

Formelsammlung Regelungstechnik 1

Funktionen:

harmonische Schwingung: $y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

periodisch, wenn: $y(t) = y(t + T)$ mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$y(t) = (nachher - vorher) \cdot h(t \pm c)$ **Erstes Mal mit Vorsatz (vorher)+**

$$y(t) = \pm a \cdot f(\pm b \cdot t \pm c) \pm d$$

$$y(t) = \pm a \cdot e^{\pm b \cdot t \pm c} \pm d$$

$\pm = (+ \text{ normal}) (- \text{ Spiegelung: Spiegelachse horizontal})$

$a = \text{vertikale: } (a > 1 \text{ Streckung}) (0 < a < 1 \text{ Stauchung})$

$\pm = (+ \text{ normal}) (- \text{ Spiegelung: Spiegelachse vertikal})$

$b = \text{horizontale: } (0 < b < 1 \text{ Dehnung}) (b > 1 \text{ Stauchung})$

Ursprung!

$c = \text{horizontale Verschiebung } (+ \text{ links}) (- \text{ rechts})$

$d = \text{vertikale Verschiebung } (+ \text{ oben}) (- \text{ unten})$

Reihenfolge: $c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d$

gerader Anteil: $x_g(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$

ungerader Anteil: $x_u(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

mit Regel: $-f(\text{alle Vorzeichen drehen})$

Kenngrößen von Signalen:

Extremwerte:

Maximum: $y_{max} = \max_t y(t)$

Supremum: $y_{sup} = \sup_t y(t)$ kleinste obere Schranke falls max \neq exist.

Minimum: $y_{min} = \min_t y(t)$

Infimum: $y_{inf} = \inf_t y(t)$ größte untere Schranke falls minimum \neq exist.

Mittelwerte: im Intervall $[a, b]$ oder von T

Mittel/Gleichwert: $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot dt$

Gleichrichtwert: $|\bar{y}| = \frac{1}{b-a} \int_a^b |y(t)| \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T |y(t)| \cdot dt$

Quadratisches Mittel oder Effektivwert:

$$y_{eff} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b (y(t))^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (y(t))^2 \cdot dt}$$

Energie eines Signals:

Reellen skalaren Signal: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \cdot dt$

Komplexes skalaren Signal: $E = \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) \cdot y(t) \cdot dt$

Vektoriell Signal: $E = \int_{-\infty}^{\infty} \|y(t)\|^2 \cdot dt$ mit $\|y(t)\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$

Energiesignal wenn: $E < \infty$; $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} y(t) = 0$

Leistung eines Signals:

Durchschnittsleistung reellen skalaren: $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |y(t)|^2 \cdot dt$

Momentanleistung: $P(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} |y(\tau)|^2 d\tau = |y(t)|^2$

Leistungssignal wenn: $0 < P < \infty$

Taylor-Reihe:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k$$

Delta-Distribution: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t) \cdot dt = f(0)$

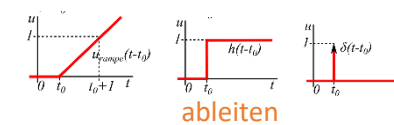
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1 \quad \delta(-t) = \delta(t) \quad \delta(ct) = \frac{1}{|c|} \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) f(t) dt = (-1)^n \cdot f^{(n)}(0)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) \cdot d\tau = h(t) \quad \int_{-\infty}^t \delta(\tau-a) f(\tau) d\tau = f(a) h(t-a)$$

$$\frac{d}{dt} h(t) = \dot{h}(t) = \delta(t) \quad h(t) = \text{Einheitssprung, Sprungfunktion}$$

$$\ddot{u}_{\text{rampe}}(t-t_0) = \dot{h}(t-t_0) = \delta(t-t_0)$$



Basics:

Mitternachtsformel:

$$0 = ax^2 + bx + c$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

$$e^0 = 1 ; e^{\infty} = \infty ; e^{-\infty} = 0$$

3-er Binom:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{Rechentrick: } \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{c}{b}} = \frac{a}{b+c}$$

Umrechnung der Verstärkung

$$A_{dB} = 20 \log_{10}(A)$$

$$A = 10^{(A_{dB})/20}$$

Mathematisch: \cup negativ \cup positiv

Formelsammlung Regelungstechnik 1

Eigenschaftsüberprüfung: mit Funktion aus $u(t)$ und $y(t)$

Überprüfung Homogenität: (Systemgleichung gilt für u und y)

Einsetzen von cy und cu statt y und u in Gleichung \rightarrow gilt es für $c \in \mathbb{R}$

Überprüfung Additivität: (Systemgleichung gilt für u_1 y_1 bzw. u_2 y_2)

Einsetzen von $y_1 + y_2$ und $u_1 + u_2$ statt y und $u \rightarrow$ gilt die Gleichung noch?

Überprüfung Zeitinvarianz: (Verhalten vom Startpunkt unabhängig)

Einsetzen von $u(t - T)$ und $y(t - T)$ statt $u(t)$ und $y(t)$

Transformation: $\tau = t - T$ für beliebige $T \in \mathbb{R}$

Jedes weitere t in Gleichung durch $t = \tau + T$ ersetzen (nicht dt)

Überprüfung Kausalität: (keine Zukunftsvorhersage)

$$u(t) = \begin{cases} \neq 0 & t > 0 \\ = 0 & t \leq 0 \end{cases}; y(t) = \begin{cases} \neq 0 & t > 0 \\ = 0 & t \leq 0 \end{cases}; y(t) = f(u_{(t+c)}) \text{ mit } c > 0$$

($y(t) = \dot{u}(t)$ ist akausal da schon bei $t = 0$ ein wert vorliegt)

Überprüfung Bibo-Stabilität: Zwei Möglichkeiten:

$$1.) \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \cdot dt < \infty$$

Option: den Graph im Diagramm betrachten \rightarrow negative Flächen hochklappen und Betragsfläche ermitteln

$$2.) |u_{(t)}| \leq u_{\max} < \infty \rightarrow |y_{(t)}| = |Gleichung| < \infty$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; |a + b| \leq |a| + |b|; |a - b| \leq |a| + |b|$$

|Gleichung| sollte vollständig nach oben aufgedröseln werden

Beschränkte Eingabe führt zu beschränkter Ausgabe \rightarrow keine unphysikalische Werte

Gleichung	Eigenschaften
$a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t)$	linear, zeitinvariant, kausal
$a_1 \dot{y}(t) + a_0 (y(t))^2 = u(t)$	nichtlinear, zeitinvariant, kausal
$a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) + 2 = u(t)$	nichtlinear, zeitinvariant, kausal
$a_1 \dot{y}(t) + a_0 t y(t) = u(t)$	linear, zeitvariant, kausal
$a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t+2)$	linear, zeitinvariant, akausal

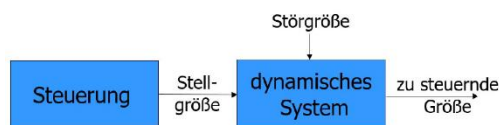
Links und rechts vom = selbe Regel

$$Y(s) = G(s)U(s) \text{ mit } G(s) \dots$$

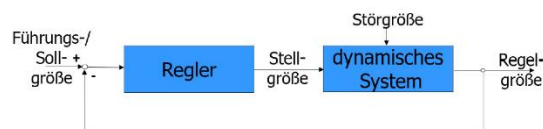
$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 5} \text{ linear, zeitinvariant, kausal}$$

$$G(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + 5s + 5}} \text{ linear, zeitvariant, kausal}$$

Steuerung: offener Wirkungskreis

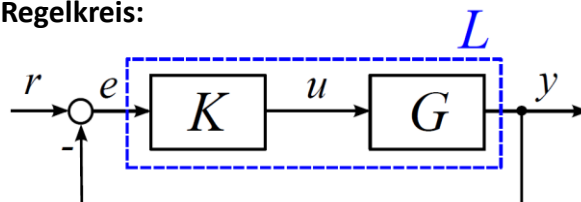


Regelung: geschlossener Wirkungskreis



Regelgüte: Regelungstechnik ist ein Kompromiss

Regelkreis:



Normierung: bei $\dot{y} \rightarrow \frac{d}{dt}$, $\ddot{y} \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}$ ausklammern!

Orginalgleichung: $y = c \cdot u$

Erweitern: $y \cdot \frac{f_y}{f_y} = c \cdot u \cdot \frac{f_u}{f_u} \quad | : f_y$

Umformen: $\frac{y}{f_y} = c \cdot \frac{f_u}{f_y} \cdot \frac{u}{f_u}$

Normierte Gleichung: $\bar{y} = \bar{c} \cdot \bar{u}$

Bei $G(s)$ ist $N(s)$ die charakteristische Gleichung

1.) Methode mit Berechnung Eigenwerte λ :

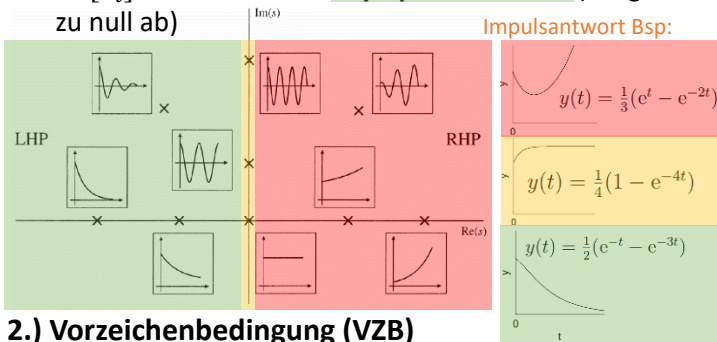
Homogene Dgl.: $a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Bei $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \rightarrow N(s) = 0$ das ist die ch. Gleichung

λ herausfinden (wenn komplex, dann auch konjugierte) „hier werden Pole berechnet!“

- $Re[\lambda_i] > 0$ für mindestens ein i , oder ein Eigenwert mit $Re[\lambda_i] = 0$ tritt mehrfach auf \rightarrow **instabil** (wächst unbeschränkt)
- $Re[\lambda_i] \leq 0$ für alle i , und alle Eigenwerte mit $Re[\lambda_i] = 0$ treten nur einfach auf \rightarrow **grenzstabil** $s_{1,2} = \pm j$ oder 0
- $Re[\lambda_i] < 0$ für alle $i \rightarrow$ **asymptotisch stabil** (klingt zu null ab)



2.) Vorzeichenbedingung (VZB)

Herausfindbar: as. stabil / nicht as. stabil

Char. Gl. $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$, $a_n > 0$

(a_0 darf dabei nicht 0 sein) (Durchmultiplizieren möglich)

Möglich bis zum Grad 2, nachweisbar!

as. stabil ausschließbar bei egal welcher Grad wenn < 0

3.) Hurwitz-Kriterium

Char. Gl. $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$, $a_n > 0$

Für Polynom Grad n eine $n \times n$ Matrix aufstellen

$$H = \begin{bmatrix} a_8 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_8 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_8 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_8 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$a_{\text{höchste}}$ nicht aufstellen Bei 3x3 Matrix $\Delta_3 = \Delta_2 \cdot a_0$
Determinanten Δ_i ausrechnen, wenn alles positiv und auch nicht 0

\rightarrow dann ist es as. stabil sonst nicht as. stabil

Proper: Grenzwert $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = c < \infty$; $c \in \mathbb{C}$; existiert

Für LTI-Übertragungsfkt.: Zählerordnung $m \leq$ Nennerordnung n
 = **kausal** = **technisch realisierbar** (auch bei Regler-prüfung anwendbar)

streng Proper: Grenzwert $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$

Für LTI-Übertragungsfkt.: Zählerordnung $m <$ Nennerordnung n
 = **nicht sprunghaft**

Schwingungsfähig: Pole mit $Re \geq 0$ und $Im \neq 0$

Phasenminimumsystem:

keine Totzeit und Nullstelle $Re[q_i] < 0$ und Polstelle $Re[p_i] < 0$

Stationärer Zustand:

- Bei DGL n-ter Ordnung mit const. $u_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$
 den **stationären Ausgang** $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{b_0}{a_0} u_\infty$
- **Stationärer Zustand** im Laplace-Bereich bei $Y(s) = G(s)U(s)$ nur Pole mit $Re > 0$ plus $s = 0$ bei einem Pol
 $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s)$
- **Stationäre Regelabweichung** mit Grenzwertsatz:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ (klein, wenn $G(j\omega)K(j\omega) \gg 1$)
- Bei $u(t) = h(t)$, $U(s) = 1/s$ **stationäre Verstärkung**

$$K_{DC} = y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

Ortskurve/Bodediagramm: kleine Frequenz;
 Verstärkung ablesen; Umrechnen $10^{dB/20}$; VZ
 ermitteln im Phasengang $\rightarrow 180^\circ = \text{negativ}$, $0^\circ = \text{positiv}$

- Für Berechnung des **Startwertes** $y(0)$
 $y(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)U(s)$
Ortskurve/Bodediagramm: große Frequenz;
 Verstärkung ablesen; Umrechnen $10^{dB/20}$; VZ
 ermitteln im Phasengang $\rightarrow 180^\circ = \text{negativ}$, $0^\circ = \text{positiv}$

Frequenzgang: $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = Re[G(j\omega)] + j \cdot Im[G(j\omega)]$

Amplitudengang: $A(\omega) = \left| \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{u}(\omega)} \right| = |G(j\omega)| = \sqrt{(Re[G(j\omega)])^2 + (Im[G(j\omega)])^2}$

Phasengang: $\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_u(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctan \frac{Im[G(j\omega)]}{Re[G(j\omega)]}$

Rechenregeln bei Bodediagrammen

$$\log |G_1 G_2| = \log |G_1| + \log |G_2|$$

$$\arg(G_1 G_2) = \arg G_1 + \arg G_2$$

$$\log |-G| = \log |G|$$

$$\arg(-G) = \arg G \pm 180^\circ$$

$$\log |G_1 + G_2| \approx \max[\log A_1, \log A_2]$$


$$\arg(G_1 + G_2) \approx \max[\arg G_1, \arg G_2]$$

$$\log |G^{-1}| = -\log |G|$$

$$\arg(G^{-1}) = -\arg G$$

Formelsammlung Regelungstechnik 1

Regelkreisglieder: Regler können durch mal kombiniert werden

Abk.	DGL	Übertragungsfunktion	Loop-Shaping / Auswirkung Grafisch
P	$y = K_p u$	$G(s) = K_p$	Bode: Amplitude verschieben um $ 20 \log_{10}(K_p) \rightarrow (K_p > 1 \text{ nach oben}) (K_p < 1 \text{ nach unten})$, Phase bleibt gleich, Ortskurve aufgeblähen/zamziehen
PT₁	$T_1 \dot{y} + y = K_p u$ $y(0) = 0$	$G(s) = \frac{K_p}{T_1 s + 1}$	
PT₂	$T_2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = K_p u$ $\ddot{y} + 2\zeta \omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = K_p \omega_n^2 u$ $y(0) = \dot{y}(0) = 0$	$G(s) = \frac{K_p}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$	Schwingungsfähig: $T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2}$
PT_t	$y(t) = K_p u(t - T_t)$	$G(s) = K_p e^{-T_t s}$	
PT₁T_t	$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K_p u(t - T_t)$	$G(s) = \frac{K_p}{T_1 s + 1} e^{-T_t s}$	
I	$y = K_I \int_0^t u(\tau) d\tau$ $\dot{y} = K_I u$	$G(s) = \frac{K_I}{s}$	I-Anteil bewirkt: Bode: niedrige Frequenz Amplitude gegen unendlich
IT₁	$T_1 \dot{y} + y = K_I \int_0^t u(\tau) d\tau$	$G(s) = \frac{K_I}{s(T_1 s + 1)}$	<div>  <p>T_t legt die Eckfrequenz des PI-Reglers fest. Weit unterhalb der ω_c so wird die Regelgüte verbessert, ohne die Stabilitätsreserve nachteilig zu beeinflussen</p> </div>
D	$y = K_D \dot{u}$	$G(s) = K_D s$	
DT₁	$T_1 \dot{y} + y = K_D \dot{u}$	$G(s) = \frac{K_D s}{(T_1 s + 1)}$	
PI	Erhöhen von K_p oder verkleinern von T_I → kleinere Anstiegszeit, mehr Überschwingung	$G(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$	P-Anteil siehe oben, T_I verändert Phasengang im Bode für Frequenzen $> \omega = 2\pi/T_I$ keine wesentliche Phasendrehung mehr
PD		$G(s) = K_p + K_D s = K_p (1 + T_D s)$	
PDT₁	PPT_1 (Lag-Element) $K(s) = \frac{1}{v} \cdot \frac{s + v w}{s + w}, v > 1$	$G(s) = \frac{K_p + K_D s}{T_1 s + 1} = K_p \left(\frac{1 + T_D s}{T_1 s + 1}\right)$	A im Bereich ω_c absenken, ohne Phasenänderung, Phase in anderen Frequenzbereichen absenken
PDT₁	PDT_1 (Lead-Element) $K(s) = v \cdot \frac{s + w}{s + v w}, v > 1$	$G(s) = \frac{K_p + K_D s}{T_1 s + 1} = K_p \left(\frac{1 + T_D s}{T_1 s + 1}\right)$	Im Bereich ω_c Phasenreserve vergrößern ohne Verstärkung signifikant zu verändern Faustregel: $w \geq \omega_c$ und $w\sqrt{v} > \omega_c$
PA₁	Allpass	$G(s) = K_p \frac{1 - T_1 s}{1 + T_1 s}$	
PID	Kaum Oszillation, geringes Überschwingen, schnelles Einschwingen, relativ kleine Stellgröße	$G(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$	
PIDT₁		$G(s) = \frac{K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s}{T_1 s + 1} = K_p \frac{T_D s^2 + s + \frac{1}{T_I}}{s(T_1 s + 1)}$	

Grundformen von Regelkreismitgliedern:

P: proportionales Übertragungsverhalten

I: integrierendes Übertragungsverhalten

D: differenzierendes Übertragungsverhalten

Möglicherweise kombiniert mit: T_n Zeitverzögerung, T_t Totzeit

Reihenfolge PIDT_nT_t

Klassifikation Differentialgleichungen:

Basisform: $I \quad P \quad D$

$$T_n y^{(n)}(t) + \dots + T_1 \dot{y}(t) + T_0 y(t) = K_I \int_0^t u(\tau) d\tau + K u(t) + K_D \dot{u}(t) + \dots$$

- linke Seite: $T_0 y$ muss da sein → sonst umformen $\int, \frac{d}{dt}$
- linke Seite: $y^{(n)}$ bestimmt die Art der Verzögerung (T_n)
- rechte Seite: **I**-, **P**-, oder **D**-Glieder ermitteln
- rechte Seite: $u(t - T_t)$ statt $u(t)$ → Totzeit beteiligt

Klassifikation Übertragungsfunktion:

LTI-Basisübertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{\frac{K_I}{s} + K + K_D s + \dots}{T_n s^n + \dots + T_1 s + T_0}$$

Tipp: $\frac{1}{s^n} \rightarrow I_n$; $s^n \rightarrow D_n$

- Nenner: T_0 muss vorhanden sein, keine $1/s$ sonst Erweitern/Kürzen mit s auf obige Form bringen
- Nenner: s^n bestimmt die Art der Verzögerung (T_n)
 T_0 schreibt man nicht auf!
- Zähler: **I**-, **P**-, oder **D**-Glieder ermitteln
- Falls auf der rechten Seite der Dgl. der Term $e^{-T_t s}$ auftritt, ist eine Totzeit beteiligt

Für Pol- und Nst-Berechnung immer ursprüngliche Form benutzen!

$1/s$ runterziehen wenn alleine und kürzen a.p.

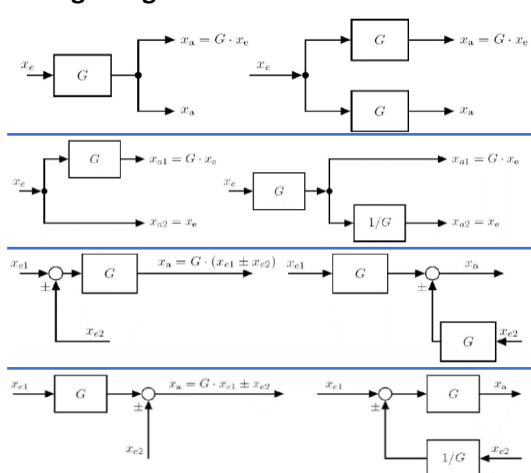
Elemente von Blockschaltbildern:

Signal mit Namen "y": 	Signalverzweigung: 	Einheitsverstärkung: $Y(s) = U(s)$
Summe: $Y(s) = U_1(s) + U_2(s)$ 	Differenz: $Y(s) = U_1(s) - U_2(s)$ 	System: $Y(s) = G(s)U(s)$

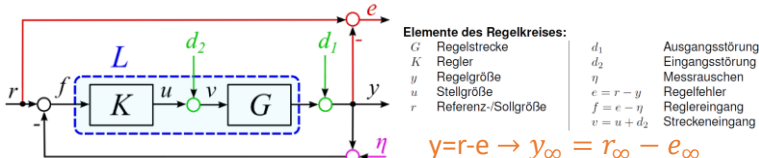
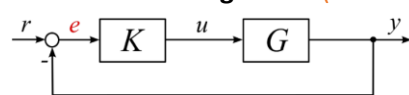
Vereinfachungen:

Parallelschaltung = Addition: $Y(s) = (G_1(s) + G_2(s)) U(s)$ 	Reihenschaltung = Multiplikation: $Y(s) = G_2(s)G_1(s) U(s)$
Rückführung mit positivem Feedback (Mitkopplung): $Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} U(s)$ <small>Merke: $Y = \frac{\text{Vorwärtspfad}}{1 - \text{Vorwärtspfad} \cdot \text{Rückwärtspfad}} U$</small>	Rückführung mit negativem Feedback (Gegenkopplung): $Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} U(s)$ <small>Merke: $Y = \frac{\text{Vorwärtspfad}}{1 + \text{Vorwärtspfad} \cdot \text{Rückwärtspfad}} U$</small>

Verlagerung:



Standard-Regelkreis (*zweites Erweitert):



Elemente des Regelkreises:

G	Regelstrecke	d_1	Ausgangsstörung
K	Regler	d_2	Eingangsstörung
y	Regelgröße	η	Messrauschen
u	Stellgröße	$e = r - y$	Regelfehler
r	Referenz-/Sollgröße	$f = e - \eta$	Reglereingang
		$v = u + d_2$	Streckeneingang

$$y = r - e \rightarrow y_{\infty} = r_{\infty} - e_{\infty}$$

Übertragungsweg	Übertragungsweg
$G_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = T(s)$	$G_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = S(s)$ „von r nach e“
$G_{y\eta}(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = -T(s)$	$G_{e\eta}(s) = \frac{E(s)}{H(s)} = T(s)$
$G_{yd1}(s) = \frac{Y(s)}{D_1(s)} = S(s)$	$G_{ed1}(s) = \frac{E(s)}{D_1(s)} = -S(s)$
$G_{yd2}(s) = \frac{Y(s)}{D_2(s)} = G(s)S(s)$	$G_{ed2}(s) = \frac{E(s)}{D_2(s)} = -G(s)S(s)$
$G_{ur}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = K(s)S(s)$	$G_{ud1}(s) = \frac{U(s)}{D_1(s)} = -K(s)S(s)$
$G_{u\eta}(s) = \frac{U(s)}{H(s)} = -K(s)S(s)$	$G_{ud2}(s) = \frac{U(s)}{D_2(s)} = -T(s)$

Beschreibung und Analyse von Regelkreisen

Übertragungsfunktionen im Standard Regelkreis

Offener Kreis: $L(s) = G_{yf}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = G(s)K(s)$

$L(s)$: Verhalten in Ortskurve manchmal gegeben!

Komplementäre Sensitivität: (ideal = 1)

$$T(s) = G_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

Sensitivität: (ideal = 0)

$$S(s) = G_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)}$$

Regelfehler: $E(s) = R(s) - Y(s) = S(s)R(s)$

Fall mit *Erweiterung:

$$Y(s) = T(s)R(s) + S(s)D_1(s) + G(s)S(s)D_2(s) - T(s) \cdot \eta$$

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)D_1(s) - G(s)S(s)D_2(s) + T(s) \cdot \eta$$

$$U(s) = K(s)S(s)R(s) - K(s)S(s)D_1(s) - T(s)D_2(s) - K(s)S(s) \cdot \eta$$

Interne Stabilität: (verschiedene Methoden)

Strecke: $G(s) = \frac{Z_G(s)}{N_G(s)}$ **Regler:** $K(s) = \frac{Z_K(s)}{N_K(s)}$

1.) instabiler oder grenzstabiler Pol-/Nullstellenkürzung

Gemeinsamer Faktor $s - \lambda$ mit $\text{Re}[\lambda] \geq 0$

zwischen Z_G und N_K bzw. Z_K und N_G

→ Ausschluss von interner asymptotischer Stabilität

2.) Char. Gleichung des Regelkreises

keine Kürzung der Brüche möglich

ch. Gleichung: $N_G(s)N_K(s) + Z_G(s)Z_K(s) = 0$

→ danach mit VZB oder Hurwitz Entscheidung machen

3.) Stabilität mit Übertragungsfunktionen (Pole betrachten)

$G(s)$ und $K(s)$ jeweils proper, $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)K(s) \neq -1$ und

$S(s), K(s), G(s)$ sind asymptotisch stabil

→ Regelkreis ist intern asymptotisch stabil

$G(s)$ und $K(s)$ jeweils proper und asymptotisch stabil

$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)K(s) \neq -1$ und $S(s)$ ist asymptotisch stabil

→ Regelkreis ist intern asymptotisch stabil

4.) Nyquist-Kriterium (Ortskurve/Amplitudengang gegeben)

Keine Pole müssen berechnet werden

- Gegeben: $G(s)$ und $K(s)$ ohne instabile Pol-/Null-Kürzung

- $L(s) = G(s)K(s)$ ist properes Eingrößensystem

- m_0 = Anzahl der Pole von $L(s)$ mit Realteil > 0 (instabil)

- a_0 = Anzahl der Pole von $L(s)$ auf der Imaginärachse (grenzstabil)

$$\Delta\varphi_{\text{soll}} = m_0 \cdot \pi + a_0 \cdot \frac{\pi}{2} = m_0 \cdot 180^\circ + a_0 \cdot 90^\circ$$

→ der Zeiger vom "kritischen Punkt" (-1,0) zur Ortskurve wird abgelesen $\varphi = \Delta\varphi_{\text{soll}}$ dann folgt:

→ geschlossener Regelkreis intern asymptotisch stabil

5.) Small-Gain-Kriterium (Ortskurve/Amplitudengang gegeben)

Vorraussetzung:

- $G(s)$ und $K(s)$ LTI ohne instabile Pol-/Nullstellenkürzungen

- $L(s) = G(s)K(s)$ ist properes Eingrößensystem

- $L(s) = G(s)K(s)$ ist asymptotisch stabil (falls ja oben skippen)

$|L(j\omega)| < 1 = 0\text{dB}$ für alle ω innerhalb Einheitskreis/ unter 0dB Linie

→ geschlossener Regelkreis intern asymptotisch stabil

Formelsammlung Regelungstechnik 1

Robustheit: (Wie weit zur Stabilitätsgrenze)

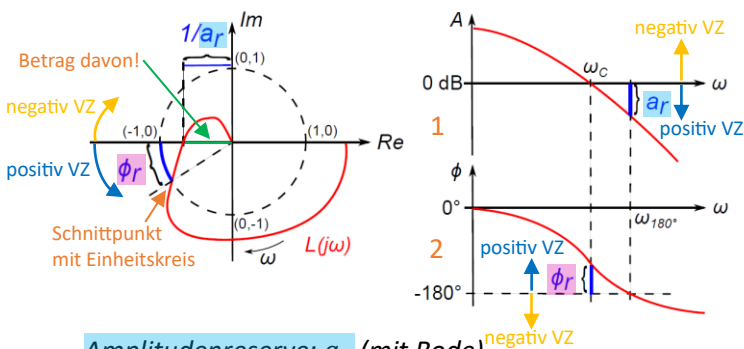
robust stabil: as. stabil auch bei großen Veränderungen

grenzstabil: $|L(j\omega)| = 1$ und $\Phi = \arg(L(j\omega)) = \pm\pi$

Stabilitätsreserven: mit beiden Diagrammen herausfindbar

Ortskurve von $L(j\omega)$

Bode-Diagramm von $L(j\omega)$



Amplitudenreserve: a_r (mit Bode)

- finde ω_{180° mit $\arg L(j\omega_{180^\circ}) = -\pi = -180^\circ$
- Bestimme $|L(j\omega_{180^\circ})|$ (Schnittpunkt mit Kennlinie ablesen)
- $a_r = \frac{1}{|L(j\omega_{180^\circ})|} = \frac{1}{S^{-1}(j\omega_{180^\circ}) - 1} = -20 \log_{10} |L(j\omega_{180^\circ})| \text{ dB}$

hohes a_r = gute Stabilitätsreserve gegenüber Modellunsicherheiten, langsame Systemantwort, geringe Bandbreite

Phasenreserve: ϕ_r (mit Bode)

- finde ω_c mit $L(j\omega_c) = 1 = 0 \text{ dB}$ (an 0dB Linie rübergehen bis Graph 1 kommt, dann runtergehen und Abstand zwischen Graph 2 und -180° ablesen)
- Bestimme $\arg L(j\omega_c)$
- $\Phi_r = 180^\circ + \arg L(j\omega_c) = \pi + \arg L(j\omega_c) = \pi + \arg(S^{-1}(j\omega_c) - 1)$

hohes ϕ_r = Stabilitätsreserve gegenüber Modellunsicherheiten, hohe Dämpfung

Abstand zum kritischen Punkt: $(-1,0)$

$d_r = \min_\omega |L(j\omega) + 1| = \min_\omega S^{-1}(j\omega)$ (kreisförmige Methode)

Verhalten im Zeitbereich

Kenngrößen einer Regelgröße

Stationärer Wert a

*Stationäre Abweichung $|r - a|$ (r ist Sollwert)

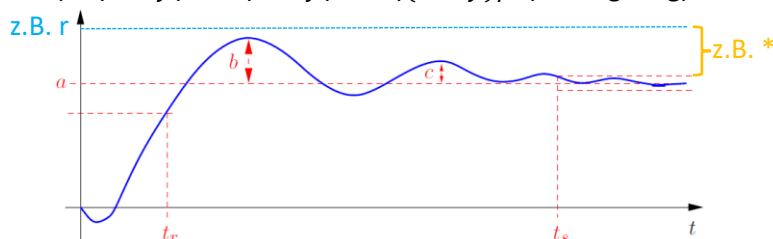
Überschwingen b (absolut) oder b/a (relativ)

Abklingverhältnis c/a

Anstiegsdauer t_r (bis $x\%$ von a erreicht)

Einschwingdauer t_s

(bis $|r - y|$ bzw. $|a - y|$ bzw. $|(a - y)/a|$ klein genug)



Stationärer Zustand (Eingangsgröße ändert nicht) $t \rightarrow \infty$

Beim Standardregelkreis!

mit Sollwert $r(t) \rightarrow r_\infty = \text{const.}$ und $d_1 = d_2 = \eta \equiv 0$:
 $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s)R(s)$, $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)R(s)$

mit Ausgangsstörung $d_1(t) \rightarrow d_{1,\infty}$ und $r = d_2 = \eta \equiv 0$:
 $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)D_1(s)$, $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} -sS(s)D_1(s)$

mit Sollwert $r(t) \rightarrow r_\infty$, Eingangsstörung $d_2(t) \rightarrow d_{2,\infty}$ und $d_1 = \eta \equiv 0$:
 $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s(S(s)R(s) - G(s)S(s)D_2(s))$

Anfangswert: (für Standardregelkreis!)

mit Sollwert $r(t) \rightarrow r_\infty = \text{const.}$ und $d_1 = d_2 = \eta \equiv 0$:

$$y(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sT(s)R(s)$$

Verhalten im Frequenzbereich:

Durchtrittsfrequenz

$$|L(j\omega_c)| = 1 = 0 \text{ dB}$$

Bandbreite (hoch = gut)

$$|T(j\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \approx -3 \text{ dB}$$

$[0, \omega_B] \rightarrow$ Regelung effektiv für Führungsfolge, Störunterdrückung

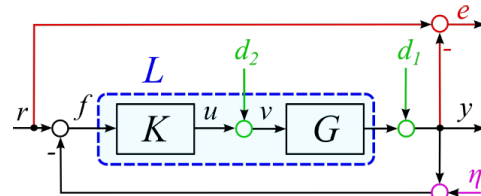
ω_B groß: kurze Anstiegszeit zum Sollwert/schnelle Führungsfolge, schnelles Ausregeln vieler Störungen,

Anregung hoher System-Frequenzen, großer Aufwand in Stellgröße, Messrauschenanfälligkeit, geringe Robustheit

ω_B klein: langsames System, geringer Stellaufwand, größere Robustheit

Zusammenfassung Regelkreis-Analyse:

- Interne Stabilität im Nominalfall, \rightarrow wenn ja, weiter
- Amplituden- und Phasenreserve \rightarrow wenn ok, weiter
- Durchtrittsfrequenz, Bandbreite
- Simulation
 $Y = TR$, $Y = SD_1$, $Y = GSD_2$, $E = SR$, $U = KSR$
- Stationäre Verstärkung $S(0), T(0), GS(0), KS(0)$



Klassische Reglerentwurfsmethoden:

Prinzip des internen Modells:

Regelfehler e im stationären Zustand für $r(t) = h(t)$ weg:

\rightarrow Entweder $G(s)$ oder $K(s)$ müssen **Integrator** enthalten

Um konstanten Sollwert erzeugen / konstante D_1 kompensieren:

\rightarrow Integrator in der Strecke

Um konstante D_2 kompensieren:

\rightarrow Integrator im Regler

Einstellregeln für Einfache Regler:

1.) Schwingungsmethode nach Ziegler-Nichols:

Idealen P-Regler $K(s) = k$, k erhöhen bis harmonische

Dauerschwingung $= k_{krit} \rightarrow T_{krit}$ ablesen

Reglerstruktur	K_P	T_I	T_D
P	$0.5 k_{krit}$	—	—
PI	$0.45 k_{krit}$	$0.85 T_{krit}$	—
PID	$0.6 k_{krit}$	$0.5 T_{krit}$	$0.12 T_{krit}$
PID verbessert	$0.2 k_{krit}$	$0.5 T_{krit}$	$0.33 T_{krit}$

2.) Sprungmethode nach Ziegler-Nichols:

Anwendungsvoraussetzung: Regelstrecke as. stabil

und Sprungantwort $\approx PT_1T_t$ -Verhalten (**Totzeit!**)

Reglerstruktur	K_P	T_I	T_D
P	$\tau / (K_S L)$	—	—
PI	$0.9 \tau / (K_S L)$	$L / 0.3$	—
PID	$1.2 \tau / (K_S L)$	$2 L$	$0.5 L$

