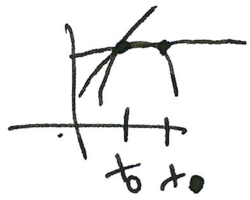
f diffbar, falls

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- bzw. $f(x_0)$



- $f(x) = |x|$ nicht diffbar in $x_0 = 0$

Satz:

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$, dann ist f stetig in x_0.

Bew.: Wir schreiben

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0}$$

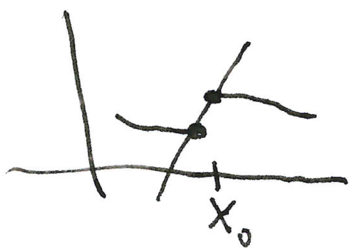
für $x \to x_0$

Dies impliziert:

$$f(x) \mapsto f(x_0), \quad x \mapsto x_0$$

Q.E.D.

Bem.: (1) Bei Sprüngen kann eine Funktion nicht differenzierbar sein.



(ii) Die Umkehrung ~~gilt~~ der Aussage des Satzes gilt nicht, d.h. z.B. ist $f(x)=|x|$ ist stetig in $x_0=0$, aber nicht diffbar.

Satz: Seien $f,g: ~~a~~ I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$. Dann sind $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ und sofern $g(x_0) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ in x_0 diffbar ~~und~~ mit Ableitung

- $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{g(x_0)^2}$

Bew.: Die Quotientenregel folgt aus $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ und ~~der~~ Produktregel d.h.

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot \frac{g(x_0)}{g(x_0)^2} - \frac{f(x_0) \cdot g'(x)}{g(x_0)^2}$$

Wir betrachten Diffquotienten (bzw. Sekantensteigungen)

$$\frac{\alpha f(x) + \beta \cdot g(x) - \alpha \cdot f(x_0) - \beta \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \frac{\alpha \cdot f(x) - \alpha \cdot f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\beta g(x) - \beta g(x_0)}{x - x_0}$$
$$\to \alpha \cdot f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

- $$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f'(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$ uF

$$= \underset{\substack{\text{Stetigkeit} \\ \downarrow \\ g(x_0)}}{g(x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ f'(x_0)}}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + f'(x_0) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow \\ g'(x_0)}}$$

$$g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \, g'(x_0)$$

- $$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\left(\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)\,g(x_0)}\right)}{x - x_0}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}$$

$$= -\underset{\substack{\text{Stetigkeit} \downarrow \\ g(x_0)}}{\frac{1}{g(x)g(x_0)}} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

$$= -\frac{1}{g(x_0)^2} \cdot g'(x_0)$$

Q.E.D.

<u>Bsp.:</u> (1) Für $n \in \mathbb{N}$ und $f_n(x) = x^n$ gilt $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$, denn per Induktion gilt mit $f_1'(x) = 1$, dass

$$f_n'(x) = (f_1 \cdot f_{n-1})'(x)$$
$$= (f_1' \cdot f_{n-1})(x) + f_1(x) \cdot f_{n-1}'(x)$$
$$= x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$
$$= x^{n-1} + x^{n-1}(n-1)$$
$$= n \cdot x^{n-1}$$

(II) Für das Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ folgt

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k\, x^{k-1}$$

(III) Für $f_n(x) = x^{-n}$, ~~wen~~ $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ergibt

$$f_{-n}(x) = \frac{1}{f_n(x)}$$

die Abl.

$$f_{-n}'(x) = \frac{-1 \cdot f_n'(x)}{f_{-n}(x)^2} = \frac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}$$

<u>Satz (Kettenregel)</u> Seien $f: I \to \mathbb{R}$ $g: J \to \mathbb{R}$ Fkt. mit $f(I) \in J$. Ist f in $x_0 \in I$ diffbar und g in $f(x_0)$, so ist $g \circ f$ $I \to \mathbb{R}$ in x_0 diffbar

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

<u>Bsp.:</u> Für $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $y \to \frac{1}{y}$

$f: I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt für

$(g \circ f)(x) \frac{1}{f(x)}$, dass

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'(x_0) = -\frac{1}{f(x_0^2)} \cdot f'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

Bew.: Wir nehmen zunächst an, dass $f(x) \neq f(x_0)$ $\forall x \neq x_0$ in einer kleinen Umgebung von x_0 gilt. Dann gilt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \cancel{g'(f(x_0))}$$

$$= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \qquad y = f(x), \quad y_0 = f(x_0)$$

$$\rightarrow g'(y_0) = g'(f(x_0))$$

Wobei wir ausgenutzt haben, dass f stetig ist, d.h. $y \to y_0$ für $x \to x_0$. Damit erhalten wir

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{\cancel{x - x_0}} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)}$$

$$\rightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

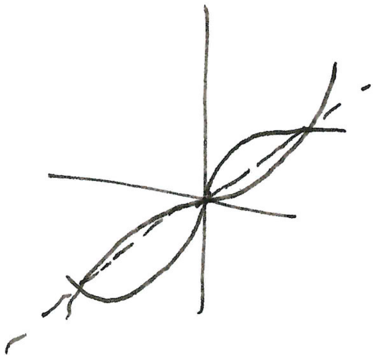
Gilt die Annahme nicht, so $\exists$ x_n: $x_n \to x$ $\wedge$ $f(x_n) = f(x)$ sowie $x_n \neq x$.
Dann folgt $f'(x_0) = 0$ sowie $(g \circ f)'(x_0) = 0$, sofern $g \circ f$ in x_0 diffbar.

q.E.D.

Satz: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton (wachsend oder fallend)
Gilt $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion
$g = f^{-1}$ diffbar in $y_0 = f(x_0)$
mit $$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Bew.: Nach Kettenregel gilt $$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$
andererseits gilt $g \circ f(x) = x$, also
$(g \circ f)' = 1$. Damit folgt
$$1 = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$
$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
Q.E.D.

Bem: Die Zusatzbedingung $g'(x_0) \neq 0$ kann nicht weggelassen werden z.B. ist $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend.
Die Umkehrfunktion ist
$g(y) = y^{\frac{1}{3}}$ und ist in $y = 0$ nicht diffbar.



$$g'(y) = \frac{1}{3 \cdot g(y)^2} = \frac{1}{3 \cdot y^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$$