18.11.15
MA I

gut drauf® ELEKTROTECHNIK
OPUS® • VOTHA® • JUMBO® • SIROX® • ECOVOLT®
Leistung Made in Germany

7. Polynome und rationale Funktionen

• $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x^1 + \dots a_n \cdot x^n$ ← Grad

a_n ← Leitkoeffizient

Lemma: Ist f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und hat eine Nullstelle bei $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $f(\lambda) = 0$, so existiert ein Polynom g vom Grad $n-1$ mit

$$f(x) = (x - \lambda)\, g(x)$$

Bsp.: Für $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ gilt $f(1) = 0$ und $f(x) = (x-1)(x^2+1)$

Beweis: Sei $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x^1 + \dots + a_n \cdot x^n$ mit $a_n \neq 0$. Wir betrachten den Fall $\lambda = 0$, d.h. $f(0) = 0$. Dann gilt $a_0 = f(0) = 0$

bzw. $f(x) = a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$

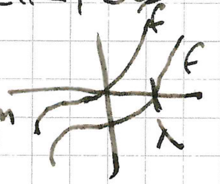
$$= x \cdot \underbrace{(a_1 + a_2 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^{n-1})}_{= g(x)}$$

Wobei g ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Ist $f(x) = 0$ für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$, so

Setze: $\tilde{f}(x) = f(x + \lambda)$

$$= a_0 + a_1 \cdot (x + \lambda) + \dots + a_n \cdot (x+\lambda)^n$$



d.h. $\tilde{f}$ ist Polynom des n-ten Grades mit $\tilde{f}(0) = 0$

400.424 004

Damit gilt: $\tilde{f}(x) = x \cdot \tilde{g}(x)$ für $\forall x \in \mathbb{R}$

mit einem Polynom des Grades $n-1$. Es gilt

$$f(x) = \tilde{f}(x-\lambda) = (x-\lambda) \cdot \underbrace{\tilde{g}(x-\lambda)}_{= g(x)}$$

$$= (x-\lambda) \cdot g(x)$$

und g ist Polynom des Grades $n-1$. Q.E.D.

Lemma: (!) Ein Polynom des n-ten Grades $n \in \mathbb{N}_0$, welches nicht identisch Null ist, besitzt höchstens n verschiedene Nullstellen.

Beweis: IA: Für $n=0$ ist $f(x) = a_0 \neq 0$, also hat f keine Nullstellen.

IS: Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

$n-1 \mapsto n$

Sei f vom Grad n. Besitzt f keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, ist die Aussage klar. Andernfalls existiert eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein Polynom g vom Grad $n-1$, sodass

$$f(x) = (x-\lambda) \cdot g(x)$$

Das Polynom g hat nach Induktionsvoraussetzung höchstens $n-1$ verschiedene Nullstellen. Jede dieser von λ verschiedenen Nullstellen ist Nullstelle von f, also hat f höchstens n verschiedene Nullstellen. Q.E.D.

gut drauf®
ELEKTROTECHNIK

18.11.15
MI

OPUS® • VOTHA® • JUMBO® • SIROX® • ECOVOLT®
Leistung Made in Germany

Bemerkung: Hat $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ mehr als n Nullstellen, so folgt $a_0 = a_1 \dots a_n = 0$

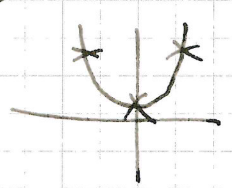
Lemma: Sind f und g Polynome vom Grad m bzw. n, d.h.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

Sind f und g an mehr als $\max\{m,n\}$ verschiedenen Stellen gleich, so gilt $f = g$, d.h. $m = n$ und $a_i = b_i \ \forall \ i = 0, 1, \dots, n$

Beweis: Die Funktion $f - g$ ist ein Polynom vom Grad höchstens $\max\{n,m\}$ und kann höchstens ~~Grad~~ $\max\{n,m\}$ ~~Sofern~~ Nullstellen besitzen, sofern $f - g$ nicht identisch Null ist. Q.E.D.

Bsp.:



Ein quadratisches Polynom ist durch 3 Werte eindeutig festgelegt.

Polynome besitzen möglicherweise keine (reellen) Nullstellen, z.B. $f(x) = x^2 + 1$. Lassen wir jedoch komplexe Argumente zu, so existieren im Beispiel der komplexen Nullstellen $z = \pm i$.

400.424 004

Wir betrachten komplexe Polynome d.h. Funktionen $f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $f(x) = a_0 + a_1 \cdot z^1 + \ldots + a_n \cdot z^n$ mit komplexen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, wobei $a_n \neq 0$ gelte.

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ ~~besitzt~~ besitzt mind. eine Nullstelle.

Der Beweis des Fundamentalsatzes erfordert anspruchsvolle mathematische Argumente.

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von f, so können wir f als Produkt

$$f(z) = (z - \lambda) \cdot \; g(z)$$

mit einem komplexen Polynom g von Grad $n-1$ schreiben.

<u>Folgt</u>: Jedes komplexe Polynom $f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ vom Grad $n \geq 1$ lässt sich schreiben als Produkt

$$f(z) = a_0 \cdot \prod_{k=1}^{K} (z - \lambda_k)^{n_k} \quad \forall \; z \in \mathbb{C}$$

$$= a_0 \cdot (z - \lambda_1)^{n_1} \cdot (z - \lambda_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)^{n_K}$$

Wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ Nullstellen mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_K$ sind.

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_K = n$$

Leistung Made in Germany • OPUS • VOTHA • JUMBO • SIROX • ECOVOLT

gut drauf ELEKTROTECHNIK

Bsp.: Das Polynom $f(z) = 2\cdot z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 2$
$= 2\cdot(z-1)^2\,(z^2+1)$

gilt $f(1) = 0$, $f(\pm i) = 0$ und

$$f(z) = 2\cdot(z-1)^2(z-i)(z+i)$$
$$= 2\cdot\prod_{k=1}^{k}(z-\lambda_k)^{n_k}$$

$\lambda_1 = 1 \quad n_1 = 2 \qquad \tilde{a}_0 \in \mathbb{C}$

$\lambda_2 = +i \quad n_2 = 1$

$\lambda_3 = -i \quad n_3 = 1$

Beweis: f besitzt nach dem Fundamental-Satz eine Nullstelle $\in \mathbb{C}$ und somit gilt

$$f(z) = (z-\lambda)\cdot g_1(z)$$

mit einem Polynom g vom Grad $n-1$ $(n-1 > 1)$, so besitzt g_1 eine Nullstelle $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$g_1(z) = (z-\lambda_2)\cdot g_2(z)$$

bzw. $f(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdot g_2(z)$

Fortfahren dieses Arguments liefert

$$f(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\dots(z-\lambda_n)\cdot g_n$$

mit Polynom g_n vom Grad 0, bzw. $g_0 = \tilde{a}_0$. Umnummerierung der Nullstellen zeigt das Resultat. Q.E.D.

400.424 004