Kapitel 3 – Kombinatorische Logik

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. Christoph Scholl

Institut für Informatik

WS 2015/16

Billigste Überdeckung der markierten Ecken

Wir suchen ein sogenanntes Minimalpolynom, das heißt ein Polynom mit minimalen Kosten.

Definition

Ein Minimalpolynom p einer booleschen Funktion f ist ein Polynom von f mit minimalen Kosten, das heißt mit der Eigenschaft $cost(p) \leq cost(p')$ für jedes andere Polynom p' von f.

Quine's Primimplikantensatz

Satz

Jedes Minimalpolynom p einer booleschen Funktion f besteht ausschließlich aus Primimplikanten von f.

Beweis:

- Nehme an, dass p einen nicht primen Implikanten m von f enthält.
- m wird durch einen Primimplikanten m' von f überdeckt, ist also in m' enthalten.
- Es gilt demnach $cost(m') < cost(m)$.
- Ersetzt man in p den Implikanten m durch den Primimplikanten m', so erhält man ein Polynom p', das ein Polynom von f ist mit $cost(p') < cost(p)$.
- **Widerspruch** dazu, dass p ein Minimalpolynom ist.

Berechnung von Implikanten

Lemma 1

Ist m ein Implikant von f, so auch $m \cdot x$ und $m \cdot x'$ für jede Variable x, die in m weder als positives, noch als negatives Literal vorkommt.

Beweis:

- $m \cdot x$ und $m \cdot x'$ sind Teilwürfel des Würfels m.
- Sind also alle Ecken von m markiert, so auch alle Ecken von $m \cdot x$ und $m \cdot x'$.

Lemma 2

Sind $m \cdot x$ und $m \cdot x'$ Implikanten von f, so auch m.

Beweis: ...

Charakterisierung von Implikanten

Satz

Ein Monom m ist genau dann ein Implikant von f, wenn entweder

- m ein Minterm von f ist, oder
- $m \cdot x$ und $m \cdot x'$ Implikanten von f sind für eine Variable x, die nicht in m vorkommt.

- Äquivalente Schreibweise:

  $m \in \mathit{Implikant}(f)$

  $\Leftrightarrow (m \in \mathit{Minterm}(f)) \vee (m \cdot x, m \cdot x' \in \mathit{Implikant}(f))$

- Beweis folgt unmittelbar aus Lemma 1 und Lemma 2.

Berechnung eines Minimalpolynoms

- Verfahren von Quine-McCluskey zur Berechnung aller Primimplikanten.

- Verfahren zur Lösung des „Überdeckungsproblems".
  - Treffe unter den Primimplikanten eine geeignete Auswahl, so dass die Disjunktion der ausgewählten Primimplikanten ein Polynom für *f* ist und minimale Kosten hat.

Verfahren von Quine: Der Algorithmus

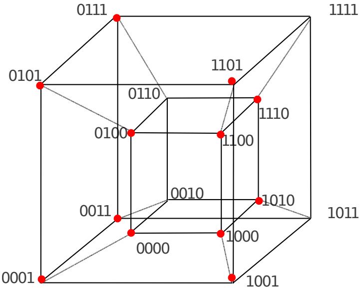
Prime implicants function **Quine** ($f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$)

begin
  $L_0 := \mathit{Minterm}(f)$;
  $i := 0$;
  $\mathit{Prim}(f) := \emptyset$
  while ($L_i \neq \emptyset$) **and** ($i < n$)
  $//L_i$ enthält alle Implikanten von f der Länge $n - i$.
  loop $L_{i+1} := \{m \mid m \cdot x$ und $m \cdot x'$ sind in L_i für ein $x\}$;
    $\mathit{Prim}(f) := \mathit{Prim}(f) \cup$
    $\{m' \mid m' \in L_i$ und m' wird von keinem $q \in L_{i+1}$ überdeckt$\}$;
    $i := i + 1$
  end loop;
  return $\mathit{Prim}(f) \cup L_i$;
end;

Verbesserung durch McCluskey

- Vergleiche nur Monome untereinander
  - die die gleichen Variablen enthalten und
  - bei denen sich die Anzahl der positiven Literale nur um 1 unterscheidet.
- Dies wird erreicht durch:
  - Partitionierung von L_i in Klassen L_i^M, mit $M \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $|M| = n - i$.
  - L_i^M enthält die Implikanten aus L_i, deren Literale alle aus M sind.
  - Anordnung der Monome in L_i^M gemäß der Anzahl der positiven Literale.

Beispiel Quine-McCluskey



$L_0^{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$:

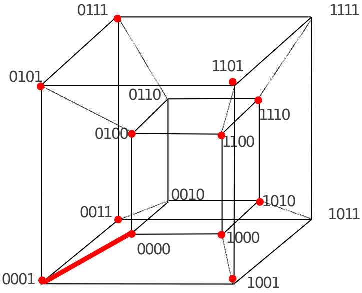
0 0 0 0
0 0 0 1
0 1 0 0
1 0 0 0
0 0 1 1
0 1 0 1
1 0 0 1
1 0 1 0
1 1 0 0
0 1 1 1
1 1 0 1
1 1 1 0

steht für $x_1' x_2' x_3' x_4'$

steht für $x_1 x_2' x_3' x_4$

Vergleiche im Folgenden nur Monome aus benachbarten Blöcken!

Beispiel Quine-McCluskey: Bestimmung von L_1 (1/4)



$L_0^{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$:

0 0 0 0

---

0 0 0 1
0 1 0 0
1 0 0 0

---

0 0 1 1
0 1 0 1
1 0 0 1
1 0 1 0
1 1 0 0

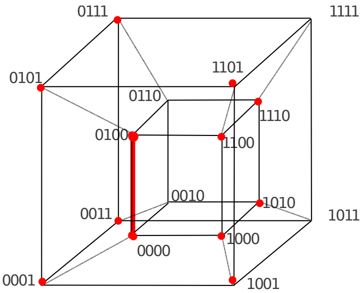
---

0 1 1 1
1 1 0 1
1 1 1 0

$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$:

0 0 0 -

Beispiel Quine-McCluskey: Bestimmung von L_1 (2/4)



$L_0^{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$:

0 0 0 0
0 0 0 1
0 1 0 0
1 0 0 0
0 0 1 1
0 1 0 1
1 0 0 1
1 0 1 0
1 1 0 0
0 1 1 1
1 1 0 1
1 1 1 0

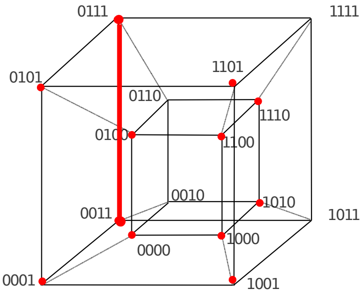
$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$:

0 0 0 -

$L_1^{\{x_1,x_3,x_4\}}$:

0 - 0 0

Beispiel Quine-McCluskey: Bestimmung von L_1 (3/4)



$L_0^{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$:

0 0 0 0
0 0 0 1
0 1 0 0
1 0 0 0
➡ 0 0 1 1
0 1 0 1
1 0 0 1
1 0 1 0
1 1 0 0
➡ 0 1 1 1
1 1 0 1
1 1 1 0

$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$:

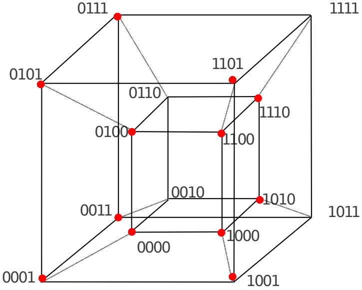
0 0 0 -

$L_1^{\{x_1,x_3,x_4\}}$:

0 - 0 0

0 - 1 1

Beispiel Quine-McCluskey: Bestimmung von L_1 (4/4)



$L_0^{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$:

0 0 0 0
0 0 0 1
0 1 0 0
1 0 0 0
→ 0 0 1 1
0 1 0 1
1 0 0 1
1 0 1 0
1 1 0 0
0 1 1 1
→ 1 1 0 1
1 1 1 0

$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$:

0 0 0 -

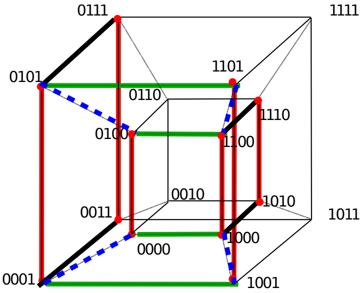
$L_1^{\{x_1,x_3,x_4\}}$:

0 - 0 0

0 - 1 1

Nicht kürzbar, da nicht Ecken der gleichen Kante. (Consensus existiert nicht!)

Beispiel Quine-McCluskey: Alle bestimmten Mengen L_1



$L_1^{\{x_1,x_2,x_4\}}$:

0 0 - 1
1 0 - 0
0 1 - 1
1 1 - 0

$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$:

0 0 0 -
0 1 0 -
1 0 0 -
1 1 0 -

$L_1^{\{x_2,x_3,x_4\}}$:

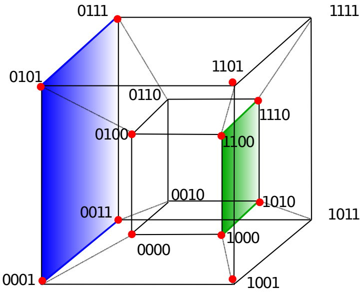
- 0 0 0
- 0 0 1
- 1 0 0
- 1 0 1

$L_1^{\{x_1,x_3,x_4\}}$:

0 - 0 0
0 - 0 1
1 - 0 0
0 - 1 1
1 - 0 1
1 - 1 0

Alle Minterme von f sind Eckpunkte von Kanten, die Implikanten sind: $Prim(f) = \emptyset$

Beispiel Quine-McCluskey: Bestimmung von L_2 (1/2)



$L_1^{\{x_1,x_2,x_4\}}$:

0 0 - 1
1 0 - 0
0 1 - 1
1 1 - 0

$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$:

0 0 0 -
0 1 0 -
1 0 0 -
1 1 0 -

$L_1^{\{x_2,x_3,x_4\}}$:

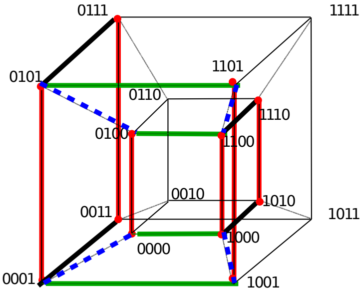
- 0 0 0
- 0 0 1
- 1 0 0
- 1 0 1

$L_1^{\{x_1,x_3,x_4\}}$:

0 - 0 0
0 - 0 1
1 - 0 0
0 - 1 1
1 - 0 1
1 - 1 0

Alle Implikanten aus $L_1^{\{x_1,x_2,x_4\}}$ sind Kanten von Flächen, die Implikanten sind: $Prim(f) = \emptyset$

Beispiel Quine-McCluskey: Bestimmung von L_2 (2/2)



$L_1^{\{x_1,x_2,x_4\}}$:

$$\begin{array}{c} 0\,0\,\text{-}\,1 \\ 1\,0\,\text{-}\,0 \\ \hline 0\,1\,\text{-}\,1 \\ 1\,1\,\text{-}\,0 \end{array}$$

$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$:

$$\begin{array}{c} 0\,0\,0\,\text{-} \\ \hline 0\,1\,0\,\text{-} \\ 1\,0\,0\,\text{-} \\ \hline 1\,1\,0\,\text{-} \end{array}$$

$L_1^{\{x_2,x_3,x_4\}}$:

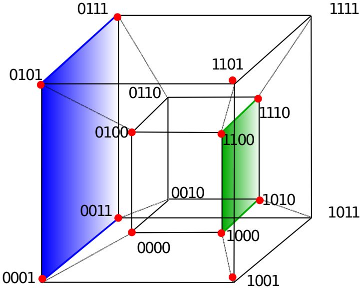
$$\begin{array}{c} \text{-}\,0\,0\,0 \\ \hline \text{-}\,0\,0\,1 \\ \text{-}\,1\,0\,0 \\ \hline \text{-}\,1\,0\,1 \end{array}$$

$L_1^{\{x_1,x_3,x_4\}}$:

$$\begin{array}{c} 0\,\text{-}\,0\,0 \\ \hline 0\,\text{-}\,0\,1 \\ 1\,\text{-}\,0\,0 \\ \hline 0\,\text{-}\,1\,1 \\ 1\,\text{-}\,0\,1 \\ 1\,\text{-}\,1\,0 \end{array}$$

Alle Implikanten aus L_1^M sind Kanten von Flächen, die Implikanten sind: $Prim(f) = \emptyset$

Beispiel Quine-McCluskey: Bestimmung von L_3 (1/2)



$L_2^{\{x_1,x_2\}}$:

$L_2^{\{x_1,x_4\}}$:

0 - - 1
1 - - 0

$L_2^{\{x_2,x_4\}}$:

$L_2^{\{x_1,x_3\}}$:

0 - 0 -
1 - 0 -

$L_2^{\{x_2,x_3\}}$:

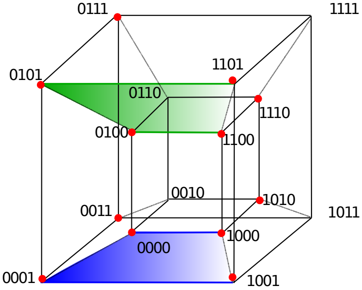
- 0 0 -
- 1 0 -

$L_2^{\{x_3,x_4\}}$:

- - 0 0
- - 0 1

Die markierten Implikanten-Flächen sind nicht Rand eines 3-dim. Implikanten. Sie sind also prim! $\Rightarrow$ $Prim(f) = \{x_1'x_4, x_1x_4'\}$

Beispiel Quine-McCluskey: Bestimmung von L_3 (2/2)



$L_2^{\{x_1,x_2\}}$:

$L_2^{\{x_1,x_4\}}$:

0 - - 1
1 - - 0

$L_2^{\{x_2,x_4\}}$:

$L_2^{\{x_1,x_3\}}$:

0 - 0 -
1 - 0 -

$L_2^{\{x_2,x_3\}}$:

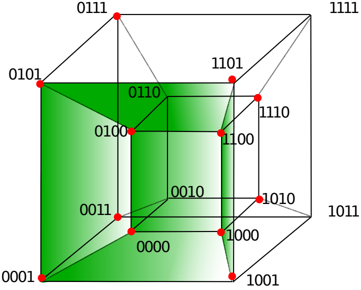
- 0 0 -
- 1 0 -

$L_2^{\{x_3,x_4\}}$:

- - 0 0
- - 0 1

Die markierten Implikanten-Flächen sind Rand eines 3-dimensionalen Implikanten. Sie sind also nicht prim! $\Rightarrow$ $Prim(f) = \{x_1'x_4, x_1x_4'\}$

Beispiel Quine-McCluskey: Ende



$L_3^{\{x_1\}}$:

$L_3^{\{x_2\}}$:

$L_3^{\{x_3\}}$:

- - 0 -

$L_3^{\{x_4\}}$:

$$Prim(f) = \{x_1' x_4, x_1 x_4'\}$$

$$\Rightarrow Prim(f) = \{x_1' x_4, x_1 x_4', x_3'\}$$

$$p_{complete}(f) = x_1' x_4 + x_1 x_4' + x_3'$$

Korrektheit von Quine-McCluskey (1/2)

Prime implicants function **Quine** ($f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$)

begin
  $L_0 := Minterm(f)$;
  $i := 0$;
  $Prim(f) := \emptyset$
  while ($L_i \neq \emptyset$) **and** ($i < n$)
  $//L_i$ enthält alle Implikanten von f der Länge $n-i$.
  loop $L_{i+1} := \{m \mid m \cdot x$ und $m \cdot x'$ sind in L_i für ein $x\}$;
    $Prim(f) := Prim(f) \cup$
    $\{m' \mid m' \in L_i$ und m' wird von keinem $q \in L_{i+1}$ überdeckt$\}$;
    $i := i + 1$
  end loop;
  return $Prim(f) \cup L_i$;
end;

Korrektheit von Quine-McCluskey (2/2)

Satz

Für alle $i = 0, 1, \ldots, n$ gilt:

- L_i enthält nur Monome mit $n - i$ Literalen.
- L_i enthält genau die Implikanten von f mit $n - i$ Literalen.
- Nach Iteration i enthält $Prim(f)$ genau die Primimplikanten von f mit mindestens $n - i$ Literalen.

Beweis:
Induktion über i:

- Abbruchbedingung $(L_i = \varnothing)$ oder $(i = n)$:
- $L_i = \varnothing$ bedeutet, dass keine Implikanten bei der "Partnersuche" entstanden sind, d.h. L_{i-1} ist vollständig in $Prim(f)$ aufgegangen.
- $i = n$ bedeutet, dass L_n berechnet wurde, es gilt dann $L_n = \varnothing$ oder $L_n = \{1\}$, letzteres bedeutet f ist die Eins-Funktion und $Prim(f) = \{1\}$.

Kosten des Verfahrens

Lemma

Es gibt 3^n verschiedene Monome in n Variablen.

Beweis:
Für jedes Monom m und jede der n Variablen x liegt genau eine der drei folgenden Situationen vor:

- m enthält weder das positive noch das negative Literal von x.
- m enthält das positive Literal x.
- m enthält das negative Literal x'.

Jedes Monom ist durch diese Beschreibung auch eindeutig bestimmt.

Komplexität des Verfahrens von Quine-McCluskey

Satz

Die Laufzeit des Verfahrens liegt in $O(n^2 \cdot 3^n)$ beziehungsweise in $O(\log^2(N) \cdot N^{\log(3)})$, wobei $N = 2^n$ die Größe der Funktionstabelle ist.

Beweisidee:
Jedes der 3^n Monome wird im Verlauf des Verfahrens mit höchstens n anderen Monomen verglichen.

- Gegeben sei ein Monom mx. Die Erzeugung von mx' und die Suche nach mx' in L_i ist bei Verwendung geeigneter Datenstrukturen in $O(n)$ durchführbar.

$O(n^2 \cdot 3^n) = O(\log^2(N) \cdot N^{\log(3)})$ durch Nachrechnen:

$$3^n = (2^{\log(3)})^n = (2^n)^{\log(3)} = N^{\log(3)}$$

Das Matrix-Überdeckungsproblem

- Wir haben nun durch das Verfahren von Quine-McCluskey alle Primimplikanten von f bestimmt.

- Die Disjunktion aller Primimplikanten ist ein Polynom, das f implementiert. Es ist aber im Allgemeinen kein Minimalpolynom von f.

- Für das Minimalpolynom benötigen wir eine kostenminimale Teilmenge M von $Prim(f)$, so dass die Monome von M f überdecken.

- Diese Art von Problemen wird Matrix-Überdeckungsproblem genannt.

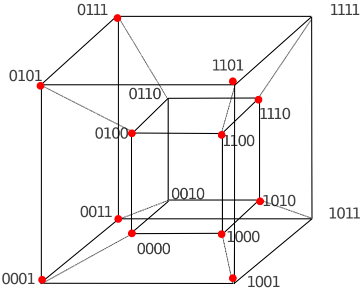
Primimplikantentafel

- Definiere eine boolesche Matrix $PIT(f)$, die Primimplikantentafel von f:
  - Die Zeilen entsprechen eindeutig den Primimplikanten von f.
  - Die Spalten entsprechen eindeutig den Mintermen von f.
  - Sei $min(\alpha)$ ein beliebiger Minterm von f.
    Dann gilt für Primimplikant $m: PIT(f)[m, min(\alpha)] = 1 \Leftrightarrow m(\alpha) = 1$.
- Der Eintrag an der Stelle $[m, min(\alpha)]$ ist also genau dann 1, wenn $min(\alpha)$ eine Ecke des Würfels m beschreibt.

Gesucht:
Eine kostenminimale Teilmenge M von $Prim(f)$, so dass jede Spalte von $PIT(f)$ überdeckt ist,

d.h. $\forall \alpha \in ON(f) \quad \exists m \in M$ mit $PIT(f)[m, min(\alpha)] = 1$.

Primimplikantentafel: Beispiel (1/2)



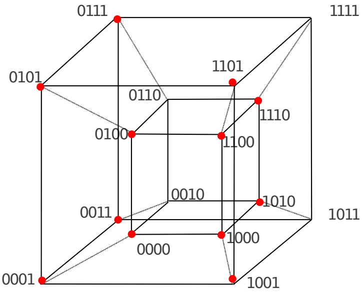
$$Prim(f) = \{x_1' x_4, x_1 x_4', x_3'\}$$

Primimplikantentafel *PIT*(f):

	0	1	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14
$x_1' x_4$		1	1		1	1						
$x_1 x_4'$							1		1	1		1
x_3'	1	1		1	1		1	1		1	1	

Primimplikantentafel: Beispiel (2/2)

Gesucht:
Eine kostenminimale Teilmenge M von $Prim(f)$, so dass jede Spalte von $PIT(f)$ überdeckt ist,
d.h. $\forall \alpha \in ON(f) \quad \exists m \in M$ mit $PIT(f)[m, min(\alpha)] = 1$.



$Prim(f) = \{x_1' x_4, x_1 x_4', x_3'\}$

Primimplikantentafel $PIT(f)$:

	0	1	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14
$x_1' x_4$		1	1		1	1						
$x_1 x_4'$							1		1	1		1
x_3'	1	1		1	1		1	1		1	1	

UNI FREIBURG

Erste Reduktionsregel - Wesentlicher Implikant

Definition

Ein Primimplikant m von f heißt wesentlich, wenn es einen Minterm $min(\alpha)$ von f gibt, der nur von diesem Primimplikanten überdeckt wird, also:

- $PIT(f)[m, min(\alpha)] = 1$
- $PIT(f)[m', min(\alpha)] = 0$

für jeden anderen Primimplikanten m' von f.

Lemma

Jedes Minimalpolynom von f enthält alle wesentlichen Primimplikanten von f.

1. Reduktionsregel: Entferne aus der Primimplikantentafel $PIT(f)$ alle wesentlichen Primimplikanten und alle Minterme, die von diesen überdeckt werden.

Erste Reduktionsregel: Beispiel (1/2)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1				1												
2		1				1											
3			1				1										
4				1				1									
5					1				1								1
6						1				1							1
7							1				1						
8								1				1					
9									1				1				
10										1				1			1
11											1				1		
12												1				1	
13													1	1	1	1	

Erste Reduktionsregel: Beispiel (2/2)

wesentlich

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1				1												
2		1				1											
3			1				1										
4				1				1									
5					1				1								1
6						1				1							1
7							1				1						
8								1				1					
9									1				1				
10										1				1			1
11											1				1		
12												1				1	
13													1	1	1	1	

Nach Anwendung der 1. Reduktionsregel

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	1								1
6		1							1
7			1						
8				1					
9	1				1				
10		1				1			1
11			1				1		
12				1				1	
13					1	1	1	1	

Die Matrix enthält keine wesentlichen Zeilen mehr!

Zweite Reduktionsregel - Spaltendominanz

Definition

Sei A eine boolesche Matrix. Spalte j von A dominiert Spalte i von A, wenn für jede Zeile k gilt: $A[k,i] \leq A[k,j]$.

- Nutzen für unser Problem: Dominiert ein Minterm w' von f einen anderen Minterm w von f, so braucht man w' nicht weiter zu betrachten, da w auf jeden Fall überdeckt werden muss und hierdurch automatisch auch Minterm w' überdeckt wird.
- Jeder in $PIT(f)$ vorhandene Primimplikant p, der w überdeckt, überdeckt auch w'.

2. Reduktionsregel: Entferne aus der Primimplikantentafel $PIT(f)$ alle Minterme, die einen anderen Minterm in $PIT(f)$ dominieren.

Zweite Reduktionsregel: Beispiel

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	1								1
6		1							1
7			1						
8				1					
9	1				1				
10		1				1			1
11			1				1		
12				1				1	
13					1	1	1	1	

Spalte 17 dominiert Spalte 10
$\Rightarrow$ Spalte 17 kann gelöscht werden!

Dritte Reduktionsregel - Zeilendominanz

Definition

Sei A eine boolesche Matrix. Zeile i von A **dominiert** Zeile j von A, wenn für jede Spalte k gilt: $A[i,k] \geq A[j,k]$.

- Nutzen für unser Problem: Dominiert ein Primimplikant m einen Primimplikanten m', so braucht man m' nicht weiter zu betrachten, wenn $cost(m') \geq cost(m)$ gilt.
- Der Primimplikant m überdeckt jeden noch nicht überdeckten Minterm von f, der von m' überdeckt wird, obwohl er nicht teurer ist.

3. Reduktionsregel: Entferne aus der Primimplikantentafel $PIT(f)$ alle Primimplikanten, die durch einen anderen, nicht teureren Primimplikanten dominiert werden.

Dritte Reduktionsregel: Beispiel

Nehme an, dass die Zeilen 5 bis 12 gleiche Kosten haben.

	9	10	11	12	13	14	15	16
5	1							
6		1						
7			1					
8				1				
9	1				1			
10		1				1		
11			1				1	
12				1				1
13					1	1	1	1

Dritte Reduktionsregel: Beispiel

Nehme an, dass die Zeilen 5 bis 12 gleiche Kosten haben.

werden dominiert

	9	10	11	12	13	14	15	16
~~5~~	~~1~~							
~~6~~		~~1~~						
~~7~~			~~1~~					
~~8~~				~~1~~				
9	1				1			
10		1				1		
11			1				1	
12				1				1
13					1	1	1	1

Nach Anwendung der 3. Reduktionsregel

	9	10	11	12	13	14	15	16
9	$\boxed{1}$				1			
10		$\boxed{1}$				1		
11			$\boxed{1}$				1	
12				$\boxed{1}$				1
13					1	1	1	1

- Offensichtlich kann nun wieder die erste Reduktionsregel angewendet werden, da die Zeilen 9, 10, 11, 12 wesentlich sind.
    - Die resultierende Matrix ist leer.
    - Das gefundene Minimalpolynom ist:
      $1 + 2 + 3 + 4 + 9 + 10 + 11 + 12$

Ein weiteres Beispiel

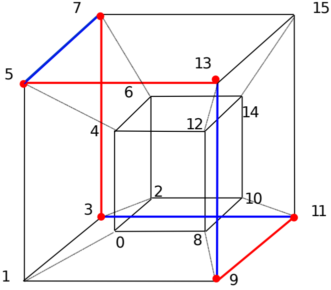
$Prim(f) = \{\{7,5\},\{5,13\},\{13,9\},\{9,11\},\{11,3\},\{3,7\}\}$

Primimplikantentafel $PIT(f)$:

	3	5	7	9	11	13
$\{7,5\}$		1	1			
$\{5,13\}$		1				1
$\{13,9\}$				1		1
$\{9,11\}$				1	1	
$\{11,3\}$	1				1	
$\{3,7\}$	1		1			

Wie sieht die kostenminimale Lösung aus?

Ein weiteres Beispiel



$Prim(f) = \{\{7,5\},\{5,13\},\{13,9\},\{9,11\},\{11,3\},\{3,7\}\}$

Primimplikantentafel $PIT(f)$:

	3	5	7	9	11	13
{7,5}		1	1			
{5,13}		1				1
{13,9}				1		1
{9,11}				1	1	
{11,3}	1				1	
{3,7}	1		1			

Kein Primimplikant ist wesentlich!

$Prim(f) = \{ \boxed{\{7,5\}}, \boxed{\{5,13\}}, \boxed{\{13,9\}}, \boxed{\{9,11\}}, \boxed{\{11,3\}}, \boxed{\{3,7\}} \}$

Wie sieht die kostenminimale Lösung aus?

Zyklische Überdeckungsprobleme

Definition

Eine Primimplikantentafel heißt reduziert, wenn keine der drei Reduktionsregeln anwendbar ist.

- Ist eine reduzierte Tafel nicht-leer, spricht man von einem zyklischen Überdeckungsproblem.
- In der Praxis werden solche Probleme heuristisch gelöst. Es gibt auch exakte Methoden (Petrick, Branch-and-Bound).

Primimplikantentafel $PIT(f)$:

	3	5	7	9	11	13
$\{7,5\}$		1	1			
$\{5,13\}$		1				1
$\{13,9\}$				1		1
$\{9,11\}$				1	1	
$\{11,3\}$	1				1	
$\{3,7\}$	1		1			

Petrick's Methode

Verfahren:

- Übersetze die PIT in ein (OR, AND)-Polynom, das alle Möglichkeiten der Überdeckung enthält.
- Multipliziere das (OR, AND)-Polynom aus, so dass ein (AND-OR)-Polynom entsteht.
- Die gesuchte minimale Überdeckung ist gegeben durch das Monom, das einer PI-Auswahl mit minimalen Kosten entspricht.

	3	5	7	9	11	13
$a:\{7,5\}$		1	1			
$b:\{5,13\}$		1				1
$c:\{13,9\}$				1		1
$d:\{9,11\}$				1	1	
$e:\{11,3\}$	1				1	
$f:\{3,7\}$	1		1			

wird übersetzt in

$$(e+f)\cdot(a+b)\cdot(a+f)\cdot(c+d)\cdot(d+e)\cdot(b+c)$$

$$= (ea+eb+fa+fb)\cdot(ac+ad+fc+fd)$$
$$\cdot(db+dc+eb+ec)$$

$$\vdots$$

$$= ace + acde + abcde + abcd + \cdots + bdf$$

Bei gleichen Kosten für alle PIs sind *ace* und *bdf* minimal.

„Greedy-Heuristik" zur Lösung von Überdeckungsproblemen

1. Wende alle möglichen Reduktionsregeln an.
2. Ist die Matrix *A* leer, ist man fertig.
3. Sonst wähle die Zeile *i*, die die meisten Spalten überdeckt. Lösche diese Zeile und alle von ihr überdeckten Spalten und gehe zu 1.

- Dieser Algorithmus liefert nicht immer die optimale Lösung!
  - Hinweis: Bei der Ausgangs-Matrix aus unserem Beispiel überdeckt Zeile 13 die meisten Spalten.
    Diese ist nicht Teil der gefundenen Lösung!

Zusammenfassung Schaltkreise

- Schaltkreise stellen boolesche Funktionen dar.
- Boolesche Polynome kann man als eingeschränkte Schaltkreise betrachten. Dafür gibt es exakte Minimierungsverfahren.
- Optimale boolesche Polynome können sehr viel größer sein, als entsprechende Schaltkreise.
  - exponentielle Unterschiede möglich
  - Rechtfertigung für Einsatz von Schaltkreisen statt PLAs
- Es gibt auch Algorithmen zur Berechnung optimaler (mehrstufiger) Schaltkreise.
  - anspruchsvoller als Optimierung von booleschen Polynomen
  - meist heuristisch (Näherungsverfahren)
  - nicht Gegenstand dieser Vorlesung
- Hier: Schaltkreise für spezielle Funktionen, insbesondere Arithmetik.