Kapitel 3 – Kombinatorische Logik

1. Kombinatorische Schaltkreise
2. Boolesche Algebren
3. Boolesche Ausdrücke, Normalformen, zweistufige Synthese
4. Berechnung eines Minimalpolynoms
5. Arithmetische Schaltungen
6. Anwendung: ALU von ReTI

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. Christoph Scholl

Institut für Informatik

WS 2015/16

Boolesche Ausdrücke

- **Ziel:**
  Wir werden zeigen, dass sich jede boolesche Funktion als ein Polynom, also eine Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Monomen, die ihrerseits Konjunktionen (UND-Verknüpfungen) von Eingangsvariablen und negierten Eingangsvariablen sind, darstellen lässt.

- Wir werden für solche Darstellungen Kostenkriterien aufstellen und diese optimieren.

- Monome und Polynome sind spezielle boolesche Ausdrücke.

- Beginne daher mit einer exakten Definition, was wir unter eine booleschen Ausdruck verstehen.

Boolesche Ausdrücke - allgemein

- Formal vollständige Definition boolescher Ausdrücke
  - Syntax (korrekte Schreibweise) $\rightarrow$ Def. boolescher Ausdrücke $BE(X_n)$
  - Semantik (Bedeutung) $\rightarrow$ Interpretationsfunktion Ψ von $BE(X_n)$

Syntax boolescher Ausdrücke

- Sei $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine endliche Menge von Variablen.
- Sei $A = X_n \cup \{0, 1, +, \cdot, \sim, (,)\}$ ein Alphabet.

Definition

Die Menge $BE(X_n)$ der vollständig geklammerten booleschen Ausdrücke über X_n ist die kleinste Teilmenge von A^*, die folgendermaßen induktiv definiert ist:

- $0, 1$ und $x_i \in X_n$ $i = 1, \dots, n$ sind boolesche Ausdrücke
- Sind g und h boolesche Ausdrücke, so auch
  - die Disjunktion $(g + h)$,
  - die Konjunktion $(g \cdot h)$,
  - die Negation $(\sim g)$.

Schreibweise von $BE(X_n)$

- **Konvention**: Negation $\sim$ bindet stärker als Konjunktion $\cdot$, Konjunktion $\cdot$ bindet stärker als Disjunktion $+$.
  - $\rightarrow$ Klammern können weggelassen werden, ohne dass Mehrdeutigkeiten entstehen.
- Je nach Kontext (betrachtete boolesche Algebra) schreibt man auch
  - statt $0, 1$: Die entsprechenden neutralen Elemente,
  - statt $\cdot$: $\wedge, \cap$,
  - statt $+$: $\vee, \cup$,
  - statt $\sim x$: $\neg x, x^C, x', \overline{x}$.

$\rightarrow$ So „vereinfachte” Ausdrücke entsprechen zwar nicht genau der obigen Definition, es gibt aber für jeden solchen Ausdruck einen äquivalenten vollständig geklammerten Ausdruck im Sinne der Definition.

- **Beispiel**: Der äquivalente vollständige geklammerte Ausdruck für „$x_1 \wedge \neg x_2$” wäre „$(x_1 \cdot (\sim x_2))$”.

Semantik boolescher Ausdrücke

Definition

Jedem booleschen Ausdruck $BE(X_n)$ kann durch eine Interpretationsfunktion $\Psi : BE(X_n) \to \mathbb{B}_n$ eine boolesche Funktion zugeordnet werden.

Ψ wird folgendermaßen induktiv definiert:

- $\Psi(0) = \mathbf{0}$; $\Psi(1) = \mathbf{1}$;
- $\Psi(x_i)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_i$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$ (Projektion)
- $\Psi((g+h)) = \Psi(g) + \Psi(h)$ (Disjunktion)
- $\Psi((g \cdot h)) = \Psi(g) \cdot \Psi(h)$ (Konjunktion)
- $\Psi((\sim g)) = \sim (\Psi(g))$ (Negation)

Semantik boolescher Ausdrücke

- Sei e ein boolescher Ausdruck.
  - $\Psi(e)(\alpha)$ für ein $\alpha \in \mathbb{B}^n$ ergibt sich durch Ersetzen von x_i durch α_i in e, für alle i und Rechnen in der booleschen Algebra $\mathbb{B}$.
  - Gilt $\Psi(e) = f$ für eine boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_n$, so sagen wir, dass e ein boolescher Ausdruck für f ist, bzw. dass e die boolesche Funktion f beschreibt.
  - Zwei boolesche Ausdrücke e_1 und e_2 heißen äquivalent ($e_1 \equiv e_2$) genau dann, wenn $\Psi(e_1) = \Psi(e_2)$.
    Sie sind gleich, wenn $e_1 = e_2$.

Beziehung zwischen boolesche Ausdrücken, booleschen Funktionen, Schaltkreisen (1/4)

Lemma 1

Zu jedem booleschen Ausdruck $e \in BE(X_n)$ existiert eine boolesche Funktion f, die durch e beschrieben wird.

- **Beweis**: $f := \Psi(e)$

Lemma 2

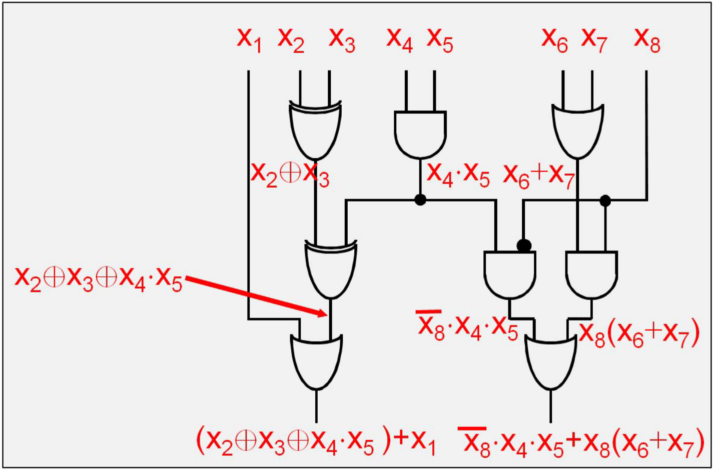
Zu jedem booleschen Ausdruck $e \in BE(X_n)$ gibt es einen kombinatorischen Schaltkreis, der e implementiert.

- **Beweis**: Übung

Beziehung zwischen boolesche Ausdrücken, booleschen Funktionen, Schaltkreisen (2/4)

- Umgekehrt läßt sich zu jedem Ausgang eines Schaltkreises durch "symbolische Simulation" ein boolescher Ausdruck berechnen, der die entsprechende boolesche Funktion darstellt.
- Symbolische Simulation benutzt zur Simulation eines Schaltkreises keine festen booleschen Werte an den Inputs, sondern boolesche Variablen.
- Es wird dann für jeden Knoten ein boolescher Ausdruck zu der Funktion bestimmt, die der Knoten berechnet.

Beziehung zwischen boolesche Ausdrücken, booleschen Funktionen, Schaltkreisen (3/4)



Beziehung zwischen boolesche Ausdrücken, booleschen Funktionen, Schaltkreisen (4/4)

...

Lemma 3

Zu jeder booleschen Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ existiert ein boolescher Ausdruck, der f beschreibt.

- Zu jeder booleschen Funktion gibt es beispielsweise ein Polynom, das f beschreibt, siehe nächste Folien ...

Literale

Definition

Die booleschen Ausdrücke x_i und x_i' aus $BE(X_n)$ heißen Literale.

- x_i (auch x_i^1 geschrieben) wird positives Literal, x_i' (auch x_i^0 geschrieben) wird negatives Literal genannt.

- Anmerkung: Eine weitere andere Notation für ein negatives Literal x' ist $\overline{x}$.

Monome

Definition

- Ein Monom über den Variablen $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist eine Konjunktion von Literalen, in der kein Literal mehr als einmal vorkommt und zu keiner Variable sowohl das positive als auch das negative Literal vorkommt. Außerdem ist „1" ein Monom.
  - Bsp.: $x_1 x_2 x_3'$ und $x_1' x_3$ sind Monome, $x_2 x_3 x_3'$ ist kein Monom.
- Ein Monom über $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ heißt vollständig oder Minterm, wenn jede Variable aus X_n entweder als positives oder als negatives Literal vorkommt.
  - Bsp.: Bzgl. $X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ ist $x_1 x_2 x_3'$ ein Minterm, $x_1' x_3$ kein Minterm.

UNI FREIBURG

Monome

...

- Für eine Eingabebelegung $\alpha \in \mathbb{B}^n$ heißt

$$m(\alpha) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \text{(Notation: } x_i^1 := x_i, x_i^0 := x_i'\text{)}$$

  der zu α gehörende Minterm.

Polynome, Disjunktive Normalform

- Eine Disjunktion von paarweise verschiedenen Monomen heißt Polynom. Sind alle Monome des Polynoms vollständig, so heißt das Polynom vollständig.

  Beispiel: Bzgl. $X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ ist
  - $x_1' x_2 + x_2' x_3$ ein Polynom.
  - $x_1' x_2' x_3 + x_1 x_2' x_3$ ein vollständiges Polynom.

- Ein Polynom von f heißt auch disjunktive Normalform (DNF) von f. Ein vollständiges Polynom von f heißt auch kanonische disjunktive Normalform (KDNF) von f.

Bestimmung der kanonischen disjunktiven Normalform

- Für $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ heißt $ON(f) := \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 1\}$ die Erfüllbarkeitsmenge von f.
- Die KDNF ist gegeben durch $\sum_{\alpha \in ON(f)} m(\alpha)$
- Die KDNF ist (bis auf Anordnung von Literalen in Mintermen und von Termen im Polynom) eindeutig.
- Beispiel: KDNF für f_1 (siehe Tabelle)

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$
\begin{aligned}
KDNF(f_1) &= m(000) + m(001) \\
&\quad + m(101) + m(110) + m(111) \\
&= x_1' x_2' x_3' + x_1' x_2' x_3 \\
&\quad + x_1 x_2' x_3 + x_1 x_2 x_3' + x_1 x_2 x_3
\end{aligned}
$$

- Anmerkung: Analog zur Erfüllbarkeitsmenge ist $OFF(f) := \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 0\}$ als die Unerfüllbarkeitsmenge definiert.

Zurück zu Lemma 3

...

Lemma 3

Zu jeder booleschen Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ existiert ein boolescher Ausdruck, der f beschreibt.

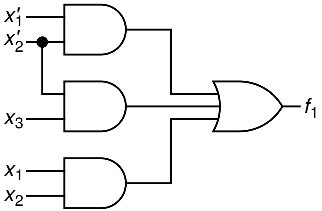
- Beweis:
  Es gilt $f = \Psi(\sum_{\alpha \in ON(f)} m(\alpha))$.

Realisierungen von DNF

- Erste Möglichkeit: Benutze „gewöhnliche” UND- und ODER-Gatter.
- Zweite Möglichkeit: PLAs (Programmable Logic Arrays)
  - Programmierbare logische Felder können nur Funktionen in DNF implementieren.
  - Sie benötigen dafür weniger Transistoren als eine Realisierung mit UND- und ODER-Gattern.

Realisierung durch Logikgatter

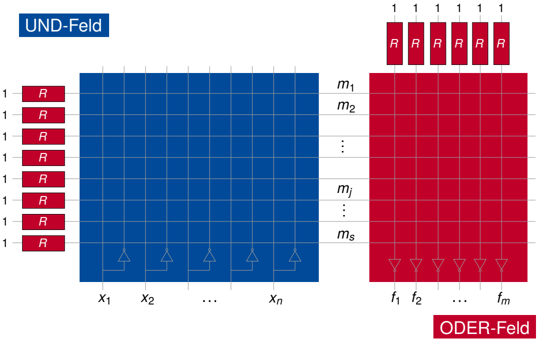
- Bilde erst alle Monome durch UND-Gatter.
- Verbinde dann alle Monome mit ODER-Gattern.
  - Notation: Man verzichtet häufig auf die Abbildung von Invertern.



- Die Kosten ergeben sich dann aus allen benötigten UND- und ODER-Gattern.

Programmierbare logische Felder (PLA)

Zweistufige Darstellung zur Realisierung von booleschen Polynomen.
$p_i = m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{ik}$ mit m_{iq} aus $\{m_1, \ldots, m_s\}$



Enthält Monom $m_j k$ Literale, so werden k Transistoren in der entsprechenden Zeile des **UND-Feldes** benötigt.

Besteht das Polynom p_t aus p Monomen, so benötigt man p Transistoren in der entsprechenden Spalte des **ODER-Feldes**.

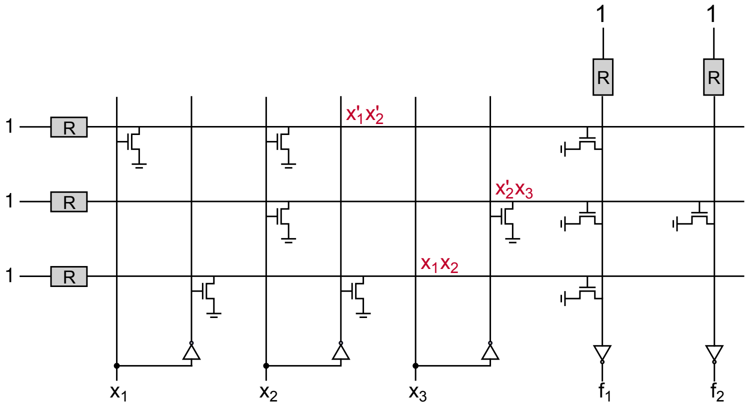
Fläche: $\sim (m + 2n) \times$ (Anzahl der benötigten Monome)

UNI FREIBURG

PLAs: Realisierungsdetails

Beispiel

$f_1 = x_1' x_2' + x_2' x_3 + x_1 x_2$
$f_2 = x_2' x_3$



UNI FREIBURG

- Sei $q = q_1 \cdot \dots \cdot q_r$ ein Monom, dann sind die Kosten $|q|$ von q gleich der Anzahl der zur Realisierung von q benötigten Transistoren im PLA, also $|q| := r$.
- Seien $p_1, \dots, p_m$ Polynome, dann bezeichne $M(p_1, \dots, p_m)$ die Menge der in diesen Polynomen verwendeten Monome.
  - Die primären Kosten $cost_1(p_1, \dots, p_m)$ einer Menge $p_1, \dots, p_m$ von Polynomen sind gleich der Anzahl der benötigten Zeilen im PLA, um $p_1, \dots, p_m$ zu realisieren, also $cost_1(p_1, \dots, p_m) = |M(p_1, \dots, p_m)|$.
  - Die sekundären Kosten $cost_2(p_1, \dots, p_m)$ einer Menge $\{p_1, \dots, p_m\}$ von Polynomen sind gleich der Anzahl der benötigten Transistoren im PLA, also $cost_2(p_1, \dots, p_m) = \sum_{q \in M(p_1, \dots, p_m)} |q| + \sum_{i=1,\dots,m} |M(p_i)|$.

Kombiniertes Kostenmaß

- Sei im Folgenden $cost = (cost_1, cost_2)$ die Kostenfunktion mit der Eigenschaft, dass für zwei Polynommengen $\{p_1, \ldots, p_m\}$ und $\{p'_1, \ldots, p'_m\}$ die Ungleichung

$$cost(p_1, \ldots, p_m) \leq cost(p'_1, \ldots, p'_m)$$

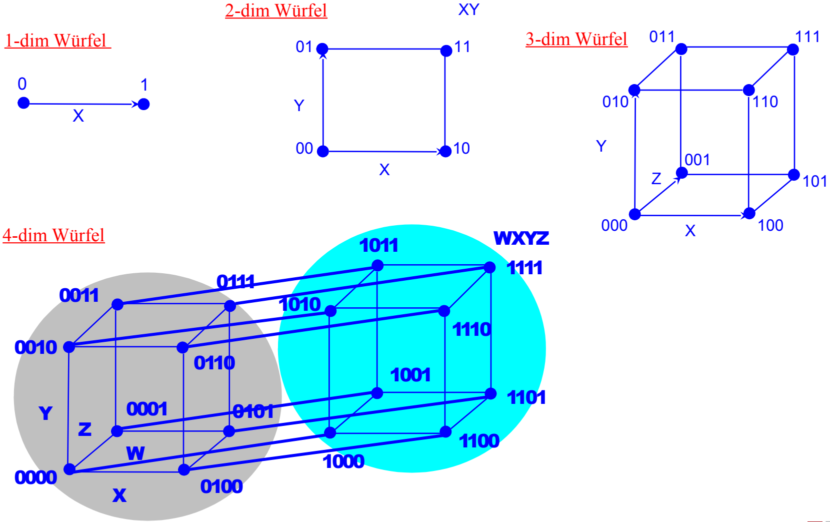
  gilt, wenn

  - entweder $cost_1(p_1, \ldots, p_m) < cost_1(p'_1, \ldots, p'_m)$
  - oder $cost_1(p_1, \ldots, p_m) = cost_1(p'_1, \ldots, p'_m)$
    und $cost_2(p_1, \ldots, p_m) \leq cost_2(p'_1, \ldots, p'_m)$

Das Problem der zweistufigen Logikminimierung

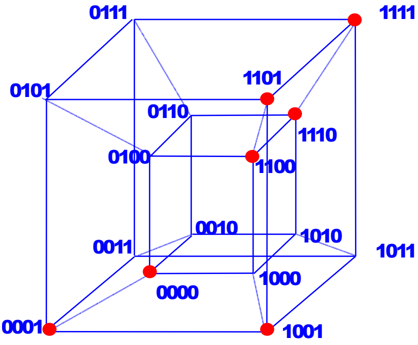
- **Gegeben:** Eine boolesche Funktion $f = (f_1, \ldots, f_m)$ in n Variablen und m Ausgängen in Form einer Tabelle der Dimension $(n+m) \cdot 2^n$ oder einer Menge von m Polynomen $\{p_1, \ldots, p_m\}$ mit $p_i = f_i$.
- **Gesucht:** m Polynome $g_1, \ldots g_m$, so dass g_i für alle i der Funktion f_i entspricht und die Kosten $cost(g_1, \ldots, g_m)$ minimal sind.
- Ab sofort werden nur noch Funktionen mit einem Ausgang betrachtet.

Veranschaulichung von Monomen und Polynomen



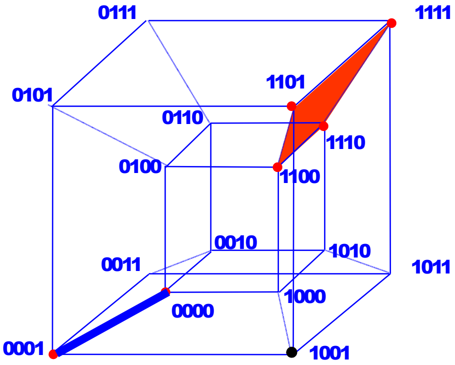
Veranschaulichung durch Würfel

- Jede boolesche Funktion f in n Variablen und einem Ausgang kann über einen n-dimensionalen Würfel durch Markierung der $ON(f)$-Menge spezifiziert werden.
  - **Beispiel**:
    $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1' x_2' x_3' + x_1 x_2' x_3' x_4$



Monome und Polynome als Teilwürfel

- Monome der Länge k entsprechen $(n-k)$-dimensionalen Teilwürfeln!
- Ein Polynom entspricht einer Vereinigung von Teilwürfeln.
- **Beispiel**:
  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
  $= \boxed{x_1 x_2} + \boxed{x_1' x_2' x_3'}$
  $+ \boxed{x_1 x_2' x_3' x_4}$

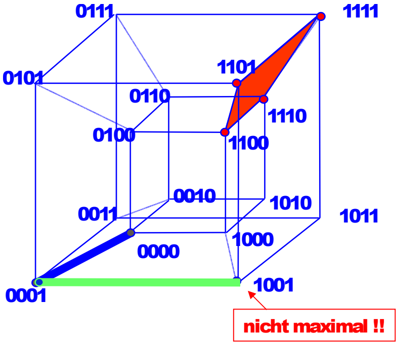


- **Gegeben**: Boolesche Funktion *f* in *n* Variablen und **einem** Ausgang, in Form eines markierten *n*-dimensionalen Würfels.

- **Gesucht**: Eine minimale Überdeckung der markierten Knoten durch maximale Teilwürfel im *n*-dimensionalen Würfel.

Entspricht einer Minimallösung:

$x_1 x_2 + x_1' x_2' x_3' + x_2' x_3' x_4$



Implikanten und Primimplikanten

Definition

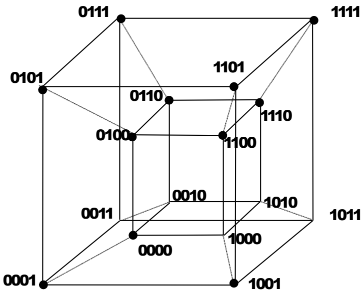
Eine boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ ist kleiner gleich einer anderen booleschen Funktion $g \in \mathbb{B}_n$ ($f \leq g$), wenn
$\forall \alpha \in \mathbb{B}_n : f(\alpha) \leq g(\alpha)$.
(Das heißt, wenn f an einer Stelle 1 ist, dann auch g.)

Definition

Sei f eine boolesche Funktion mit einem Ausgang. Ein Implikant von f ist ein Monom q mit $q \leq f$. Ein Primimplikant von f ist ein maximaler Implikant q von f, das heißt es gibt keinen Implikanten s ($s \neq q$) von f mit $q \leq s$.
Implikanten und Primimplikanten können durch n-dimensionale Würfel veranschaulicht werden.

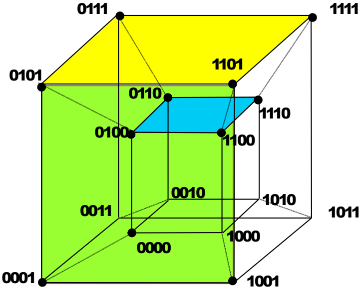
Veranschaulichung durch Würfel

- Ein Implikant von f ist ein Teilwürfel, der nur markierte Knoten enthält.
- Ein Primimplikant von f ist ein maximaler Teilwürfel mit dieser Eigenschaft.



UNI FREIBURG

Illustration für konkrete Funktion



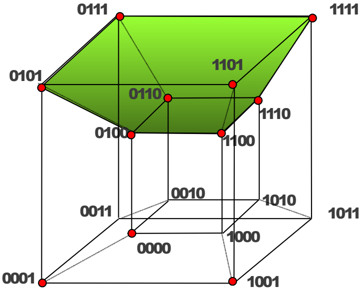
Implikanten

- alle markierten Knoten
- alle Kanten, deren Ecken alle markiert sind
- alle Flächen, deren Ecken alle markiert sind
- alle 3-dimensionalen Würfel, deren Ecken alle markiert sind

Allgemein

- Die Implikanten sind die Teilwürfel, deren Ecken alle markiert sind.

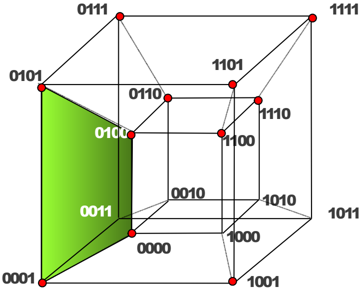
Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2

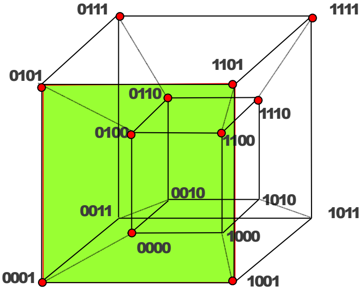
Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1' x_3'$

Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1' x_3'$
- $x_3' x_4$

Polynome und Implikanten einer Funktion f

Lemma

Die Monome eines Polynoms p von f sind alle Implikanten von f.

Beweis: (durch Widerspruch)

- Ann.: Es gibt ein Polynom p von f, das ein Monom m_j enthält, welches nicht Implikant von f ist, d.h. es gilt nicht: $\psi(m_j) \leq f$
- Das heißt es gibt eine Belegung $(a_1, \dots, a_n)$ der Variablen $(x_1, \dots, x_n)$ mit
  - $f(a_1, \dots, a_n) = 0$
  - $\psi(m_j)(a_1, \dots, a_n) = 1$, also auch $\psi(p)(a_1, \dots, a_n) = 1$

Demnach ist $\psi(p) \neq f$, also p kein Polynom von f.

$\Rightarrow$ **Widerspruch!**