• partielle Integration

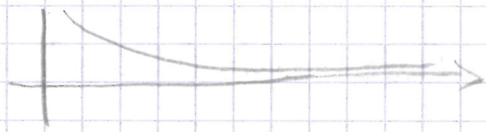
$$\int f'g\,dx = -\int f g'\,dx + [fg]$$

(denn $(fg)' = f'g + g'f$)

• Substitution $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$

• uneigentliches Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)\,dx$$



Bei zwei offenen Integralgrenzen ~~z.B. d.h.~~ Integralen unter (a,b) definieren wir:

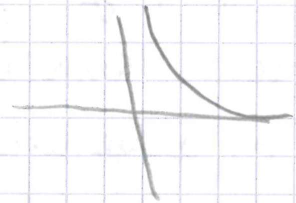
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a}\int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b}\int_c^\beta f(x)\,dx$$

mit $c\in(a,b)$ beliebig sofern beide Grenzwerte existieren.

Ähnlich definiert man Integrale über Mengen $[a,b]\setminus\{c\}$, z.B. $\mathrm{sign}: [-1,1]\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

Wichtig ist, dass die einzelnen Grenzwerte „für sich" existieren.

Bsp.: Für $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$



gilt $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} = [\ln(x)]_\varepsilon^1$

$$= 0 - \ln(\varepsilon) \to +\infty \text{ für } \varepsilon\to 0$$

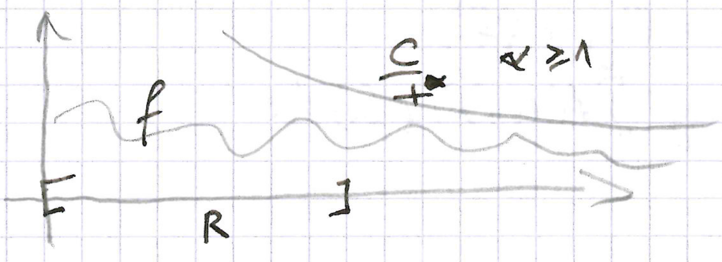
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx = [\ln(-x)]_{-1}^{-\varepsilon}$$

$$= \ln(\varepsilon) - \ln(1)$$

$$= \ln(\varepsilon) \to -\infty$$

Zwar gilt $\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_\varepsilon^1\frac{1}{x}\,dx = 0$, aber die beiden uneigentlichen Integrale divergieren.

Die Existenz uneigentlicher Integrale zeigt man am besten durch Vergleich mit unendlich integrierbaren Funktionen.



Satz: Ist $f:[0,\infty] \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $|f(x)| \le \frac{c}{x^\alpha}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 1$, so existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$

Bew.: Wir nehmen an $f \ge 0$. Dann gilt

$$\int_0^b f(x)\,dx \ge 0$$

$$= \int_0^R f(x)\,dx + \underbrace{\int_R^b f(x)\,dx}$$

$$\le c \cdot \int_R^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = c \cdot \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1}\right]_R^b$$

$$= -\frac{c}{\alpha+1}\left(b^{-\alpha+1} - R^{-\alpha+1}\right)$$

$$\to 0 \quad b \to \infty$$

Die Folge $\int_R^b f(x)\,dx$ ist daher monoton wachsend und konvergent für $b \to \infty$.

Im allgemeinen Fall schreibt man f als Summe von Funktionen $f_1 \ge 0$ und $f_2 \le 0$. $\square$

3 Darstellung von Funktionen durch Reihen

unendliche Summen werden als Reihen bezeichnet.

Def.: Sei a_k $k \in \mathbb{N}_0$ Folge in $\mathbb{R}$. Die Reihe mit Summanden a_k ist def. als Grenzwert von Partialsummen S_n, d.h.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} S_n, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Gelegentlich beginnen Reihen auch auf a_1.

Bsp.: (I) Für $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$

$$S_0 = 0, S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{2}{3}, \ldots, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{n}{n+1}.$$

Folge: $S_n \to 1$ für $n \to \infty$ und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

(II) Für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ gilt im Fall $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x}$$

$$(1-x) \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{i=0}^{n} x^{k+1} = 1 - x^{n+1}$$

(III) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist nicht konvergent

Bem.: Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so auch $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu \cdot b_k)$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, denn $\sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$, aber $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} 1$ sind nicht konvergent.

Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist $a_k \to 0$, dann ist S_n konvergent gegen S, so werden die Differenzen $a_n = S_n - S_{n-1}$ beliebig klein, d.h. $a_n \to 0$.

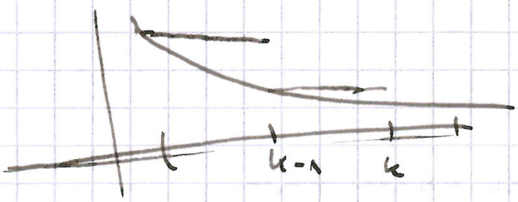
Harmonische Reihe zeigt, dass $a_k \to 0$ nicht hinreichend ist.

Satz: Gilt $a_k \geq 0$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \iff S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ beschränkt ist.

Bew.: Die Folge S_n ist monoton wachsend, so dass Konvergenz und Beschränktheit äquivalent sind. $\square$

Interpretiert man ein Reihe als Riemannsche Summe, so lässt sich Konvergenz auf die Existenz eines uneigentlichen Integrals zurückführen.

Satz: Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig monoton fallend und $f \geq 0$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ ist konvergent gerade wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent ist



Bew.: Da f monoton fallend ist, gilt

$$f(k-1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \text{für } x \in [k-1, k]$$

Damit folgt

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(k)}_{S_n - f(1)} \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$$

konvergiert $\int_n^n f(x)dx$ für $n \to \infty$, so auch S_n und umgekehrt, da die Folgen monoton wachsend und beschränkt sind.

$\square$

Bsp.: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^{\alpha}$ konvergiert für $\alpha < -1$.

Satz: Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, so auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Bew.: Setze $a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$,

$$a_k^- = -\min\{a_k, 0\} \geq 0$$

Dann gilt $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$ und es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

also sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ beschränkt und monoton, also konvergent

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-)$$

Mit Dreiecksungleichung folgt für Partialsummen

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \text{ also } \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right.$$