Digitale Signalverarbeitung WS 2021/22 – 2. Aufgabe

Assignment 2 – Fourier-Transformation, Linearität und Abtastung

Gruppennummer 21
Simon Primetzhofer 11942035
Kaan Baylan 11910231

1. Aufgabe – Fourier-Transformation

a) Anmerkung: Es soll bewiesen werden das folgende Gleichung stimmt:

$$x(t) = \hat{X} \cos(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(f) = \frac{\hat{X}}{2}\delta(f-f_0) + \frac{\hat{X}}{2}\delta(f+f_0)$$

1. Eulersche Regel

$$\cos(2\pi k f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}\right)$$

$$x(t) = \hat{X} \cos(2\pi f_0 t) = \frac{\hat{X}}{2}\left(e^{2\pi f_0 t} + e^{-2\pi f_0 t}\right)$$

2. Fourier-Transformation

$$x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(f - f_c)$$

$$\frac{\hat{X}}{2}\left(e^{2\pi f_0 t} + e^{-2\pi f_0 t}\right) =$$

$$\frac{\hat{X}}{2} e^{2\pi f_0 t} + \frac{\hat{X}}{2} e^{-2\pi f_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\hat{X}}{2}\delta(f-f_0) + \frac{\hat{X}}{2}\delta(f+f_0) = X(f)$$

$= \checkmark$

2. Aufgabe – Analoges LTI-System

a) Anmerkung: Es sei die Abkürzung LTI zu beschreiben und wie man ein System auf diese Eigenschaften überprüfen kann.

LTI = Linear time invariant system

Ein System erfüllt die LTI-Eigenschaften, wenn es gleichzeitig linear und zeitinvariant ist. Ein lineares System ist dann ein solches, wenn durch ein Eingangssignal mit der Struktur

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

Die Reaktion des Systems mit folgender Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Das bedeutet, dass lediglich die Funktionen x1 und x2 maßgeblich sind und dazu multiplizierte Faktoren gleich bleiben (also das Ergebnis durch die Faktoren sich linear anpasst).

Digitale Signalverarbeitung WS 2021/22 – 2. Aufgabe

Assignment 2 – Fourier-Transformation, Linearität und Abtastung

Gruppennummer 21
Simon Primetzhofer 11942035
Kaan Baylan 11910231

Zeitinvarianz besagt, dass die zeitliche Verschiebung des Eingangssignal eine genau so große zeitliche Verschiebung des Ausgangssignals verursacht. Somit ändern zeitinvariante Systeme ihr Verhalten über die Zeit nicht.

b) Anmerkung: Es seien verschiedene Systeme auf Linearität und Zeitinvarianz zu überprüfen.

i) $y(t) = [x(t)]^2$

Linearität:

$$y_1(t) = [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]^2$$
$$= \alpha x_1(t)^2 + 2\alpha x_1(t)\beta x_2(t) + \beta x_2(t)^2$$
$$y_2(t) = \alpha [x_1(t)]^2 + \beta [x_2(t)]^2$$

$y_1 \neq y_2$ und daher nicht linear

Zeitinvarianz:

$$y_1(t-T) = y(t-T) = [x(t-T)]^2$$
$$y_2(t-T) = f(x(t-T)) = [x(t-T)]^2$$

$\Rightarrow$ ist zeitinvariant

ii) $y(t) = \int_{\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

Linearität:

$$y_1(t) = \alpha \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, d\tau + \beta \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\, d\tau$$
$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha x_1(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{t} \beta x_2(\tau)\, d\tau \quad / \text{Faktoren aus Integral rausziehen}$$
$$y_2(t) = \alpha \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, d\tau + \beta \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\, d\tau \Rightarrow y_1 = y_2 \text{ und somit linear}$$

Zeitinvarianz:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t-T) &= \int_{-\infty}^{t-T} x(\tau)\, d\tau \\ y_2(t-T) &= f(x(t-T)) = \int_{-\infty}^{t-T} x(\tau)\, d\tau \end{aligned}\right\} y_1 = y_2 \Rightarrow \text{ist zeitinvariant}$$

Digitale Signalverarbeitung WS 2021/22 – 2. Aufgabe

Assignment 2 – Fourier-Transformation, Linearität und Abtastung

Gruppennummer 21
Simon Primetzhofer 11942035
Kaan Baylan 11910231

iii) $y(t) = \cos(\omega_c t)\, x(t)$

Linearität:

$$y_1(t) = \cos(\omega_c t) \cdot (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))$$
$$= \cos(\omega_c t)\, \alpha x_1(t) + \cos(\omega_c t)\, \beta x_2(t)$$

$$y_2(t) = \alpha \cos(\omega_c t)\, x_1(t) + \beta \cos(\omega_c t)\, x_2(t)$$

$y_1 = y_2 \Rightarrow$ ist linear

Zeitinvarianz: $y_1(t-T) = \cos(\omega_c (t-T)) \cdot x\ (t-T)$

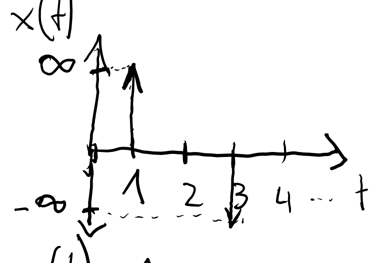
$y_2(t-T) = \cos(\omega_c t) \cdot x(t-T)$

$y_1 \neq y_2 \Rightarrow$ nicht zeitinvariant!

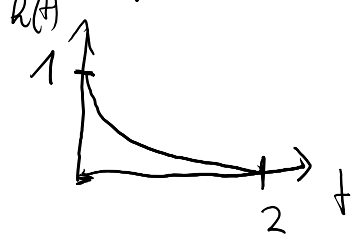
c) Anmerkung: Es sei das Ausgangssignal zu einem gegebenen Eingangssignal und einer gegebenen Impulsantwort des Systems zu skizzieren

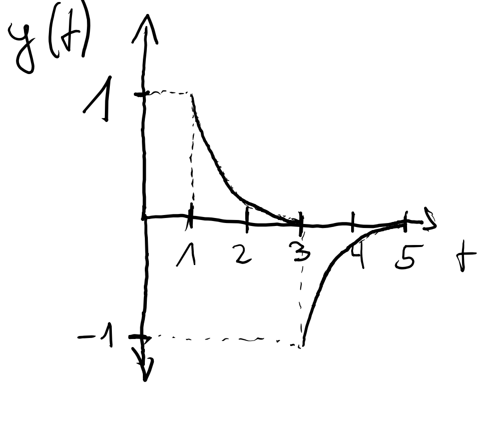
$x(t) = 2\,\delta(t-1) - \delta(t-3)$ $\qquad \delta(t) = \begin{cases} \infty & \dots\ t = 0 \\ 0 & \dots\ t \neq 0 \end{cases}$

Eingang:



Impulsantwort:





Digitale Signalverarbeitung WS 2021/22 – 2. Aufgabe

Assignment 2 – Fourier-Transformation, Linearität und Abtastung

Gruppennummer 21

Simon Primetzhofer 11942035

Kaan Baylan 11910231

3. Aufgabe – Abgetastete Signalfolge

Anmerkung: Es seien zwei positive Werte für f0 zu nennen, die zur Folge x[n] geführt haben könnten

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right), \qquad -\infty < n < \infty,$$

Abbildung 1 Folge x[n]

Die Folge wird durch die Abtastung des folgenden zeitkontinuierlichen Signals bei einer Abtastrate von f_s = 500 Hz erhalten:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t), \qquad -\infty < t < \infty,$$

Abbildung 2 Zeitkontinuierliches Signal x(t)

Setze $x(t) = x(n)$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \quad / \cos^{-1}$$

$$2\pi f_0 t = \frac{\pi}{2} t \quad / : 2\pi \; : t$$

$$f_0 = \frac{1}{4}$$

Wir wissen cos( ) wiederholt sich alle 2π!

Daher ist $f_0 \in \left\{ f_S + \frac{f_S}{4},\ 2f_S + \frac{f_S}{4},\ \ldots,\ n \cdot f_S + \frac{f_S}{4} \right\}$ Hz

$$f_{0_1} = f_S + \frac{f_S}{4} = 500\,Hz + 125\,Hz = \underline{625\,Hz}$$

$$f_{0_2} = 2f_S + \frac{f_S}{4} = 1000\,Hz + 125\,Hz = \underline{1125\,Hz}$$

Digitale Signalverarbeitung WS 2021/22 – 2. Aufgabe

Assignment 2 – Fourier-Transformation, Linearität und Abtastung

Gruppennummer 21
Simon Primetzhofer 11942035
Kaan Baylan 11910231

4. Aufgabe – Spektrum eines abgetasteten Signals

Anmerkung: Es sollen zwei Signale in einem Intervall von {-80 kHz bis 80 kHz] aufgezeichnet werden und beantwortet werden, ob diese rekonstruierbar sind.

$f_{max} = 10\,kHz \quad I = [-80, 80]\,kHz$