Mathematisches Institut, Algebraische Geometrie, Prof. Dr. Stefan Kebekus

Klausur: "Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik" WS 2013/14

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Fach: ....

Anonymisierungscode: ....

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Lehramt ☐ sonstiges

Unterschrift: ....

Anmerkungen:

- Füllen Sie dieses Deckblatt vollständig aus.
- Zusätzliche Blätter sind nur einseitig zu beschreiben.
- Zusätzliche Blätter sind mit dem Anonymisierungscode zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- Der persönliche Anonymisierungscode wird jedem Studierenden während der Klausur mitgeteilt.
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten.**

Prüfungsunfähigkeit

Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Sollten Sie sich während der Prüfung nicht prüfungsfähig fühlen, können Sie aus gesundheitlichen Gründen auch während der Prüfung von dieser zurücktreten. Gemäß der Prüfungsordnungen sind Sie verpflichtet, die für den Rücktritt oder das Versäumnis geltend gemachten Gründe unverzüglich (innerhalb von 3 Tagen) dem Prüfungsamt durch ein Attest mit der Angabe der Symptome schriftlich anzuzeigen und glaubhaft zu machen. Weiter Informationen hierzu können auf den Internetseiten des Prüfungsamtes nachgelesen werden.

Note: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Mathematisches Institut, Algebraische Geometrie, Prof. Dr. Stefan Kebekus

Klausur: "Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik" WS 2013/14

Anonymisierungscode: ....

Anmerkungen:

- Füllen Sie dieses Deckblatt vollständig aus.
- Zusätzliche Blätter sind nur einseitig zu beschreiben.
- Zusätzliche Blätter sind mit dem Anonymisierungscode zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- Der persönliche Anonymisierungscode wird jedem Studierenden während der Klausur mitgeteilt.
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten.**

	Max. Anzahl Punkte	Erreichte Punkte	Bemerkung
Aufgabe 1	4		
Aufgabe 2	4		
Aufgabe 3	4		
Aufgabe 4	4		
Aufgabe 5	4		
Aufgabe 6	4		
Summe:	**24**		

Aufgabe 1

Aufgabe 4 (4 = 2 + 2 Punkte)

Ist die Folge a_n beschränkt? Ist die Folge a_n konvergent? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

a) $a_n = \frac{n^2+3n-7}{3n+5}$
b) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
c) $a_n = \exp(n - n^2)$

Aufgabe 2

Aufgabe 1: Beweise durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3

Aufgabe 3

Berechnen Sie die komplexen Nullstellen des Polynoms.
$X^3 + 4X + 5$

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 (3 = 1 + 1 + 1 Punkte)
Betrachten Sie für $k \in \mathbb{Z}$ die Integrale

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx \quad \text{und} \quad b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx.$$

(a) Berechnen Sie a_0 und b_0.

(b) Zeigen Sie $a_k = b_k$ für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ (z.B. mit partieller Integration).

Aufgabe 6

Betrachten Sie folgendes uneigentliches Integral, untesuchen sie es auf Existenz und rechnen sie es gegebenenfalls aus.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$$

Aufgabe 7

Aufgabe 2:

a) Berechne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{16}+2x+3}{2x^{16}+x^6} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Aufgabe 8

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x,y) = \frac{x}{y}$, sei definiert für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, die Funktion f kann in $(0,0)$ nicht stetig fortgesetzt werden, d.h konstruieren Sie Nullfolgen $x_n, y_n, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n).$$

Folgern Sie, dass die Reihenfolge von Grenzwerten im Allgemeinen nicht vertauscht werden darf.

Aufgabe 9

Aufgabe 2 (3 Punkte)
(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Beweisen Sie, dass f in $[a,b]$ einen *Fixpunkt* hat, d.h. es existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz mit einer geeigneten Funktion h.

(b) Geben Sie eine stetige Funktion $g : (0,1) \to (0,1)$ an, die *keinen* Fixpunkt besitzt.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 10

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Aus $0 \leq x < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ folgt, dass $x = 0$.
(b) Aus $a < b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ folgt, dass $a < b$.
(c) Jede streng monoton fallende Folge positiver Zahlen konvergiert gegen Null.
(d) Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen.

Hinweis: Wählen Sie in a) und b) $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und gehen Sie zum Grenzwert über.

Aufgabe 11

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei $p : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ ein gerades Polynom vom Grad 4 mit Nullstellen bei $z = 1$ und $z = i$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aussagen der Vorlesung, dass p eindeutig bestimmt ist, d.h. es gibt nur ein Polynom mit diesen Eigenschaften. Geben Sie das Polynom p an.

Aufgabe 12

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei a_n eine Zahlenfolge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $a_n \to +\infty \implies \frac{1}{a_n} \to 0$.
(b) $a_n \to 0,\ a_n > 0 \implies \frac{1}{a_n} \to +\infty$.

Aufgabe 13

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Sei $x = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass durch $a_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\varphi+2k\pi}{n})}$, $k = 0, \dots, n-1$ alle Lösungen der komplexen Gleichung $z^n = x$ gegeben sind.

(b) Angenommen $a^n = 1, n \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} n, & \text{falls } a = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

(c) Beweisen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$