

$$A1 a) f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}}$$

$$g = f^{-1} = x^4$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{4 \cdot (x^{\frac{1}{4}})^3} = \frac{1}{4 \cdot x^{\frac{3}{4}}} \quad \checkmark$$

1	2	3	4	Σ
2	3	3	3	11

$$b) g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln(x^5)$$

$$g(x) = u(v(x))$$

$$u(x) = \ln(x)$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = x^5$$

$$v'(x) = 5 \cdot x^4$$

$$g'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

$$= \frac{1}{x^5} \cdot 5 \cdot x^4 = \frac{5x^4}{x^5} = \frac{5}{x} = 5 \cdot x^{-1} \quad \checkmark$$

$$c) h: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$$

$$h(x) = u(v(w(x)))$$

$$u(x) = \ln(x)$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$w(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$w'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x-1)^2}$$

$$w'(x) = \frac{x-1-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = u'(v(w(x))) \cdot (v(w(x)))'$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{-2}{2 \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot (x-1)^2} = \frac{-2}{2 \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot (x-1)^2} = \frac{-2}{2 \cdot (x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-1}{x^2-1} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

d) $m: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \arcsin(x)$
 $g = m^{-1} = \sin(x) \quad g'(x) = \cos(x) \quad \text{Warum?}$
 $m'(x) = \frac{1}{g'(m(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

-1
2/3

AR a) $f: [a, b] \rightarrow [a, b] \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$
 f ist stetig

$$\exists: \exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \xi$$

$$\text{Betrachte } h(x) = f(x) - x$$

→ Die Nullstellen von $h(x)$ sind die Fixpunkte von $f(x)$, da diese die Schnittstellen mit der ersten Winkelhalbierenden, also $f(x) = x$, sind.

Fixpunkte sind also gerade die Punkte, in denen Urbild und Bild einer Funktion äquivalent sind.

$$\text{Wenn } h(x) = 0 \rightarrow f(x) = x \text{ bzw. } f(x) - x = 0$$

$$f(\xi) = \xi$$

Da $f(a) \in [a, b]$, gilt $f(a) \geq a$, also

$$h(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$$

Genauso $f(b) \in [a, b]$, gilt $f(b) \leq b$, also

$$h(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$$

$$\rightarrow h(a) \geq 0 \text{ und } h(b) \leq 0$$

→ nach dem Zwischenwertsatz muss es ein

$$\xi \in [a, b] \text{ geben mit } h(\xi) = 0, \text{ also } f(\xi) = \xi.$$

Hiermit muss ein Fixpunkt für f in jedem Fall existieren. ✓

b) $g: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ stetig, besitzt aber keine Fixpunkte \square

$$\Rightarrow g(x) = x^2 \text{ besitzt nur in } g(0) = 0 \text{ oder}$$

$g(1) = 1$ einen Fixpunkt, alle anderen Werte

sind kleiner als der Funktionswert. x^2 stetig in $(0, 1)$

✓
3/3

A3

a) $a = b^x$ $x = \log_a b$

(I) $a = b^x$

$$\ln(a) = x \cdot \ln(b)$$

$$x = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \log_a b$$

□

(II) Annahme: $\exists x' \neq x: x' = \log_a b$

$$\Rightarrow b^x = b^{x'}$$

$$\frac{b^x}{b^{x'}} = 1$$

$$b^{x-x'} = 1$$

$$x - x' = 0$$

$$x = x' \quad \text{↯ Widerspruch zur Annahme}$$

→ Logarithmus muss also eindeutig definiert sein. ✓

b) $\log_b : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, Ableitung angeben

Sei $\frac{1}{\ln(b)}$ ~~stetig~~ konstant \Rightarrow stetig

$\ln(x)$ ist stetig

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(b)} \cdot \ln(x) \text{ stetig} \Rightarrow \log_b(x) \text{ stetig}$$

$$(\log_b(x))' = \frac{1}{\ln(b) \cdot x}$$

✓

3/5

44

$$h(t) = \frac{4000}{1+9e^{-0,058 \cdot t}} - 400$$

- a) h ist streng monoton steigend, da $9e^{-0,058 \cdot t}$ gegen 0 strebt, also streng monoton fällt und somit das Ergebnis des Quotienten $\frac{1}{1+9e^{-0,058 \cdot t}}$ für t gegen unendlich gegen 1 strebt und streng monoton steigt/wächst. ✓

besser: $h'(t) > 0$

Die Maximale Wuchshöhe der Fichte beträgt 3600 cm, da $9e^{-0,058 \cdot t}$ gegen 0 konvergiert und dann gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{4000}{1-0} - 400 = 3600$. $\hat{=} 36 \text{ m}$ ✓

$$b) h'(t) = \frac{2088 \cdot e^{0,058 \cdot t}}{(e^{0,058 \cdot t} + 9)^2} \quad h'(10) = \frac{2088 \cdot e^{0,058 \cdot 10}}{(e^{0,058 \cdot 10} + 9)^2} = 32,055 \frac{\text{cm}}{\text{Jahr}} \quad \checkmark$$

$$h(10) = \frac{4000}{1+9e^{-0,058 \cdot 10}} - 400 = 262,35 \text{ cm}$$

Höhe
Anstieg nach 3 Monaten:

$$\frac{3}{12} \cdot 32,055 \frac{\text{cm}}{\text{Jahr}} + 262,35 \text{ cm} = 270,364 \text{ cm}$$

Höhe nach 6 Monaten:

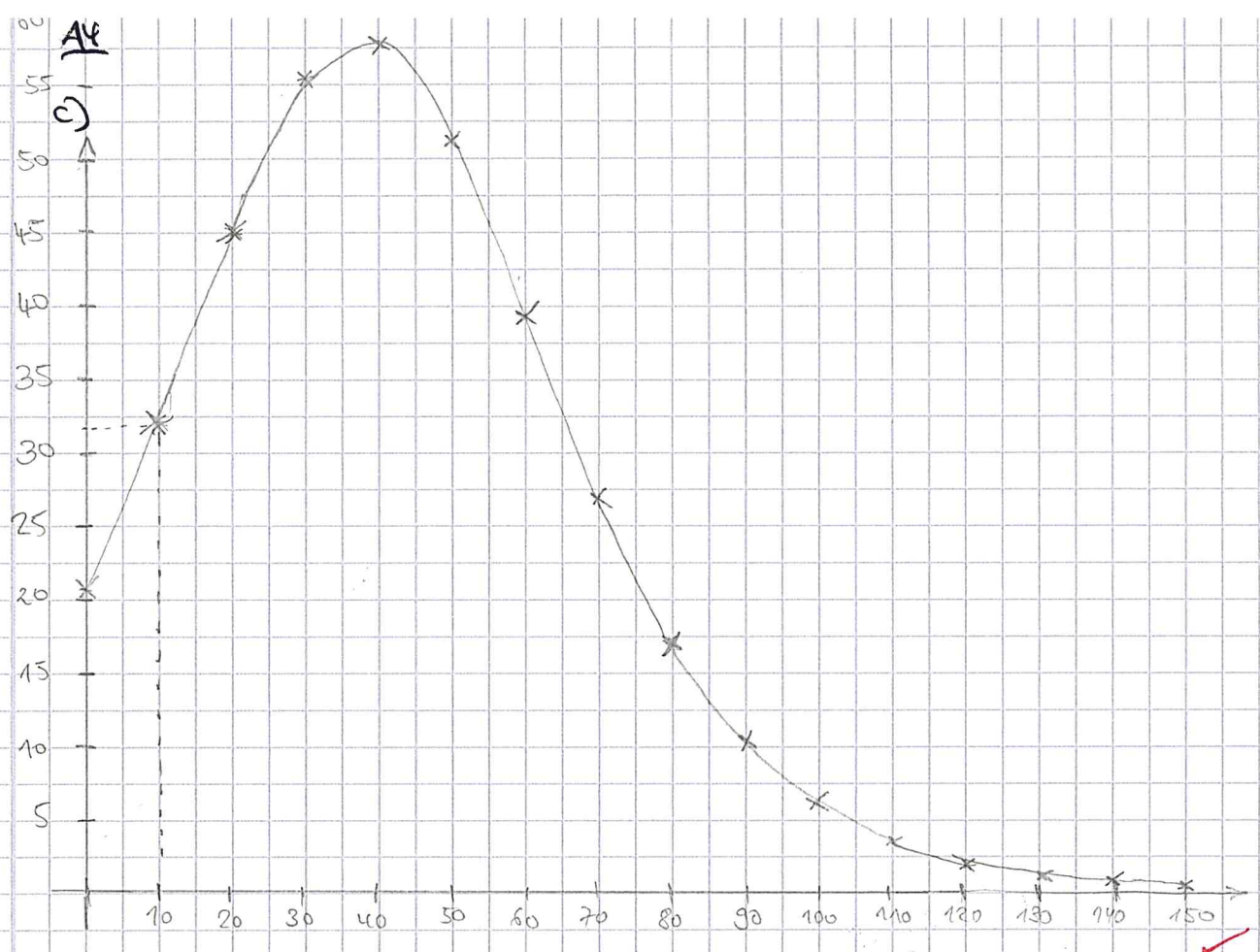
$$\frac{6}{12} \cdot 32,055 \frac{\text{cm}}{\text{Jahr}} + 262,35 \text{ cm} = 278,378 \text{ cm}$$

Höhe nach 12 Monaten:

$$\frac{12}{12} \cdot 32,055 \frac{\text{cm}}{\text{Jahr}} + 262,35 \text{ cm} = 294,405 \text{ cm}$$

Höhe nach 24 Monaten:

$$\frac{24}{12} \cdot 32,055 \frac{\text{cm}}{\text{Jahr}} + 262,35 \text{ cm} = 326,46 \text{ cm} \quad \checkmark$$



$$h'(10 - \frac{1}{12}) = 31,952 \text{ cm/Jahr}$$

$$h'(10) = 32,055 \text{ cm/Jahr} \quad \text{in } [10 - \frac{1}{12}, 10 + \frac{1}{12}]$$

$$h'(10 + \frac{1}{12}) = 32,159 \text{ cm/Jahr}$$

$$h(10 - \frac{1}{12}) = 253,685 \text{ cm}$$

$$h(10 + \frac{1}{12}) = 265,028 \text{ cm}$$

$$h(10) = \frac{265,028 \text{ cm}}{262,352}$$

Da die Ableitung von h streng monoton steigt, ist die Maximale Höhe der Fichte bei $h(10 + \frac{1}{12})$ und die Minimalhöhe bei $h(10 - \frac{1}{12})$.

$$|h(10 - \frac{1}{12}) - h(10)| = 2,66698 \text{ cm}$$

$$|h(10 + \frac{1}{12}) - h(10)| = 2,67554 \text{ cm}$$

→ Der maximale Fehler bei der Bestimmung der Höhe der Fichte kann also maximal 2,67554 cm betragen ($\leq 1,02\%$)

1. The first part of the paper discusses the importance of understanding the underlying mechanisms of the observed phenomena. This is crucial for developing effective interventions and policies. The authors argue that a comprehensive understanding of the system is necessary to address the complex challenges it presents.

2. The second part of the paper focuses on the methodology used in the study. The authors describe the data collection process, the statistical models employed, and the validation techniques used to ensure the reliability of the results. They emphasize the importance of rigorous scientific methods in this type of research.

3. The third part of the paper presents the results of the study. The authors show that the proposed model accurately predicts the observed outcomes, providing strong evidence for its validity. They also discuss the implications of these findings for future research and practical applications.

4. Finally, the paper concludes with a summary of the key findings and a discussion of the limitations of the study. The authors suggest several directions for future work, including the need for larger-scale studies and the exploration of additional factors that may influence the system.