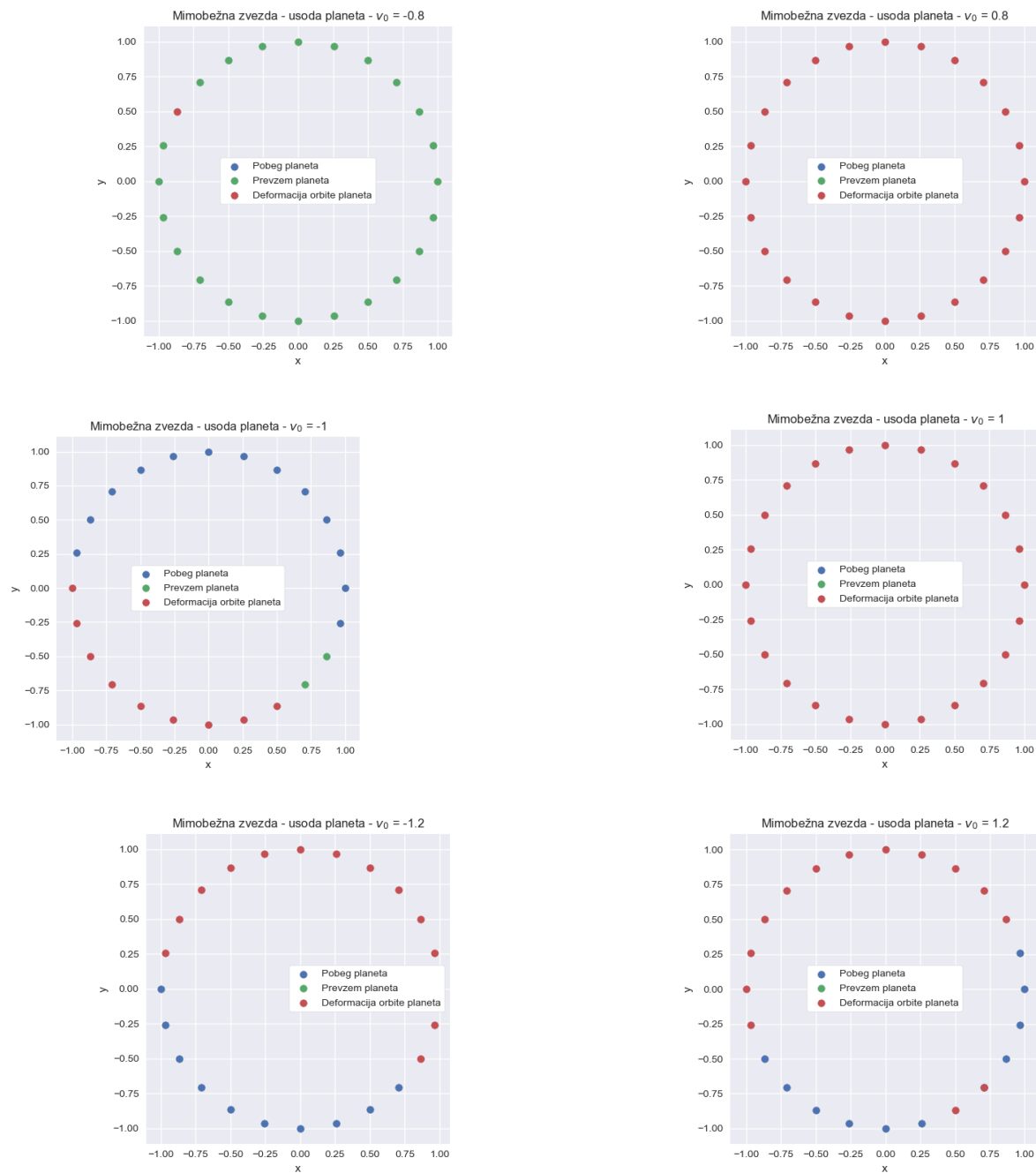
- Ostane vezan na sonce.
- Pobegne vezan na mimobežno zvezdo.
- Povsem pobegne.

Z analizo trajektorij in energije planeta lahko klasificiramo, v katerem scenariju se planet nahaja. To prikazuje tudi naslednja slika.



Slika 17: Usoda planeta pri različnih hitrostih in začetnih legah.

Ker slika ni najbolj pregledna, prilagam še krožne diagrame za posamezne hitrosti.



Slika 18: Usoda planeta pri različnih hitrostih in začetnih legah.

Glede na malce nepregleden grafičen prikaz ugotavljam, da bi bil morda bolj nazoren fazni diagram, za katerega pa mi je žal zmanjkalo časa.