Abgabetermin: 24.10.2000, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

Geben Sie auf Ihren Lösungsblättern bitte deutlich lesbar Ihren Namen und Ihre Gruppennummer an

1. Für beliebige Mengen M_1 und M_2 definiert man die symmetrische Differenz von M_1 und M_2 durch
$$M_1 \triangle M_2 := (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1).$$
   (a) Sei $M_1 := \{1,3,4,5,8,9\}$ und $M_2 := \{3,8,-4,100\}$. Bestimmen Sie $M_1 \triangle M_2$ und $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$.

   (b) Veranschaulichen Sie die Bildung der symmetrischen Differenz zweier Mengen durch ein Diagramm, und bestätigen Sie mit Hilfe eines solchen Diagramms die Gültigkeit der Beziehung
$$M_1 \triangle M_2 = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2).$$

2. (a) Bestimmen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl
$$z = \frac{2+3i}{1-i}\,.$$
   Ermitteln Sie dieselben Größen für $\bar{z}$.

   (b) Geben Sie sämtliche komplexen Lösungen der folgenden beiden quadratischen Gleichungen an:
$$z^2 - \frac{1}{2}z - 3 = 0\,, \qquad z^2 - 2z + 9 = 0\,.$$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - x \leq 0\}\,, \qquad \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \;\middle|\; \frac{|2x-4|}{x-1} < 5\right\}.$$

4. Für $a, b \in \mathbb{R}$ erklärt man das Maximum von a und b durch
$$\max\{a,b\} := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b, \\ b, & \text{falls } b > a. \end{cases}$$
   Weisen Sie mit Hilfe einer Fallunterscheidung nach, daß für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt
$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|b-a|}{2}.$$

Literatur

1. Batschelet, Edward, Introduction to Mathematics for Life Scientists, Springer, 3rd edition, 1979, 643 pp., Übersetzung 1980. [Klassische Darstellung, viele Beispiele, themenorientiert, ohne mathematische Satz-Beweis-Struktur]

2. Cohen, Harold, Mathematics for scientists and engineers, Prentice Hall Int. Ed., Englewood Cliffs, 1992, 783 pp.

3. Jeffrey, Alan, Mathematics for engineers and scientists, 5th ed., London, Chapman & Hall, 1996, 911 pp. [Informelle Darstellung, keine Beispiele aus der Praxis]

4. Hainzl, Josef, Mathematik für Naturwissenschaftler, 4. Aufl., Teubner Studienbücher: Mathematik, Stuttgart, 1985, 375 pp. [Komprimiert Darstellung, Formelsammlung mit Beispielen]

5. Luh, Wolfgang, Mathematik für Naturwissenschaftler I und II, Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden, 1978. [Mathematische Darstellung mit Beweisen, vermutlich nicht mehr bestellbar]

6. Papula, Lothar, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 3 Bände und Übungsband, zum Teil in 9. Auflage (2000), Viewegs Fachbücher der Technik. [Sehr ausführliche und umfangreiche Darstellung mit vielen Beispielen, vereinzelt mit Beweisen]

7. Riede, Adolf, Mathematik für Biologen. Eine Grundvorlesung, Wiesbaden, Vieweg, 1993, 321 pp. [Viele gute Beispiele aus der Biologie, problemorientiert, Schwerpunkt Stochastik]

8. Im Hof, Hans-Christoph, Vorlesungsskriptum der Universität Basel, erhältlich als pdf-file unter http://www.math.unibas.ch/index.html über das Stichwort "Teaching" und anschließend unter "Mathematik für Naturwissenschaftler".

Abgabetermin: 31.10.2000, bis 17.30 Uhr in der Vorlesung

5. Bestimmen Sie, soweit vorhanden, für die folgenden Mengen jeweils Supremum, Infimum, Maximum, Minimum:

$$A := \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}, \quad B := \left\{ x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}, x > 0 \right\},$$

$$C := \left\{ \frac{x}{1+x} : x \in \mathbb{R}, x > -1 \right\}, \quad D := \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_* \right\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

6. Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, daß gilt:

   (a)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_*.$$

   (b) $n^2 > 2n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$.

7. Entwickeln Sie die Binompotenz

$$\left(x^2 - \frac{1}{x} \right)^6, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

   und berechnen sie den Wert des Ausdrucks

$$\sum_{\nu=1}^{4} \binom{4}{\nu} 2^\nu.$$

8. (a) Auf wieviel Arten kann man aus 20 verschieden gefärbten Kugeln eine Auswahl von 17 Kugeln treffen?

   (b) Wieviel zehnstellige Zahlen gibt es, die viermal die Ziffer 1, einmal die Ziffer 5 und fünfmal die Ziffer 8 enthalten?

Abgabetermin: 07.11.2000, bis 17.30 Uhr in der Vorlesung

9. (a) In einem Land seien vier verschiedene Briefmarken mit dem Frankaturwert 10 WE (Währungseinheiten) im Verkehr. Auf wieviel Arten kann man mit solchen Marken ein Briefporto von 50 WE zusammenstellen, wenn von der Reihenfolge des Aufklebens abgesehen wird? Wie lautet die Antwort, wenn die Reihenfolge des Aufklebens berücksichtigt wird?
   (b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 5 numerierte Bälle auf 10 Urnen $U_1, \ldots, U_{10}$ so zu verteilen, daß keine Urne mehr als einen Ball enthält? Wie lautet die Antwort, wenn die Urnen mehrfach belegt werden dürfen? Was ergibt sich schließlich, wenn die 5 Bälle ununterscheidbar sind?

10. Der Druck $p = p(t)$ des gesättigten Wasserdampfes hängt von der Temperatur t in folgender Weise ab: $p(t) = at^2 + bt + c$. Man verfügt über folgende Daten:

t	0	10	20
p(t)	4,6	9,2	17,5

Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c, und zeichnen Sie den Graphen von p. Welche Symmetrieeigenschaften besitzt dieser?

11. (a) Betrachten Sie die Folge
$$a_n := \frac{4n+3}{3n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$
Wie lautet der Grenzwert a dieser Folge? Bestimmen Sie für $\epsilon = 10^{-4}$ explizit eine Zahl $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N_\epsilon$ gilt.
   (b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte (mit Begründung):
$$b_n := \frac{3n^2+4}{7n^3+1}, \quad c_n := \frac{1-2n}{3n+2}, \quad \text{jeweils für } n \in \mathbb{N}.$$

12. Scheiden die Körperorgane eines Patienten von einem Medikament pro Tag p Prozent aus (mit $0 < p < 100$) und erhält der Patient eine tägliche Zufuhr von d mg/l (Milligramm pro Liter) dieses Medikaments, so erhält man für die Medikament-Konzentration x_n am Ende des n-ten Tages den folgenden rekursiven Zusammenhang:
$$x_{n+1} = qx_n + d, \quad q := 1 - \frac{p}{100} \text{ und } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$
   (a) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $x_n = \alpha q^n + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, die eindeutig bestimmte Lösung von (1) zu vorgegebenem Anfangswert x_0.
   (b) Ist es möglich, daß die Konzentration konstant bleibt? Existiert $\lim_{n\to\infty} x_n$?

Abgabetermin: 14.11.2000, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

13. Nach Verhulst (1845) genügt die auf die größtmögliche Populationszahl bezogene relative Anzahl x_n von Individuen in der n-ten Generation dem rekursiven Entwicklungsgesetz

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $r \in [0, 4]$ die freie Wachstumsrate heißt. Sei $x_0 \in [0, 1]$ gegeben. Überlegen Sie sich, daß $0 \leq x_n \leq r/4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und daß die Population für $r \in [0, 1]$ stets monoton ausstirbt.

14. Zeigen Sie für $n \to \infty$ die Konvergenz der Folgen

$$a_n = \frac{n^3 + 2n + 3}{n + 1} - \frac{n^5 + 3n^2}{n^3 + n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2, \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

Wie lautet der jeweilige Grenzwert?
[Hinweise: Bei a_n bilde man erst den Hauptnenner. Warum? Bei b_n finde man erst einen geschlossenen Ausdruck für die Summe der Quadrate.]

15. Bestimmen Sie für $n \to \infty$ die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{-9n}, \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n}, \quad c_n = \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{3n}, \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

16. (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Wurzelkriteriums, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda n}{3n + 1}\right)^n$$

für $\lambda < 3$ konvergent und für $\lambda > 3$ divergent ist. Was kann man im Fall $\lambda = 3$ sagen?

(b) Weisen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} q^n$$

nach, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $|q| < 1$ fest gewählt seien.

Abgabetermin: 21.11.2000, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

17. Die Funktionen f und g seien definiert durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ ax - x^3, & \text{für } 1 < x \le 2, \\ b(e^x - x^2), & \text{für } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

beziehungsweise

$$g_{c,d}(x) = \begin{cases} e^{cx+d}, & \text{für } -1 \le x < 0, \\ 1 + \ln(1+dx), & \text{für } \quad 0 \le x < 1, \\ c + dx, & \text{für } \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zunächst beliebig seien. Skizzieren Sie für spezielle Wahlen (Sie haben freie Wahl) dieser Parameter die Graphen von $f_{a,b}$ und $g_{c,d}$. Wie muß man a, b bzw. c, d wählen, damit die Funktionen $f_{a,b}$ und $g_{c,d}$ stetig sind?

18. Untersuchen Sie die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{für } 0 \le x < 1, \\ \ln(x^3), & \text{für } 1 \le x \le e \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{3x+6}, & \text{für } -2 \le x < 1, \\ 3e^{x^2-1} + 1, & \text{für } \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

hinsichtlich ihres Monotonie- und Stetigkeitsverhaltens. Geben Sie jeweils auch die Umkehrfunktion an, falls diese existiert, und beurteilen Sie das Monotonie- und Stetigkeitsverhalten dieser Umkehrfunktion.

19. Betrachtet man die Erdatmosphäre als eine kompressible Flüssigkeit konstanter Temperatur, dann gilt für den Luftdruck $p(h)$ in der Höhe h (in Metern gemessen) die sogenannte barometrische Höhenformel $p(h) = p_0 e^{-\alpha h}$ mit $p_0 = 1,013$ bar und $\alpha = 1,251 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\mathrm{m}}$. In welcher Höhe ist der Luftdruck $\frac{1}{10}$ des Wertes von $p(0)$? Wie groß ist er in 1000 m Höhe?

20. (a) Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4},$$

indem Sie Satz 4.2 der Vorlesung benutzen.

(b) Wie verhält sich die Funktion $y(x) = |x| \sin\left(\frac{3}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$?

Übungen zu Mathematik für Naturwissenschaftler I — WS 00/01, Blatt 6

PD Dr. Daniel Hug — 21.11.2000

Abgabetermin: 28.11.2000, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

---

21. (a) Stellen Sie $z = 2 + 5i$ in der Form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dar mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

    (b) Bestimmen Sie die dritten Wurzeln von $z = i$.

22. (a) Untersuchen Sie die Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ auf Differenzierbarkeit.

    (b) Weisen Sie nach, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} x\left(1 + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0, \end{cases}$$

    differenzierbar ist. Ist f' stetig?

23. Bestimmen Sie schrittweise (auf einem geeigneten Definitionsbereich) die Ableitungen der folgenden Funktionen, so daß ersichtlich ist, welche Differentiationsregeln Sie verwendet haben:

    (a) $f_1(x) = \sin(x^2 + 3)$.

    (b) $f_2(x) = (x^3 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$.

    (c) $f_3(x) = \exp\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$.

    (d) $f_4(x) = \arctan\left(\frac{3x+1}{x^2-2}\right)$.

24. Von einem zylinderförmigen Blutgefäß mit Radius r_1 zweige unter dem Winkel $\theta \in (0, \pi/2)$ ein zylinderförmiges Blutgefäß mit Radius $r_2 \in (0, r_1)$ ab. Der Gesamtwiderstand des Blutes entlang einer solchen Verzweigung berechne sich gemäß

$$R(\theta) = c\left(\frac{l - s\cot\theta}{r_1^4} + \frac{s}{r_2^4 \sin\theta}\right),$$

    wobei c die Viskositätskonstante des Blutes sei und $s, l > 0$ geeignete Konstanten sind, die durch die vorgegebene Geometrie der Verzweigung (wie in der Vorlesung beschrieben) festgelegt sind. Bestimmen Sie den Verzweigungswinkel θ_0, für den die Funktion R auf $(0, \pi/2)$ minimal wird (ohne etwaige Nebenbedingungen zu berücksichtigen). Was erhält man im Fall, daß $r_2 = 2r_1/3$ gilt?

Abgabetermin: 05.12.2000, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

25. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der folgenden beiden Funktionen. Beschreiben Sie außerdem deren Monotonieverhalten.
   (a) $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3}x^2(x-3)$.
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 \exp(-x^2)$.

26. Ein Körper der Masse m fällt in einem Gas oder in einer Flüssigkeit unter dem Einfluß der Erdanziehung (g: Erdbeschleunigung) und unter Berücksichtigung der Reibung (k: Reibungskoeffizient) in der Zeit t die Strecke
$$s_k(t) = \frac{m}{k} \ln \left\{ \cosh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t \right) \right\}.$$
Ermitteln Sie die Grenzgeschwindigkeit $v_k(\infty)$ des Körpers für $t \to \infty$, wenn
$$v_k(\infty) := \lim_{t\to\infty} v_k(t) := \lim_{t\to\infty} s_k'(t).$$
Bestimmen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital für festes $t \geq 0$ auch die Grenzwerte
$$\lim_{k\to 0} s_k(t) \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to 0} v_k(t).$$

27. Ein zylinderförmiger Metallbehälter soll genau 1 Liter Öl fassen. Wie sind der Radius r der Grund- und Deckfläche sowie die Höhe des Zylinders festzulegen, damit die Oberfläche (d.h. der Materialverbrauch zur Herstellung) des Behälters minimal wird? Begründen Sie Ihre Antwort genau.
Hinweis: Der Inhalt der Mantelfläche des Zylinders ist $2\pi rh$, das Volumen des Zylinders ist $\pi r^2 h$.

28. Ein Körper der Masse m sei an einer Feder mit der Federkonstante $c > 0$ aufgehängt. Nach Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit $t = 0$ schwingt der Körper. Wird die Größe der Auslenkung zur Zeit $t \geq 0$ mit $y(t)$ bezeichnet, so ist bekannt, daß
$$y''(t) + \frac{c}{m} y(t) = 0 \tag{1}$$
für alle $t \geq 0$ gilt. Bestätigen Sie, daß die Funktion
$$y(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t\right) + b \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t\right)$$
für beliebige Wahl von Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung (1) erfüllt. Wie sind diese Konstanten zu wählen, damit $y(0) = y_0$ und $y'(0) = v_0$ gilt?

Abgabetermin: 12.12.2000, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

29. Geben Sie Stammfunktionen zu folgenden Funktionen an, und bestätigen Sie das Ergebnis durch Differentiation:

    (a) $f_1(x) = (4x+3)^{-3}$;

    (b) $f_2(x) = \cot(x)$;

    (c) $f_3(x) = (3x^3+4x+1)^8(4,5x^2+2)$.

    Zu welcher Funktion ist
    $$f_a(x) = \frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$
    für festes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion?

30. Berechnen Sie die nachfolgenden Integrale:

    (a)
    $$\int_{0,5}^{1} (1-2y)^3 \sqrt{1+(1-2y)^4}\,dy;$$

    (b)
    $$\int_0^5 \frac{2e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}+1}dx;$$

    (c)
    $$\int_0^7 (1+x)^{\frac{1}{3}} x^2 dx;$$

    (d)
    $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(2x) dx.$$

31. Leiten Sie mit Hilfe des Verfahrens der Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion zu
    $$f(x) = \frac{x^7+x^3}{x^4-1}$$
    her.

32. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Bereiches des $\mathbb{R}^2$, der von der positiven x-Achse, der positiven y-Achse und dem Graphen der Funktion
    $$g(x) = \exp(-2x^3-x)\left(x^2+\frac{1}{6}\right)$$
    begrenzt wird.

Abgabetermin: 21.12.2000, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

33. Die Moleküle eines Gases bewegen sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, die sich infolge von Zusammenstößen noch laufend ändern. Dabei treten alle Geschwindigkeiten zwischen $v = 0$ und $v = \infty$ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf, die durch die Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsfunktion
$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad v \geq 0,$$
beschrieben wird. Die mittlere Geschindigkeit $\bar{v}$ der Gasmoleküle ist
$$\bar{v} := \int_0^\infty vF(v)dv.$$
Berechnen Sie dieses Integral. Was erhält man für ein Helium-Gas mit $T = 1073,15K$, $m_{He} = 6,646577 \cdot 10^{-27}$kg, $k = 1,380622 \cdot 10^{-23}$Nm/K? [Freiwilliger Zusatz: Bestätigen Sie durch Substitution und partielle Integration, daß $\int_0^\infty F(v)dv = 1$ gilt.]

34. (a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche des $\mathbb{R}^2$, die von einer Ellipse mit der Gleichung
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
berandet wird ($a, b > 0$).

    (b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche des $\mathbb{R}^2$, die von den Graphen der Funktionen
$$f_1(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \sqrt{x}, \qquad x \geq 0,$$
eingeschlossen wird.

35. (a) Ermitteln Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion $f(x) = \cosh(x)$, $x \in [-1, 2]$, um die x-Achse rotiert.

    (b) Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, den man erhält, wenn man den Graphen der Funktion $f(x) = 1 + x^2$, $x \in [1, 2]$, um die x-Achse rotiert.

36. (a) Ermitteln Sie die Konvergenzintervalle der folgenden Potenzreihen:
$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}(x-2)^n.$$

    (b) Stellen Sie die Funktion $f(x) = (1 + 4x^2)^{-1}$ als Potenzreihe mit Entwicklungsstelle $a = 0$ dar. Was erhält man als Konvergenzradius?

Abgabetermin: 09.01.2001, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

37. Leiten Sie die Potenzreihenentwicklung von arcsin her, indem Sie ähnlich wie in der Vorlesung vorgehen. In welchem Intervall ist diese Entwicklung gültig?

38. (a) Entwickeln Sie $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$ in eine Potenzreihe. Geben Sie auch das Konvergenzintervall an.

    (b) Berechnen Sie näherungsweise das Integral

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+t^7} dt,$$

    indem Sie den Integranden in eine Potenzreihe entwickeln und gliedweise integrieren.

39. Eine Wasseruhr ist ein Glasbehälter mit einem kleinen Loch am Boden, durch den Wasser ausfließen kann. Die Uhr wird für die Zeitmessung geeicht, indem Marken am Rand des Behälters entsprechend gleichen Zeitintervallen angebracht werden. Sei $x = f(y)$, $y \in [0, b]$, stetig. Die Form des Randes eines Glasbehälters werde durch Rotation des Graphen von f um die y-Achse erhalten. Sei $V(t)$ das Wasservolumen und $h(t)$ die Höhe des Wasserniveaus zur Zeit t.

    (a) Bestimmen Sie V als Funktion von h.

    (b) Zeigen Sie

$$V'(t) = \pi f(h(t))^2 h'(t), \quad t \in [0, b].$$

    (c) Ist A der Flächeninhalt des Lochs am Behälterboden, dann ist aus der Physik bekannt, daß

$$V'(t) = kA\sqrt{h(t)}$$

    mit einer Konstante $k > 0$ gilt. Geben Sie diejenige Funktion f an, für die $h'(t) = c$ für alle $t \in [0, b]$ mit einer Konstante $c > 0$ erfüllt ist. Warum ist die Konstanz von h' eine sinnvolle Bedingung?

40. Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion f, die

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(x), & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, x = \pi, \\ \cos(x), & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

    erfüllt. Skizzieren Sie den Graphen von f zusammen mit den Graphen von $S_1[f], S_2[f], S_3[f]$.

Abgabetermin: 16.01.2001, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

41. (*Angeschnittener Wechselstrom*) Geben Sie die Fourier-Zerlegung der Funktion $h(t)$ mit der Periodenlänge $T > 0$, der Kreisfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T$ und

$$h(t) = \begin{cases} h_0 \cos(\omega_0 t), & t \in [0, T/4], \\ 0, & t \in [T/4, T], \end{cases}$$

an, wobei $h_0 \in \mathbb{R}$ konstant ist.

42. Ermitteln Sie die Fourier-Entwicklung der Funktion

$$f(t) = \frac{1}{2}(\sin(t) + |\sin(t)|)$$

in reeller und in komplexer Schreibweise. **Hinweis:** Superpositionsprinzip

43. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung $u \not\equiv 0$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{für } x, t \in \mathbb{R},$$

die zudem $u(0,t) = u(l,t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ($l, a^2 > 0$ sind konstant).
Anleitung: Der Ansatz $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ führt auf

$$\varphi''(x) + \lambda^2 \varphi(x) = 0 \quad \text{mit } \varphi(0) = \varphi(l) = 0$$

und

$$\psi''(t) + a^2\lambda^2\psi(t) = 0,$$

wobei $\lambda > 0$ geeignet zu bestimmen ist. Sehen Sie sich die Lösung der Aufgabe 28 nochmals an.

44. Von der (2π)-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei bekannt, daß sie gerade ist und $f(0) = -6$, $f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{7}{2}$, $f(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{3}$ erfüllt. Die Funktion f soll nun durch eine trigonometrische Funktion

$$g(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

näherungsweise beschrieben werden. Bestimmen Sie hierzu $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ so, daß g und f an den Stellen $t = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ dieselben Funktionswerte besitzen.

Abgabetermin: 23.01.2001, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

45. Seien $K > 0$ und $\theta_0 > 0$ fest gegeben. Für $x \geq 0$ und $t > 0$ ist durch

$$\theta(x,t) := \frac{\theta_0}{2\sqrt{\pi K t}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left(-\frac{(x-w)^2}{4Kt}\right) - \exp\left(-\frac{(x+w)^2}{4Kt}\right) \right\} dw$$

eine Funktion erklärt. Bestätigen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t) = K \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t)$;

(b) $\theta(0,t) = 0$ für $t > 0$;

(c) $\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi K t}}$ für $t > 0$.

Hinweis: Im vorliegenden Fall kann man die gegebene Funktion "unter dem Integral differenzieren", d.h. Integration und Differentiation lassen sich vertauschen. Genauere Erläuterungen erhalten sie in den Übungsgruppen.
Anmerkung: Man kann zeigen, daß auch $\lim_{t\downarrow 0} \theta(x,t) = \theta_0$ für alle $x > 0$ gilt. Diese Gleichungen wurden von Lord Kelvin benutzt, um das Erdalter (grob) zu bestimmen. Hierbei ist $\theta(x,t)$ die Temperatur der Erde im Abstand x vom Erdmittelpunkt und zur Zeit t, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt der Entstehung der Erde ist. Die Temperaturänderung $\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t)$, die Leitfähigkeit K und die Schmelztemperatur θ_0 lassen sich experimentell grob bestimmen, so daß man t aus Gleichung (c) berechnen kann.

46. Es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A_1B, BA_1, A_1C und CC. Kann man auch BC berechnen? Bestätigen Sie die Gleichheit $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$ in diesem Beispiel.

47. In einem Ökosystem leben 3 Spezies, wobei die Größe der Population der j-ten Spezies zur Zeit t gerade $n_j(t)$ sei für $j \in \{1,2,3\}$. Es sei $n(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$ der Populationsvektor, und es gelte $n(t+1) = A(t)n(t)$ für $t \geq 0$. Hierbei bezeichnet man $A(t) \in \mathbb{R}(3,3)$, $t \geq 0$, als die Übergangsmatrix des Systems von der Zeit t zur Zeit $t+1$. Betrachten Sie den Spezialfall

$$n(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t}{20} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{t}{10} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $n(1)$, $n(2)$, $n(3)$ und $n(4)$. Wann stirbt die dritte Spezies aus?

48. Es sei

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}_*$ gilt:

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Abgabetermin: 30.01.2001, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

49. Sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -7 & -5 & 6 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

50. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus in möglichst expliziter Form:

$$\begin{pmatrix} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 6x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & + & 3x_5 & = & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 20 \end{pmatrix}.$$

51. (a) Weisen Sie nach, daß die Menge

$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_3 : x - 2y + z = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}_3$ ist. Geben Sie eine Basis von U an. Weisen Sie auch nach, daß es sich bei den von Ihnen angegebenen Vektoren tatsächlich um eine Basis handelt.

(b) Betrachten Sie die Menge

$$V := \{f \in C^2(\mathbb{R}) : f'' = 4f + 3f'\}.$$

Ist V ein Untervektorraum von $C^2(\mathbb{R})$? Ermitteln Sie zwei linear unabhängige Vektoren von V, indem Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so bestimmen, daß die Funktion $f(x) = e^{\lambda x}$ in V liegt.

52. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die beschreibende Matrix $A^f(\mathfrak{A})$ für die Basis $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2\}$ mit

$$a_1 = e_1 - e_2, \quad a_2 = 2e_1 + 3e_2.$$

Ergänzungen zur Literaturliste

1. Anton, Howard, Lineare Algebra. Einführung, Grundlagen, Übungen. Aus dem Amerikanischen von Anke Walz. (Linear algebra. Introduction, foundations, exercises. Transl. from the American by Anke Walz). (German) Spektrum Lehrbuch. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag. x, 680 p. DM 49.80; (1998).

2. Artmann, Benno, Lineare Algebra, Birkhäuser Skripten, Birkhäuser, Basel, 3. Auflage, 1991, 355 pp.

3. Brenner, Jörg & Lesky, Peter, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 4 Bände, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 2. Auflage, 1978.

4. Burg, Klemens & Haf, Herbert & Wille, Friedrich, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I: Analysis, Band II: Lineare Algebra, Teubner, Stuttgart, 1992.

5. Grossman, Stanley & Turner, James, Mathematics for the biological sciences, Macmillan, New York, 1974, 512 pp.

6. Grossman, Stanley, Elementary Linear Algebra, 4th edition, Saunders College Publishing, 1991.

7. Hadeler, K. P., Mathematik für Biologen, Heidelberger Taschenbücher, Band 129, Springer, Berlin, 1974, 232 pp.

8. Klingenberg, Wilhelm, Lineare Algebra und Geometrie, Springer, Berlin, 3. Auflage, 1992, 293 pp.

9. Meyberg, Kurt & Vachenauer, Peter, Höhere Mathematik, Band I und II, 5. bzw. 3. Auflage, 1999.

10. Neunzert, Helmut, (Herausgeber), Analysis I und II (mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung), Springer, Berlin, 1982 (sicher mittlerweile in neuerer Auflage erhältlich).

11. Preuß, Wolfgang, (Herausgeber), Lehr- und Übungsbuch Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra und Anwendungen, Hanser Verlag, Leipzig, 1997, 328 pp.

Abgabetermin: 06.02.2001, bis 17.15 Uhr in der Vorlesung

53. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x & - & y & + & 3z \\ 4x & - & 2y & + & 6z \\ -6x & + & 3y & - & 9z \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{A} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weisen Sie nach, daß $\mathfrak{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie die Matrix $A^f(\mathfrak{A})$. Geben Sie $f(x)_{\mathfrak{A}}$ an für $x_{\mathfrak{A}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

54. Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ferner $\det(A)$.

55. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax$, wobei

$$A := \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die zugehörigen Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 von A (bzw. f). Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig? Sei $x_0 := 2v_1 - 3v_2 + 7v_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie $A^{100}x_0$.

56. Zur Zeit $t \geq 0$ sei $x(t)$ die Menge eines Medikaments im Blut und $y(t)$ die Menge dieses Medikaments im Gewebe eines Patienten. Das Medikament diffundiert nun vom Blut ins Gewebe und umgekehrt. Die zeitliche Entwicklung von $(x(t), y(t))$ läßt sich durch ein lineares System von Differentialgleichungen beschreiben. Konkret sei etwa für $t \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{400} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Berechnen Sie die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$, indem Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^2$ so bestimmen, daß

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} v \in \mathbb{R}^2$$

das System (1) erfüllt.