Übungsaufgaben

Aufgabe 1: (Logische Verknüpfungen)
A, B und C seien Aussagen. Zeigen Sie:

$$[\neg(A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [A \wedge (\neg B)] .$$

Aufgabe 2: (Mengen)
Es seinen M, N_1, N_2 Mengen mit $N_1 \subseteq M$, $N_2 \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$(M \setminus N_1) \cap N_2 = N_2 \setminus N_1 .$$

Aufgabe 3: (Quantoren)
Übersetzen Sie in Quantoren-Schreibweise und negieren Sie:

„es gibt ein $x \in M$, so daß für alle $y \in M$ gilt: $x \geq y$ "

Aufgabe 4: (Reelle Zahlen) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq -\frac{3}{4}\}$
Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die

$$\frac{2}{2x+2} \geq 4$$

gilt.

Aufgabe 5: (Reelle Zahlen) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2 \vee -2 \leq x < 1\} = [-2, 2]$
Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die

$$|x-1| + \frac{1}{2}x \leq 2$$

1. Fall $x - 1 > 0$
2. Fall $x - 1 < 0$
3. Fall $x - 1 = 0$

gilt.

Aufgabe 6: (Komplexe Zahlen)
Es sei $z_1 = 4j$, $z_2 = 3 - 2j$, $z_3 = -1 + j$.
a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\underset{-9+j35}{z_1(3\overline{z_2} - z_1) + \overline{z_3}} \quad \text{und} \quad \frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_1 - z_3}. \quad 2{,}1 - j\frac{3}{10}$$

2.

b) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von z_1, z_2 und z_3.

$z_1 = 4(\cos 90° + j \sin 90°)$
$z_2 = \sqrt{13}(\cos$ [illegible] $)$
$z_3 = \sqrt{2}(\cos 135° +$ [illegible] $135°)$

Aufgabe 7: (Einheitswurzeln)
Sei n eine natürliche Zahl ≥ 2. Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^n = 1$$

an.

Aufgabe 8: (Vollständige Induktion)
Beweisen Sie die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe 9: (Vollständige Induktion)
Man zeige: $2^n < n!$ für jede natürliche Zahl $n \geq 4$.

Aufgabe 10: (Anwendung der Bernoullischen Ungleichung)
Sei $b > 1$. Dann gibt es zu jedem $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $b^n > K$.

Aufgabe 11: (Abbildungen)
Zeigen Sie, daß für Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ gilt:

$$g \circ f \text{ ist bijektiv} \Longrightarrow f \text{ injektiv und } g \text{ surjektiv}$$

(Tip: vgl. Aufgabe 13 a), b) von Blatt 4).

Aufgabe 12: (Abbildungen)
Man beweise, daß für Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ gilt:

$$f \text{ und } g \text{ sind surjektiv} \Longrightarrow g \circ f \text{ ist surjektiv}$$

Aufgabe 13: (Polynome)
Besimmen Sie alle Nullstellen der Funktionen

$$f(x) = x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}, \qquad g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Aufgabe 14: (Trigonometrische Funktionen)
Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \text{b)} \quad \cos x - \cos y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 15: (Umkehrfunktionen)
Man zeige: die Funktion sinh bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab; die Funktion cosh bildet $[0,\infty)$ bijektiv auf $[1,\infty)$ ab. Für die Umkehrfunktionen Arsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Arcosh : $[1,\infty) \to \mathbb{R}$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsinh} x &= \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \\ \operatorname{Arcosh} x &= \ln(x+\sqrt{x^2-1}). \end{aligned}$$

Aufgabe 16: (Folgen)
Aus Aufgabe 19 (Blatt 5) wissen wir, daß die Folge (a_n) von Zahlen aus $\mathbb{Q}$ mit

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Ist sie in $\mathbb{Q}$ konvergent?

Aufgabe 17: (Folgen)
Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und geben Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein laut Konvergenzkriterium zugehöriges $k(\varepsilon)$ an.

Aufgabe 18: (Folgen)
Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3n^2+13n}{n^2-2} = 3$$

für $n \to \infty$.

?? **Aufgabe 19:** (Folgen)
Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \ ?$$

Ist $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n \ ?$$

Aufgabe 20: (Reihen)
Wie lautet der Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7^k} \ ?$$

$q > 1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$

$q < 1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Aufgabe 21: (Reihen)
Konvergiert oder divergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \ ?$$

Aufgabe 22: (Reihen)
Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

konvergiert (Hinweis: Quotientenkriterium).

Aufgabe 23: (Stetigkeit)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügt in $\mathbb{R}$ einer *Hölder-Bedingung*, wenn es ein $L \geq 0$ und ein $\alpha \in (0,1]$ gibt, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^{\alpha}.$$

Zeigen Sie, daß unter dieser Voraussetzung f in allen Punkten stetig ist.

Aufgabe 24: (Stetigkeit)
Ist die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig? (Tip: vgl. Aufgabe 16)

Aufgabe 25: (Stetigkeit)
Man bestimme $a, b \in \mathbb{R}$, so daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 & \text{falls } \ -1 < x < 2 \\ ax+b & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 26: (Stetigkeit)
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie: f_α ist genau dann stetig, wenn $\alpha > 0$. (Hinweis: nicht ganz leichte Aufgabe, vgl. auch 21 b) von Blatt 6)

Aufgabe 27: (Grenzwerte von Funktionen)
Untersuchen Sie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-3)^2 - 9}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(x-3)^2 - 9}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\cos x}.$$

Aufgabe 28: (Differentiation)
Bestimmen Sie das absolute Maximum und Minimum von $f(x) = x^3 e^{-x}$ auf $[0,4]$.

Aufgabe 29: (Legendre-Polynome)
Das *Legendre-Polynom* n-ter Ordnung $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[(x^2 - 1)^n\right].$$

a) Berechnen Sie P_0, P_1 und P_2.
b) Zeigen Sie: P_n genügt der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Aufgabe 30: (Ableitung der Umkehrfunktion)
Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

sowie der Umkehrfunktion

$$\operatorname{Artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}.$$

Aufgabe 31: (Leibniz-Regel)
vollst. Ind.
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in D n-mal differenzierbar. Zeigen Sie

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Aufgabe 32: (Newton-Verfahren)
Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

mit dem Newton-Verfahren. (Hinweis: Bestimmen Sie zunächst durch zwei Iterationen des Newton-Verfahrens einen Näherungswert $\bar{x}$ für eine Nullstelle und spalten Sie dann $(x - \bar{x})$ ab.)

Aufgabe 33: (Taylor-Entwicklung)
Berechnen Sie die ersten drei Glieder des Taylor-Polynoms von $\tan x$ mit Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 34: (Taylor-Reihe)
Berechnen Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = \ln(1+x)$ mit Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 35: (Integralrechnung)
Ist die Aussage

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

richtig?

Aufgabe 36: (Bestimmte Integrale)
selbst angeben?
Berechnen Sie:

$$\int_\pi^x \cos(kt)\,dt, \qquad \int_0^\pi \cos^2 x\,dx.$$

Aufgabe 37: (Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen)
Berechnen Sie:

$$\int t\sin(t^2)\,dt, \qquad \int \tan t\,dt.$$

Hinweise zu den $\overset{\Sigma+}{\text{Übungsaufgaben}}$

1) Wahrheitstafel

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge (\neg B)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

2) $x \in (M \setminus N_1) \cap N_2 \Leftrightarrow x \in M \setminus N_1 \wedge x \in N_2$

$\Leftrightarrow x \in M \wedge x \notin N_1 \wedge x \in N_2$

$\Leftrightarrow x \in \underbrace{(M \cap N_2)}_{= N_2} \wedge x \notin N_1 \Leftrightarrow x \in N_2 \setminus N_1$

3) $\exists x \in M \; \forall y \in M \; x \geq y$. Negation $\forall x \in M \; \exists y \in M \; x < y$.

4) Fallunterscheidung:

I. $2x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$$\frac{2}{2x+2} \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{4}$$

II. $2x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

$$\frac{2}{2x+2} \geq 4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4} \quad \text{nicht erfüllbar}$$

Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq -\frac{3}{4}\} = (-1, -\frac{3}{4}]$.

5) Fallunterscheidung:

I. $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$$|x-1| + \tfrac{1}{2}x \leq 2 \Leftrightarrow x - 1 + \tfrac{1}{2}x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2$$

II. $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$$|x-1| + \tfrac{1}{2}x \leq 2 \Leftrightarrow -x+1+\tfrac{1}{2}x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -2$$

Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2 \vee -2 \leq x < 1\} = [-2, 2]$.

6) a) $35j - 9$, $\frac{21}{10} - \frac{3}{10}j$

? b) $(4, \frac{\pi}{2})$, $(\sqrt{13}, -\arctan\frac{2}{3})$, $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$

7) $z_k = e^{j\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$

8) (IA) $n = 1$ ✓

(IS) $n \to n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \underset{(IV)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \qquad \square$$

9) (IA) $n=4$ $\qquad 2^4 = 16 < 4! = 24$ ✓

(IS) $n \rightsquigarrow n+1$

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \underset{(IV)}{<} 2\, n! < (n+1)\, n! \quad \text{da} \quad n+1 > 2$$

$$= (n+1)! \qquad \square$$

10) Beweis: Es ist $b-1>0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$b^n = (1+(b-1))^n \geq 1 + \underbrace{n(b-1)}_{> K-1} > K$$

für hinreichend großes n (Archimedisches Axiom)

für n hinreichend groß.

11) Es gilt zunächst

$g\circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv $\quad (*)$

und

$g\circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv $\quad (**)$

(vgl. Hinweise in Blatt 4)

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt sofort die Behauptung.

12) Seien f,g surjektiv z.z. $g\circ f$ ist surjektiv

Sei $z\in P$. Da g surjektiv, gibt es $y\in N$ mit $g(y)=z$.

Da f surjektiv, gibt es $x\in M$ mit $f(x)=y$.

Es folgt

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

Also ist $g\circ f: M\to P$ surjektiv

13) $f(x)=0 \Leftrightarrow 6x^3+5x^2-2x-1=0$

Raten einer Nullstelle (Teiler des absoluten Glieds $f(0)$!)

$x_0=-1 \Rightarrow f(x_0)=0$

Polynomdivision $\quad (6x^3+5x^2-2x-1):(x+1) = 6x^2-x-1$

$$\begin{array}{l} \underline{(6x^3+6x^2)} \\ \quad -x^2-2x-1 \\ \quad \underline{(-x^2-x)} \end{array}$$

$6x^2 - x - 1 = 0 \iff x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \iff$

$$x_{1,2} = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{(12)^2} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{12} \pm \frac{5}{12}$$

<u>Nullstellen:</u> $x_0 = -1,\quad x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = -\frac{1}{3}.$

$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^2+1)(x-2)$

<u>Nullstellen:</u> $x_0 = 2,\quad x_1 = j,\quad x_2 = -j$

14) verwende z.B. $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2j}(z - \bar{z})$

a) $$2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{x+y}{2}} + e^{-j\frac{x+y}{2}}\right)\left(e^{j\frac{x-y}{2}} - e^{-j\frac{x-y}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{jy} + e^{-jy} - e^{-jx}\right)$$
$$= \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right) - \frac{1}{2j}\left(e^{jy} - e^{-jy}\right) = \sin x - \cos x$$

b) analog

15) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

- Da $\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist und (offensichtlich) $\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$, ist sinh <u>surjektiv</u>.

außerdem gilt mit der Definition

$$\mathrm{Arsinh}\, x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$\mathrm{Arsinh}(\sinh x) = x$, $\sinh(\mathrm{Arsinh}\, x) = x$, also ist sinh auch <u>bijektiv</u> mit der Umkehrfunktion Arsinh

(verwende $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$)

- $\cosh: [0,\infty) \to [1,\infty)$ ist surjektiv, da $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty$.
(weiter wie oben)

16) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathbb{Q}$ <u>nicht</u> konvergent, da der Grenzwert $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegt.

17) Es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \boxed{k(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon}}$$

18) Es ist

$$a_n = \frac{3n^2+13n}{n^2-2} = \frac{3+13/n}{1-2/n^2}$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{13}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 0$ folgt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \frac{\lim(3+13/n)}{\lim(1-2/n^2)} = \frac{3}{1} = 3.$$

19) $a_n \leq b_n \ \forall n \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$

(vgl. z.B. O. Forster, Analysis 1, S. 23 Satz 6)

$a_n < b_n \ \forall n \not\Rightarrow \lim a_n < \lim b_n$

z.B. $a_n = 0 \ \forall n$, $b_n = \frac{1}{n}$

20) Nach der Summenformel für die geometrische Reihe gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7}{6}.$$

21) Für die Partialsummen gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{n+1}-1 \longrightarrow \infty \quad \text{für } n\to\infty,$$

also divergiert die Reihe („Teleskopsumme").

22) Quotientenkriterium

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left(\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n^2}{2^n}\right)} = \frac{2^n (n+1)^2}{2^{n+1} n^2} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

für $n\to\infty$

also gibt es ein n_0, so daß

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{2}{3} < 1 \quad \text{für } n \geq n_0.$$

23) Sei $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, dann gilt für $|p-x| < \delta$

$$|f(p)-f(x)| \leq L|p-x|^{\alpha} < \varepsilon \quad \square$$

24) g ist unstetig. Für die Folge (a_n) aus Aufgabe 16 ist z.B.

$$g(a_n) = 1 \quad \forall n,$$

also

$$1 = \lim_{n\to\infty} g(a_n) \neq g(\lim_{n\to\infty} a_n) = g(\sqrt{2}) = 0.$$

25) Bestimme a und b aus

$$a(-1) + b = 2(-1)^3 = -2$$
$$a\,2 + b = 2\,2^3 = 16$$

$\Rightarrow$ $a = 6, \quad b = 4$

26) $\Leftarrow$: Sei $\alpha > 0$. Dann gilt für $x > 0$

$$|f_\alpha(x)| = \left| x^\alpha \sin \frac{1}{x} \right| \le |\overset{?}{x^\alpha}| = |e^{\alpha \ln x}| \to 0$$

für $x \to 0$. also ist f_α stetig.

$\Rightarrow$: Für

$$x_k = \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

gilt $x_k \to 0$ und

$$f_\alpha(x_k) = |x_k^\alpha| = e^{\alpha \sin x_k} \begin{cases} \to 1 & \alpha = 0 \\ \to \infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

also muß $\alpha > 0$ gelten.

$\square$

27)

$$\frac{(x-3)^2 - 9}{x} = \frac{x^2 - 6x}{x} = x - 6 \longrightarrow -6 \quad \text{für } x \to 0$$

$$\frac{(x-3)^2 - 9}{x^2} = 1 - \frac{6}{x} \longrightarrow -\infty \quad \text{für } x \to 0 \quad x > 0$$

$$\cancel{\longrightarrow \infty} \quad \text{für} \quad \cancel{x \to 0 \quad x < 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\cos x} \overset{\wedge}{=} \frac{\lim_{x \to 0} (e^x - 1)}{\lim_{x \to 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

da Grenzwerte von Zähler und Nenner existieren und Nenner $\neq 0$

28) $f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = (3x^2 - x^3) e^{-x} = 0$

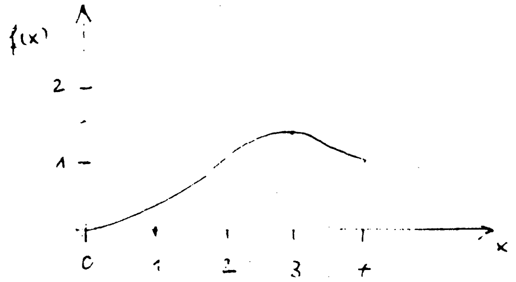
$\Leftrightarrow \; x \in \{0, 3\}$

$f''(x) = (6x - 6x^2 - x^3) e^{-x}$

$f''(0) = 0 \;\wedge\; f'''(0) \neq 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ Sattelpunkt

$f''(3) < 0 \;\Rightarrow\; x = 3$ lokales Maximum

$f(0) = 0, \; f(4) = 64 e^{-4} \approx 1.17, \; f(3) = 27 e^{-3} \approx 1.34$



Maximum: $x = 3$

Minimum: $x = 0$

29) ~~A~~a) $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

b) (schwierig)

Setze $u(x) = (x^2-1)^n$, es ist dann $u^{(n)}(x) = 2^n n!\, P_n(x)$.

Offensichtlich gilt

$$(x^2-1)\,u'(x) - 2nx\,u(x) = 0 . \qquad (*)$$

Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Differenziert man die Gleichung $(*)$ k-mal, so erhält man

$$(x^2-1)\,u^{(k+1)} - 2x(n-k)\,u^{(k)} - 2\left(kn - \frac{k(k-1)}{2}\right)u^{(k-1)} = 0 .$$

(Beweis durch Induktion, verwende $\sum_{p=1}^{k-1} p = \frac{k(k-1)}{2}$).

Mit $k := n+1$ folgt die Behauptung. $\square$

<u>Bemerkung</u>: Die Legendre-Polynome sind <u>orthogonal</u>, d.h.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x) = 0 \quad \text{für } n \neq m$$

$$\int_{-1}^{1} \left(P_n(x)\right)^2 = \frac{2}{2n+1} .$$

~~A~~ 30) $\tanh'(x) = 1 - \tanh(x)^2$

$\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

31) Induktion

(IA) $n=0$ ✓

(IS)

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(f(x)g(x)\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)$$

$$\underset{IV}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x)\, g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\, g^{(k+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x)\, g^{(k)}(x) + f^{(n+1)}(x)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\, g^{(k+1)}(x) + g^{n+1}(x)$$

$$= f^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x)\, g^{(k)}(x)$$

Indexverschiebung

$$+ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} f^{(n-(k-1))}(x)\, g^{(k)}(x) + g^{(n+1)}(x)$$

$$= \underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{=\binom{n+1}{0} f^{(n+1)}(x)} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left\{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right\}}_{=\binom{n+1}{k}} f^{(n-k+1)}(x)\, g^{(k)}(x) + \underbrace{g^{(n+1)}(x)}_{=\binom{n+1}{n+1} g^{(n+1)}(x)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(n-k+1)}(x)\, g^{(k)}(x). \qquad \square$$

32) Für die Nullstellen x_j des Polynoms

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gilt

$$|x_j| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$$

$\Rightarrow$ Startwert $x_0 = 4$

<u>Nullstellen</u> -1.5321 $\quad -0.3473$ $\quad 1.8794$

33) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$

34) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

35) Die Aussage ist <u>nicht</u> richtig, betrachte z.B. die Funktion

$$f(x) = 2x - 1 \qquad x \in [0,1].$$

36) $\int_{\pi}^{x} \cos(kt)\,dt = \left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_{\pi}^{x} = \frac{1}{k}\left(\sin(kx) - \sin(k\pi)\right) = \frac{1}{k}\sin(kx)$

muss man subst. angeben ??

$\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

37) $\int t \sin(t^2)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t^2)$

$\int \tan t\,dt = -\int \underbrace{\frac{-\sin t}{\cos t}}_{\frac{f'}{f}}\,dt = -\ln(\cos t)$

(ohne Gewähr!)