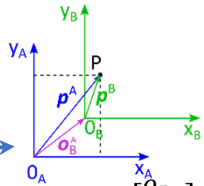
Koordinatensysteme:

Koordinaten-Transformation 2D

Translation:

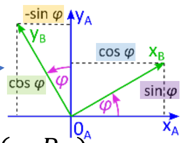


Position von Ursprung Kosi B in Kosi A: $o_B^A = \begin{bmatrix} o_{B1} \\ o_{B2} \end{bmatrix}$

Translatorische Transformation einer Position:

$$p^A = o_B^A + p^B$$
$$p^B = -o_B^A + p^A$$

Rotation:



Drehmatrix: $R_\varphi^{AB} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_B & y_B \end{array} \\ \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix} \end{array} (= R_\varphi)$

Bei keiner Drehung $R = I$

$$R^{AB} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_b & y_b & z_b \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{ex} & x_{ey} & x_{ez} \\ y_{ex} & y_{ey} & y_{ez} \\ z_{ex} & z_{ey} & z_{ez} \end{bmatrix} \end{array}$$

x_b schaut in spezifische $Achse_A$
y_b schaut in spezifische $Achse_A$
z_b schaut in spezifische $Achse_A$

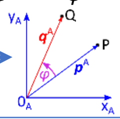
Rotatorische Transformation einer Position:

$$p^A = R_\varphi^{AB} \cdot p^B$$
$$p^B = \left(R_\varphi^{AB}\right)^{-1} \cdot p^A = \left(R_\varphi^{AB}\right)^T \cdot p^A$$

Eigenschaft: $\left(R_\varphi^{AB}\right)^{-1} = \left(R_\varphi^{AB}\right)^T = R_{-\varphi}^{AB} = R_\varphi^{BA}$

Rotation eines Vektors um den Ursprung:

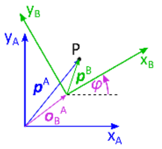
$$q^A = R_\varphi \cdot p^A$$



Starrkörper-Bewegung:

Translatorische & Rotatorische Transformation einer Position

$$p^A = o_B^A + R_\varphi^{AB} \cdot p^B$$
$$p^B = \left(R_\varphi^{AB}\right)^T \cdot \left(p^A - o_B^A\right)$$



Koordinaten-Transformation 3D

Translation:

Position von Ursprung Kosi B in Kosi A: $o_B^A = \begin{bmatrix} o_{B1} \\ o_{B2} \\ o_{B3} \end{bmatrix}$

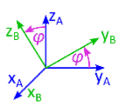
Translatorische Transformation einer Position:

$$p^A = o_B^A + p^B$$
$$p^B = -o_B^A + p^A$$

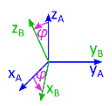
Rotation:

Drehmatrix:

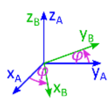
$$R_{x,\varphi}^{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}$$



$$R_{y,\varphi}^{AB} = \begin{bmatrix} cos\varphi & 0 & sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\varphi & 0 & cos\varphi \end{bmatrix}$$



$$R_{z,\varphi}^{AB} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(bei negativem Winkel ändern sich Vorzeichen von ***sin***)

Transformation einer Matrix:

$$M^B = \left(R^{AB}\right)^T M^A R^{AB} = R^{BA} M^A R^{AB}$$
$$M^A = R^{AB} M^B \left(R^{AB}\right)^T = R^{AB} M^B R^{BA}$$

Verkettete Rotation:

Bzgl. Aktuellen Kosi: $R^{AC} = R^{AB} R^{BC}$ (rechts)

Bzgl. des festen Kosi: $R^{AC} = S^{AC} R^{AB}$ (links)

Euler-Drehung: (Methode zur Konstruktion R)

Schrittweise Verdrehung um abc mit φ, θ, ψ

$R^{AB} = R_{a,\varphi}^{AA'} \cdot R_{b,\theta}^{A'A''} \cdot R_{c,\psi}^{A''B}$ (immer aktuelles)

1) elementare Drehung um Achse a des A-Systems mit Winkel φ, ergibt das A'-System mit Achsen x',y',z'
2) elementare Drehung um Achse b des A'-Systems mit Winkel θ, ergibt das A''-System mit Achsen x'',y'',z''
3) elementare Drehung um Achse c des A''-Systems mit Winkel ψ, ergibt das B-System

xyx, xyz, xzx, xzy, yxy, yxz, yzx, yzy, zxy, zxz, zyx, zyz

Starrkörper-Bewegung: (Translation & Rotation)

$$p^A = o_B^A + R^{AB} \cdot p^B \qquad p^B = \left(R^{AB}\right)^T \cdot \left(p^B - o_B^A\right)$$
$$\bar{p}^A = T^{AB} \cdot \bar{p}^B \qquad \bar{p}^B = \left(T^{AB}\right)^{-1} \cdot \bar{p}^A$$

$$T^{AB} = \begin{bmatrix} R^{AB} & o_B^A \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \bar{p} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}, 0_{1\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T^{von\ zu}$

$$\left(T^{AB}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \left(R^{AB}\right)^T & -\left(R^{AB}\right)^T \cdot o_B^A \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

Verkettete Bewegung: Regel: $T^{AB} = T^{AX} \cdot T^{XB}$

Bzgl. Aktuellen Kosi: $T^{AC} = T^{AB} T^{BC}$ (rechts)

Bzgl. des festen Kosi: $T^{AC} = U^{AC} T^{AB}$ (links)

Elementare Transformationen:

x-Achse: $Trl_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Rot_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y-Achse: $Trl_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Rot_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

z-Achse: $Trl_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Rot_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5 Kinematik von Roboterarmen:

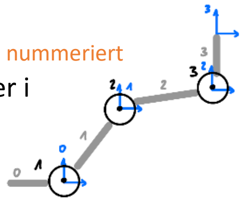
5.1 Kinematik-Typen (5.2 nix)

Kinematische Kette: starre Glieder + Gelenke/Achsen für rot oder trans

Anzahl Gelenken n von 1 bis n nummeriert

Anzahl Glieder/Körper n+1 von 0 (Basis) bis n nummeriert

→ Gelenk i verbindet Körper i-1 mit Körper i

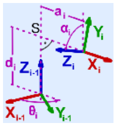


5.3 Vorwärts-Kinematik: Position

Denavit-Hartenberg Parameter:

Einschränkungen:*

Die Achse x_i (Sytem danach) schneidet die Achse z_{i-1} (System davor) rechtwinklig in der Grundstellung.



Methode:

1) Rotation θ_i um z_{i-1}, damit $x_{i-1} || x_i$
2) Translation d_i entlang z_{i-1} bis zu dem Punkt S, wo sich z_{i-1} und x_i schneiden
3) Translation a_i entlang x_i, um den Schnittpunkt S in o_i zu überführen
4) Rotation α_i um x_i, um z_{i-1} in z_i zu überführen

Formel:

$$A_i(q_i) = T^{i-1,i}(q_i) = Rot_{z,\theta_i} Trl_{z,d_i} Trl_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cdot\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\cdot\sin(\alpha_i) & a_i\cdot\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cdot\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\cdot\sin(\alpha_i) & a_i\cdot\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prozedur zur Festlegung der Koordinatensysteme:

1) *Gelenke zählen* → n Gelenke
   d.h.: n+1 Kosis mit Nummerierung = {0,1,2, … }
2) *Z-Achsen bestimmen:* z_i= Aktuationsachse von Gelenk $i+1$ (Rotation oder Translation); beginne mit z_0 für Gelenk 1, z_1 für Gelenk 2, … !
3) *Andere Achsen bestimmen:* Ursprung $o_i$beliebig; x_i und y_i rechtshändig nach Belieben (Beachte*)

- wichtig: x_i muss in der Grundstellung z_{i-1} schneiden und rechtwinklig dazu sein
- falls sich x_i und z_{i-1} schneiden: Ursprung x_i in den Schnittpunkt legen; Achse x_i rechtwinklig zur z_{i-1} -z_i -Ebene
- falls z_i und *zi*−1 parallel sind: Ursprung o_i irgendwo auf die Achse z_i legen; Achse *xi* parallel zur gemeinsamen Normalen von z_i und z_{i-1} am Punkt o_i (Richtung frei)
- falls z_i und z_{i-1} nicht komplanar (d.h. nicht in einer Ebene) sind: Ursprung o_i an den Punkt, wo die gemeinsame Normale von z_i und z_{i-1} die Achse z_i schneidet; die Achse x_i ist diese gemeinsame Normale (Richtung frei)
- in allen Fällen komplettiert die Achse y_i das rechtshändige

4) *Tabelle erstellen:*

Erklärung	↻ z	⟷ z	⟷ x	↻ x	Erklärung
Gelenk	θ_i	d_i	a_i	α_i	
1					Kosi 0-1
2					Kosi 1-2
…					Kosi …-…
n					Kosi …-n

Freiheitsgrad*→ $\theta_i$bei Rotation, $d_i$bei Translation

5) Matrizen aufstellen:
   - Für jede Zeile aus Tabelle eine Matrix
   - Formel für $A_i(q_i)$ von oben benutzen
   - Gesamttransformation-formel: (A₁=T⁰¹, A₂=T¹², …)
     $T^{0n} = A_1(q_1)A_2(q_2) \dots A_n(q_n)$

5.4 Vorwärts-Kinematik: Geschwindigkeit

Vektor: $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$

Definiere $S(u) = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$

Spezialfall bei Einheitsvektoren:

$e_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T, e_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T, e_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$

$S(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, S(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Eigenschaften *für beliebige* $\alpha, \beta \in R$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^3$, $\boldsymbol{R} \in SO(3)$:

Summe:	$S(u) + S(u)^\top = 0$
Transponierte:	$S(u)^\top = -S(u)$
Kreuzprodukt:	$S(u)\, v = u \times v$
Linearität:	$S(\alpha u + \beta v) = \alpha S(u) + \beta S(v)$
Ähnlichkeitstransformation:	$R\, S(u)\, R^\top = S(R\, u)$

Winkelgeschwindigkeit: Allgemeiner Fall

$$\dot{R}^{AB}(t) = \frac{d}{dt} R^{AB}(t) = S\left(\omega_{AB}^{A}(t)\right) R^{AB}(t)$$

$$S\left(\omega_{AB}^{A}(t)\right) = \dot{R}^{AB}(t)\left(R^{AB}(t)\right)^\top$$

Winkelgeschwindigkeit $\omega_{AB}^{A}(t)$, rotierendes KS, bzgl KS, ausgedrückt in KS

Winkelgeschwindigkeit: Verkettung von Drehung

$$R^{02}(t) = R^{01}(t) R^{12}(t)$$

$$\dot{R}^{02}(t) = S\left(\omega_{02}^{0}(t)\right) R^{02}(t)$$

$$\omega_{02}^{0}(t) = \omega_{01}^{0}(t) + R^{01}(t)\omega_{12}^{1}(t) = \omega_{01}^{0}(t) + \omega_{12}^{0}(t)$$

(Im allgemeinen Fall (t) weglassen)

Lineare Geschwindigkeit eines Punktes

Fall 1: Punkt starr in KS{i} verbunden, KS{i} rotiert relativ zu {0}

$$p^0 = R^{0i} p^i$$

$$\dot{p}^0 = \omega_{0i}^0 \times \left(R^{0i} p^i\right) = \omega_{0i}^0 \times p^0$$

Fall 2: Punkt starr in $KS\{i\}$ verbunden, $KS\{i\}$ bewegt sich rotatorisch + translatorisch relativ zu {0}

$$p^0 = R^{0i} p^i + o_i^0$$

$$\dot{p}^0 = \omega_{0i}^0 \times \left(R^{0i} p^i\right) + \dot{o}_i^0 = \omega_{0i}^0 \times p^0 + \dot{o}_i^0$$

Jacobi-Matrizen Geschwindigkeits-Kinematik:

$$v_n^0 = \dot{o}_n^0 = J_v \cdot \dot{q}$$

Lineare Geschwindigkeitsvektor, Ortsvektor', Jacobi-Matrix, Winkelvektor'

$$\omega_{0n}^0 = J_\omega \cdot \dot{q}$$

Winkelgeschwindigkeitsvektor, Jacobi-Matrix, Winkelvektor'

$\dim(J) = 3 \times n$ → n ist anzahl gelenke

Berechnung der Jacobi-Matrizen:

Berechnung der Endeffektor-Geschwindigkeit und -Winkelgeschwindigkeit bzgl. KS{0}:

$$v_n^0 = \dot{o}_n^0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i} \dot{q}_i = \underbrace{[J_{v1} \quad J_{v2} \quad \dots \quad J_{vn}]}_{J_v} \dot{q}$$

$$\omega_{0n}^0 = \sum_{i=1}^{n} R^{0,i-1}\, \omega_{i-1,i}^{i-1} = \underbrace{[J_{\omega 1} \quad J_{\omega 2} \quad \dots \quad J_{\omega n}]}_{J_\omega} \dot{q}$$

mit i am Anfang = 1

$$J_{v1} = \begin{cases} z_{i-1}^0 \times \left(o_n^0 - o_{i-1}^0\right) & \textit{falls Gelenk i vom Typ R} \\ z_{i-1}^0 & \textit{falls Gelenk i vom Typ T} \end{cases}$$

$$J_{\omega 1} = \begin{cases} z_{i-1}^0 = R^{0,i-1} e_3 & \textit{falls Gelenk i vom Typ R} \\ 0_{3\times 1} & \textit{falls Gelenk i vom Typ T} \end{cases}$$

$\dot{q} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_n]^T$ (je entweder $\dot{\theta}_i$ oder $\dot{d}_i$)

z_{i-1}^0entspricht die z-Achse des Kosi i-1 ausgedrückt in Kosi 0

$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix}$ (Falls v und ω zusammengeführt werden müssen)

Falls die (Winkel)Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes p^m auf Arm m ($m \leq n$) anstatt des Endeffektor-KS-Ursprungs o n n gesucht ist, ändern sich die Jacobi-Matrizen wie folgt:

$$J_{vi} = \begin{cases} z_{i-1}^0 \times \left(p_n^0 - o_{i-1}^0\right) & \textit{falls Gelenk i vom Typ R}, i \leq m \\ z_{i-1}^0 & \textit{falls Gelenk i vom Typ T}, i \leq m \\ 0_{3\times 1} & \textit{für } i > m \end{cases}$$

$$J_{\omega i} = \begin{cases} z_{i-1}^0 & \textit{falls Gelenk i vom Typ R}, i \leq m \\ 0_{3\times 1} & \textit{falls Gelenk i vom Typ T}, i \leq m \\ 0_{3\times 1} & \textit{für } i > m \end{cases}$$

Berechnung der Werkzeug-Geschwindigkeit

Werkzeug ist starr am Endeffektor

Endeffektor-KS{n} und Werkzeug-KS{Tool} ineinander überführen

$$T^{n,Tool} = \begin{bmatrix} R^{n,Tool} & o_{Tool}^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dann berechnen sich (Winkel-)Geschwindigkeiten zu

$$\begin{bmatrix} v_n^n \\ \omega_{0n}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{n,Tool} & S(o_n^0) R^{n,Tool} \\ 0_{3\times 3} & R^{n,Tool} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Tool}^{Tool} \\ \omega_{0Tool}^{Tool} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Tool}^{Tool} \\ \omega_{0Tool}^{Tool} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R^{n,Tool})^T & -(R^{n,Tool})^T S(o_{Tool}^0) \\ 0_{3\times 3} & (R^{n,Tool})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n^n \\ \omega_{0n}^n \end{bmatrix}$$

5.5 Singularitäten

$$\begin{bmatrix} v_n^0 \\ \omega_{0n}^0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_\omega(q) \end{bmatrix}}_{J(q)} \dot{q}$$

6x1 6xn nx1

Tritt auf wenn $Rang(J(q)) < \min\{6, n\}$ für bestimmte Werte von q

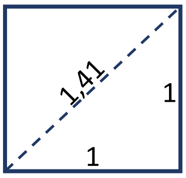
Bedeutung: Singularitäten kennzeichnen Konfigurationen des Roboters (Winkel, Verschiebungen), ...

- in denen der Endeffektor (EE) Extrempunkte des Arbeitsraumes oder Punkte auf den Roboterachsen erreicht
- die unter kleinen Veränderungen der Gliederparameter (Länge, Versatz) nicht mehr möglich sind
- von denen aus EE-Bewegungen in bestimmte Richtungen unmöglich sind
- in denen beschränkte EE-Geschwindigkeiten zu unbeschränkten (oder sehr großen) Gelenk-Geschwindigkeiten führen können
- in denen beschränkten Drehmomenten in Gelenken unbeschränkte (oder sehr große) Kräfte/Drehmomente am EE entsprechen können
-

5.10 Referenztrajektorien – Ergänzungen

Sprünge in Beschleunigung sind schlecht, damit man einen endlichen Ruck hat

6.2 Mobile Roboter – Kinematik



$$\sqrt{1^2 \cdot 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}41$$

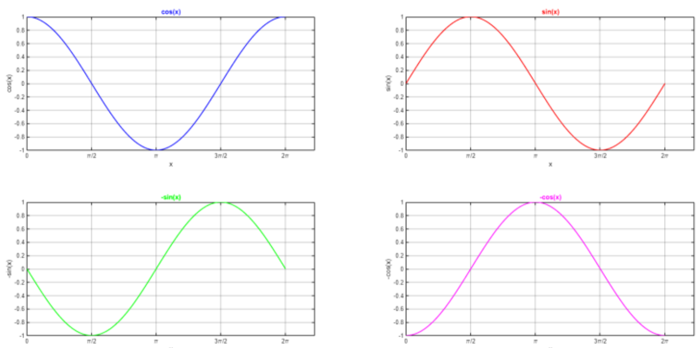
Elementare Lineare Algebra:

Matrizen:

- Addition und Subtraktion elementenweise
  (nur bei gleicher Diemension)
- Multiplikation Zeilen mal Spalten
  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$
  (Anzahl Spalten Faktor 1 = Anzahl Zeilen Faktor 2)
  Äquivalentumformen: Außen anfangen, r bleibt r, l bleibt l
- Kreuzprodukt (Trick mit doppelte Notation und strichen)
  $$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$
- Determinanten Hauptdiagonale – Nebendiagonale
  $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
  $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
  $$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
  (Achte auf Diemension)
- Inverse Matrix (Bei 2x2, 3x3 ist zu kompiziert)
  $Adj(A) \rightarrow$ Hauptdiagonale vertauschen, Nebendiagonale negieren
  $$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
  (muss quatratisch sein, determinante $\neq 0$)
  Sonderfall Drehmatrix: $A^{-1} = A^T$ (jeweils bei 3x3)
- Transponierung Vertauschen von Zeilen und Spalten
  (geht mit jeder Matrix)
  $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
- Dimension dim(A) = Zeilenanzahl x Spaltenanzahl
- Äquivalenzumformung:
  $A = B \cdot C \cdot D \cdot E \rightarrow$ Auflösen nach D
  von außen mit inverse multiplizieren (richtige Seite)
  $D = (C)^{-1} \cdot (B)^{-1} \cdot A \cdot (E)^{-1}$

Elementare Trigonometrie:

Trigonometrische Funktionen:



$$\sin(\varphi) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$