Homepage: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/kebekus/teaching/WS1314-II.html

Aufgabe 1 Lösung:

(a) Sei $a_n := \frac{n}{3^n}$. Dann ist der Konvergenzradius gegeben durch

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3n}{n+1}\right| = 3.$$

Im Randpunkt $x = -3$ hat die Reihe die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n,$$

sie divergiert also. Im Randpunkt $x = 3$ hat die Reihe die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} n,$$

sie divergiert hier also ebenfalls.

(b) Sei $b_n := (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^2}{n!}$. Dann ist der Konvergenzradius gegeben durch

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{n^2(n+1)}{(n+1)^2}\right| = \infty.$$

Randpunkte gibt es damit keine und die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 Lösung: Nach einer kurzen Rechnung folgt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x)}{(1+x^2)}, \\
f'(x) &= \frac{(1+x^2)\cos(x) - 2x\sin(x)}{(1+x^2)^2}, \\
f''(x) &= -\frac{4x(1+x^2)\cos(x) + (x^4 - 4x^2 + 3)\sin(x)}{(1+x^2)^3},
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0, \\
f'(0) &= 1, \\
f''(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$T_2(x, 0) = x.$$

Aufgabe 3 Lösung:

(a) g erfüllt die quadratische Gleichung $g^2 - g - 1 = 0$, hat also dementsprechend den Wert $g = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (da $g > 0$).

(b) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion. Für $n = 0$ ist

$$|1-g| = |g-1| \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{g} \leq \frac{1}{g^{0+1}}.$$

Sei nun $n \geq 1$. Zunächst folgt leicht aus der Konstruktion der Folge x_n, dass $x_n \geq 1$ für alle $n \geq 0$ gilt (z.B. durch Induktion). Daher ist

$$|x_{n+1}-g| = \left|1+\frac{1}{x_n}-g\right| = \left|1+\frac{1}{x_n}-1-\frac{1}{g}\right| = \left|\frac{g-x_n}{x_n g}\right| = \frac{|x_n-g|}{x_n g} \leq \frac{|x_n-g|}{g} \leq \frac{1}{g^n \cdot g} = \frac{1}{g^{n+1}}.$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Da $g > 1$ ist, ist $\frac{1}{g^n}$ eine Nullfolge. Dementsprechend existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\frac{1}{g^n} < \varepsilon$. Also folgt nach Teil (b), dass

$$|x_n - g| < \varepsilon \quad \forall\ n \geq N.$$

Damit konvergiert (nach Definition) x_n gegen g.

Aufgabe 4 Lösung:

(a) Der Limes existiert und hat (nach der Regel von L'Hospital) den Wert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\cdot\tan(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\tan(x)+x(1+\tan^2(x))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2+2\tan^2(x)+x\cdot 2\tan(x)(1+\tan^2(x))}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Alternativ erhält man dasselbe Ergebnis unter Benutzung der entsprechenden Potenzreihen.

(b) Der Limes existiert und hat den Wert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^4+2n+1}{(3n^2-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+2/n^3+1/n^4}{(3-1/n^2)^2} = \frac{6}{3^2} = \frac{2}{3}.$$

(c) Der Limes existiert nicht, denn es gilt $\ln(n) \leq n$, weswegen sofort

$$\frac{n^2}{\ln(n)} \geq n$$

folgt. Alternativ: der *uneigentliche* Limes existiert und hat den Wert $+\infty$.

Aufgabe 5 Lösung:

(a) Partielle Integration liefert

$$\int x^4\cdot\ln(x)\ dx = \frac{x^5}{5}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}\ dx = \frac{x^5}{5}\cdot\ln(x) - \frac{x^5}{25} + C.$$

(b) Die Substitution $x = z^2$ liefert uns (mit neuen Grenzen $z_1 = \sqrt{0} = 0$ und $z_2 = \sqrt{4} = 2$)

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ dx = \int_0^2 \frac{2z}{1+z}\ dz = 2\int_0^2 1-\frac{1}{1+z}\ dz = 2\cdot\left[z-\ln|1+z|\right]_0^2 = 2\cdot(2-\ln(3)).$$

Aufgabe 6 Lösung:

(a) Die Substitution $z = \ln(x)$ liefert für das zugehörige unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)}\ dx = \int \frac{1}{z^2}\ dz = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\ln(x)} + C.$$

Also folgt

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)}\ dx = \lim_{R \to +\infty} \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)}\ dx = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(R)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

(b) Die Substitution $z = \ln(x)$ liefert für das zugehörige unbestimmte Integral

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\ dx = \int z\ dz = \frac{z^2}{2} + C = \frac{\ln^2(x)}{2} + C.$$

Also folgt

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\ dx = \lim_{R \to +\infty} \int_1^R \frac{\ln(x)}{x}\ dx = \lim_{R \to +\infty} \frac{\ln^2(R)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = +\infty.$$

Das uneigentliche Integral existiert also nicht. Alternativ: es gilt $\frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$ für $x \geq e$, d.h. das uneigentliche Integral existiert nicht, da bereits $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx$ nicht existiert.