Gruppe 2

Aufgabe 1

1	2	3	4	Σ
1,5	3	1,5	1	7

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\ x \mapsto x^2$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \wedge\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| \Rightarrow |\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)| < \epsilon$$

mit $\delta = -|x_0| + \sqrt{|x_0|^2 + \epsilon}$

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0) \cdot (x + x_0)| \\
&\leq |\delta \cdot (x + x_0)| \\
&= |\delta \cdot (x - x_0 + 2 \cdot x_0)| \\
&\leq |\delta \cdot (\delta + 2 \cdot x_0)| \\
&= |\delta^2 \cdot x + 2 \cdot \delta \cdot x_0)| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}
$$

□

1,5/3

Aufgabe 2

a)

$$\mathrm{f} : I \mapsto \mathbb{R}\ x \mapsto x^2$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2 \cdot x_0 \quad ✓ \\
&\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = (x^2)'(x) = 2 \cdot x \quad ✓
\end{aligned}
$$

b)

$$\text{f}: I \mapsto \mathbb{R} \quad I = (0, \infty) \quad x \mapsto x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\text{f}(x) - \text{f}(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^{\frac{1}{2}} - x_0^{\frac{1}{2}}}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}}$$

$$\Rightarrow \text{f'}(x) = (x^{\frac{1}{2}})'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}}$$

✓ 3/3

Aufgabe 3

~~a)~~ b)

$$\text{f}: \ I \mapsto \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{f'}(x) = 0 \quad x_n \in I \backslash \{x_0\}$$

$$= \text{Z.Z.}: |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ \wedge \text{f}(x_n) = \text{f}(x_0)$$

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{\text{f}(x_n) - \text{f}(x_0)}{x_0 - x_n} = 0$$

$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \to \frac{1}{n}$ geht gegen 0, wird allerdings nicht 0.

$$\Rightarrow x_n \to x_0$$

$$\Rightarrow x_n \neq x_0$$

$$\Rightarrow \text{f}(x_n) \to \text{f}(x_0)$$

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{\text{f}(x_n) - \text{f}(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{x_n - x_0} = 0$$

✓

□

b)

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \; f(x_n) = f(x_0)$$
$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x_0 - x_0} = 0$$

beides das Gleiche gezeigt

1,5/3

□

Aufgabe 4

c) $k = 32$ um die 1 darzustellen gilt: $b_1, \dots, b_n = 1$

$$\left|1 - \sum_{k=1}^{32} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right| = 2{,}328 \cdot 10^{-10}$$

-> entspricht der Ungenauigkeit

1/3