Formelsammlung Elektrotechnik

Elektrotechnik:

Ladung: $Q = I \cdot t = C \cdot U$

Ladungsdichte: $\rho = e_0 \cdot n$

Stromdichte: $J = \frac{I}{A}$

Wärmeenergie: $W = U \cdot Q$

ohmsches Gesetz: $U = R \cdot I$

ohmscher Leitwert: $G = \frac{I}{U}$

spezifischer Widerstand: $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$

Leitfähigkeit: $\Upsilon = \frac{1}{\rho}$

Temperaturabhängigkeit Widerstand:

$$R_2 = R_1 \cdot [1 + \alpha_1(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \quad [\alpha] = K^{-1}$$

Energie: $W = U \cdot Q = U \cdot I \cdot t$

Leistung: $P = \frac{W}{t} = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$

$$\Delta P_{\%} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \cdot 100\% \qquad P_V = P_{zu} - P_{ab}$$

Serienschaltung:

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\frac{1}{G_{ges}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3}$$

$$Q_{ges} = Q_1 = Q_2 = Q_3 \rightarrow \frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

Parallelschaltung:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$G_{ges} = G_1 + G_2 + G_3$$

$$Q_{ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \rightarrow C_{ges} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

Umrechnung Spannungs- /Strom-Quelle:

$UQ \rightarrow IQ$: $I_0 = \frac{U_0}{R_i}$ $\qquad$ $IQ \rightarrow UQ$: $U_0 = I_0 \cdot R_i$

Unbelasteter Spannungsteiler:

$$\frac{U_\mu}{U} = \frac{R_\mu}{\Sigma R_U}$$

Belasteter Spannungsteiler:

$$R_{2L} = \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}$$

Querstromverhältnis: $q = \frac{I_q}{I_L} = \frac{R_L}{R_2}$

Stromteiler:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \frac{I_1}{I_{ges}} = \frac{Gegenzweig\ R}{R_{ges\ von\ Zweigen}} = \frac{G_1}{G_{ges\ von\ Zweigen}}$$

Spannungsfehlerschaltung:

$$R = \frac{U - U_{iA}}{I} = \frac{U}{I} - R_{iA} \qquad U_{ia} = I \cdot R_{iA}$$

Stromfehlerschaltung:

$$R = \frac{U}{I - I_{iV}} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_{iV}}} \qquad I_{iV} = \frac{U}{R_{iV}}$$

Brückenschaltung:

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ (wenn Brücke abgeglichen)

Schleifdrahtmessbrücke:

$$R_x = R_N \cdot \frac{l_1}{l_2}$$

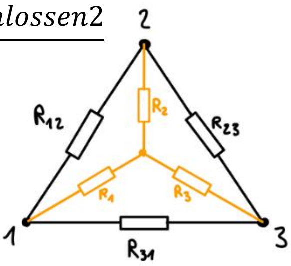
Stern- Dreiecks- Transformation:

Umrechnung von Δ in Stern

$$R = \frac{eingeschlossen1 \cdot eingeschlossen2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Umrechnung von Stern in Δ

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{gegenüberliegender\ R}$$



Ersatzspannungs- und Stromquelle:

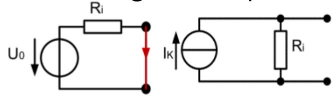
Leerlaufspannung U_0: U_0 berechnen (Spannungsteiler)

Innenwiderstand R_i: (Spannungsquelle kurzschließen)

(Stromquelle durch Leerlauf ersetzen)

Kurzschlussstrom I_K: $I_K = \frac{U}{R_1}$ (manche R ignorieren)

Zusammenhang: $U_0 = R_i \cdot I_K$



Leistung maximal: $P = \frac{(U_0)^2}{4 \cdot R_i}$

Innere Verlustleistung: $P_V = I^2 \cdot R_i$

Formelsammlung Elektrotechnik

Lösungsmethoden bei komplexer Schaltung:

Maschen und Knotensatz:

Kirchhoff 1: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Kirchhoff 2: $U_1 + U_2 + U_3 = 0$ (g. Pfeil → -U)

$m = z - (k - 1) \qquad K = k - 1$

Überlagerungssatz:

Spannungsquelle kurzschließen: $R_i = 0$
Stromquelle durch Leerlauf ersetzen $R_i \to \infty$
Jeweils: 1. Spannungen zeichnen
2.Ströme einzeichnen (gleich gepfeilt)
Wichtig für spätere Vorzeichen!
3.Rechnen

Knotenpotentialanalyse: (mit Leitwert)

1. Knoten beschriften
2. Bezugsknoten wählen ($\varphi_0 = 0V$) nicht in Matrix
3. ggf. Spannungsquelle mit Widerstand tauschen
4. Bekannte potentiale kennzeichnen (Fuß von Pfeil)
5. Matrix aufstellen für alle φ und unbekannte Knoten
6. Auf Ergebnisseite die Ströme eintragen
7. Äquivalentumformung der bekannten φ
8. Matrix berechnen
9. Hilfe: $U = (\varphi_{Herkunft} - \varphi_{Hinkunft})$

Maschenstromanalyse: (mit Widerstand)

1. Baum einzeichnen, sodass keine Stromquelle drin ist und alle Knoten erfasst werden
2. Komplemente sind Zweige zwischen Baum, die Ströme von denen werden in der Matrix aufgestellt (wenn sie unbekannt sind)
3. Komplemente entsprechen auch die Maschen
   Maschenrichtung → Komplementstrom-Richtung
4. Koppelleitwerte: gleichgepfeilt +, gegengepfeilt -
5. Spannungsquellen: gleichgepfeilt -, gegengepfeilt +
6. Stromquellen dann äquivalent umformen
7. Matrix errechnen

Kondensatoraufgabe:

Berechnung $u_c(t)$

1. U_A berechnen
2. R_E berechnen (nach der Veränderung)
   Spannungsquelle kurzschließen
   Kondensator Klemmen sind Bezugspunkte
3. U_E berechnen
4. τ berechnen mit Formel
5. mit großer Formel $u_c(t)$ berechnen

Berechnung $i_c(t)$

1.Formel von oben verwenden
2.$u_c(t)$ ermitteln → siehe oben
3.$i_c(t) = C \cdot (U_A - U_E) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right)$
   (Kettenregel)
4. τ mit Formel ersetzen
5. C rauskürzen

Kondensator:

Kapazität: $C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d}$

Elektrische Feldstärke: $E = \frac{U}{d}$

$$i_c(t) = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

Energie: $dW = \frac{I^2 \cdot t}{C} \cdot dt \qquad W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$

$$u_c(t) = U_E + (U_A - U_E) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit $\tau = R_E \cdot C$

Spule:

Induktivität: $L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot z}$

Feldstärke: $H = \frac{n \cdot I}{z}$

Gesamtfluss: $\psi = n \cdot \Phi = L \cdot I$

$i_L(t) = I_E + (I_A - I_E) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = (I_E - I_A) \cdot R_E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

mit $\tau = \frac{L}{R_E}$

Mechanik:

$P_{mech} = M \cdot \omega = F \cdot r \cdot 2\pi \cdot f$

$A = r^2 \cdot \pi = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

Formelsammlung Elektrotechnik

Einheitentabelle / Präfixe / Mathemerkhilfen

Basisgröße	Basiseinheit	Kurzzeichen	Zeichen
Länge	Meter	m	l
Masse	Kilogramm	kg	m
Zeit	Sekunde	s	t
Elektrische Stromstärke	Ampere	A	I
Temperatur	Kelvin	K	T
Stoffmenge	Mol	Mol	n
Lichtstärke	Candela	cd	I_V
Kraft	Newton	$1\ N = 1\ kg \cdot m \cdot s^{-2} = 1\ V \cdot A \cdot s \cdot m^{-1}$	F
Energie	Joule	$1\ J = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1\ V \cdot A \cdot s = 1 Nm$	W
Leistung	Watt	$1\ W = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} = 1\ V \cdot A$	P
Ladung	Coulomb	$1\ C = 1\ A \cdot s$	Q
Spannung	Volt	$1\ V = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1} = 1\ W \cdot A^{-1}$	U
Widerstand	Ohm	$1\ \Omega = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2} = 1\ V \cdot A^{-1}$	R
Leitwert	Siemens	$1\ S = 1\ kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3 \cdot A^2 = 1\ V^{-1} \cdot A = \Omega^{-1}$	G
Kapazität	Farad	$1\ F = 1\ kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2 = 1\ C \cdot V^{-1} = 1\ As \cdot V^{-1}$	C
Induktivität	Henry	$1\ H = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2} = 1\ Wb \cdot A^{-1} = 1\ Vs \cdot A^{-1}$	L
Magnetischer Fluss	Weber	$1\ Wb = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1} = 1\ V \cdot s = T \cdot m^2$	Φ (ψ)
Induktion (magnetische Flussdichte)	Tesla	$1\ T = 1\ kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1} = 1\ Wb \cdot m^{-2}$	B
Magnetische Feldstärke		$[H] = A \cdot m^{-1}$	H
spezifischer Widerstand		$[\rho] = \Omega \cdot mm^2 \cdot m^{-1}$	ρ „rho“
Leitfähigkeit		$[\Upsilon] = m \cdot \Omega^{-1} \cdot mm$	ϒ
Drehmoment		[M] = Nm	M
Winkelgeschwindigkeit		$[\omega] = rad \cdot s^{-1}$	ω
Frequenz		$[f] = 1/s = s^{-1}$	f

10^{24}	Yotta	Y
10^{21}	Zetta	Z
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^{9}	Giga	G
10^{6}	Mega	M
10^{3}	Kilo	k
10^{2}	Hekto	h
10^{1}	Deka	da

10^{-1}	Dezi	d
10^{-2}	Zenti	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	µ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Piko	p
10^{-15}	Femto	f
10^{-18}	Atto	a
10^{-21}	Zepto	z
10^{-24}	Yokto	Y

Differenztialrechnung:

Produktregel: $f(x) = u \cdot v \;\rightarrow\; f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u}{v} \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

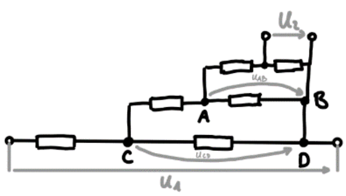
Kettenregel: $f\big(g(x)\big) \;\rightarrow\; f' \cdot (g(x)) \cdot g'(x)$

Potenzgesetze:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	

Mehrfacher Spannungsteiler:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1}{U_{CD}} \cdot \frac{U_{CD}}{U_{AB}} \cdot \frac{U_{AB}}{U_2} \rightarrow \frac{groß}{klein}$$



Formelsammlung Elektrotechnik

Wechselstromtechnik:

Frequenz:

Periodendauer [s]: $T = \frac{1}{f}$

Frequenz [Hz]: $f = \frac{1}{T}$

Kreisfrequenz (für **Sinus**) [$\frac{1}{s}$]: $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$

Spannung:

Effektivwert Spannung [V]: $U_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) \cdot dt}$

Effektivwert **Sinus** Spannung [V]: $U_{eff} = U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$

Augenblickswert **Sinus** Spannung [V]:

$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$

$u(t) = \omega \cdot N \cdot B \cdot l \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Scheitelwert [V]: $U_{max} = Max(|u(t)|)$

Scheitelwert **Sinus**: $\hat{u} = N \cdot B \cdot l \cdot b \cdot \omega$

Gleichrichtwert [V]: $|\bar{u}| = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |u(t)| \cdot dt$

Bedeutet Integrieren in Teilen, negative Teile hochklappen, u(t) anpassen, integrieren

Gleichrichtwert **Sinus** [V]: $|\bar{u}| = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot 2$

Gleichspannungsanteil [V]: $U_= = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot dt$

Stromstärke:

Effektivwert Strom [A]: $I_{eff} = I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) \cdot dt}$

Effektivwert **Sinus** Strom [A]: $I_{eff} = I = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$

Augenblickswert **Sinus** Strom [A]:

$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$

Gleichrichtwert [A]: $|\bar{\imath}| = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |i(t)| \cdot dt$

Gleichrichtwert **Sinus** [A]: $|\bar{\imath}| = \frac{\hat{\imath}}{\pi} \cdot 2$

Gleichstromanteil [A]: $I_= = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot dt$

Leistung:

Effektivwert Leistung [W]: $P_{eff} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \cdot dt$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt = U_{eff} \cdot I_{eff} = \frac{U_{eff}^2}{R} = (I_{eff})^2 \cdot R$$

Faktoren:

Scheitelfaktor = Maß für Spannungsspitzen

Scheitelfaktor: $\sigma = \frac{|U|_{max}}{U_{eff}}$

Scheitelfaktor **Sinus**: $\sigma = \sqrt{2}$

Formfaktor = Abweichung Messwerte bzgl. Form der Wechselspannung

Formfaktor: $F = \frac{U_{eff}}{|\bar{u}|} = \frac{I_{eff}}{|\bar{\imath}|}$

Formfaktor **Sinus**: $F = \frac{\pi}{\sqrt{8}}$

Weiteres:

Magnetischer Fluss Φ [Wb]: $\Phi = B \cdot l \cdot b \cdot \cos(\omega \cdot t)$

Phasenverschiebung [rad] [°]: $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = const.$

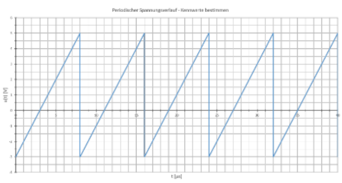
Elementares:

Liniendiagramm: Verschoben nach rechts $\varphi \rightarrow -$

Verschoben nach links $\varphi \rightarrow +$

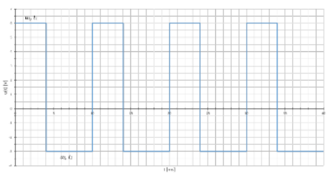
Zeigerdiagramm: Verschoben mit Uhrzs. $\varphi \rightarrow -$

Verschoben gegen Uhrzs. $\varphi \rightarrow +$



$$u(t) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{Präfix V}{Präfix s} \cdot t + (Y Achsenabschnitt)$$

Binomische Formel bei Quadrierung



$u(t) = y$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^a (\ldots V)^2 \cdot dt + \int_a^b (\ldots V)^2 \cdot dt \right)}$$

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^a |\ldots V| \cdot dt + \int_a^b |\ldots V| \cdot dt \right)$$

$$U_= = \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^a (\ldots V) \cdot dt + \int_a^b (\ldots V) \cdot dt \right)$$

Formelsammlung Elektrotechnik

Komplexe Rechnung:

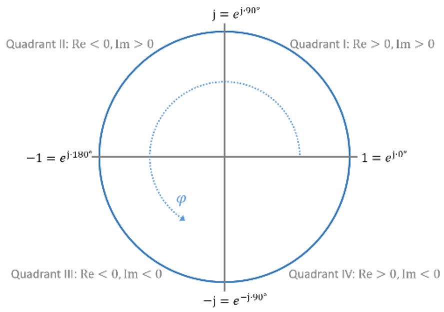
$$j = \sqrt{-1} = e^{j \cdot 90°} = e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$j^2 = -1 = e^{j \cdot 180°} = e^{j \cdot \pi}$$

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j \cdot j} = \frac{j}{-1} = -j = e^{-j \cdot 90°} = e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{e^{j \cdot 90°}} = \sqrt{e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}} => e^{j \cdot \frac{90°}{2}} = e^{j \cdot 45°}$$

und $e^{j \cdot \frac{90°}{2} + 180°} = e^{j \cdot 225°}$

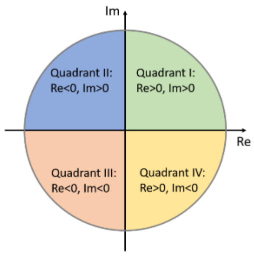


Komplexe Rechnung – Allgemein

Komponentenform: $\underline{Z} = R + j \cdot X$

Konjungierte Komplexe: $\underline{Z}^* = - + j \cdot X$

Betrag: $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$



Argument:

$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$ für Quadrant 1 und 4

$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) + 180°$ für Quadrant 2

$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) - 180°$ für Quadrant 3

Exponentialform: $\underline{Z} = Z \cdot e^{j \cdot \varphi}$

Konjungiert Komplexe: $\underline{Z}^* = Z \cdot e^{-j \cdot \varphi}$

Umrechnung:

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = Z \cdot (cos\varphi + j \cdot sin\varphi) = Z \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

$$R = Re(\underline{Z}) = Z \cdot cos\varphi$$

$$X = Im(\underline{Z}) = Z \cdot sin\varphi$$

$$Re(\underline{Z}) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Z} + \underline{Z}^*)$$

$$Im(\underline{Z}) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (\underline{Z} - \underline{Z}^*)$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Z}^*}$$

Komplexe Rechnung – Umrechnung sinusförmige Größen

Komplex aus Real:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_u} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot (cos\varphi_u + j \cdot sin\varphi_u)$$

$$\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} \cdot (cos\varphi_i + j \cdot sin\varphi_i)$$

Real aus Komplex:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Im\left(e^{j(w \cdot t + \varphi_u)}\right) = \sqrt{2} \cdot Im\left(U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j(w \cdot t)}\right)$$
$$= \sqrt{2} \cdot Im\left(\underline{U} \cdot e^{j(w \cdot t)}\right) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot Im\left(e^{j(w \cdot t + \varphi_i)}\right) = \sqrt{2} \cdot Im\left(I \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j(w \cdot t)}\right)$$
$$= \sqrt{2} \cdot Im\left(\underline{I} \cdot e^{j(w \cdot t)}\right) = \hat{\imath} \cdot \sin(w \cdot t + \varphi_i)$$

Komplexe Rechnung – Definitionen

Impedanz [Ω]:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j \cdot X = Z \cdot e^{j \cdot \varphi} = Z \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{X}{R}\right)}$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

(ohmscher) Widerstand [Ω]: $R = Re(\underline{Z})$

Blindwiderstand [Ω]: $X = Im(\underline{Z})$

Admittanz [S]:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G + j \cdot B = Y \cdot e^{j \cdot \varphi} = Y \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{B}{G}\right)}$$

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

(ohmscher) Leitwert [S]: $G = Re(\underline{Y})$

Blindleitwert [Ω]: $B = Im(\underline{Y})$

Ideale Bauteile – ohmscher Widerstand

Spannung [V]: $\underline{U} = R \cdot \underline{I} = \frac{I}{G}$

Strom [A]: $\underline{I} = G \cdot \underline{U} = \frac{U}{R}$

Impedanz [Ω]: $\underline{Z_R} = Z_R = R = \frac{1}{G}$

Admittanz [S]: $\underline{Y_R} = Y_R = G = \frac{1}{R}$

Ideale Bauteile – Induktivität

f hoch → Widerstand hoch, f niedrig Widerstand niedrig

Strom 90° hinter Spannung →$\varphi_i = -90°$

Induktivität [H]: L

Spannung [V]: $\underline{U} = \underline{Z_L} \cdot \underline{I} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y_L}} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}$

Strom [A]: $\underline{I} = \underline{Y_L} \cdot \underline{U} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_L}} = j \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot \underline{U}$

Impedanz [Ω]: $\underline{Z_L} = j \cdot X_L = j \cdot \omega \cdot L = \omega \cdot L \cdot e^{j \cdot 90°}$

Blindwiderstand [Ω]: $X_L = \omega \cdot L$ **positiv**

Admittanz [S]: $Y_L = j \cdot B_L = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L} = \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot e^{-j \cdot 90°}$

Blindleitwert [S]: $B_L = -\frac{1}{\omega \cdot L}$

Ideale Bauteile – Kapazität

Kapazität[F]: C

Spannung[V]: $\underline{U} = \underline{Z_C} \cdot \underline{I} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y_C}} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{I}$

Strom[A]: $\underline{I} = \underline{Y_C} \cdot \underline{U} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_C}} = -j \cdot \omega \cdot C \cdot \underline{U}$

Impedanz[Ω]: $\underline{Z_C} = j \cdot \underline{X_C} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot e^{-j \cdot 90°}$

Blindwiderstand[Ω]: $X_c = -\frac{1}{\omega \cdot C}$ **negativ**

Admittanz[S]: $\underline{Y_C} = j \cdot \underline{B_C} = j \cdot \omega \cdot C = \omega \cdot C \cdot e^{j \cdot 90°}$

Blindleitwert[S]: $\underline{B_C} = \omega \cdot C$

Reihenschaltung – Allgemein

Impedanz[Ω]: $\underline{Z} = R + j \cdot X = R + j \cdot (X_L + X_c)$

$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + (X_L + X_c)^2}$

Spannung[V]: $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = \underline{U} \cdot e^{j \cdot \varphi_U}$

Phasenwinkel Spannung[°]: $\varphi_U = \arctan\left(\frac{Im(U)}{Re(U)}\right)$

Phasenwinkel[°]: $\varphi = \varphi_U - \varphi_I = \arctan\left(\frac{Im(Z)}{Re(Z)}\right)$

Zwei Impedanzen: $\underline{Z}_{12} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} = \frac{1}{\underline{Y_1}} + \frac{1}{Y_2}$

$= R_1 + j \cdot X_1 + R_2 + j \cdot X_2 = R_{12} + j \cdot X_{12}$

Umrechnung Admittanz:

$$\underline{Y}_{12} = \frac{1}{\underline{Z}_{12}} = \frac{1}{\underline{Z_1} + Z_2} = \frac{R_{12} - j * X_{12}}{R^2{}_{12} + X^2{}_{12}} = G_{12} + j \cdot B_{12}$$

$$G_{12} = \frac{R_{12}}{R^2{}_{12} + X^2{}_{12}} \; und \; B_{12} = \frac{-X_{12}}{R^2{}_{12} + X^2{}_{12}}$$

Parallelschaltung – Allgemein

Admittanz[Ω]: $\underline{Y} = G + j \cdot (B_L + B_c)$

$|\underline{Y}| = Y = \sqrt{G^2 + (B_L + B_c)^2}$

Strom[A]: $\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = I \cdot e^{j * \varphi_I}$

Phasenwinkel Strom[°]: $\varphi_I = \arctan\left(\frac{Im(I)}{Re(I)}\right)$

Phasenwinkel[°]: $\varphi = \varphi_U - \varphi_I = \arctan\left(\frac{Im(Y)}{Re(Y)}\right)$

Zwei Admittanzen: $\underline{Y}_{12} = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{Z_2}$

$= G_1 + j \cdot B_1 + G_2 + j \cdot G_2 = G_{12} + j \cdot B_{12}$

Umrechnung Impedanz:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{1}{\underline{Y}_{12}} = \frac{1}{\underline{Y_1} + Y_2} = \frac{G_{12} - j \cdot B_{12}}{G^2{}_{12} + B^2{}_{12}} = R_{12} + j \cdot X_{12}$$

$$R_{12} = \frac{G_{12}}{G^2{}_{12} + B^2{}_{12}} \; und \; B_{12} = \frac{-G_{12}}{G^2{}_{12} + B^2{}_{12}}$$

Formelsammlung Elektrotechnik

Reihenschaltung – R-L

Impedanz[Ω]:

$$\underline{Z}_{RL} = R + j \cdot \omega \cdot L$$

Mit $\underline{R}_{RL} = R$ und $\underline{X}_{RL} = \omega \cdot L$

Admittanz[S]:

$$Y_{RL} = \frac{1}{R + j \cdot \omega \cdot L} = \frac{R - j \cdot \omega \cdot L}{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$mit\ G_{RL} = \frac{R}{R^2+(\omega \cdot L)^2}$ und $B_{RL} = \frac{-\omega \cdot L}{R^2+(\omega \cdot L)^2}$

Phasenwinkel[°]: $\varphi > 0°\ Spannung\ eilt\ Strom\ vorraus$

Reihenschaltung – R-C

Impedanz[Ω]: $\underline{Z}_{RC} = R - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}$

$$mit\ \underline{X}_{RC} = -\frac{1}{\omega \cdot C}\ und\ \underline{R}_{RC} = R$$

Admittanz[S]:

$$Y_{RC} = \frac{1}{R - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} = \frac{R \cdot \omega^2 \cdot C^2 + j \cdot \omega \cdot C}{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1}$$

$$mit\ G_{RC} = \frac{R \cdot \omega^2 \cdot C^2}{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1}\ und\ B_{RC} = \frac{\omega \cdot C}{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1}$$

Phasenwinkel[°]: $\varphi < 0°\ Spannung\ hinkt\ Strom\ hinterher$

Parallelschaltung – R-L

Impedanz[Ω]: $\underline{Z}_{RL} = \frac{1}{\frac{1}{R} - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L}} = \frac{R \cdot \omega^2 \cdot L^2 + j \cdot \omega \cdot L \cdot R^2}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}$

$$mit\ \underline{R}_{RL} = \frac{R \cdot \omega^2 \cdot L^2}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}\ und\ \underline{X}_{RL} = \frac{\omega \cdot L \cdot R^2}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}$$

Admittanz[S]: $Y_{RL} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} = \frac{1}{R} - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L}$

$$mit\ G_{RL} = \frac{1}{R}\ und\ B_{RL} = -\frac{1}{\omega \cdot L}$$

Phasenwinkel[°]: $\varphi > 0°\ Strom\ hinkt\ Spannung\ hinterher$

Parallelschaltung – R-C

Impedanz[Ω]:

$$\underline{Z}_{RC} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j \cdot \omega \cdot C} = \frac{R - j \cdot \omega \cdot C \cdot R^2}{1 + R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2}$$

$$mit\ \underline{R}_{RC} = \frac{R}{1 + R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2}$$

$$und\ \underline{X}_{RC} = \frac{-\omega \cdot C \cdot R^2}{1 + R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2}$$

Admittanz [S]:

$$Y_{RC} = \frac{1}{R} + j \cdot \omega \cdot C\ mit\ G_{RC} = \frac{1}{R}\ und\ B_{RC} = \omega \cdot C$$

Phasenwinkel[°]: $\varphi < 0°$ Strom eilt Spannung voraus

Spannungsteiler – Reihenschaltung

Spannung 1[V]: $\underline{U}_1 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}} = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$

Spannung 2[V]: $\underline{U}_2 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}} = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$

Spannung 3[V]: $\underline{U}_3 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}} = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$

Stromteiler – Parallelschaltung

Strom 1 [A]: $\underline{I}_1 = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}} = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$

Strom 2 [A]: $\underline{I}_2 = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}} = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$

Strom 3 [A]: $\underline{I}_3 = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}} = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$

Knotenregel: Re Teile und Im Teile getrennt betrachten

Maschenregel: Re Teile und Im Teile getrennt betrachten

Leistungsarten

Wirkleistung [W]:

$$P_W = U \cdot I \cdot cos\varphi = U^2 \cdot \frac{R}{Z^2} = I^2 \cdot R =$$

$$Re\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\} = I^2 \cdot Re\{\underline{Z}\}$$

Scheinleistung [VA]: Z als Pytagorasbetrag nehmen!

$$P_S = S = U \cdot I = \frac{U^2}{Z} = I^2 \cdot Z = |\underline{U} \cdot \underline{I}^*|$$

Betrag bedeutet hier, nach Rechnung Pythagoras

Blindleistung [var]: ohne j rechnen !

$$P_B = |U \cdot I \cdot sin\varphi| = U^2 \cdot \frac{|X|}{Z^2} = I^2 \cdot |X| = |Im\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\}| = I^2 \cdot Im\{\underline{Z}\}$$

Blindleistungskompensation

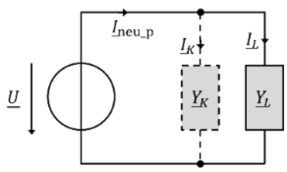
Keine Blindleistung, wenn:

$$P_B = 0 = |U \cdot I \cdot sin\varphi| \;=>\; \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

Kompensation durch Blindleitwert:

Dimensionierung:

$$\underline{Y}_K = j \cdot B_K = -j \cdot Im(\underline{Y}_L)$$



Wenn Gesamtadmittanz…

$Im(\underline{Y}) = B > 0 \rightarrow$ Kompensation mit Sule

$Im(\underline{Y}) = B < 0 \rightarrow$ Kompensation mit Kondensator

Leistungsanpassung (Wirkleistung maximieren)

Innenimpedanz Spannungsquelle [Ω]: $\underline{Z}_i = R_i + j \cdot X_i$

Lastimpedanz [Ω]: $\underline{Z}_L = R_L + j \cdot X_L$

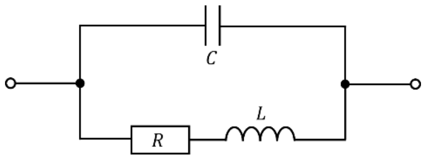
Leistungsanpassung bei: $\underline{Z}_L = R_i + j \cdot X_i = \underline{Z}^*_i$

6. Ersatzschaltungen / Reale Bauelemente

Realer Elektrischer Widerstand

Admittanz [S]: $\underline{Y} = \frac{1}{R+j\cdot\omega\cdot L} + j\cdot\omega\cdot C$

$= \frac{R}{R^2\cdot\omega^2\cdot L^2} + j\cdot\left(\omega\cdot C - \frac{\omega\cdot L}{R^2+\omega^2\cdot L^2}\right)$



Reale Induktivität (Spule)

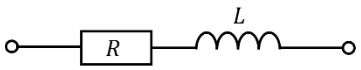
Impedanz [Ω]: $\underline{Z} = R + j\cdot\omega\cdot L$

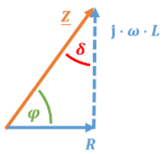
Spulengüte []: $Q_L = \frac{\omega\cdot L}{R}$

Verlustfaktor []: $d = \frac{1}{Q_L} = \frac{R}{\omega\cdot L} = tan\delta$

ohmschen Widerstand R [Ω]: $R = d\cdot\omega\cdot L = \frac{\omega\cdot L}{Q_L}$

Verlustwinkel [°]: $\delta = arctan\frac{R}{\omega\cdot L} = 90° - \varphi$





Reale Kapazität (Kondensator)

Kapazität [F]: $C = \varepsilon\cdot\frac{A}{d}$ mit $\varepsilon =$ Dielektrizitätszahl

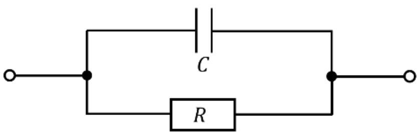
Leitwert [S]: $G = \sigma\cdot\frac{A}{d}$ mit $\sigma =$ elektri. Leitfähigkeit

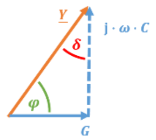
Admittanz [S]: $\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\cdot\omega\cdot C = G + j\cdot\omega\cdot C$

Kondensatorgüte []: $Q_C = \frac{\omega\cdot C}{G}$

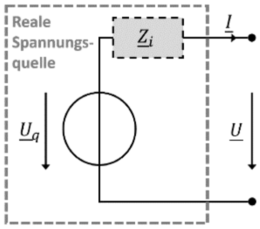
Verlustfaktor []: $d = \frac{1}{Q_C} = \frac{G}{\omega\cdot C} = tan\delta$

Verlustwinkel [°]: $\delta = arctan\frac{G}{\omega\cdot C} = 90° - \varphi$





Ersatzspannungsquelle



Ersatzquellenspannung [V]: $\underline{U_q} = \underline{I}\cdot\underline{Z_i} + \underline{U}$

Leerlaufspannung [V]: $\underline{U_0} = \underline{U}(\underline{I}=0) = \underline{U_q}$

Kurzschlussstrom [A]: $\underline{I_K} = \underline{I}(\underline{U}=0) = \frac{\underline{U_q}}{\underline{Z_i}} = \frac{\underline{U_0}}{\underline{Z_i}}$

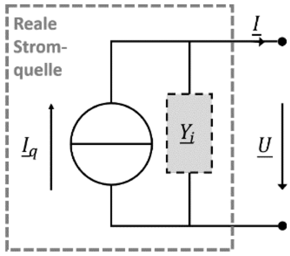
$= \underline{U_q}\cdot\underline{Y_i}$

Innenimpedanz [Ω]: $\underline{Z_i} = \frac{\underline{U_0}}{\underline{I_K}} = \frac{1}{\underline{Y_i}}$

Kennlinie Strom [A]: $\underline{I} = (\underline{U_0} - \underline{U})\cdot\frac{\underline{I_K}}{\underline{U_0}} = \underline{I_K}\cdot\left(1 - \frac{\underline{U}}{\underline{U_0}}\right)$

Kennlinie Spannung [V]: $\underline{U} = \underline{U_0} - \underline{I}\cdot\underline{Z_i} = \underline{U_0} - \underline{I}\cdot\frac{\underline{U_0}}{\underline{I_K}}$

Ersatzstromquelle



Ersatzquellstrom [A]: $\underline{I_q} = \underline{I} + \underline{U}\cdot\underline{Y_i}$

Leerlaufspannung [V]: $\underline{U_0} = \underline{U}(\underline{I}=0) = \frac{\underline{I_q}}{\underline{Y_i}} = \frac{\underline{I_k}}{\underline{Y_i}}$

Kurzschlussstrom [A]: $\underline{I_K} = \underline{I}(\underline{U}=0)$

Innenadmittanz [S]: $\underline{Y_i} = \frac{\underline{I_K}}{\underline{U_0}} = \frac{1}{\underline{Z_i}}$

Kennlinie Strom [A]: $\underline{I} = \underline{I_K} - \underline{U}\cdot\underline{Y_i} = \underline{I_K} - \underline{U}\cdot\frac{\underline{I_K}}{\underline{U_0}}$

Kennlinie Spannung [V]: $\underline{U} = (\underline{I_K} - \underline{I})\cdot\frac{\underline{U_0}}{\underline{I_K}} = \underline{U_0}\cdot\left(1 - \frac{\underline{I}}{\underline{I_K}}\right)$

Kennlinien bei ohmscher R_L Variable lassen denk dran

Spannungskennlinie[V]: mit $I = |\underline{I}|$

$$U = U_0\cdot\left(\sqrt{1 - \frac{I^2}{I_K^2}\cdot sin^2(\varphi_K - \varphi_0)} - \frac{I}{I_K}\cdot cos(\varphi_K - \varphi_0)\right)$$

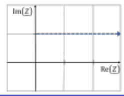
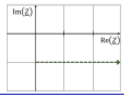
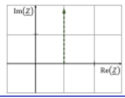
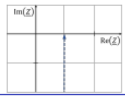
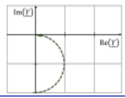
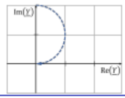
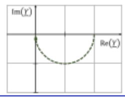
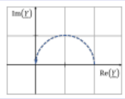
Stromkennlinie[A]: mit $U = |\underline{U}|$

$$I = I_K\cdot\left(\sqrt{1 - \frac{U^2}{U_0^2}\cdot sin^2(\varphi_K - \varphi_0)} - \frac{U}{U_0}\cdot cos(\varphi_K - \varphi_0)\right)$$

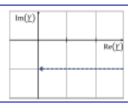
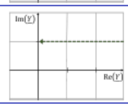
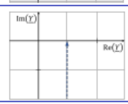
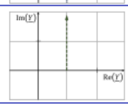
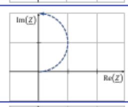
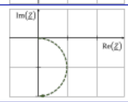
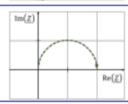
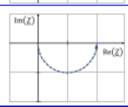
Verknüpfung über R_L: $U = R_L\cdot I$

7. Ortskurven

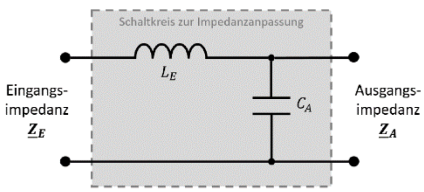
Reihenschaltung:

Schaltung	Messgröße	Variable Größe	Ortskurve Form	X ± ?	Ortskurve Lage	Ortskurve schematisch
Reihenschaltung	$\underline{Z}$ (bzw. $\underline{U}$ bei Stromquelle)	R	Gerade waagerecht	X > 0 (ind.)	oben (durch pos. imag. Bereich)	
				X < 0 (kap.)	unten (durch neg. imag. Bereich)	
		X	Gerade senkrecht	X > 0 (ind.)	oben (durch pos. imag. Bereich)	
				X < 0 (kap.)	unten (durch neg. imag. Bereich)	
	$\underline{Y}$ (bzw. $\underline{I}$ bei Spannungsquelle)	R	Kreis durch Ursprung Mittelpunkt auf imaginärer Achse	X > 0 (ind.)	unten (durch neg. imag. Bereich)	
				X < 0 (kap.)	oben (durch pos. imag. Bereich)	
		X	Kreis durch Ursprung Mittelpunkt auf reeller Achse	X > 0 (ind.)	unten (durch neg. imag. Bereich)	
				X < 0 (kap.)	oben (durch pos. imag. Bereich)	

Parallelschaltung:

Schaltung	Messgröße	Variable Größe	Ortskurve Form	X ± ?	Ortskurve Lage	Ortskurve schematisch
Parallelschaltung	$\underline{Y}$ (bzw. $\underline{I}$ bei Spannungsquelle)	R	Gerade waagerecht	X > 0 (ind.)	unten (durch neg. imag. Bereich)	
				X < 0 (kap.)	oben (durch pos. imag. Bereich)	
		X	Gerade senkrecht	X > 0 (ind.)	unten (durch neg. imag. Bereich)	
				X < 0 (kap.)	oben (durch pos. imag. Bereich)	
	$\underline{Z}$ (bzw. $\underline{U}$ bei Stromquelle)	R	Kreis durch Ursprung Mittelpunkt auf imaginärer Achse	X > 0 (ind.)	oben (durch pos. imag. Bereich)	
				X < 0 (kap.)	unten (durch neg. imag. Bereich)	
		X	Kreis durch Ursprung Mittelpunkt auf reeller Achse	X > 0 (ind.)	oben (durch pos. imag. Bereich)	
				X < 0 (kap.)	unten (durch neg. imag. Bereich)	

Gehört zu rechts dazu



1. Parallelanpassung mit C_A
2. Serienanpassung mit L_E

Inversion von Ortskurven

Allgemein: $\underline{Y}_{max} = \frac{1}{\underline{Z}_{min}}$ $\quad \underline{Y}_{min} = \frac{1}{\underline{Z}_{max}}$

$\underline{Z}_{max/min} = \lim_{p \to 0/\infty} \underline{Z}_{(p)}$ $\quad \underline{Y}_{max/min} = \lim_{p \to 0/\infty} \underline{Y}_{(p)}$

Ursprüngliche Ortskurve → Invertierte Ortskurve

Gerade durch den Ursprung → Gerade durch den Ursprung

Gerade nicht durch den Ursprung → Kreis durch den Ursprung mit:

$$\underline{M} = \frac{1}{2} \cdot \underline{Y}_{max} \quad bzw. \quad \underline{M} = \frac{1}{2} \cdot \underline{Z}_{max}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot |\underline{Y}_{max}| \quad bzw. \quad r = \frac{1}{2} \cdot |\underline{Z}_{max}|$$

Mittelpunkt M $\quad \frac{\underline{Z}_{min} + \underline{Z}_{max}}{2}$

Radius r $\quad \frac{|\underline{Z}_{max} - \underline{Z}_{min}|}{2}$

Kreis durch den Ursprung → Gerade nicht durch den Ursprung:

Mittelpunkt auf reeller Achse → senkrechte Gerade
Mittelpunkt auf imag. Achse → waagrechte Gerade

Kreis nicht durch den Ursprung → Kreis nicht durch den Ursprung mit:

$$\underline{M} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Y}_{min} + \underline{Y}_{max})$$

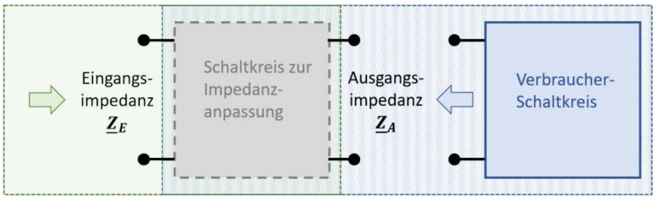
$$bzw. \, \underline{M} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Z}_{min} + \underline{Z}_{max})$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot |\underline{Y}_{max} - \underline{Y}_{min}|$$

$$bzw. \; r = \frac{1}{2} \cdot |\underline{Z}_{max} - \underline{Z}_{min}|$$

Verlustfreie Impedanz Anpassung mittels Ortskurven

Anpassung der Ausgangsimpedanz $\underline{Z}_A = R_A + j \cdot X_A$ (Eingangsimpedanz der Verbraucherschaltung) an die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E = R_E + j \cdot X_E$ als Zielimpedanz der Zusammenschaltung



Parallel- dann Serienanpass. wenn: $Re(\underline{Z}_A) = R_A \geq R_E = Re(\underline{Z}_E)$

Kapazität[F] $\quad C_A = \frac{\sqrt{|\underline{Z}_A|^2 \cdot \frac{R_A}{R_E} - R_A^2} + X_A}{\omega \cdot |\underline{Z}_A|^2}$

Induktivität[H] $\quad L_E = \frac{\sqrt{|\underline{Z}_A|^2 \cdot \frac{R_E}{R_A} - R_E^2} + X_E}{\omega}$

$R_A = Re\{\underline{Z}_A\}, R_E = Re\{\underline{Z}_E\}, X_A = Im\{\underline{Z}_A\}, X_E = Im\{\underline{Z}_E\}$

Kapazität[F] $\quad C_A = \frac{L_E}{R_A \cdot R_E}$

Induktivität[H] $\quad L_E = C_A \cdot R_A \cdot R_E$

Serien- dann Parallelanpassung, wenn:

$Re(\underline{Z}_E) = R_E \geq R_A = Re(\underline{Z}_A)$

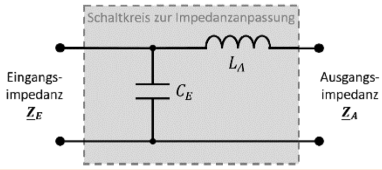
Kapazität[F] $$C_E = \frac{\sqrt{\left|\underline{Z}_E\right|^2 \cdot \frac{R_E}{R_A} - R_E^2} - X_E}{\omega \cdot \left|\underline{Z}_E\right|^2}$$

Induktivität[H] $$L_A = \frac{\sqrt{\left|\underline{Z}_E\right|^2 \cdot \frac{R_A}{R_E} - R_A^2} - X_A}{\omega}$$

$R_A = Re\{\underline{Z}_A\}$, $R_E = Re\{\underline{Z}_E\}$, $X_A = Im\{\underline{Z}_A\}$, $X_E = Im\{\underline{Z}_E\}$

Kapazität[F] $$C_E = \frac{L_A}{R_A \cdot R_E}$$

Induktivität[H] $$L_A = C_E \cdot R_A \cdot R_E$$



1. Serienanpassung mit L_A
2. Parallelanpassung mit C_E

Private Anfüge:

$\underline{Z}_E = \underline{Z}_i^*$

$$\underline{I} = \frac{U_q}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_E} = \frac{U_q}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_i^*}$$

8. Bode-Diagramme:

$f_g\ bei\ 3dB$ → Leistungsreduktion um 0,707 also 70,7%

Dämpfungspegel in dB

$$p(dB) = 10 \cdot lg\left(\frac{P_A}{P_E}\right)$$

Das Bode-Diagramm ist eine Darstellungsform komplexer, frequenzabhängiger Wechselstromgrößen (wie z.B. $\underline{Z}$, $\underline{Y}$, $\underline{U}$, $\underline{I}$), die aus zwei getrennten Diagrammen mit logarithmischen Maßstäben bestehen:

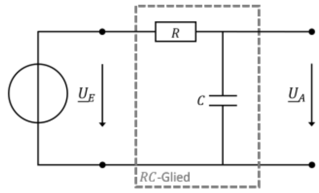
Betrags- oder Amplitudengang	Betrag $\lvert\underline{Z}(\omega)\rvert$, $\lvert\underline{Y}(\omega)\rvert$, $\lvert\underline{U}(\omega)\rvert$ oder $\lvert\underline{I}(\omega)\rvert$ in doppelt log Maßstab
Phasengang	Phase $\varphi(\omega)$ in einfach log Maßstab

Kochrezept:

a) Bestimme die Gleichung der komplexen, frequenzabhängigen Wechselstromgröße in Exponentialform, also z.B. $\underline{Z}(\omega) = Z(\omega) \cdot e^{j\cdot\varphi(\omega)}$
b) Bestimme eine Frequenz ω_0 (bzw. f_0) (charakteristische Frequenz oder Mittenfrequenz) als Bezugswert, also z.B. für die gilt $\mathrm{Re}(\underline{Z}) = \mathrm{Im}(\underline{Z})$
c) Bestimme den Wert der komplexen, frequenzabhängigen Wechselstromgröße bei der Frequenz ω_0 (bzw. f_0) in Exponentialdarstellung, also z.B. $\underline{Z}_0 = Z_0 \cdot e^{j\cdot\varphi_0}$
d) Bestimme für bestimmte Frequenzen (die sowohl größer als auch kleiner als die Mittenfrequenz sind) die Werte der komplexen Wechselstromgröße (Vorschlag für diese Stützpunkte: $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = 0{,}01\,;\,0{,}1\,;\,1\,;\,10\,;\,100$)
e) Bestimme das Betragsverhältnis aller berechneten Werte in Bezug zum Wert bei der Mittenfrequenz, also z.B. $\frac{Z(0{,}01\cdot\omega_0)}{Z_0}$, $\frac{Z(0{,}1\cdot\omega_0)}{Z_0}$, ..., $\frac{Z(100\cdot\omega_0)}{Z_0}$
f) Bestimme den Zehnerlogarithmus dieser Betragsverhältnisse, also z.B. $\lg\left(\frac{Z(0{,}01\cdot\omega_0)}{Z_0}\right)$
g) Bestimme den Zehnerlogarithmus der Frequenzverhältnisse der Stützstellen, also z.B. $\lg\left(\frac{0{,}01\cdot\omega_0}{\omega_0}\right) = \lg(0{,}01) = -2$
h) Stelle den Zehnerlogarithmus der Betragsverhältnisse und den Phasenwinkel in Abhängigkeit des Zehnerlogarithmus der Frequenzverhältnisse als Verbindung der Stützstellen dar

9. Einfache passive Frequenzfilter: (passive Bauteile RCL)

Tiefpass 1. Ordnung



Übertragungsfunktion $\underline{H} = \frac{1 - j\cdot\omega\cdot C\cdot R}{1+\omega^2\cdot C^2\cdot R^2}$

$H = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot C\cdot R)^2}}$

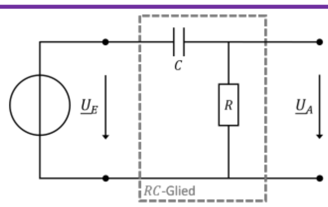
Phasenwinkel $\varphi = \arctan(-\omega\cdot C\cdot R)$

Grenzfrequenz $\left(H = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\omega_g = \frac{1}{R\cdot C}$ bzw. $f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\cdot R\cdot C}$

$H(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}$

mit ohmscher Last $\underline{U}_{E0} = \underline{U}_E \cdot \frac{R_L}{R+R_L}$, $R_i = \frac{R\cdot R_L}{R+R_L}$, $\omega_{gL} = \omega_g \cdot \left(1 + \frac{R}{R_L}\right)$

Hochpass 1. Ordnung



Übertragungsfunktion $\underline{H} = \frac{\omega^2\cdot C^2\cdot R^2 + j\cdot\omega\cdot C\cdot R}{1+\omega^2\cdot C^2\cdot R^2}$

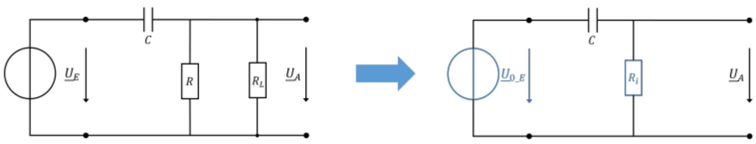
$H = |\underline{H}| = \frac{U_A}{U_E} = \frac{|\underline{U}_A|}{|\underline{U}_E|} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega\cdot C\cdot R)^2}}}$

Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega\cdot C\cdot R}\right)$

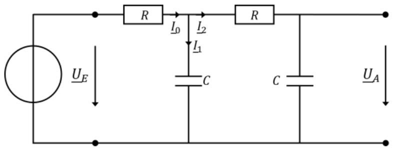
Grenzfrequenz $\left(H = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\omega_g = \frac{1}{R\cdot C}$ bzw. $f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\cdot R\cdot C}$

$H(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^2}}$

mit ohmscher Last $\underline{U}_{E0} = \underline{U}_E$, $R_i = \frac{R\cdot R_L}{R+R_L}$, $\omega_{gL} = \omega_g \cdot \left(1 + \frac{R}{R_L}\right)$



Tiefpass 2. Ordnung (niedrige f passieren)

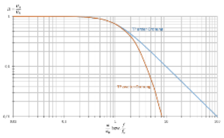


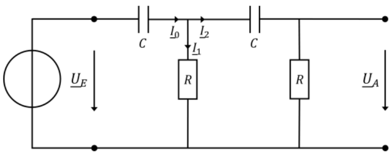
Betrag Übertragungsfunktion $H = \frac{1}{\sqrt{1+7\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^4}}$

$H = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}98\left(\frac{\omega}{\omega_{g2}}\right)^2+0{,}02\left(\frac{\omega}{\omega_{g2}}\right)^4}}$

Grenzfrequenz $\left(H = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\omega_{g2} = \frac{0{,}374}{C\cdot R} = 0,374\cdot\omega_g$

Hochpass 2. Ordnung (hohe f passieren)



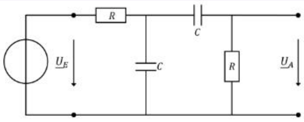


Betrag Übertragungsfunktion $H = \frac{1}{\sqrt{1+7\cdot\left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^4}}$

$H = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}98\left(\frac{\omega_{g2}}{\omega}\right)^2+0{,}02\left(\frac{\omega_{g2}}{\omega}\right)^4}}$

Grenzfrequenz $\left(H = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\omega_{g2} = \frac{1}{0{,}374\cdot C\cdot R} = 2,672\cdot\omega_g$

Einfacher Bandpassfilter (Frequenzband kann passieren)



Betrag Übertragungsfunktion $H = \frac{1}{\sqrt{7+\left(\frac{\omega}{\omega_{max}}\right)^2+\left(\frac{\omega_{max}}{\omega}\right)^2}}$

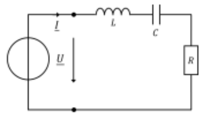
Maximum Übertragungsfunktion $H_{max} = H(\omega_{max}) = \frac{1}{3}$

bei $\omega_{max} = \frac{1}{C\cdot R}$

Grenzfrequenz $\omega_{g-} = 0,303\cdot\omega_{max}\,;\ \omega_{g+} = 3,303\cdot\omega_{max}$

Erzwungene Schwingungen

Serienschwingkreis



Resonanzfrequenz $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$ mit: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L\cdot C}}$

Güte $Q = \frac{1}{d} = \frac{X_r}{R} = \frac{1}{R}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$ Dämpfung d, Kennwiderstand X_r

Strom $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}\cdot\frac{1}{1+j\cdot Q\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)} = \frac{\underline{U}}{R}\cdot\frac{1}{1+j\cdot Q\left(\frac{f}{f_r}-\frac{f_r}{f}\right)}$

$|\underline{I}| = I = \frac{U}{R\cdot\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}} = \frac{U}{R\cdot\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_r}-\frac{f_r}{f}\right)^2}}$

Grenzfrequenzen $f_{go,u} = f_r\cdot\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+1}\pm\frac{d}{2}\right)$

$f_{gu} = \frac{f_r^2}{f_{go}}\,;\ f_{go} = \frac{f_r^2}{f_{gu}}\,;\ f_r = \sqrt{f_{gu}\cdot f_{go}}$ mit $\varphi(f = f_g) = \pm 45^\circ$

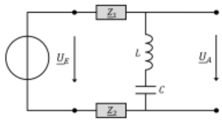
Bandbreite $b = f_{go} - f_{gu} = f_r\cdot d = f_r\cdot R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}$

Phasenwinkel $\varphi_u = \arctan\left(Q\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)\right)\,;\ \varphi_i = \arctan\left(Q\cdot\left(\frac{\omega_r}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_r}\right)\right)$

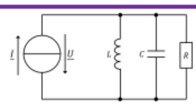
Impedanz $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)$

$\underline{Z}(f = f_{gu}) = R - j\cdot R$ bzw. $\underline{Z}(f = f_{go}) = R + j\cdot R$

In Schaltung Resonanzbedingung $\mathrm{Im}(\underline{Z} = 0) \Rightarrow$ Kurzschluss: $\underline{U}_A = 0$



Parallelschwingkreis



Resonanzfrequenz $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$ mit: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L\cdot C}}$

Güte $Q = \frac{1}{d} = \frac{B_r}{G} = \frac{1}{G}\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}$ Dämpfung d, Resonanzblindleitwert B_r

Spannung $\underline{U} = \frac{\underline{I}}{G}\cdot\frac{1}{1+j\cdot Q\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)} = \frac{\underline{I}}{G}\cdot\frac{1}{1+j\cdot Q\left(\frac{f}{f_r}-\frac{f_r}{f}\right)}$

$|\underline{U}| = U = \frac{I}{G\cdot\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}} = \frac{I}{G\cdot\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_r}-\frac{f_r}{f}\right)^2}}$

Grenzfrequenzen $f_{go,u} = f_r\cdot\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+1}\pm\frac{d}{2}\right)$

$f_{gu} = \frac{f_r^2}{f_{go}}\,;\ f_{go} = \frac{f_r^2}{f_{gu}}\,;\ f_r = \sqrt{f_{gu}\cdot f_{go}}$ mit $\varphi(f = f_g) = \pm 45^\circ$

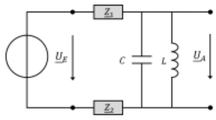
Bandbreite $b = f_{go} - f_{gu} = f_r\cdot d = f_r\cdot G\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$

Phasenwinkel $\varphi_i = \arctan\left(Q\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)\right)\,;\ \varphi_u = \arctan\left(Q\cdot\left(\frac{\omega_r}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_r}\right)\right)$

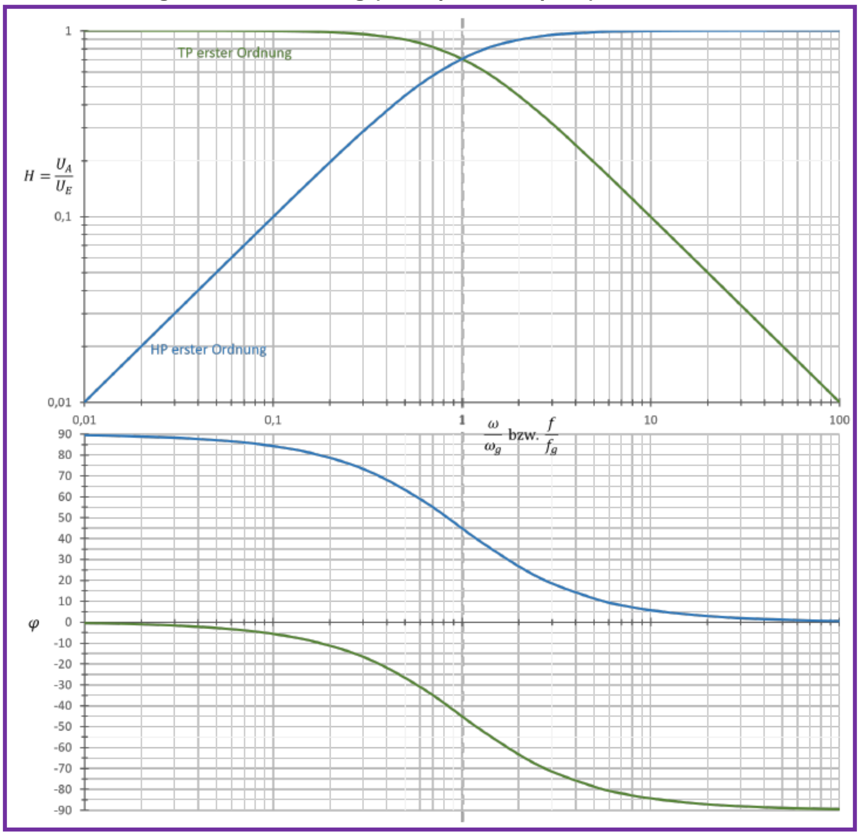
Admittanz $\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = G + j\cdot\left(\omega\cdot C - \frac{1}{\omega\cdot L}\right)$

$\underline{Y}(f = f_{gu}) = G - j\cdot G$ bzw. $\underline{Y}(f = f_{go}) = G + j\cdot G$

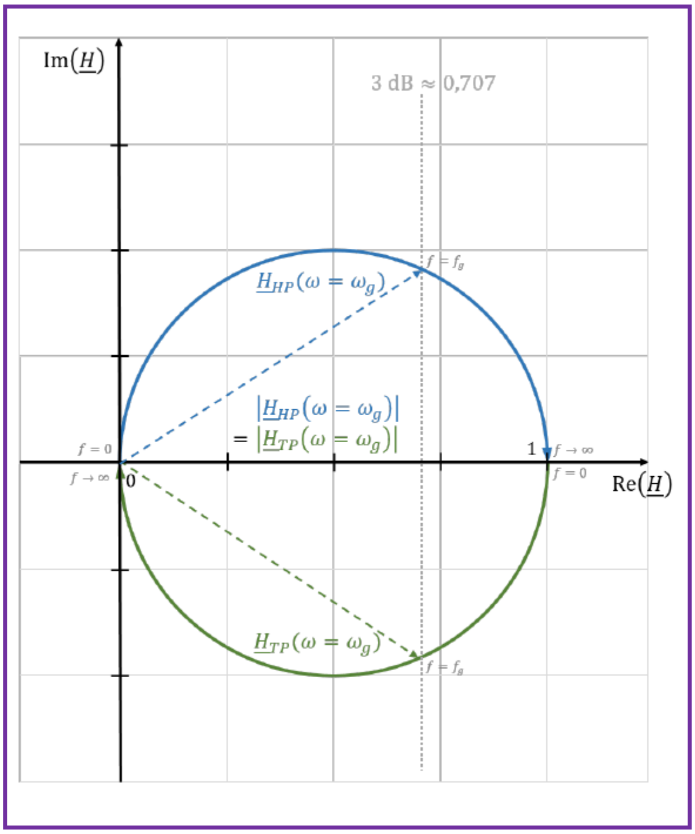
In Schaltung Resonanzbedingung $\mathrm{Im}(\underline{Y} = 0) \Rightarrow$ Offene Klemme: $\underline{U}_A = \underline{U}_E$



Bodediagramm 1. Ordnung (Hochpass/Tiefpass)



Ortskurve 1. Ordnung (Hochpass/Tiefpass)



Bodediagramm Bandpass

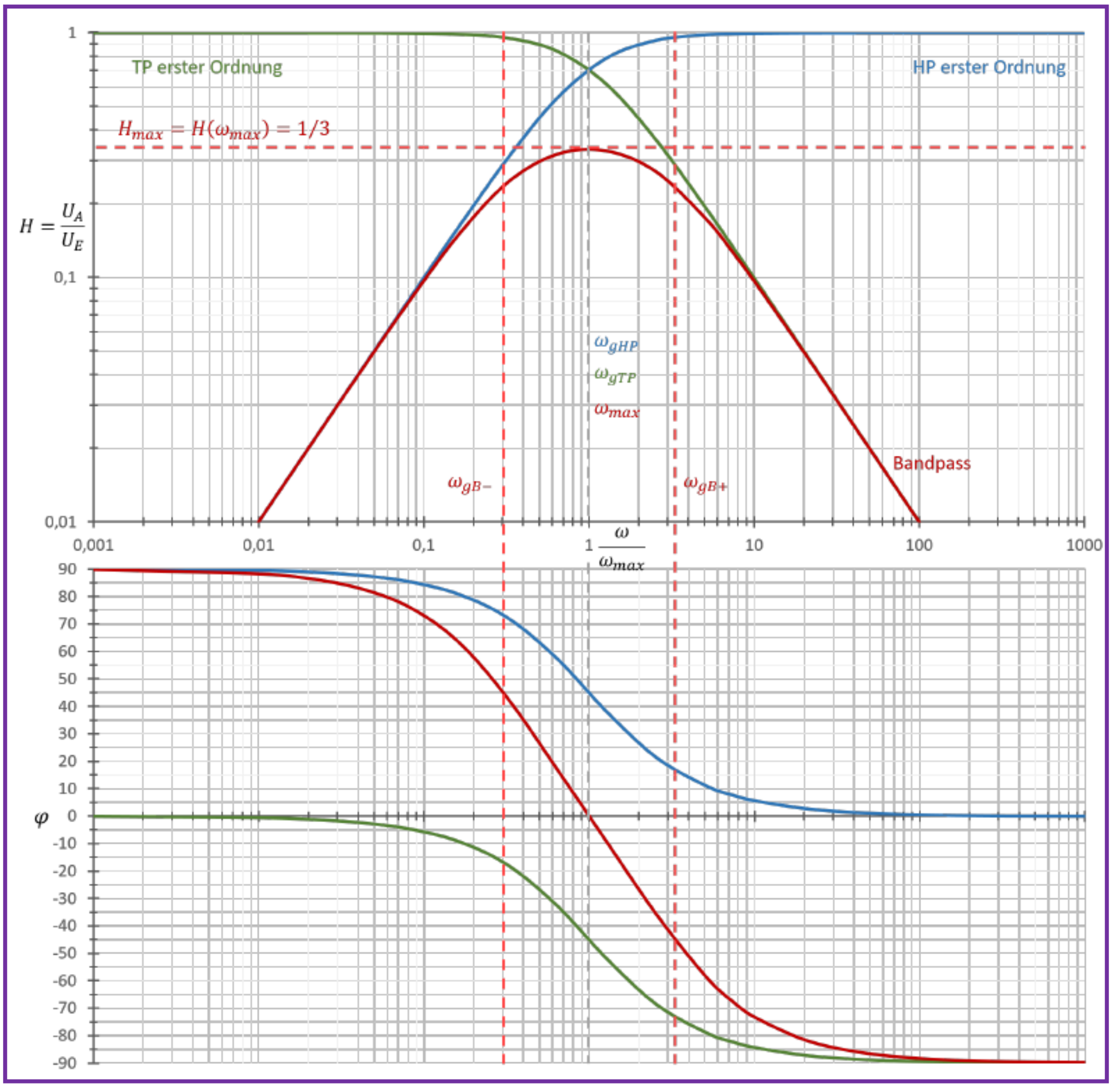


Diagramme Serienschwingkreis

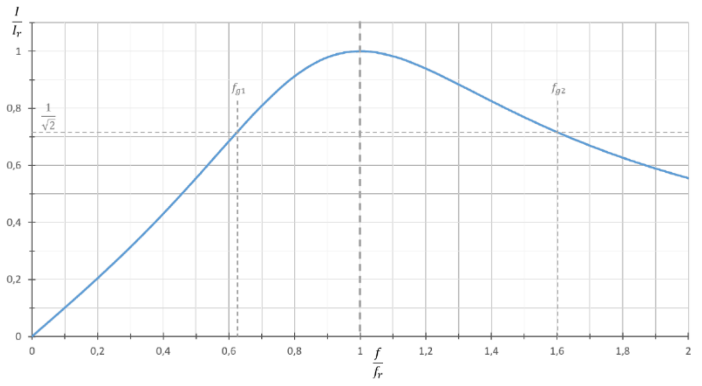
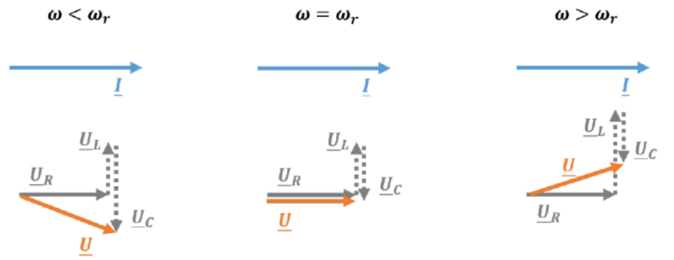


Abbildung 10.3.: Frequenzgang des Serienschwingkreis



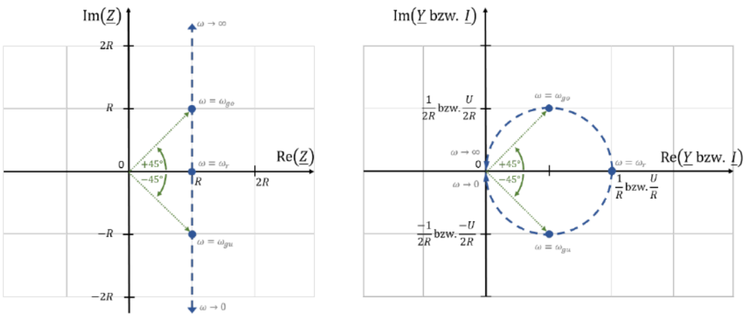


Abbildung 10.4.: Ortskurven der Impedanz und Admittanz (bzw. des Stroms) für den Serienschwingkreis

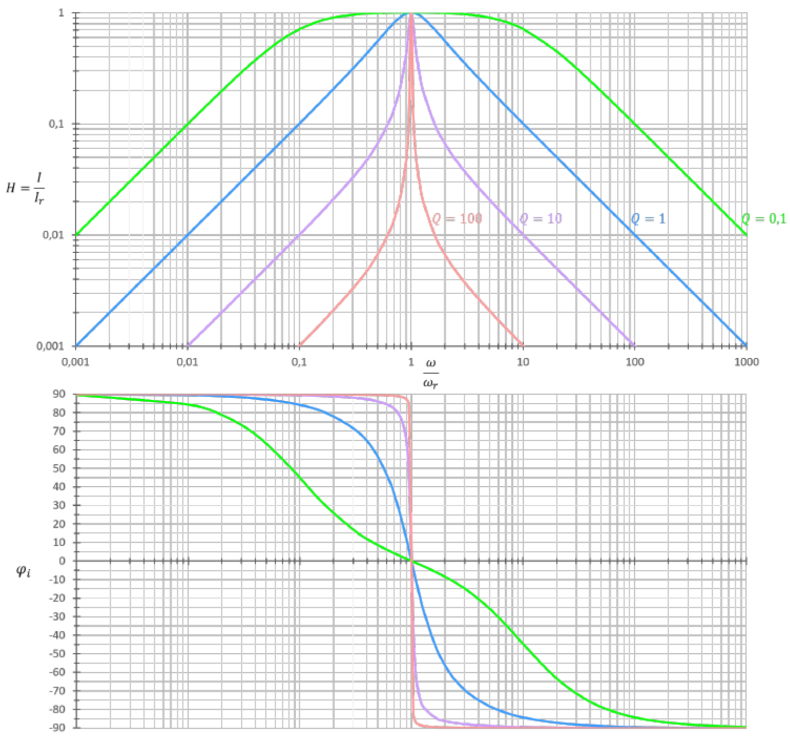


Abbildung 10.5.: Bode-Diagramm für den Strom im Serienschwingkreis

Diagramme Parallelschwingkreis

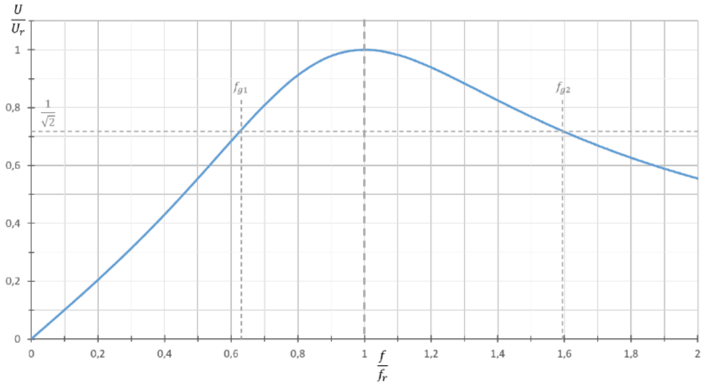
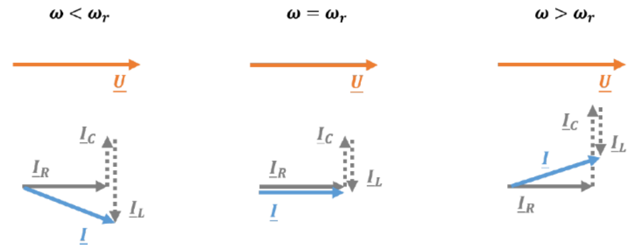


Abbildung 10.8.: Frequenzgang des Parallelschwingkreis



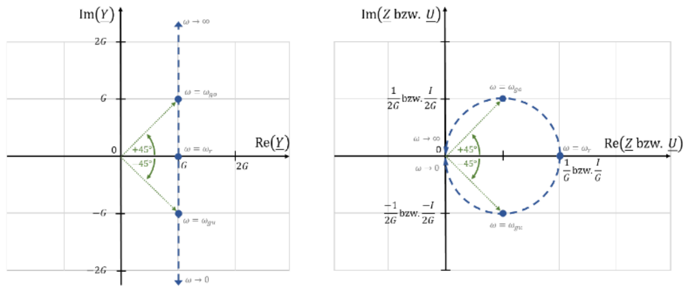


Abbildung 10.9.: Ortskurven der Admittanz unde der Impedanz (bzw. der Spannung) für den Parallelschwingkreis

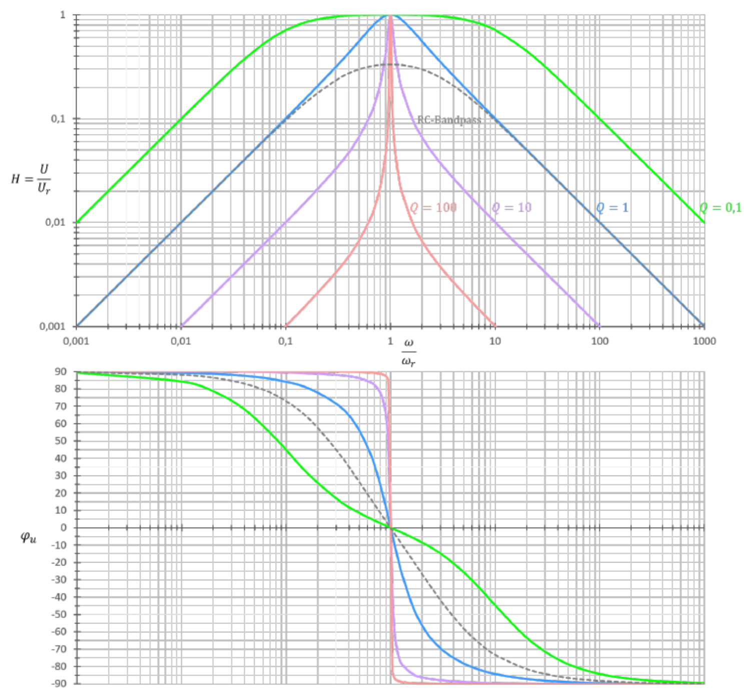


Abbildung 10.10.: Bode-Diagramm für die Spannung im Parallelschwingkreis

Fürs Verständnis:

Kondensator

$(f \to 0)\ \ \underline{Z}_C \to \infty\ \underline{Y}_C = 0$

$(f \to \infty)\ \ \underline{Z}_C = 0\ \underline{Y}_C \to \infty$

Blindwiderstand negativ

Blindleitwert positiv

$\varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$ „Strom eilt vor“

Spule

$(f \to 0)\ \ \underline{Z}_L = 0\ \underline{Y}_L \to \infty$

$(f \to \infty)\ \ \underline{Z}_L \to \infty\ \underline{Y}_L = 0$

Blindwiderstand positiv

Blindleitwert negativ

$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$ „Strom eilt nach“

Allgemein

$I \sim Y$

$U \sim Z$