Mathe-Klausur

Bartels

WiSe 15/16

Keine Hilfsmittel zugelassen.
Dauer: 2h
Zum Bestehen benötigt man laut Klausur 12 Punkte, nachher runtergestzt auf 10 Punkte. Über bestandene Klausuren wurde die Normalverteilung gelegt.
Es gibt 6 Aufgaben und pro Aufgabe 5 Punkte.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

b) Sei $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)}$. Zeigen Sie, dass die Folge a_n konvergiert und geben Sie den Grenzwert an.

Lösung:

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen das jeweilige Supremum, Infimum, Maximum und Minimum, sofern diese exestieren:

(a)
$$A = \{cos(x) | x \in (0, 1]\}$$

(b)
$$B = \{\frac{x^2}{x^3} + 1 | x \in \mathbb{N}\}$$

(c)
$$C = \{x | x \in \mathbb{Q}, x < \sqrt{2}\}$$

Lösung:

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Lösungen von

(a)
$$z^3 = 8$$

(b)
$$3x^2 + 24x + 75 = 0$$

Lösung:

Aufgabe 4

Wir definieren die Funktionen $sin, cos : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ durch Folgende Ausdrücke:

$$cos(x) = Re(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!})$$

$$sin(x) = Im(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!})$$

(a) Finden Sie Zahlenfolgen $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

(b) Erklären Sie unter Verwendung der Begriffe *Potenzreihe, , ..., gleichmäßiger Konvergenz*, wieso sich die Bestimmung der Ableitung auf die Ableitung von Polynomen reduzieren lässt.

(c) Bestimmen Sie auf Basis der reellen Reihendarstellung vom sin(x)

Lösung:

Aufgabe 5

Bei einer differenzierbaren Funktion f existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit f(a) = f(b).

(a) Es existiert ein Maximum bei z, $z \in (a, b)$. Zeigen Sie dass $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f(z)$ gilt.

(b) Zeigen Sie dass f'(x) = 0 mit $x \in (a, b)$ existiert.

(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$ im Entwicklungpunkt $x_0 = 1$.

Lösung:

Aufgabe 6

(a) Leiten Sie unter Verwendung der Produktregel die Formel der partiellen Integration her, das heißt die Identität:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = -\int_a^b f'(x)g(x)dx + [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b}$$

(b) Bestimmen Sie den Wert des Integral

$$\int_0^1 x \cdot cos(x)dx$$

Lösung: