Stetigkeit

11.01.16
MI

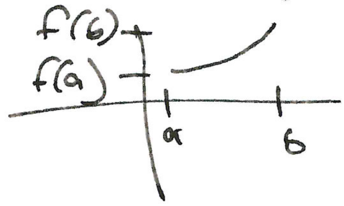
- $f: D \mapsto \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, falls
  $f(x_n) \to f(x_0)$ $\forall$ Folgen $x_n \mapsto x_0$.
  d.h. $\lim\limits_{x_n \mapsto x_0} f(x_n) = f(x_0)$

- **Zwischenwertsatz:** $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig
  $\Rightarrow \forall \; y \in [f(a), f(b)] \; \exists x \in [a,b] : f(x) = y$

Satz

(I) $f [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ streng monoton wachsend
u. stetig $\Rightarrow f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

(II) $g = f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ streng monoton wachsend & stetig



Annahme: g ist nicht stetig, d.h.:

$\exists \; y_0, y_n : y_n \to y_0$, aber
$g(y_n) \not\to g(y_0)$. (y_n eine Folge)

Mit $x_n = g(y_n)$ und $x_0 = g(y_0)$ gilt
$f(x_n) = y_n$ und $f(x_0) = y_0$.

Da $x_n \not\to x_0$ gibt es unendlich viele Folgeglieder mit $x_n < x_0 - \varepsilon$ oder $x_n > x_0 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$.
Für diese Folgeglieder gilt jedoch:
$f(x_n) < f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0)$

bzw. $f(x_n) > f(x_0+\varepsilon) > f(x_0)$

auf Grund der strengen Monotonie von f.

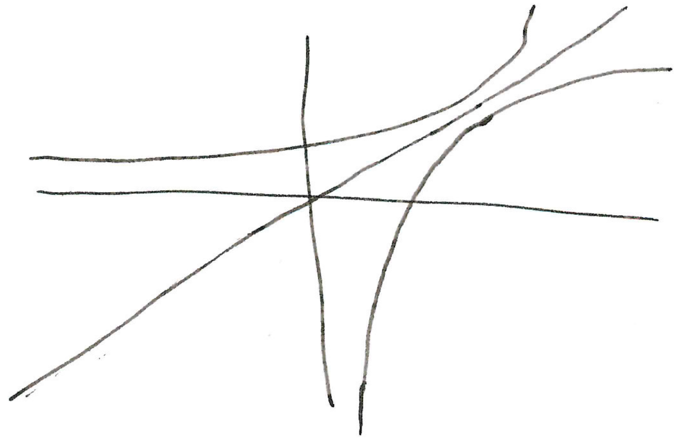
Dies steht im Widerspruch zur Stetigkeit von f.

Q.E.D.

Bsp.: Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \mapsto (0,\infty)$ ist streng monoton wachsend und stetig, sowie bijektiv. Die inverse Abbildung heißt natürlicher Logarithmus.

$$\ln: (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$$

und ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv



Es gilt $\ln(1)=0$ und $\ln(e)=1$, da $e^1=e$ und $e^0=1$, sowie $\ln(y_1 y_2)=\ln(y_1)+\ln(y_2)$

Def.: Für $a>0$ und $x\in\mathbb{R}$ def.

$$\boxed{a^x = \exp(x\cdot\ln(a))}$$

Bem.: (I) Es gilt für $r\in\mathbb{Q}$

$$\exp(r\cdot\ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^r = a^r$$

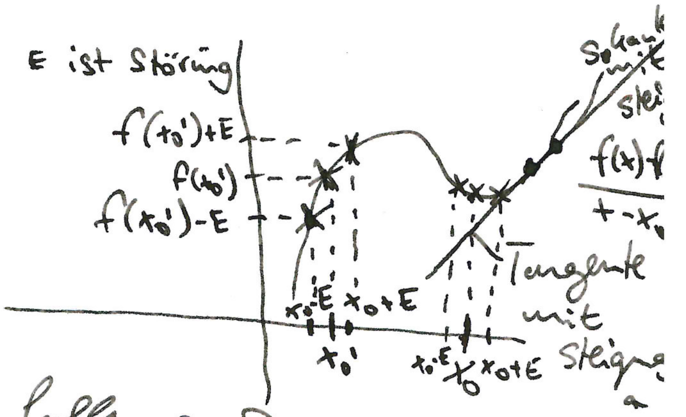
(II) Nicht ganze Potenzen sind i.A. nur für positive Zahlen definiert (z.B. $9^{\frac{1}{2}}$)

(III) Die Bedeutung von z.B. $a^{\sqrt{2}}$ ergibt sich durch Approximation des Exponenten durch rationale Zahlen und Stetigkeit.

Kap 3: Differentialrechnung f. Funktionen in einer Variablen

11.01.10. MI

3.1 Die Ableitung



Sei im Folgenden $I \in \mathbb{R}$

Def.: $f: I \mapsto \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, falls $a \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$$

Der Wert a heißt dann Ableitung von f in x_0, wir schreiben $f'(x_0) = a$.

Bem.: (I) Die Ableitung ist äquivalent definiert durch

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

(II) Die Ableitung beschreibt geometrisch die Steigung einer Tangente an $Gr(f)$ in x_0.

(III) Beschreibt $s: I \to \mathbb{R}$ einen Weg, ~~so ist~~ d.h. $s(t)$ ist $\forall\, t \in I$ eine Position, so ist $s'(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0.

Def.: $f: I \mapsto \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist.
Wir schreiben $f': I \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$

Bsp.:

(I) Jede konst. Funktion $f(x) = c$, $x \in I$, ist diff. mit $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$, denn

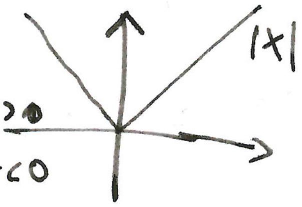
$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

(II) Die Funktion $f(x) = x$, $x \in I$ ist diff-bar mit $f'(x) = 1 \ \forall x \in I$, denn

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

(III) Die Funktion $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ ist nicht diff-bar in $x_0 = 0$

denn $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



↳ kein eindeutige Sekantensteigung

(IV) Für $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\exp' = \exp$.

Wir verwenden, dass für $|x| \le 1$

$$|\exp(x) - (1 + x)| \le |x|^2$$

$$\left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) \right)$$

Damit folgt:

$$\left| \frac{\{\exp(x) - \exp(0)\}}{\{x - 0\}} - 1 \right| = \left| \frac{\exp(x) - 1 - x}{x} \right|$$

$$= \left| \frac{\exp(x) - (1 + x)}{x} \right| \le \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \to 0 \text{ für } x \to 0$$

also $\exp'(0) = 1 = \exp(0)$.

Mit $\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h)$ erhalten wir:

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

$$= \exp(x) \cdot \underbrace{\frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}}_{\to \exp(0) = 1}$$

$$\to \exp(x)$$