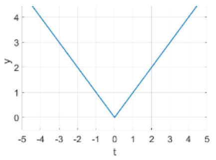
Formelsammlung Signale und Systeme

Funktionen:

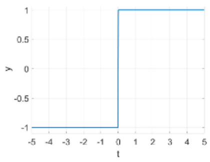
Absolutbetrag

$y(t) = abs(t) = |t|$



Signum-Funktion

$y(t) = sign(t)$

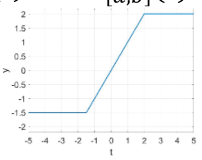


Sättigung

$y(t) = sat_{[a,b]}(t)$

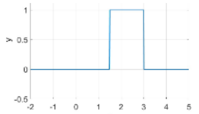
b

a



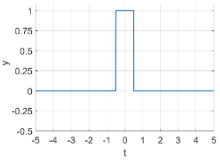
Boxcar-Funktion

$y(t) = boxcar_{[a,b]}$
$= h(t-a) - h(t-b)$



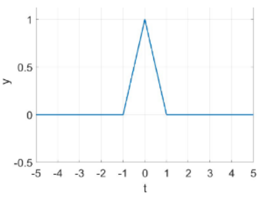
Rechteck-Impuls zweiseitig

$y(t) = rect(t)$
$= h\left(t+\frac{1}{2}\right) - h\left(t-\frac{1}{2}\right)$



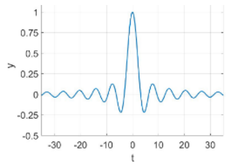
Dreieck-Impuls zweiseitig

$y(t) = tri(t)$



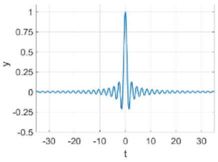
Si-Funktion

$y(t) = si(t) = \frac{\sin(t)}{t}$



Sinc-Funktion

$y(t) = sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$



harmonische Schwingung: $y(t) = y_0 \cdot sin\,(\omega \cdot t + \varphi_0)$

$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 \qquad f_0 = \frac{1}{T_0}$

periodisch, wenn: $y(t) = y(t+T)$ mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$y(t) = {}'(nachher - vorher) \cdot h(t \pm c)$ Erstes Mal mit Vorsatz (vorher)+

$\boldsymbol{y(t) = \pm a \cdot f(\pm b \cdot t \pm c) \pm d}$

$\boldsymbol{y(t) = \pm a \cdot e^{\pm b \cdot t \pm c} \pm d}$

± = (+ normal) (- Spiegelung: Spiegelachse horizontal)

a = vertikale: (a>1 Streckung) (0<a<1 Stauchung)

± = (+ normal) (- Spiegelung: Spiegelachse vertikal)

b = horizontale: (0<b<1 Dehnung) (b>1 Stauchung)

Ursprung!

c = horizontale Verschiebung (+ links) (- rechts)

d = vertikale Verschiebung (+ oben) (- unten)

Reihenfolge: **c → b → a → d**

gerader Anteil: $x_g(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$

ungerader Anteil: $x_u(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

mit Regel: $-f(alle\ Vorzeichen\ drehen)$

Kenngrößen von Signalen:

Extremwerte:

Maximum: $y_{max} = \max_t y(t)$

Supremum: $y_{sup} = \sup_t y(t)$ kleinste obere Schranke falls max ≠ exist.

Minimum: $y_{min} = \min_t y(t)$

Infimum: $y_{inf} = \inf_t y(t)$ größte untere Schranke falls minimum ≠ exist.

Mittelwerte: im Intervall [a, b] oder von T

Mittel/Gleichwert: $\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(t) \cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T y(t) \cdot dt$

Gleichrichtwert: $|\bar{y}| = \frac{1}{b-a}\int_a^b |y(t)| \cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T |y(t)| \cdot dt$

Quadratisches Mittel oder Effektivwert:

$$y_{eff} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (y(t))^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (y(t))^2 \cdot dt}$$

Energie eines Signals:

Reellen skalaren Signal: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \cdot dt$

Komplexes skalaren Signal: $E = \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) \cdot y(t) \cdot dt$

Vektorielles Signal: $E = \int_{-\infty}^{\infty} \|y(t)\|^2 \cdot dt$ mit $\|y(t)\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$

Energiesignal wenn: $E < \infty \quad ; \quad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0$

Leistung eines Signals:

Durchschnittsleistung reellen skalaren: $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |y(t)|^2 \cdot dt$

Momentanleistung: $P(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} |y(\tau)|^2 d\tau = |y(t)|^2$

Leistungssignal wenn: $0 < P < \infty$

Taylor-Reihe:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k$$

Delta-Distribution: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t) \cdot dt = f(0)$

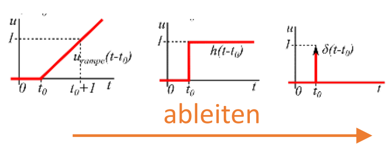
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1 \qquad \delta(-t) = \delta(t) \qquad \delta(ct) = \frac{1}{|c|}\delta(t)$

$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a)}$ Bei +a → -a $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) f(t) dt = (-1)^n \cdot f^{(n)}(0)$

$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) \cdot d\tau = h(t) \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-a) f(\tau) d\tau = f(a) h(t-a)$

$\frac{d}{dt} h(t) = \dot{h}(t) = \delta(t) \qquad h(t) = Einheitssprung, Sprungfunktion$

$\ddot{u}_{rampe}(t-t_0) = \dot{h}(t-t_0) = \delta(t-t_0)$



Formelsammlung Signale und Systeme

Lineare zeitinvariante Diff.gleichung der Ordnung n

$a_n y^{(n)}(t)+..+a_1\dot{y}^{(n)}(t)+a_0 y^{(n)}(t)=b_0u(t)+b_1\dot{u}(t)+\dots+b_m u^{(m)}(t)$

$a_n y^{(n)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}^{(n)}(t)a_0 y^{(n)}(t)=b_0u(t-T_t)+\dots+b_m u^{(m)}(t-T_t)$

Systemantwort LTI-Systems auf einen allgemeinen Eingang

$$y(t)=(g*u)(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Eine Sprungfunktion kann man durch Ändern der Integrationsgrenze rauskürzen!

Die Faltung zweier abhängiger Funktionen ist definiert als:

$$(u*v)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)v(t-\tau)d\tau$$

Graphische Option:

1. Spiegelung von $v\ (\tau)$ an vertikaler Achse, dann Verschiebung nach t
2. Punktweise Multiplikation dort wo beide Funktionen ≠ 0 sind
3. Integration über Zeit ergibt Faltung

(Bei Verschiebung steigt Fläche über der Überlappung)

Eigenschaften der Faltung:

Kommutativität: $u*v=v*u$

Assoziativität: $(u*v)*w=u*(v*w)$

Distributivität: $u*(v+w)=(u*v)+(u*w)$

Eigenschaftsüberprüfung: mit Funktion aus u(t) und y(t)

Wenn beides: LTI-System $u\to y$, $\dot{u}\to\dot{y}$

Wenn beides: Linearität

Überprüfung Homogenität: (Systemgleichung gilt für u und y)

Einsetzen von cy und cu statt y und u in Gleichung → gilt es für $c\in\mathbb{R}$

Überprüfung Additivität: (Systemgleichung gilt für u1 y1 bzw. u2 y2)

Einsetzen von y1 + y2 und u1 + u2 statt y und u →gilt die Gleichung noch?

Überprüfung Zeitinvarianz: (Verhalten vom Startpunkt unabhängig)

Einsetzen von u(t – T) und y(t – T) statt u(t) und y(t)

Transformation: $\tau=t-T$ für beliebige $T\in\mathbb{R}$

Jedes weitere t in Gleichung durch $t\ =\tau+T$ ersetzen (nicht dt)

Überprüfung Kausalität: (keine Zukunftsvorhersage)

$u(t)=\begin{cases}\neq 0 & t>0\\ =0 & t\leq 0\end{cases};\ y(t)=\begin{cases}\neq 0 & t>0\\ =0 & t\leq 0\end{cases};\quad y_{(t)}=f(u_{(t+c)})$ mit c > 0

$(y(t)=\dot{u}(t)$ ist akausal da schon bei t = 0 ein wert vorliegt)

Überprüfung Bibo-Stabilität: Zwei Möglichkeiten:

1.) $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\cdot dt<\infty$

Option: den Graph im Diagramm betrachten → negative Flächen hochklappen und Betragsfläche ermitteln

2.) $|u_{(t)}|\leq u_{max}<\infty\to|y_{(t)}|=|Gleichung|<\infty$

$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|\,;\,|a+b|\leq|a|+|b|\,;\,|a-b|\leq|a|+|b|$

$|Gleichung|$ sollte vollständig nach oben aufgedröselt werden

Beschränkte Eingabe führt zu beschränkter Ausgabe → keine unphysikalische Werte

Fourier Reihe

Die reelle Version der Fourier-Reihe von y(t) ist:

$$y(t)=\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left((a_k\cos(k\omega_o t))+(b_k\sin(k\omega_o t))\right)$$

$$y(t)=\frac{a_o}{2}+a_1\cos(1\omega_o t)+a_2\cos(2\omega_o t)+a_3\cos(3\omega_o t)+\cdots$$

$$+b_1\sin(1\omega_o t)+b_2\sin(2\omega_o t)+b_3\sin(3\omega_o t)+\cdots$$

$$a_k=\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}y(t)\cos(k\omega_o t)\,dt,\qquad k=0,1,2,\dots$$

$$b_k=\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}y(t)\sin(k\omega_o t)\ dt,\qquad k=1,2,3,\dots$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi f_0\qquad\qquad f_0=\frac{1}{T_0}$$

Wenn y(t) ungerade (Punksymmetrisch zum Ursprung) → $a_k=0$

Wenn y(t) gerade (Achsensymmetrisch) → $b_k=0$

Hilfreiche Beziehungen:

$$\sin(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)),$$

$$\sin(x)\sin(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)),$$

$$\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$$

$\int u\cdot v'=[u\cdot v]-\int u'\cdot v$ mit u als dem Einfacheren

$a_0=2_{c0}\ ;\ a_k=c_k+c_{-k}\ ;\ b_k=j(c_k-c_{-k})\ ;$

$c_k=\frac{1}{2}(a_k-jb_k)\ ;\ c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+jb_k)$

Resultierende Schwingungen:

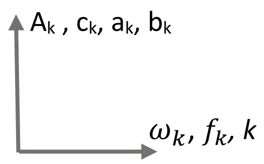
$$y(t)=\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cdot\cos(k\omega_o t+\varphi_k)$$

$$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\qquad\varphi_k=-arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Linienspektrum:

$$\omega_k=\frac{2\pi\cdot k}{T_0}\qquad f_k=\frac{k}{T_0}$$

Abstand der Frequenzlinien: $\Delta\omega=\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$



Formelsammlung Signale und Systeme

Fourier-Transformation

Transformation: $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ von Zeitbereich in Frequenzbereich

Rücktransformation: $y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ von Frequenzbereich in Zeitbereich

Schreibweise: $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; Y(\omega)$

Hilfreich: Funktionen in Abschnitte einteilen und Teile für y = 0 rauskürzen

Funktion y(t) gerade = reelles $Y(\omega)$, Funktion y(t) ungerade = auch imaginär!

Hilfreiche Beziehungen für Komplexe Zahlen:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \qquad \cos(b\omega + c) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{j\cdot(b\omega + c)} + e^{-j\cdot(b\omega + c)}\right) \qquad \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(j\omega t)\, dt + j\left(-\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(j\omega t) dt\right)$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} y_g(t) \cos(j\omega t)\, dt + j\left(-2\int_{0}^{\infty} y_g(t) \sin(j\omega t) dt\right)$$

Wenn $y(t)$ reell und gerade ist, dann ist Y(ω) reell und gerade

Wenn $y(t)$ reell und ungerade ist, dann ist Y(ω) imaginär und ungerade

Weitere hilfreiche Beziehung: $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega$ eine Rücktrafo

Rechenregeln:

Kategorie	Zeitbereich	Frequenzbereich
Basis-Korrespondenz	$y(t)$	$Y(\omega)$
Linearität	$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$	$c_1 Y_1(\omega) + c_2 Y_2(\omega)$
Verschiebung Zeitbereich	$y(t-a),\quad a \in \mathbb{R}$	$Y(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, a\, \omega}$
Verschiebung Frequenzbereich	$y(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\, a\, t}$	$Y(\omega - a),\quad a \in \mathbb{R}$
Zeitskalierung	$y(at),\quad a \neq 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} Y\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Zeitumkehr	$y(-t)$	$Y(-\omega)$
Komplexe Konjugation	$y^*(t)$	$Y^*(-\omega)$
Symmetrie / Dualität	$Y(t)$	$2\pi\, y(-\omega)$
Gerade/ungerade	reell, gerade	reell, gerade
	reell, ungerade	imaginär, ungerade
	imaginär, gerade	imaginär, gerade
	imaginär, ungerade	reell, ungerade

Kategorie	Zeitbereich	Frequenzbereich
Erste Ableitung von y	$\dot{y}(t)$	$\mathrm{j}\omega\, Y(\omega)$
Zweite Ableitung von y	$\ddot{y}(t)$	$(\mathrm{j}\omega)^2\, Y(\omega) = -\omega^2\, Y(\omega)$
n-te Ableitung von y, $n \in \mathbb{N}$	$y^{(n)}(t)$	$(\mathrm{j}\omega)^n\, Y(\omega)$
Erste Ableitung von Y	$-\mathrm{j}\, t\, y(t)$	$Y'(\omega)$
n-te Ableitung von Y	$(-\mathrm{j}\, t)^n\, y(t)$	$Y^{(n)}(\omega)$
Integration im Zeitbereich	$\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, \mathrm{d}\tau$	$\frac{Y(\omega)}{j\omega} + \pi Y(0)\delta(\omega)$
Faltung im Zeitbereich	$(y_1 * y_2)(t)$	$Y_1(\omega) Y_2(\omega)$
Multiplikation im Zeitbereich	$y_1(t)\, y_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}(Y_1 * Y_2)(\omega)$
Glättung Zeitbereich	$\frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} y(\tau)\mathrm{d}\tau$	$Y(\omega)\frac{\sin(\omega\, a)}{\omega\, a}$

Korrespondenzen:

Funktion	Zeitbereich	Frequenzbereich
Eins	1	$2\pi\, \delta(\omega)$
Konstante	c	$2\pi\, c\, \delta(\omega)$
Signum	$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$
Einheitssprung	$h(t)$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)$
Einheitsimpuls	$\delta(t)$	1
Ableitung Einheitsimpuls	$\delta^{(n)}(t)$	$(\mathrm{j}\omega)^n$
Impulsfolge/Dirac-Kamm	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$
Rechteck-Impuls	$\mathrm{rect}(t)\quad (-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2})$	$\frac{2}{\omega} \sin\frac{\omega}{2} = \mathrm{si}\frac{\omega}{2}$
	$\mathrm{rect}(\frac{t}{2T})\quad (-T \le t \le T)$	$\frac{2}{\omega} \sin(\omega T) = 2T\, \mathrm{si}(\omega T)$
Dreieck-Impuls	$\mathrm{tri}(t)\quad (-1 \le t \le 1)$	$\frac{4}{\omega^2}(\sin(\frac{\omega}{2}))^2 = (\mathrm{si}(\frac{\omega}{2}))^2$
	$\mathrm{tri}(\frac{t}{T})\quad (-T \le t \le T)$	$\frac{4}{\omega^2 T}(\sin(\frac{\omega T}{2}))^2 = T\,(\mathrm{si}(\frac{\omega T}{2}))^2$

Funktion	Zeitbereich	Frequenzbereich
Potenzfkt.	t^n	$2\pi\, \mathrm{j}^n\, \delta^{(n)}(\omega)$
Inverse Potenzfkt.	$\frac{1}{t^n}$	$-\pi\, \mathrm{j}\frac{(-\mathrm{j}\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{sign}(\omega)$
NN.	$\frac{1}{t^2+a^2},\quad a > 0$	$\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a\,\lvert\omega\rvert}$
Komplexe Exp.fkt.	$\mathrm{e}^{j\, a\, t}$	$2\pi\, \delta(\omega - a)$
Abklingende Exp.fkt., $t \ge 0$	$\mathrm{e}^{-at}\, h(t),\quad a > 0$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega + a}$
Abklingende Potenzfkt.	$\frac{t^n}{n!}e^{-at}h(t),\, a > 0,\, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(\mathrm{j}\omega + a)^{n+1}}$
Exponential-Impuls	$e^{-a\lvert t\rvert},\quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
NN.	$e^{-a\lvert t\rvert}\, \mathrm{sign}(t),\ a > 0$	$-\mathrm{j}\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$
Gauß-Fkt.	$\mathrm{e}^{-at^2},\quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4a}},\quad a > 0$	$2\pi\, \mathrm{e}^{-a\omega^2}$

Funktion	Zeitbereich	Frequenzbereich
Cosinus	$\cos(b\,t)$	$\pi\left(\delta(\omega + b) + \delta(\omega - b)\right)$
Sinus	$\sin(b\,t)$	$\pi\mathrm{j}\left(\delta(\omega + b) - \delta(\omega - b)\right)$
Einseitiger Cosinus	$\cos(b\,t)\, h(t)$	$\frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega + b) + \delta(\omega - b)\right) + \frac{\mathrm{j}\omega}{b^2-\omega^2}$
Einseitiger Sinus	$\sin(b\,t)\, h(t)$	$\frac{\pi\mathrm{j}}{2}\left(\delta(\omega + b) - \delta(\omega - b)\right) + \frac{b}{b^2-\omega^2}$
Abkling. Cosinus	$\mathrm{e}^{-at}\cos(bt)\, h(t),\quad a > 0$	$\frac{\mathrm{j}\omega + a}{(\mathrm{j}\omega + a)^2 + b^2}$
Abkling. Sinus	$\mathrm{e}^{-at}\sin(bt)\, h(t),\quad a > 0$	$\frac{b}{(\mathrm{j}\omega + a)^2 + b^2}$
Wellenpaket	$\cos(a\,t)\, \mathrm{rect}(\frac{t}{2T})$	$\frac{\sin((\omega + a)T)}{\omega + a} + \frac{\sin((\omega - a)T)}{\omega - a}$
Si-Fkt.	$\mathrm{si}(b\,t) = \frac{\sin(b\,t)}{b\,t}$	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}\, \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2b})$
Sinc-Fkt.	$\mathrm{sinc}(b\,t) = \frac{\sin(\pi b\, t)}{\pi b\, t}$	$\frac{1}{\lvert b\rvert}\, \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi\, b})$

Theorem von Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 \, d\omega$$

Signalenergie Energiedichtespektrum

Leckeffekt: (es gibt 2 Möglichkeiten zum Mildern)

1) längere Beobachtungsdauer anwenden

2) mit Gauß-Impuls e^{-at^2} multiplizieren

Differentialgleichung und Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \\ = b_m y^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$$\begin{aligned} a_n (\mathrm{j}\omega)^n Y(\omega) + a_{n-1} (\mathrm{j}\omega)^{n-1} Y(\omega) + \cdots + a_1 \, \mathrm{j}\omega \, Y(\omega) + a_0 \, Y(\omega) \\ = b_m (\mathrm{j}\omega)^m U(\omega) + b_{m-1} (\mathrm{j}\omega)^{m-1} U(\omega) + \cdots + b_1 \, \mathrm{j}\omega \, U(\omega) + b_0 \, U(\omega) \end{aligned}$$

bzw.

$$Y(\omega) = \underbrace{\frac{b_m (\mathrm{j}\omega)^m + b_{m-1} (\mathrm{j}\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 \, \mathrm{j}\omega + b_0}{a_n (\mathrm{j}\omega)^n + a_{n-1} (\mathrm{j}\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 \, \mathrm{j}\omega + a_0}}_{G(\mathrm{j}\omega)} U(\omega) = G(\mathrm{j}\omega) \, U(\omega)$$

Harmonisches Eingangssignal

$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u)$

Systemantwort nach Abklingen von Übergangsbewegungen

$y(t) \to A(\omega)\hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u(\omega))$

Frequenzgang

$$G(j\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = Re[G(j\omega)] + j \cdot Im[G(j\omega)]$$

Amplitudengang

$$A(\omega) = \left| \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{u}(\omega)} \right| = |G(j\omega)| = \sqrt{(Re[G(j\omega)])^2 + (Im[G(j\omega)])^2}$$

Phasengang

$$\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_u = arg G(j\omega) = arctan \frac{Im[G(j\omega)]}{Re[G(j\omega)]}$$

Umrechnung der Verstärkung

$A_{dB} = 20 \log_{10}(A)$ einheitslos → dB

$A = 10^{(A_{dB})/20}$ dB → einheitslos

Laplace-Transformation

Transformation: $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$ mit Laplace-Variable $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C};\ \sigma, \omega \in \mathbb{R}$

Rücktransformation: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{st}\,ds$

Schreibweise: $y(t)$ $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ Y(s)

Kategorie	Zeitbereich	Frequenzbereich
Basis-Korrespondenz	$y(t)$	$Y(s)$
Linearität	$c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$	$c_1Y_1(s) + c_2Y_2(s)$
Verschiebung Zeitbereich	$y(t-a),\quad a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$	$Y(s)\mathrm{e}^{-as}$
Verschiebung Frequenzbereich	$y(t)\mathrm{e}^{-at}$	$Y(s+a),\quad a \in \mathbb{C}$
Zeitskalierung	$y(at),\quad a > 0,\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}Y\left(\frac{s}{a}\right)$
Cosinus-Multiplikation	$y(t)\ \cos(bt)$	$\frac{1}{2}\left(Y(s-\mathrm{j}b) + Y(s+\mathrm{j}b)\right)$
Sinus-Multiplikation	$y(t)\ \sin(bt)$	$\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(Y(s-\mathrm{j}b) - Y(s+\mathrm{j}b)\right)$
periodische Zeitfkt.	$y(t)$ mit $y(t) = y(t+T)\ \forall t$	$\bar{Y}(s)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}$ mit $\bar{y}(t) = y(t)(h(t) - h(t-T))$

Kategorie	Zeitbereich	Laplace-Bereich
Erste Ableitung von y	$\dot{y}(t)$	$sY(s) - y(0)$
Zweite Ableitung von y	$\ddot{y}(t)$	$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$
n-te Ableitung von y	$y^{(n)}(t)$	$s^nY(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}y^{(k)}(0)$
Erste Ableitung von Y	$-t\,y(t)$	$Y'(s)$
n-te Ableitung von Y	$(-t)^n\,y(t)$	$Y^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}Y(s)$
Faltung im Zeitbereich	$y_1(t) * y_2(t)$	$Y_1(s)\,Y_2(s)$
Mutliplikation im Zeitbereich	$y_1(t)\,y_2(t)$	$Y_1(s) * Y_2(s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} Y_1(u)\,Y_2(s-u)\,\mathrm{d}u$

Grenzwertsätze:

Anfangswert: $\lim_{t\to 0+} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s)$ Endwert: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$

Die Grenzwertsätze dürfen nur angewandt werden, wenn die Grenzwerte von y(t) jeweils existieren und endlich sind.

Pole, Nullstellen

LTI-Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ $\begin{matrix} wenn = 0\ dann\ Nullstelle \\ wenn = 0\ dann\ Polstelle \end{matrix}$

Systemantwort

Impulsantwort $Y(s) = G(s)$

$\to y(t) = g(t) \to u(t) = \delta(t)$

Sprungantwort $Y(s) = G(s)\frac{1}{s}\left(da\ U(s) = \frac{1}{s}\right)$

$\to y(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau \to u(t) = h(t)$

Systemantwort $Y(s) = G(s)U(s)$

$\to y(t) = g(t) \cdot u(t)$

I) Entwicklungssatz nach Heaviside („Zuhaltemethode“)

$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Z(p_i)}{N'(p_i)} e^{p_i \cdot t}$ funktioniert nur wenn die Pole verschieden sind

II) Partialbruchzerlegung:

1.) Polstellen ermitteln mit (N(s) = 0)

2.) Nenner N(s) in ein Produkt zerlegen $N(s) = c\,(s-p_1)^{\alpha_1}\,(s-p_2)^{\alpha_2}\ \cdots\ (s-p_m)^{\alpha_m}$

3.) Wenn Zählergrad = Nennergrad → Zähler mit „0“ addieren und einzeln durch Nenner teilen, sonst überspringen

4.) Schreibweise ändern

Wenn nur einfache Polstellen:

- Wenn nur reelle Polstellen: $Y(s) = \frac{a_1}{s-p_1} + \frac{a_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{a_m}{s-p_m}$
- Wenn auch konjugiert-komplexe Polstellen: $Y(s) = \frac{a_1}{s-q_1} + \frac{a_2}{s-q_2} + \cdots + \frac{b_1 s + c_1}{s^2+d_1 s + e_1} + \frac{b_2 s + c_2}{s^2 + d_2 s + e_2} + \cdots$

Wenn mehrfache Polstellen:

- Erster Teil relle Polstellen mit Häufigkeit α_i, zweiter Teil konjugiert komplexe Polstellen Häufigkeit β_i

$$
\begin{aligned}
Y(s) = {} & \frac{a_{11}}{s-q_1} + \frac{a_{12}}{(s-q_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1\alpha_1}}{(s-q_1)^{\alpha_1}} \\
& + \frac{a_{21}}{s-q_2} + \frac{a_{22}}{(s-q_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2\alpha_2}}{(s-q_2)^{\alpha_2}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{b_{11}s + c_{11}}{s^2 + d_1 s + e_1} + \frac{b_{12}s + c_{12}}{(s^2 + d_1 s + e_1)^2} + \cdots + \frac{b_{1\beta_1} + c_{1\beta_1}}{(s^2 + d_1 s + e_1)^{\beta_1}} \\
& + \frac{b_{21}s + c_{21}}{s^2 + d_2 s + e_2} + \frac{b_{22}s + c_{22}}{(s^2 + d_2 s + e_2)^2} + \cdots + \frac{b_{2\beta_2} + c_{2\beta_2}}{(s^2 + d_2 s + e_2)^{\beta_2}} \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

Ein komplexes Polpaar j,-j ist ein Term

Der Nenner hier entspricht dem Nenner Term des Paares

5.) Unbekannten im Zähler bestimmen

$$\delta = \frac{d}{2} \qquad \omega = \sqrt{e - \frac{d^2}{4}}$$

- Durchmultiplizieren der Gleichung mit dem Nenner N(s)
- Reelle Polstellen einsetzen für s (Unbekannten vielleicht schon jetzt bestimmt)
- Sortieren der Gleichung (s^3 … s^2 … s …)
- Mittels Koeffizientenvergleiches die Unbekannten bestimmen

6.) Rücktransformation durchführen

- Errechneten Unbekannten einsetzen
- Korrespondenz-Tabelle für Umformung verwenden
- Konstanten wie zum Beispiel im Zähler werden einfach im Ergebnis angefügt
- Immer für $t \geq 0$?

Frequenzgang:

$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$ also bei der Laplace-Variablen wird $\sigma = 0$ uns somit ist $s = j\omega$

Von DGL zu Y(s): (G(s) ist ein Teil davon)

$a \cdot \ddot{y}(t) + b \cdot \dot{y}(t) + c \cdot y(t) = z \cdot u(t)$

- $\ddot{y}(t), \dot{y}(t), y(t)$, … ersetzen durch Korrespondenz-Tabelle
- Anfangsbedingungen einsetzen und vereinfachen
- Äquivalent umformen Y(s) auf linker Seite, Rest auf rechter Seite

$$Y(s) = \frac{rechte\ Seite}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c}$$

$$m\ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + ky(t) = u(t), \qquad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{ms^2 + ds + k}} U(s) + \frac{my_0 s + my_1 + dy_0}{ms^2 + ds + k}$$

Verständnisfragen:

Signal = Form von Nachricht/Info mit Bedeutung
System = Element das Funktionalitäten repräsentiert
Konkrete Beispiele für technisch genutzte Signale: z.B. Temperatur, Stromstärke, Sprache, Helligkeit eines Bildpunktes, Herzschlags Geräusch, Bitfolge, Motordrehzahl, Position eines Fahrzeugs

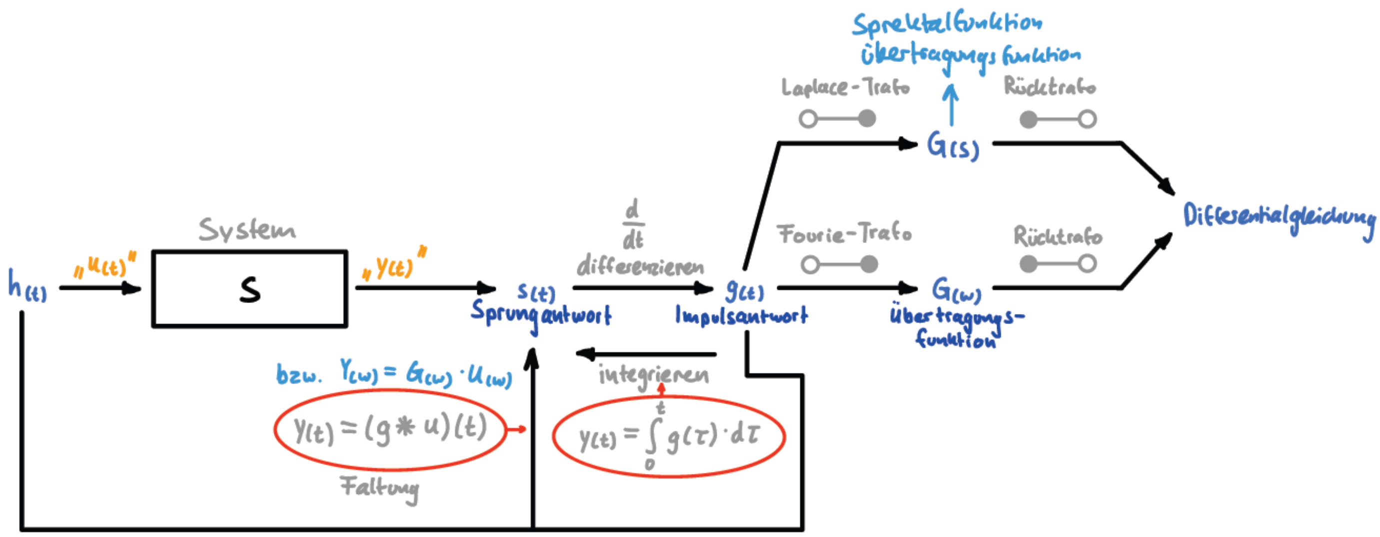
Klassifizierung eines Signals: kontinuierlich/diskret, analog/digital, periodisch/aperiodisch, deterministisch/zufällig, Art der Repräsentierung (Fkt./grafischer Kurvenverlauf/Folge)

Beispiele für dynamische Systeme: z.B. Fahrzeug, Flugzeug, Drohne, Satellit, Roboter, Strommessgerät, Temperaturfühler, Mobiltelefon, chemischer Reaktor, Wetter, Klima

Elemente eines Systems: Systemgrenze, Zustände, Parameter, Ausgänge, Eingänge, Modell, Anfangs- bzw. Randbedingungen

Systemtheorie: klausalen Zusammenhänge zwischen Eingängen und Ausgängen

Totzeit: der Eingang eines Systems wirkt sich erst nach Ablauf einer bestimmten Zeit (Totzeit) auf einen Ausgang aus (z.B. Förderband mit Kies, Dusche am Morgen oder Rohrleitung mit Wasser)



Basics:

Mitternachtsformel: $0 = ax^2 \cdot bx + c \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$

$e^0 = 1$

$e^\infty = \infty$

$e^{-\infty} = 0$