03.12.13
MI

<u>Satz</u>: Ist a_n nach oben beschränkt und monoton wachsend, d.h. es gilt $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n$, so ist die Folge konvergent.

<u>Bsp.</u>: $a_n = \frac{n-1}{n}$

<u>Beweis</u>: Da die Menge $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist, ist $\sup A$ eine reelle Zahl, die die kleinste obere Schranke für A ist. Daher existiert $\forall \varepsilon > 0$ ein Element $a_N \in A$ mit $a_N > a - \varepsilon$, wobei $a = \sup A$.

Auf Grund der Monotonie gilt $a_N \leq a_n$ $\forall n \geq N$

Ferner gilt $a_n < a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, insgesamt also

$$a - \varepsilon < a_n < a \quad \forall n > N$$

Dies impl.

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n > N$$

Q.E.D.

<u>Beweis</u>: Analog wird auch monoton fallende nach unten beschränkte Folgen konvergiert.

<u>Satz</u>: Die Folge der Summe

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ ist } \forall x \in \mathbb{R} \text{ konvergent}$$

$x^0 = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}$

Dies definiert eine Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \lim_{n \to \infty} a_n = \exp(x)$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. Im Fall $x \geq 0$ zeigen wir, dass die Folge e_n monoton und beschränkt ist.

Die Monotonie im Falle $x \geq 0$ ist klar.

Zum Nachweis der Beschränktheit sei $m \in \mathbb{N}$ so, dass $m+1 \geq 2 \cdot |x|$

Es gilt: $\forall\, k \geq m+1$

$$k! = \underbrace{k \cdot (k-1) \ldots (m+2)}_{k-(m+1) \text{ viele Faktoren}}(m+1)!$$

$$\geq (m+1)^{k-(m+1)} \cdot (m+1)!$$

und somit

$$\frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{m+1} \cdot x^{k-(m+1)}}{k!}$$

$$\leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{x^{k-(m+1)}}{(m+1)^{k-(m+1)}}$$

$\frac{|x|}{(m+1)} \leq \frac{1}{2}$

$$\leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-(m+1)}$$

Für $n \geq m+1$ erhalten wir damit:

$$|e_n - e_m| = \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \right|$$

$$\overset{n>m}{=} \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{x^k}{k!} \right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{m+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-(m+1)}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-(m+1)}$$

$$= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-(m+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\geq 2}$$

$$\geq 2 \cdot \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

$|e_n - e_m| \geq 2 \cdot \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$, d.h. dass die Folgeglieder e_n für $n \geq m+1$ beschränkt sind.

Damit ist die Folge e_n beschränkt (Beachte: m ist fest gewählt in Abhängigkeit von x)

Der Fall $x > 0$ folgt die Konvergenz der Folge e_n.

Ist $x < 0$ so teilen wir die Summe auf in

$$e_n^+ = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad e_n^- = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

n gerade $\qquad$ n ungerade

Damit ist e_n^+ monoton wachsend und e_n^- monoton fallend. Da nach obigen Argument beide Folgen beschränkt sind, sind sie konvergent und somit auch $e_n = e_n^+ + e_n^-$. Q.E.D.

Beweis: Die Abschätzung

$$e_m - 2 \cdot \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \leq e_n \leq e_m + \frac{2 \cdot |x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

gilt für $n \geq m+1$. Damit gilt insbesondere durch Grenzübergang $n \to \infty$

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{2 \cdot |x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

Bsp. 1 Wird 1 € bei einem Zinssatz x (z.B. $x = 0.01$ für 1% Zinsen) pro Jahr angelegt, so erhalten wir den Betrag $1 + x \cdot 1$.

Um den Zinseszinseffekt auszunutzen, legen wir das Guthaben nach einem Monat wieder für einen Monat an und erhalten nach 2 Monaten

$$\left(1+\frac{x}{12}\right)\left(1+\frac{x}{12}\right)$$

und nach 12 Monaten

$$\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12}$$

Nach Bernoulli:

$$\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12} \geq 1 + 12 \cdot \frac{x}{12} \geq 1 + x$$

Bei Unterteilung des Jahres in n Zeiträume der Betrag

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

Lohnt es sich, die Unterteilung beliebig klein zu machen?

Satz: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$