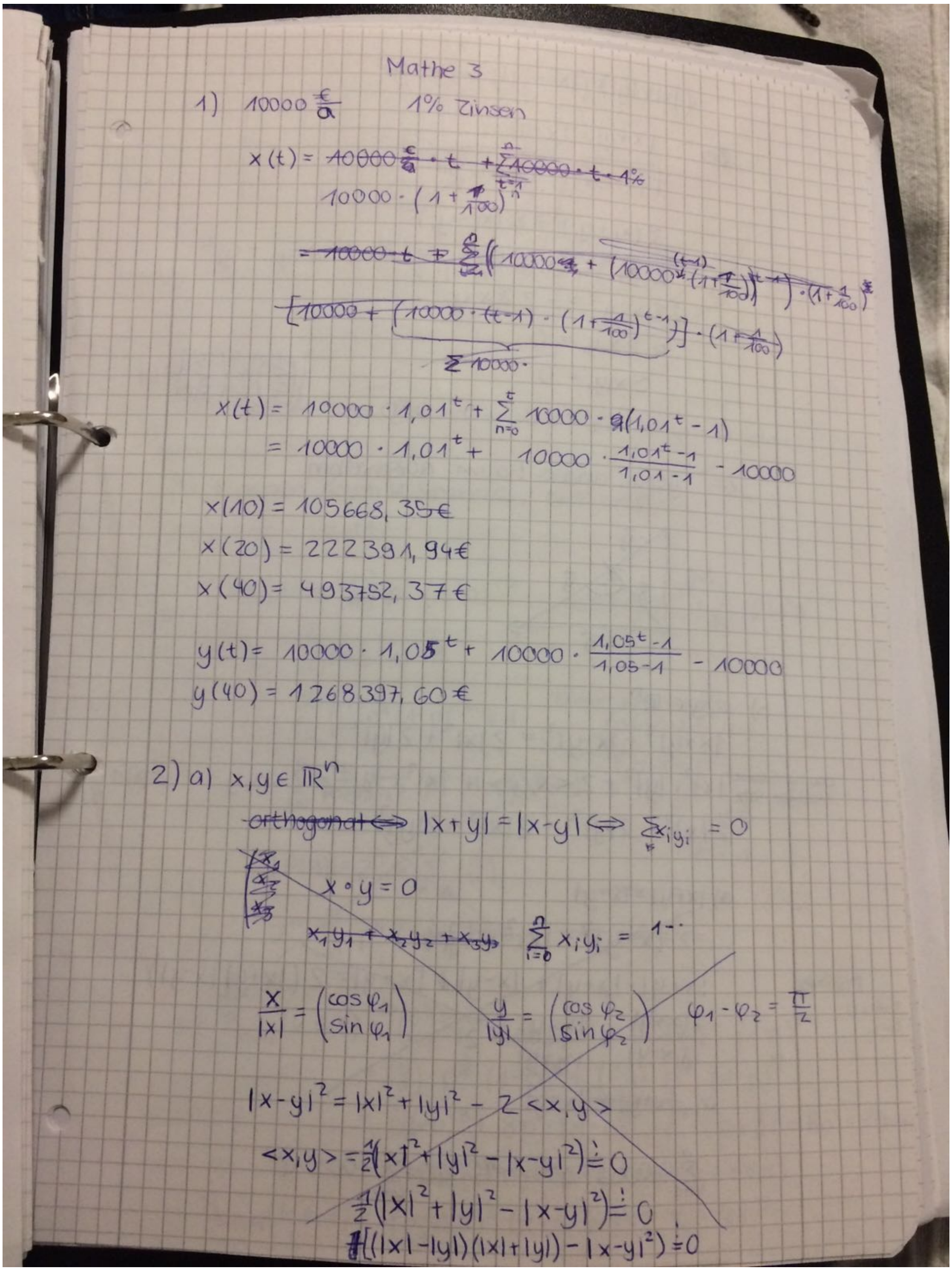
Mathe Loesungen Uebungsblaetter

Mathe-01.jpg



Mathe 3

1) $10000 \frac{€}{a}$ 1% Zinsen

$$x(t) = 10000 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n$$

$$x(t) = 10000 \cdot 1{,}01^t + \sum_{n=0}^{t} 10000 \cdot (1{,}01^t - 1)$$

$$= 10000 \cdot 1{,}01^t + 10000 \cdot \frac{1{,}01^t - 1}{1{,}01 - 1} - 10000$$

$x(10) = 105668{,}35$ €

$x(20) = 222391{,}94$ €

$x(40) = 493752{,}37$ €

$$y(t) = 10000 \cdot 1{,}05^t + 10000 \cdot \frac{1{,}05^t - 1}{1{,}05 - 1} - 10000$$

$y(40) = 1268397{,}60$ €

2) a) $x, y \in \mathbb{R}^n$

~~orthogonal~~ $\Leftrightarrow |x+y| = |x-y| \Leftrightarrow \sum x_i y_i = 0$

$x \cdot y = 0$

$\cancel{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}$ $\sum_{i=0}^{n} x_i y_i = 1 \dots$

$\frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix}$ $\frac{y}{|y|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{pmatrix}$ $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

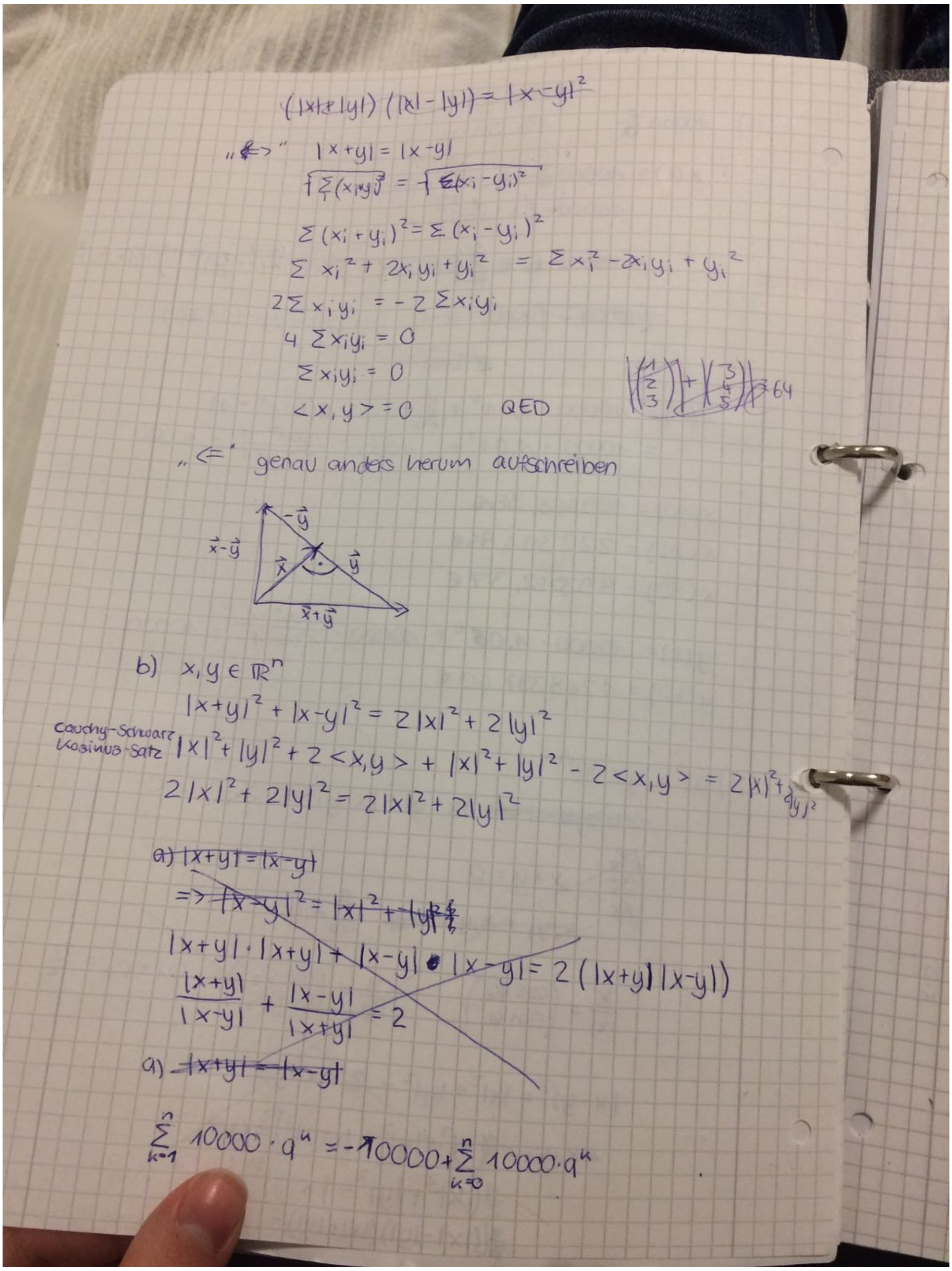
$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2 \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2) \doteq 0$$

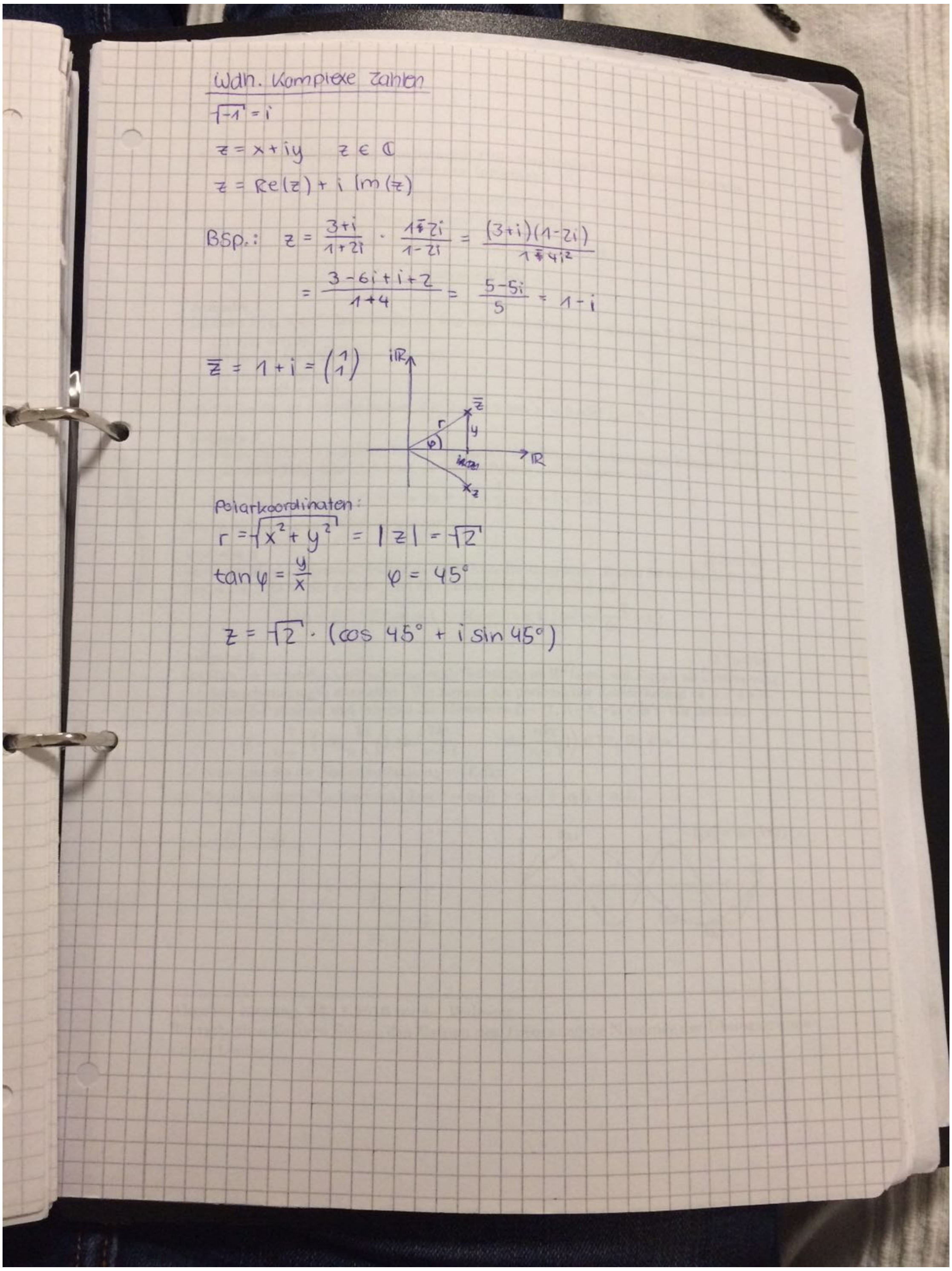
$$\frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{1}{2}((|x| - |y|)(|x| + |y|) - |x-y|^2) \doteq 0$$

Mathe-02.jpg


~~$(|x|+|y|)(|x|-|y|) = |x-y|^2$~~
„⇒" $|x+y| = |x-y|$
$\sqrt{\sum_i (x_i+y_i)^2} = \sqrt{\sum (x_i-y_i)^2}$
$\sum (x_i+y_i)^2 = \sum (x_i-y_i)^2$
$\sum x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2 = \sum x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2$
$2\sum x_iy_i = -2\sum x_iy_i$
$4\sum x_iy_i = 0$
$\sum x_iy_i = 0$
$\langle x,y\rangle = 0$ QED
$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| \geq 64$
„⇐" genau anders herum aufschreiben
$-\vec{y}$
$\vec{x}-\vec{y}$
$\vec{x}$
$\vec{y}$
$\vec{x}+\vec{y}$
b) $x,y \in \mathbb{R}^n$
$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$
Cauchy-Schwarz
Kosinus-Satz
$|x|^2+|y|^2+2\langle x,y\rangle + |x|^2+|y|^2 - 2\langle x,y\rangle = 2|x|^2 + 2|y|^2$
$2|x|^2 + 2|y|^2 = 2|x|^2+2|y|^2$
a) ~~$|x+y| = |x-y|$~~
~~$\Rightarrow |x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2$~~
$|x+y|\cdot|x+y| + |x-y|\cdot|x-y| = 2(|x+y|\,|x-y|)$
$\frac{|x+y|}{|x-y|} + \frac{|x-y|}{|x+y|} = 2$
a) ~~$|x+y| = |x-y|$~~
$\sum_{k=1}^{n} 10000\cdot q^k = -10000 + \sum_{k=0}^{n} 10000\cdot q^k$

Mathe-03.jpg



Wdh. Komplexe Zahlen

$\sqrt{-1} = i$

$z = x + iy \qquad z \in \mathbb{C}$

$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$

Bsp.: $z = \frac{3+i}{1+2i} \cdot \frac{1\mp 2i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{1\mp 4i^2}$

$= \frac{3-6i+i+2}{1+4} = \frac{5-5i}{5} = 1-i$

$\bar{z} = 1 + i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

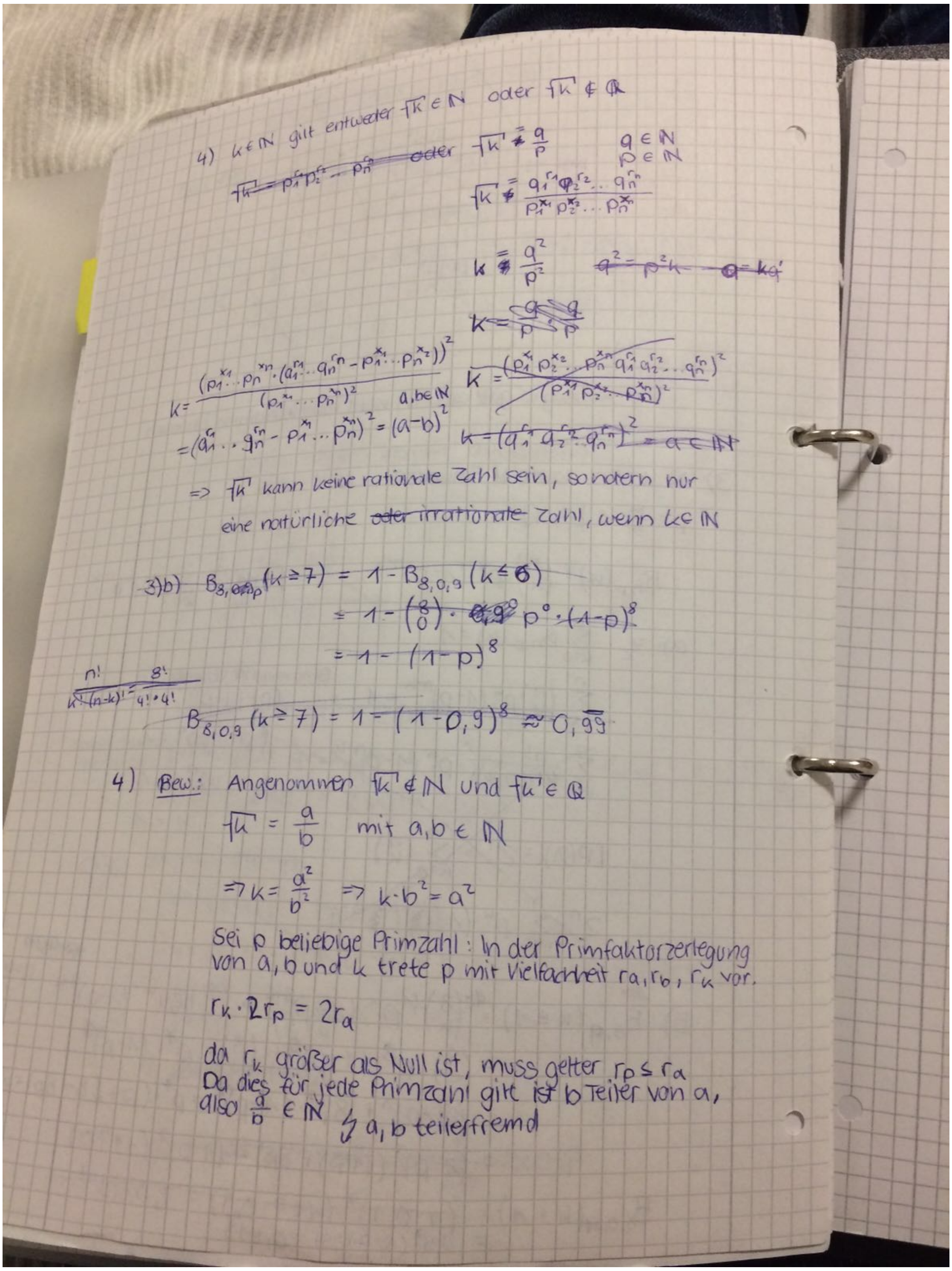
Polarkoordinaten:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = \sqrt{2}$

$\tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad \varphi = 45°$

$z = \sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \sin 45°)$

Mathe-04.jpg



4) $k \in \mathbb{N}$ gilt entweder $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ oder $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$

~~$\sqrt{k} = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}$ oder~~ $\sqrt{k} \overset{=}{\neq} \frac{q}{p}$ $\quad q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{k} \overset{=}{\neq} \frac{q_1^{r_1} q_2^{r_2} \cdots q_n^{r_n}}{p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_n^{x_n}}$$

$$k \overset{=}{\neq} \frac{q^2}{p^2} \qquad \cancel{q^2 = p^2 k \quad q = kq'}$$

$$\cancel{k = \frac{q}{p} \cdot \frac{q}{p}}$$

$$k = \frac{(p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n} \cdot (a_1^{r_1} \cdots q_n^{r_n} - p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_2}))^2}{(p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n})^2} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$= (a_1^{r_1} \cdots q_n^{r_n} - p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n})^2 = (a-b)^2$$

$$\cancel{k = \frac{(p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_n^{x_n} q_1^{r_1} q_2^{r_2} \cdots q_n^{r_n})^2}{(p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_n^{x_n})^2}}$$

$$\cancel{k = (q_1^{r_1} q_2^{r_2} \cdots q_n^{r_n})^2 = a \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow \sqrt{k}$ kann keine rationale Zahl sein, sondern nur eine natürliche ~~oder irrationale~~ Zahl, wenn $k \in \mathbb{N}$

~~3)b) $B_{8,0{,}9,p}(k \geq 7) = 1 - B_{8;0,9}(k \leq 6)$~~

~~$= 1 - \binom{8}{0} \cdot 0{,}9^0\, p^0 \cdot (1-p)^8$~~

~~$= 1 - (1-p)^8$~~

~~$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!}$~~

~~$B_{8;0,9}(k \geq 7) = 1 - (1-0{,}9)^8 \approx 0{,}\overline{99}$~~

4) <u>Bew.:</u> Angenommen $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ und $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{k} = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$

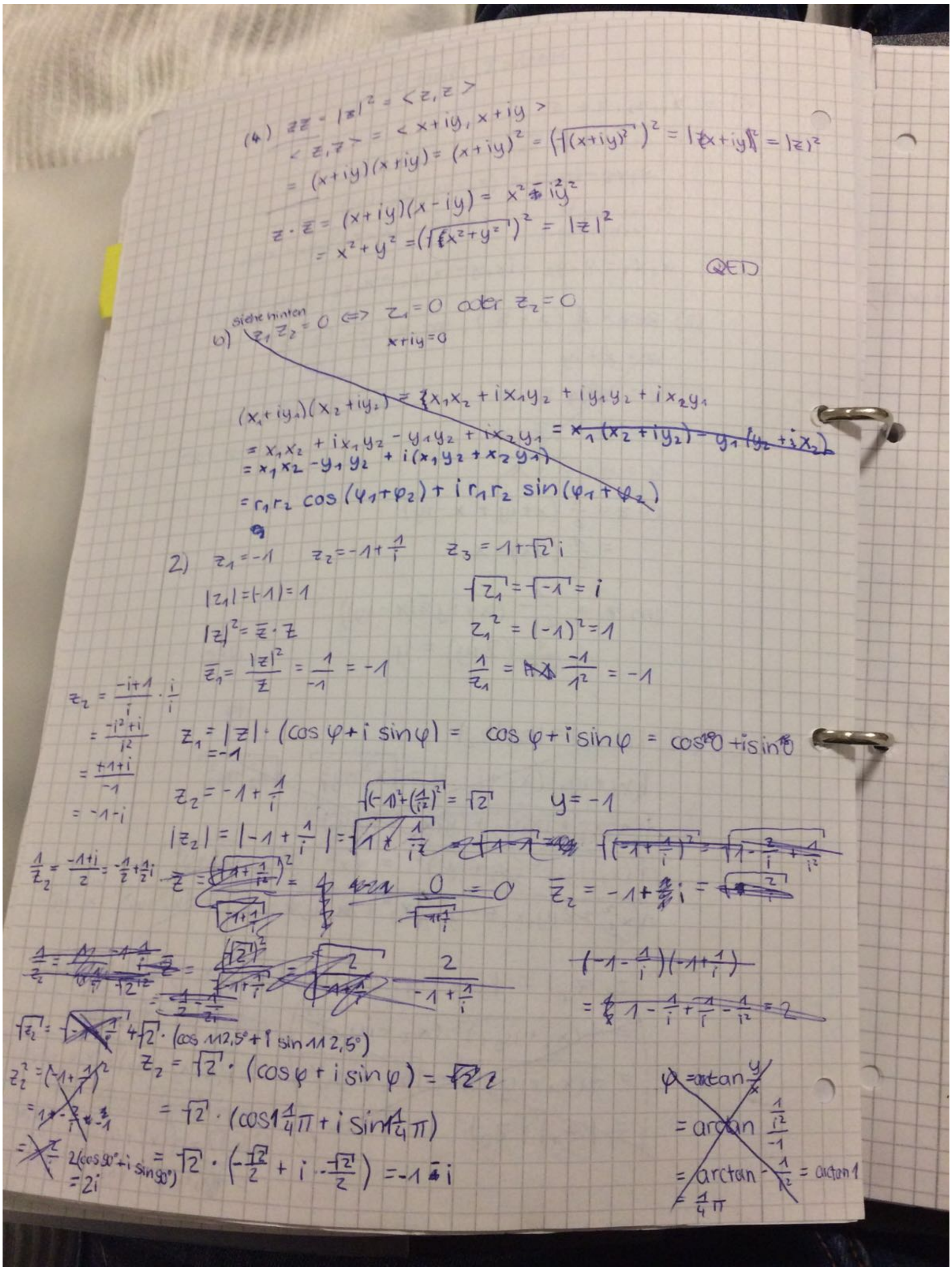
$\Rightarrow k = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow k \cdot b^2 = a^2$

Sei p beliebige Primzahl: In der Primfaktorzerlegung von a, b und k trete p mit Vielfachheit r_a, r_b, r_k vor.

$r_k \cdot 2r_b = 2r_a$

da r_k größer als Null ist, muss gelten $r_b \leq r_a$
Da dies für jede Primzahl gilt ist b Teiler von a, also $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ $\lightning$ a, b teilerfremd

Mathe-05.jpg



Mathe-06.jpg

1b) „$\Leftarrow$“ $z_1 = 0 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 0 \cdot z_2 = 0(x_2 + iy_2)$

$$= \underbrace{0x_2}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{0y_2}_{\in \mathbb{R}} = 0$$

oder Widerspruch

$z_1 = 0$ aber $z_1 z_2 \neq 0$

$0 \cdot z_2 \neq 0$

$\Leftrightarrow z_2 + 0 \cdot z_2 \neq 0 + z_2$

$\Leftrightarrow z_2(1+0) = z_2$

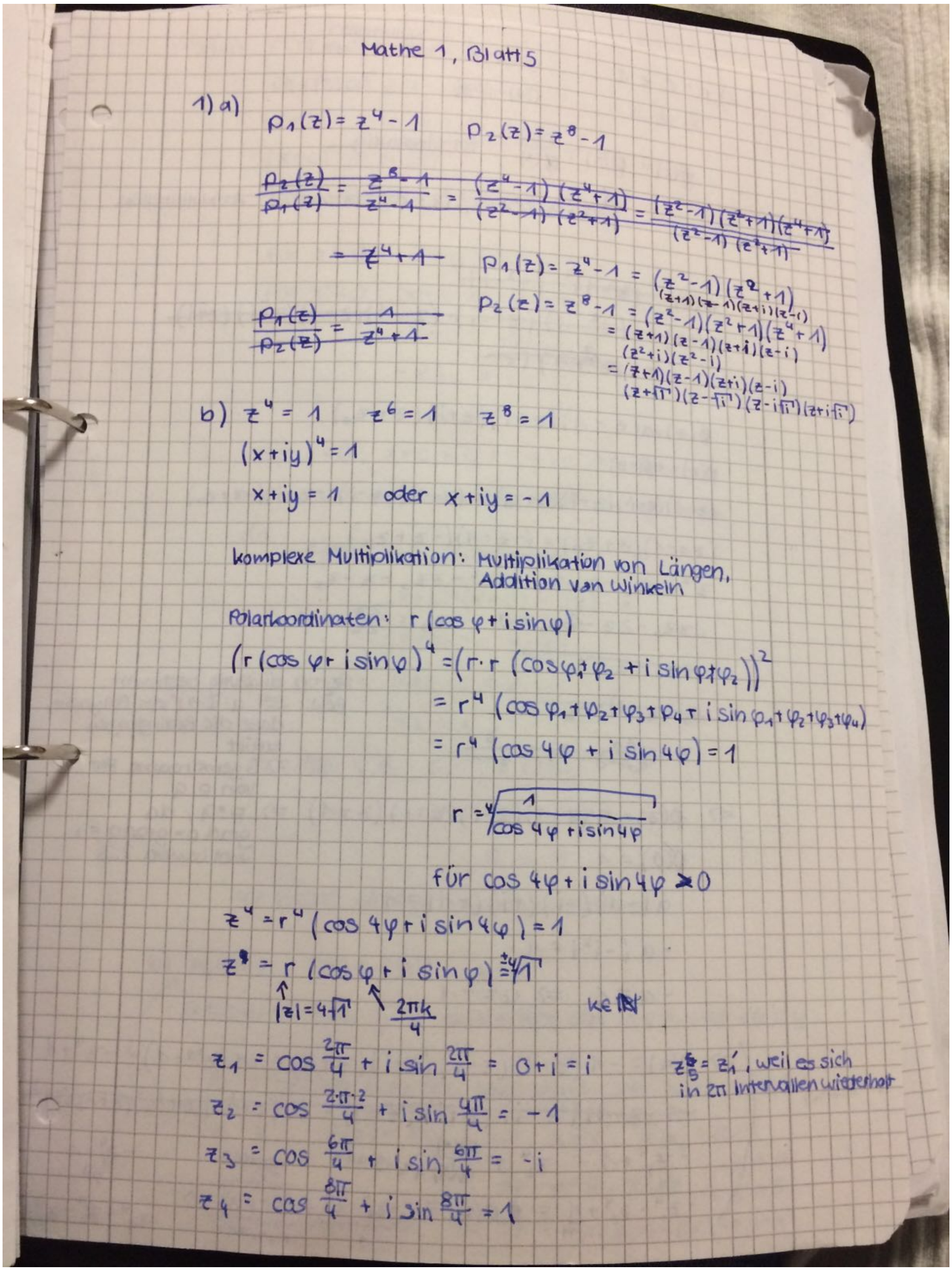
$z_2 \neq z_2$

„$\Rightarrow$“ $z_1 \cdot z_2 = 0$

Annahme: $z_1 \neq 0$

$\underline{z_2} = z_2 \cdot 1 = z_2 \cdot z_1 \cdot z_1^{-1} = 0 \cdot z_1^{-1} = \underline{0}$

Mathe-07.jpg



Mathe 1, Blatt 5

1) a) $p_1(z) = z^4 - 1 \qquad p_2(z) = z^8 - 1$

$\cancel{\frac{p_2(z)}{p_1(z)} = \frac{z^8-1}{z^4-1} = \frac{(z^4-1)(z^4+1)}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{(z^2-1)(z^2+1)(z^4+1)}{(z^2-1)(z^2+1)}}$

$\cancel{= z^4+1}$

$\cancel{\frac{p_1(z)}{p_2(z)} = \frac{1}{z^4+1}}$

$p_1(z) = z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1)$
$(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$

$p_2(z) = z^8 - 1 = (z^2-1)(z^2+1)(z^4+1)$
$= (z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$
$(z^2+i)(z^2-i)$
$= (z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$
$(z+\sqrt{i})(z-\sqrt{i})(z-i\sqrt{i})(z+i\sqrt{i})$

b) $z^4 = 1 \qquad z^6 = 1 \qquad z^8 = 1$

$(x+iy)^4 = 1$

$x+iy = 1$ oder $x+iy = -1$

komplexe Multiplikation: Multiplikation von Längen, Addition von Winkeln

Polarkoordinaten: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^4 = (r \cdot r(\cos\varphi_1+\varphi_2 + i\sin\varphi_1+\varphi_2))^2$
$= r^4(\cos\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4 + i\sin\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)$
$= r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = 1$

$r = \sqrt[4]{\frac{1}{\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi}}$

für $\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi \neq 0$

$z^4 = r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = 1$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \pm\sqrt[4]{1}$

$|z| = \sqrt[4]{1} \qquad \frac{2\pi k}{4} \qquad k \in \mathbb{N}$

$z_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = 0 + i = i$

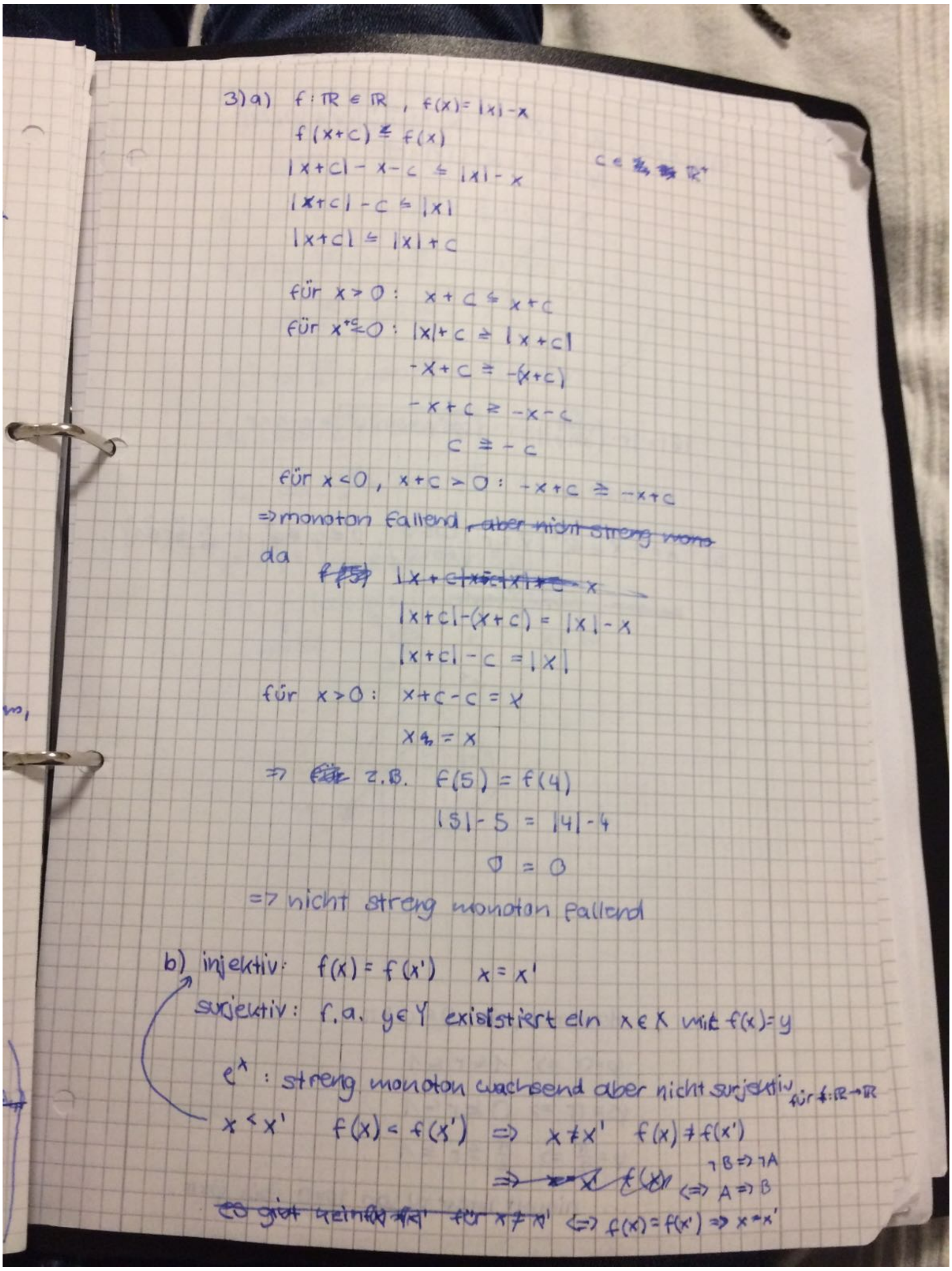
$z_5 = z_1$, weil es sich in 2π Intervallen wiederholt

$z_2 = \cos\frac{2\cdot\pi\cdot 2}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1$

$z_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = -i$

$z_4 = \cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4} = 1$

Mathe-08.jpg



3) a) $f: \mathbb{R} \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - x$

$f(x+c) \leq f(x)$ $\qquad c \in \mathbb{R}^+$

$|x+c| - x - c \leq |x| - x$

$|x+c| - c \leq |x|$

$|x+c| \leq |x| + c$

für $x > 0$: $x + c \leq x + c$

für $x+c \leq 0$: $|x| + c \geq |x+c|$

$-x + c \geq -(x+c)$

$-x + c \geq -x - c$

$c \geq -c$

für $x < 0$, $x + c > 0$: $-x + c \geq -x + c$

$\Rightarrow$ monoton fallend ~~, aber nicht streng mono~~

da

$|x+c| - (x+c) = |x| - x$

$|x+c| - c = |x|$

für $x > 0$: $x + c - c = x$

$x = x$

$\Rightarrow$ z.B. $f(5) = f(4)$

$|5| - 5 = |4| - 4$

$0 = 0$

$\Rightarrow$ nicht streng monoton fallend

b) injektiv: $f(x) = f(x')$ $\quad x = x'$

surjektiv: f.a. $y \in Y$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$

e^x: streng monoton wachsend aber nicht surjektiv für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

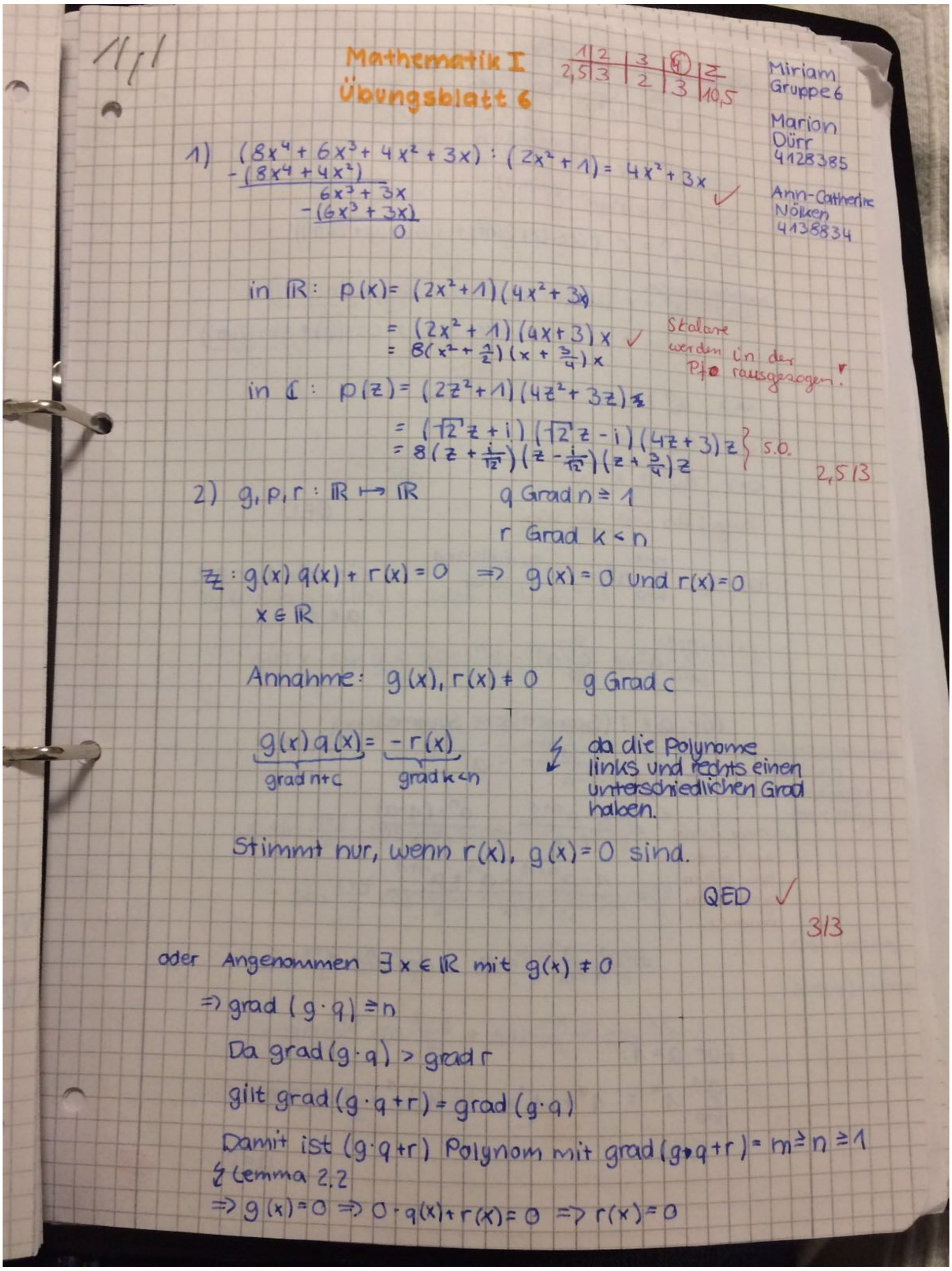
$x < x'$ $\quad f(x) < f(x') \Rightarrow x \neq x'$ $\quad f(x) \neq f(x')$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$\Leftrightarrow A \Rightarrow B$

~~es gibt keine ... für $x \neq x'$~~ $\Leftrightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Mathe-09.jpg



11,1

Mathematik I
Übungsblatt 6

1	2	3	4	Σ
2,5	3	2	3	10,5

Miriam
Gruppe 6

Marion
Dürr
4128385

Ann-Catherine
Nölken
4138834

1) $(8x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 3x) : (2x^2 + 1) = 4x^2 + 3x$ ✓

$-(8x^4 + 4x^2)$

$6x^3 + 3x$

$-(6x^3 + 3x)$

0

in $\mathbb{R}$: $p(x) = (2x^2+1)(4x^2+3x)$

$= (2x^2+1)(4x+3)x$ ✓

$= 8(x^2+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{4})x$

Skalare werden in der PFZ rausgezogen!

in $\mathbb{C}$: $p(z) = (2z^2+1)(4z^2+3z)$

$= (\sqrt{2}z+i)(\sqrt{2}z-i)(4z+3)z$
$= 8(z+\frac{i}{\sqrt{2}})(z-\frac{i}{\sqrt{2}})(z+\frac{3}{4})z$ } s.o.

2,5/3

2) $g, p, r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ q Grad $n \geq 1$

r Grad $k < n$

z.z.: $g(x)\,q(x) + r(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$ und $r(x) = 0$
$x \in \mathbb{R}$

Annahme: $g(x), r(x) \neq 0$ g Grad c

$\underbrace{g(x)\,q(x)}_{\text{grad } n+c} = \underbrace{-r(x)}_{\text{grad } k<n}$ ↯ da die Polynome links und rechts einen unterschiedlichen Grad haben.

Stimmt nur, wenn $r(x), g(x) = 0$ sind.

QED ✓

3/3

oder Angenommen $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$

$\Rightarrow \text{grad}(g \cdot q) \geq n$

Da $\text{grad}(g \cdot q) > \text{grad } r$

gilt $\text{grad}(g \cdot q + r) = \text{grad}(g \cdot q)$

Damit ist $(g \cdot q + r)$ Polynom mit $\text{grad}(g \cdot q + r) = m \geq n \geq 1$

↯ Lemma 2.2

$\Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow 0 \cdot q(x) + r(x) = 0 \Rightarrow r(x) = 0$

Mathe-10.jpg

c) z: $\forall k: a_k^n = x$

4)

$a_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\ldots)}$

$\Leftrightarrow a_k^n = r e^{i\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)n}$

$\Leftrightarrow a_k^n = r e^{i(\varphi + 2k\pi)}$

$\Leftrightarrow a_k^n = r\,(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi))$

Additionstheorem

$\Leftrightarrow a_k^n = r\,(\cos(\varphi)\cdot \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} - \sin(\varphi)\cdot \underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0})$

$\quad + i\,(\sin(\varphi)\cdot \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + \cos(\varphi)\cdot \underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0})$

$\Leftrightarrow a_k^n = r\cdot(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$\Leftrightarrow a_k^n = r\cdot e^{i\varphi}$

$\Leftrightarrow a_k^n = x$ ✓

Zeige: Das sind <u>alle</u> Lsg

QED

b) z: $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} n, & \text{falls } a = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, für $a^n = 1$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$

$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k - a^n$

für $a \neq 1$ (Geometrische Summe):

$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - a^n$

man könnte auch einfach hier schon geom. Reihe anwenden

$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{a^n\cdot(1-a)}{1-a}$

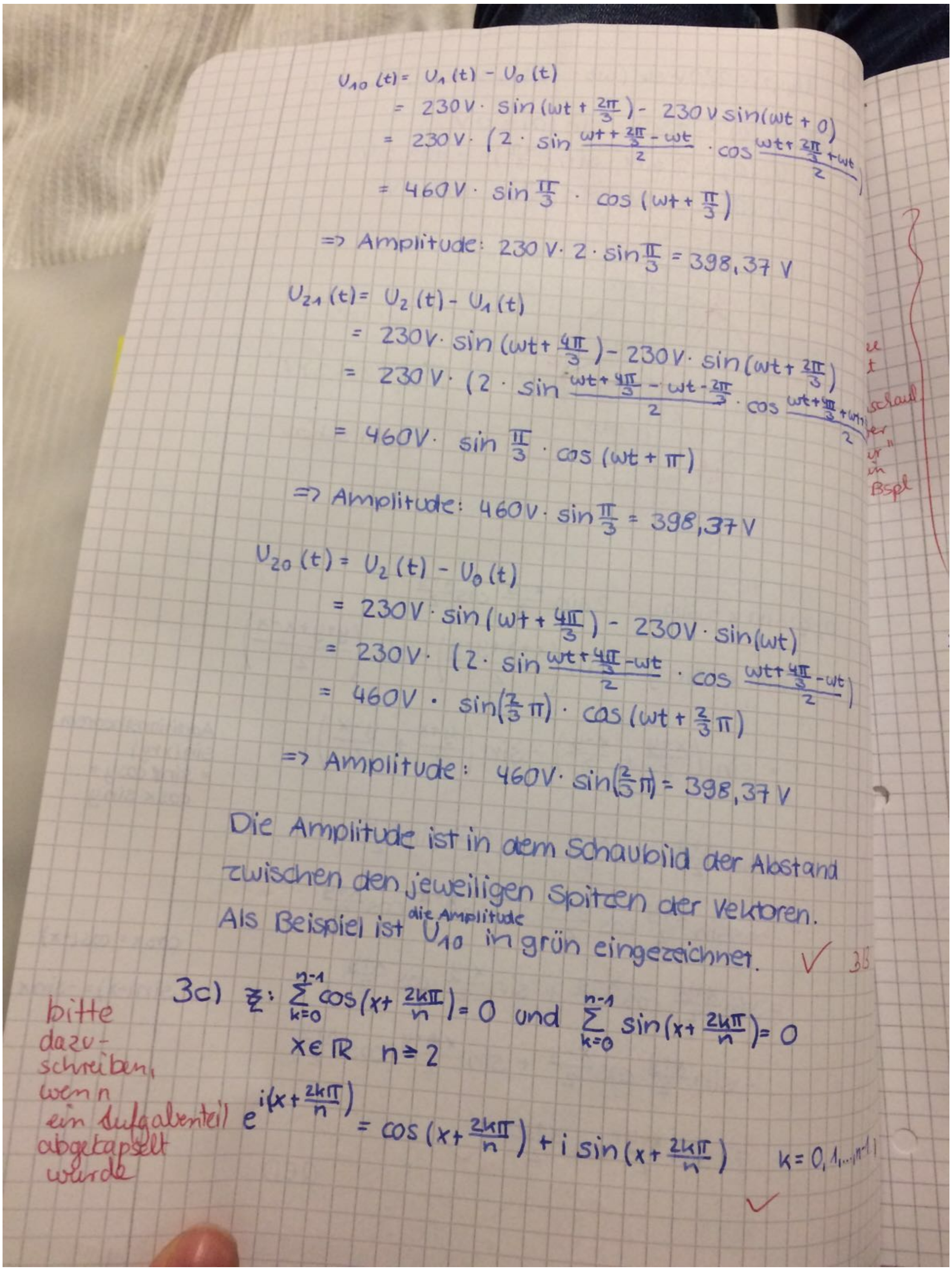
$= \frac{1-a^{n+1}-a^n+a^{n+1}}{1-a}$

$= \frac{1-a^n}{1-a} = 0$, da $a^n = 1$ ✓

für $a = 1$:

$\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = 1^0 + 1^1 + \ldots + 1^{n-1} = 1\cdot n = n$ ✓

Mathe-11.jpg



$U_{10}(t) = U_1(t) - U_0(t)$

$= 230V \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) - 230V \sin(\omega t + 0)$

$= 230V \cdot \left(2 \cdot \sin\frac{\omega t + \frac{2\pi}{3} - \omega t}{2} \cdot \cos\frac{\omega t + \frac{2\pi}{3} + \omega t}{2}\right)$

$= 460V \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow$ Amplitude: $230V \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 398{,}37\,V$

$U_{21}(t) = U_2(t) - U_1(t)$

$= 230V \cdot \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3}) - 230V \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$

$= 230V \cdot \left(2 \cdot \sin\frac{\omega t + \frac{4\pi}{3} - \omega t - \frac{2\pi}{3}}{2} \cdot \cos\frac{\omega t + \frac{4\pi}{3} + \omega t + \frac{2\pi}{3}}{2}\right)$

$= 460V \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos(\omega t + \pi)$

$\Rightarrow$ Amplitude: $460V \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 398{,}37\,V$

$U_{20}(t) = U_2(t) - U_0(t)$

$= 230V \cdot \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3}) - 230V \cdot \sin(\omega t)$

$= 230V \cdot \left(2 \cdot \sin\frac{\omega t + \frac{4\pi}{3} - \omega t}{2} \cdot \cos\frac{\omega t + \frac{4\pi}{3} - \omega t}{2}\right)$

$= 460V \cdot \sin(\frac{2}{3}\pi) \cdot \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi)$

$\Rightarrow$ Amplitude: $460V \cdot \sin(\frac{2}{3}\pi) = 398{,}37\,V$

Die Amplitude ist in dem Schaubild der Abstand zwischen den jeweiligen Spitzen der Vektoren. Als Beispiel ist die Amplitude U_{10} in grün eingezeichnet. ✓ 3B

3c) z: $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x + \frac{2k\pi}{n}) = 0$ und $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + \frac{2k\pi}{n}) = 0$

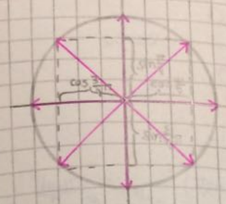
$x \in \mathbb{R}$ $n \geq 2$

bitte dazuschreiben, wenn ein Aufgabenteil abgekapselt wurde

$e^{i(x + \frac{2k\pi}{n})} = \cos(x + \frac{2k\pi}{n}) + i \sin(x + \frac{2k\pi}{n})$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$

✓

Mathe-12.jpg



Beispiel: $n = 8$

die gut anschaulich aber "nur" ein Bspl

Wie an dem Beispiel zu sehen ist, gibt es zu jedem cosinus-Wert, sowie zu jedem sinus einen Betrags-mäßig gleichen Wert, jedoch mit anderem Vorzeichen, sodass sie sich gegenseitig aufheben. Dies gilt, da $-\cos x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ und $-\sin x = \sin(x + \pi)$. Somit muss gelten, dass $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x + \frac{2k\pi}{n}) = 0$ und $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + \frac{2k\pi}{n}) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$.

QED

3) a) 1. a_k ist eine Lösung

$$\left(\sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}\right)^n = r e^{i(\varphi + 2\pi k)} = r e^{i\varphi} = x$$

2. a_k $k = 0, \ldots, n-1$ sind n verschiedene Lösungen

z.z.: $j \neq k \Rightarrow a_k \neq a_j$

$$a_k - a_j = \sqrt[n]{r}\left(e^{i(\varphi + \frac{2\pi k}{n})} - e^{i(\varphi + \frac{2\pi j}{n})}\right) = \underbrace{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}}_{\neq 0} \underbrace{\left(e^{i\frac{2\pi k}{n}} - e^{i\frac{2\pi j}{n}}\right)}_{\neq 0 \text{ wenn } j \neq k}$$

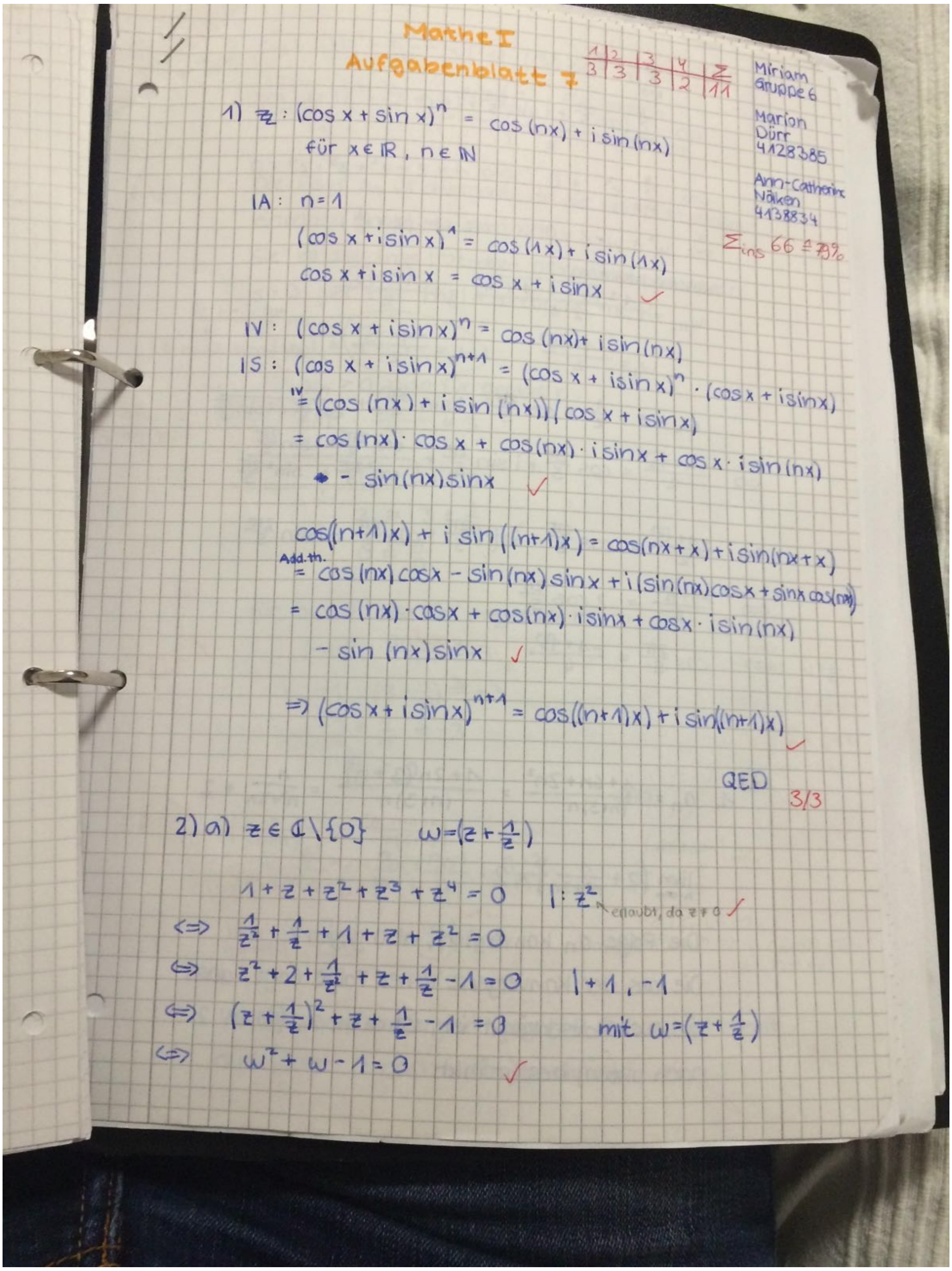
$\Rightarrow a_j \neq a_k \ \forall j \neq k$ und damit $a_k : k = 0, \ldots, n-1$ n Lösungen von $z^n = x$.

3. $\Rightarrow$ mit fundamentaler Satz der Algebra (komplexes Polynom n hat n Nullstellen)

a_k sind alle Lsg von $z^n = x$

QED

Mathe-13.jpg



Mathe I

Aufgabenblatt 7

1	2	3	4	Σ
3	3	3	2	11

Miriam Gruppe 6

Marion Dürr 4128385

Ann-Catherine Näken 4138834

Σ_{ins} 66 ≙ 79%

1) Z: $(\cos x + \sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

für $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

IA: $n = 1$

$(\cos x + i\sin x)^1 = \cos(1x) + i\sin(1x)$

$\cos x + i\sin x = \cos x + i\sin x$ ✓

IV: $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

IS: $(\cos x + i\sin x)^{n+1} = (\cos x + i\sin x)^n \cdot (\cos x + i\sin x)$

$\overset{IV}{=} (\cos(nx) + i\sin(nx))(\cos x + i\sin x)$

$= \cos(nx)\cdot\cos x + \cos(nx)\cdot i\sin x + \cos x \cdot i\sin(nx) - \sin(nx)\sin x$ ✓

$\cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x) = \cos(nx + x) + i\sin(nx + x)$

$\overset{Add.th.}{=} \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x + i(\sin(nx)\cos x + \sin x\cos(nx))$

$= \cos(nx)\cdot\cos x + \cos(nx)\cdot i\sin x + \cos x \cdot i\sin(nx) - \sin(nx)\sin x$ ✓

$\Rightarrow (\cos x + i\sin x)^{n+1} = \cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x)$ ✓

QED

3/3

2) a) $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\omega = (z + \frac{1}{z})$

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \quad | : z^2$ erlaubt, da $z \neq 0$ ✓

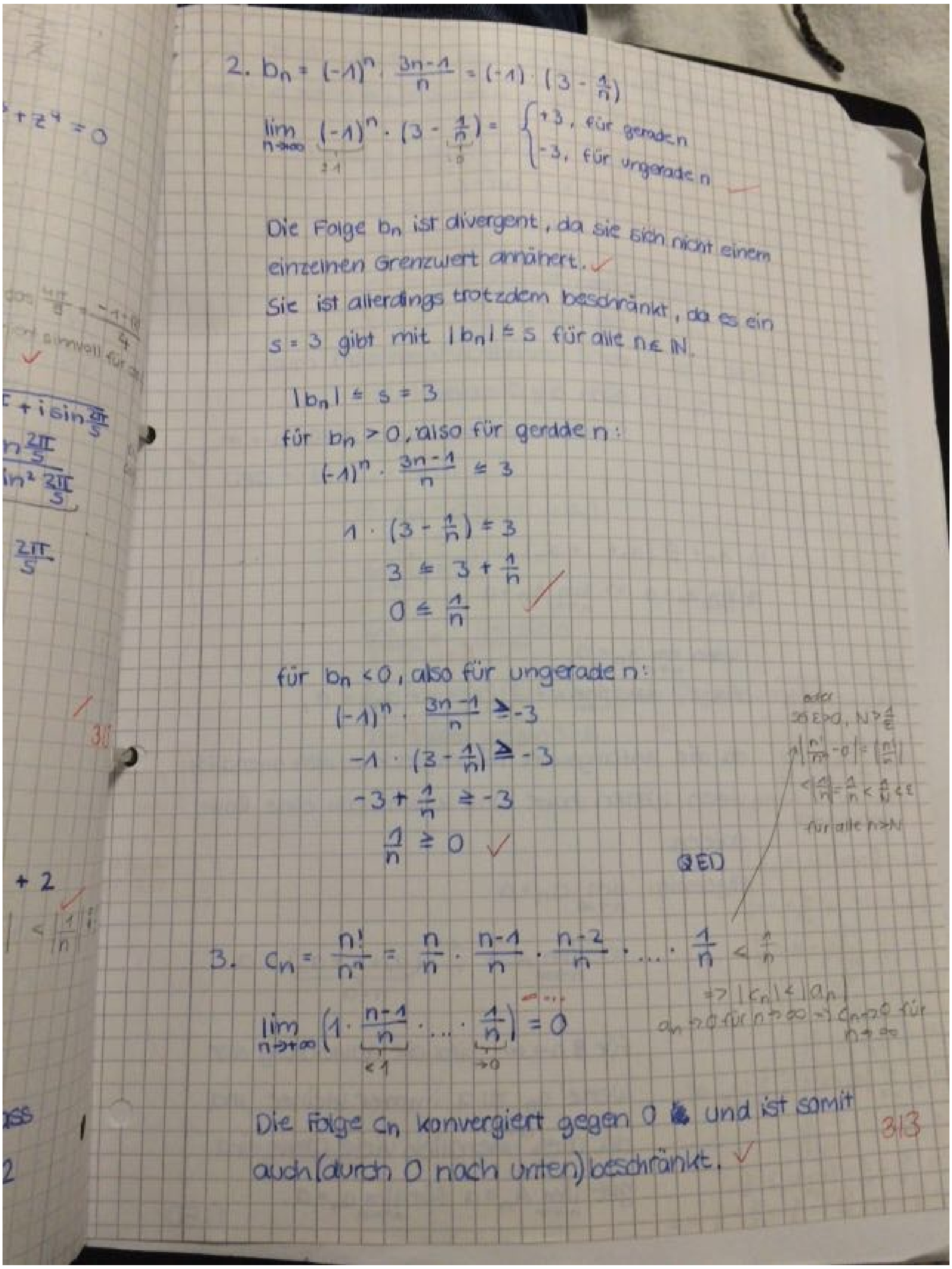
$\Leftrightarrow \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} - 1 = 0 \quad | +1, -1$

$\Leftrightarrow (z + \frac{1}{z})^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$ mit $\omega = (z + \frac{1}{z})$

$\Leftrightarrow \omega^2 + \omega - 1 = 0$ ✓

Mathe-14.jpg



2. $b_n = (-1)^n \cdot \frac{3n-1}{n} = (-1) \cdot (3 - \frac{1}{n})$

$\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\pm 1} \cdot (3 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}) = \begin{cases} +3, & \text{für gerade } n \\ -3, & \text{für ungerade } n \end{cases}$

Die Folge b_n ist divergent, da sie sich nicht einem einzelnen Grenzwert annähert.
Sie ist allerdings trotzdem beschränkt, da es ein $s = 3$ gibt mit $|b_n| \le s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$|b_n| \le s = 3$

für $b_n > 0$, also für gerade n:

$(-1)^n \cdot \frac{3n-1}{n} \le 3$

$1 \cdot (3 - \frac{1}{n}) \le 3$

$3 \le 3 + \frac{1}{n}$

$0 \le \frac{1}{n}$

für $b_n < 0$, also für ungerade n:

$(-1)^n \cdot \frac{3n-1}{n} \ge -3$

$-1 \cdot (3 - \frac{1}{n}) \ge -3$

$-3 + \frac{1}{n} \ge -3$

$\frac{1}{n} \ge 0$

QED

oder
Zu $\varepsilon > 0$, $N > \frac{1}{\varepsilon}$
$\left|\frac{n!}{n^n} - 0\right| = \left|\frac{n!}{n^n}\right| < \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$
für alle $n > N$

3. $c_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$

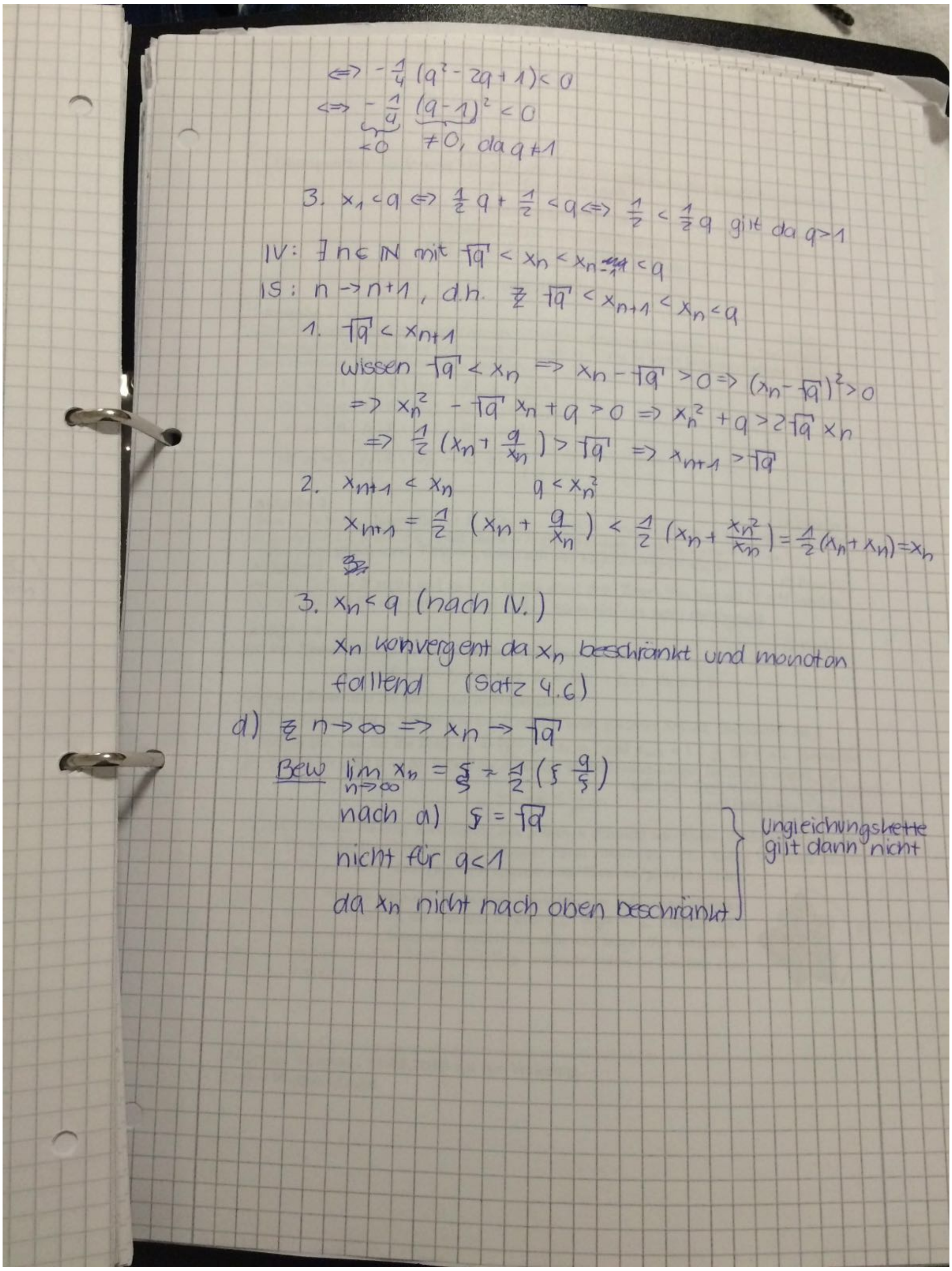
$\Rightarrow |c_n| \le |a_n|$
$a_n \to 0$ für $n \to \infty \Rightarrow c_n \to 0$ für $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \Big(1 \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big) = 0$

Die Folge c_n konvergiert gegen 0 und ist somit auch (durch 0 nach unten) beschränkt.

3/3

Mathe-15.jpg



$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(q^2-2q+1)<0$

$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{1}{4}}_{<0}\underbrace{(q-1)^2}_{\neq 0,\ \text{da } q\neq 1}<0$

3. $x_1<q \Leftrightarrow \frac{1}{2}q+\frac{1}{2}<q \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{2}q$ gilt da $q>1$

IV: $\exists n\in\mathbb{N}$ mit $\sqrt{q}<x_n<x_{n-1}<q$

IS: $n\to n+1$, d.h. Ƶ $\sqrt{q}<x_{n+1}<x_n<q$

1. $\sqrt{q}<x_{n+1}$

wissen $\sqrt{q}<x_n \Rightarrow x_n-\sqrt{q}>0 \Rightarrow (x_n-\sqrt{q})^2>0$

$\Rightarrow x_n^2-\sqrt{q}\,x_n+q>0 \Rightarrow x_n^2+q>2\sqrt{q}\,x_n$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n+\frac{q}{x_n})>\sqrt{q} \Rightarrow x_{n+1}>\sqrt{q}$

2. $x_{n+1}<x_n$ $\qquad q<x_n^2$

$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{q}{x_n})<\frac{1}{2}(x_n+\frac{x_n^2}{x_n})=\frac{1}{2}(x_n+x_n)=x_n$

~~3.~~

3. $x_n<q$ (nach IV.)

x_n konvergent da x_n beschränkt und monoton fallend (Satz 4.6)

d) Ƶ $n\to\infty \Rightarrow x_n\to\sqrt{q}$

Bew $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi=\frac{1}{2}(\xi\ \frac{q}{\xi})$

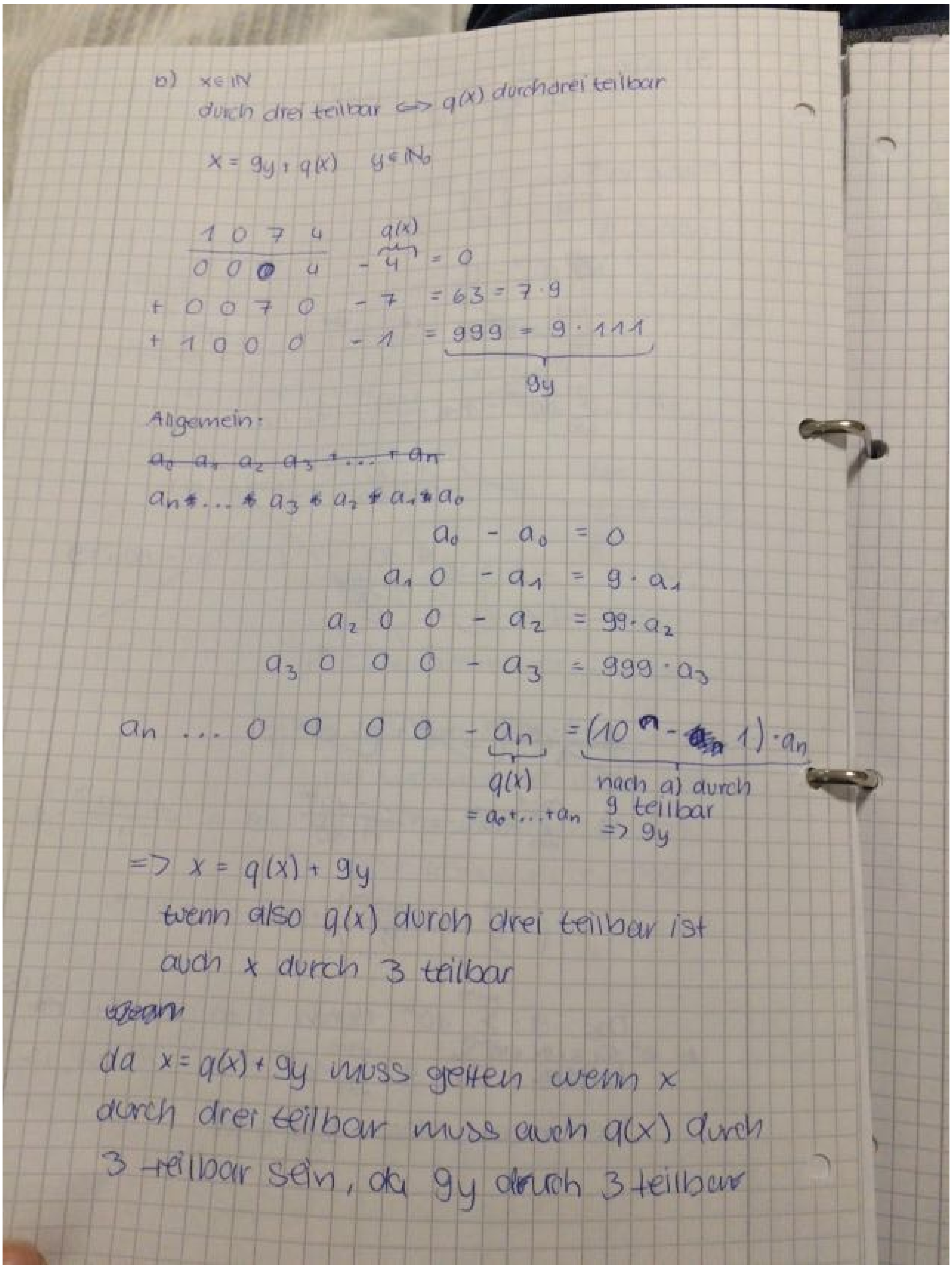
nach a) $\xi=\sqrt{q}$

nicht für $q<1$

da x_n nicht nach oben beschränkt

Ungleichungskette gilt dann nicht

Mathe-16.jpg



b) $x \in \mathbb{N}$

durch drei teilbar $\Leftrightarrow$ $q(x)$ durch drei teilbar

$x = 9y + q(x) \quad y \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{array}{cccccl} & 1 & 0 & 7 & 4 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 4 & - \overbrace{4}^{q(x)} = 0 \\ + & 0 & 0 & 7 & 0 & - 7 = 63 = 7 \cdot 9 \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 & - 1 = \underbrace{999 = 9 \cdot 111}_{9y} \end{array}$$

Allgemein:

~~$a_0 \; a_1 \; a_2 \; a_3 + \dots + a_n$~~

$a_n \dots a_3 \; a_2 \; a_1 \; a_0$

$$\begin{array}{r} a_0 - a_0 = 0 \\ a_1 0 - a_1 = 9 \cdot a_1 \\ a_2 0 0 - a_2 = 99 \cdot a_2 \\ a_3 0 0 0 - a_3 = 999 \cdot a_3 \end{array}$$

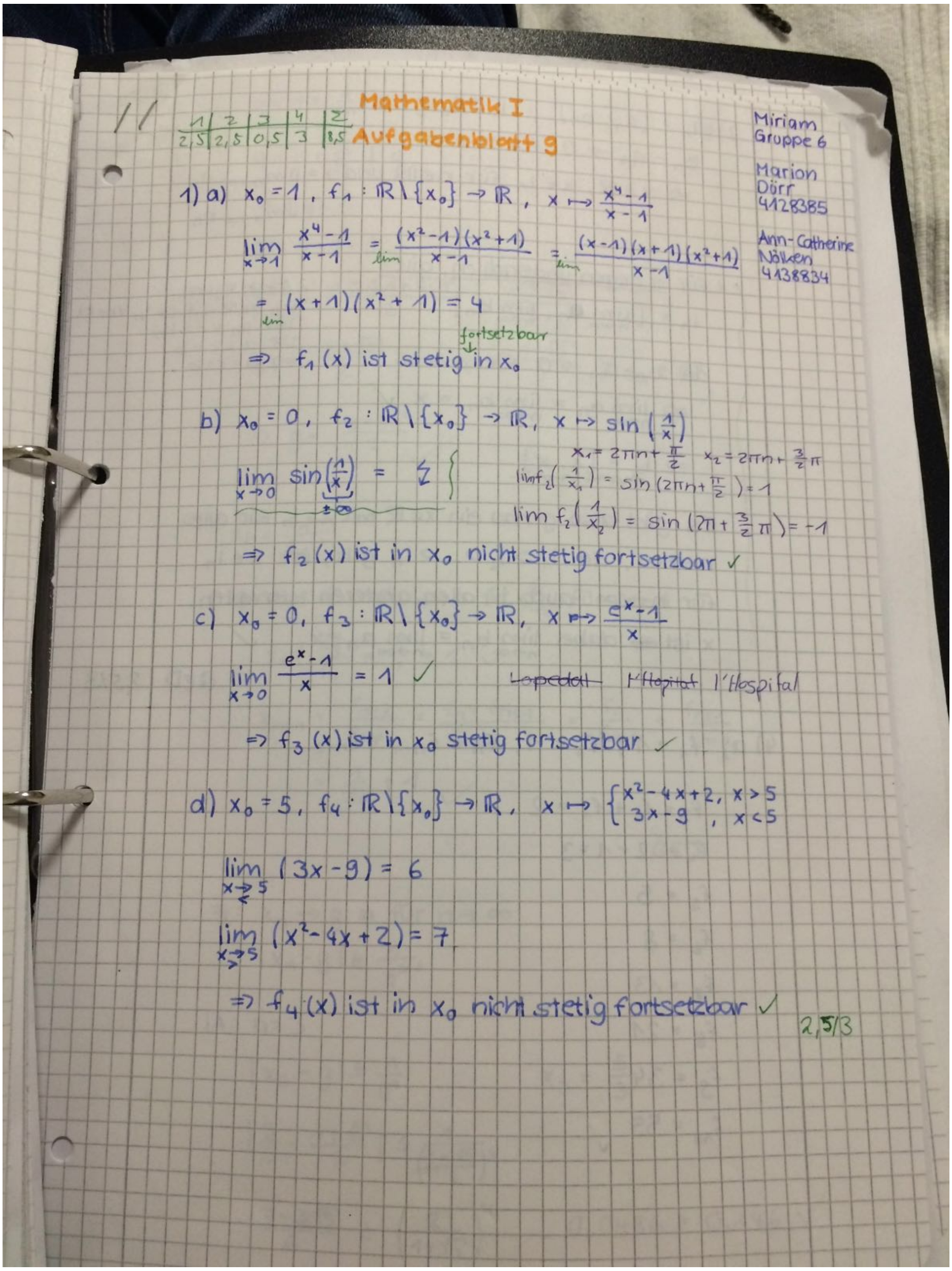
$$a_n \dots 0 \; 0 \; 0 \; 0 - \underbrace{a_n}_{\substack{q(x) \\ = a_0 + \dots + a_n}} = \underbrace{(10^n - 1) \cdot a_n}_{\substack{\text{nach a) durch} \\ 9 \text{ teilbar} \\ \Rightarrow 9y}}$$

$\Rightarrow x = q(x) + 9y$

wenn also $q(x)$ durch drei teilbar ist auch x durch 3 teilbar

da $x = q(x) + 9y$ muss gelten wenn x durch drei teilbar muss auch $q(x)$ durch 3 teilbar sein, da $9y$ durch 3 teilbar

Mathe-17.jpg



1	2	3	4	Σ
2,5	2,5	0,5	3	8,5

Mathematik I
Aufgabenblatt 9

Miriam
Gruppe 6

Marion
Dörr
4128385

Ann-Catherine
Nölken
4138834

1) a) $x_0 = 1$, $f_1 : \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^4-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} \underset{\lim}{=} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1} \underset{\lim}{=} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$\underset{\lim}{=} (x+1)(x^2+1) = 4$$

$\Rightarrow$ $f_1(x)$ ist stetig fortsetzbar in x_0

b) $x_0 = 0$, $f_2 : \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \sin\Big(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\pm\infty}\Big) = ↯$$

$x_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ $x_2 = 2\pi n + \frac{3}{2}\pi$

$\lim f_2\left(\frac{1}{x_1}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\lim f_2\left(\frac{1}{x_2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) = -1$

$\Rightarrow$ $f_2(x)$ ist in x_0 nicht stetig fortsetzbar ✓

c) $x_0 = 0$, $f_3 : \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$ ✓ ~~Lopedal~~ ~~l'Hopital~~ l'Hospital

$\Rightarrow$ $f_3(x)$ ist in x_0 stetig fortsetzbar ✓

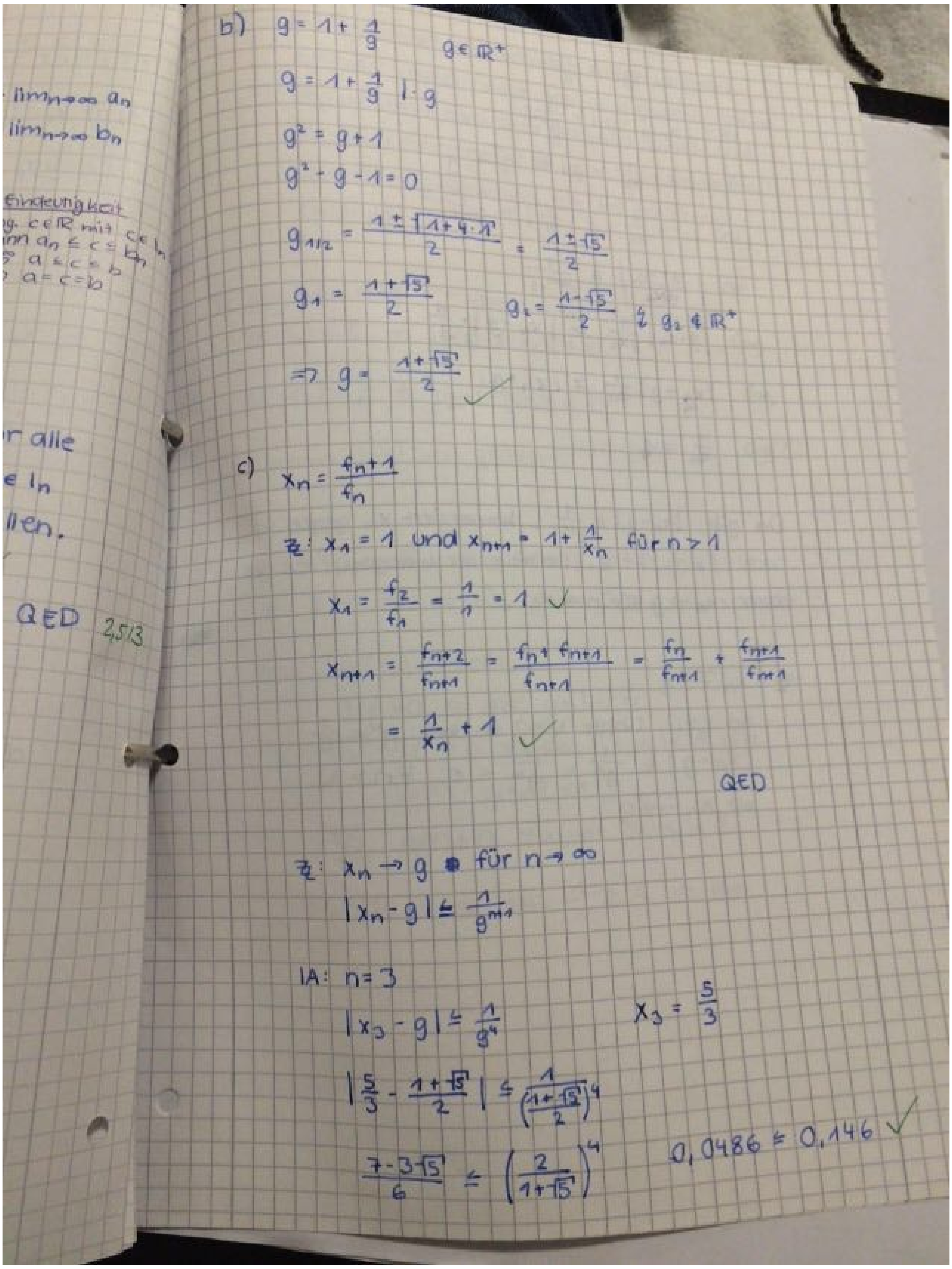
d) $x_0 = 5$, $f_4 : \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2-4x+2, & x>5 \\ 3x-9, & x<5 \end{cases}$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 5} (3x-9) = 6$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 5} (x^2-4x+2) = 7$$

$\Rightarrow$ $f_4(x)$ ist in x_0 nicht stetig fortsetzbar ✓ 2,5/3

Mathe-18.jpg



b) $g = 1 + \frac{1}{g}$ $\quad g \in \mathbb{R}^+$

$g = 1 + \frac{1}{g} \quad | \cdot g$

$g^2 = g + 1$

$g^2 - g - 1 = 0$

$g_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$g_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad g_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ↯ $g_2 \notin \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ✓

c) $x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$

z: $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ für $n > 1$

$x_1 = \frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1$ ✓

$x_{n+1} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_n + f_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{f_n}{f_{n+1}} + \frac{f_{n+1}}{f_{n+1}}$

$= \frac{1}{x_n} + 1$ ✓

QED

z: $x_n \to g$ für $n \to \infty$

$|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}$

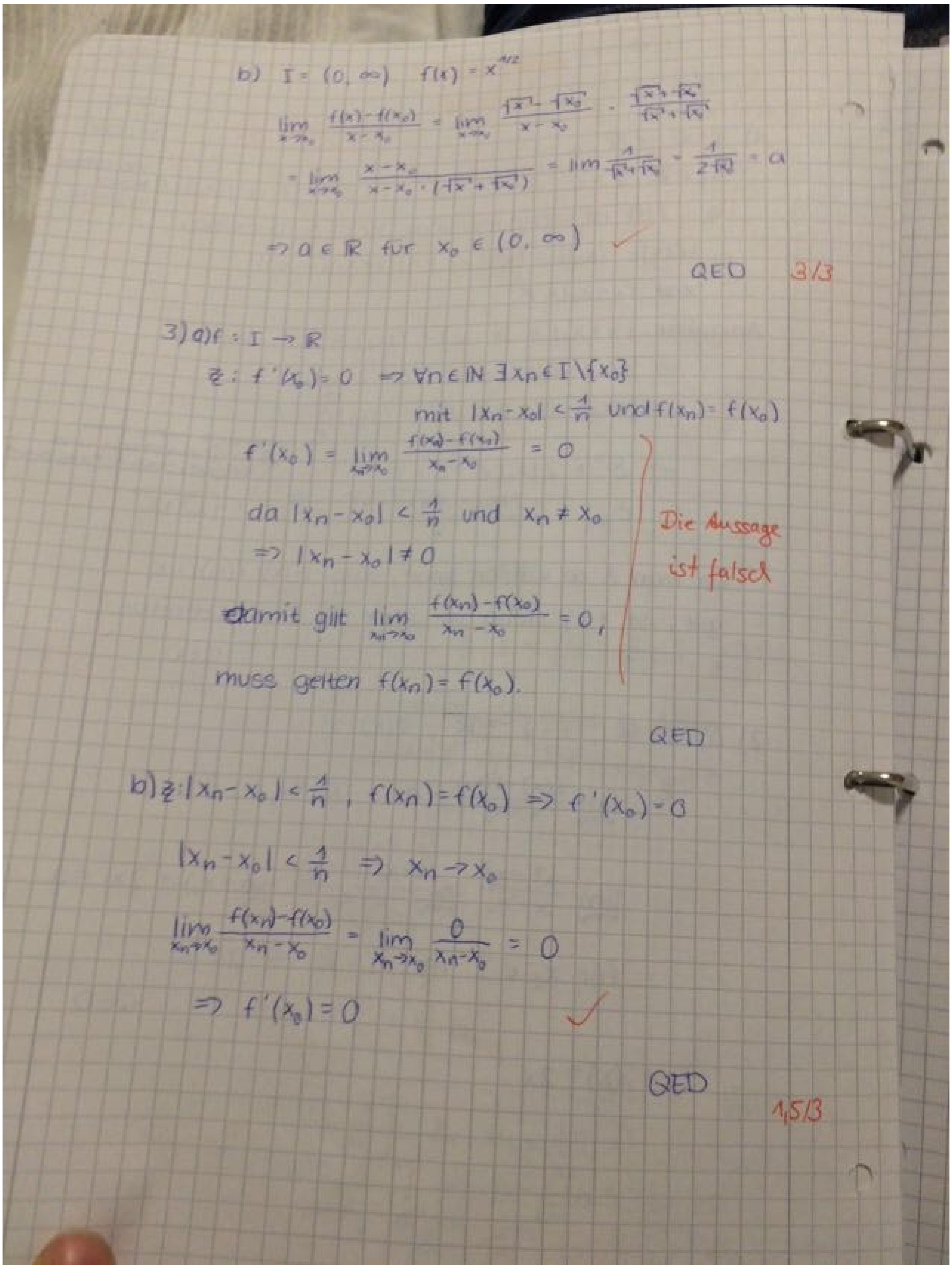
IA: $n = 3$

$|x_3 - g| \leq \frac{1}{g^4} \qquad x_3 = \frac{5}{3}$

$\left|\frac{5}{3} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leq \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4}$

$\frac{7 - 3\sqrt{5}}{6} \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^4 \qquad 0{,}0486 \leq 0{,}146$ ✓

Mathe-19.jpg



b) $I = (0, \infty)$ $f(x) = x^{1/2}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0 \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim \frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = a$$

$\Rightarrow a \in \mathbb{R}$ für $x_0 \in (0, \infty)$

QED 3/3

3) a) $f : I \to \mathbb{R}$

z: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $f(x_n) = f(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = 0$$

da $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $x_n \neq x_0$

$\Rightarrow |x_n - x_0| \neq 0$

damit gilt $\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = 0$,

muss gelten $f(x_n) = f(x_0)$.

Die Aussage ist falsch

QED

b) z: $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x_0$

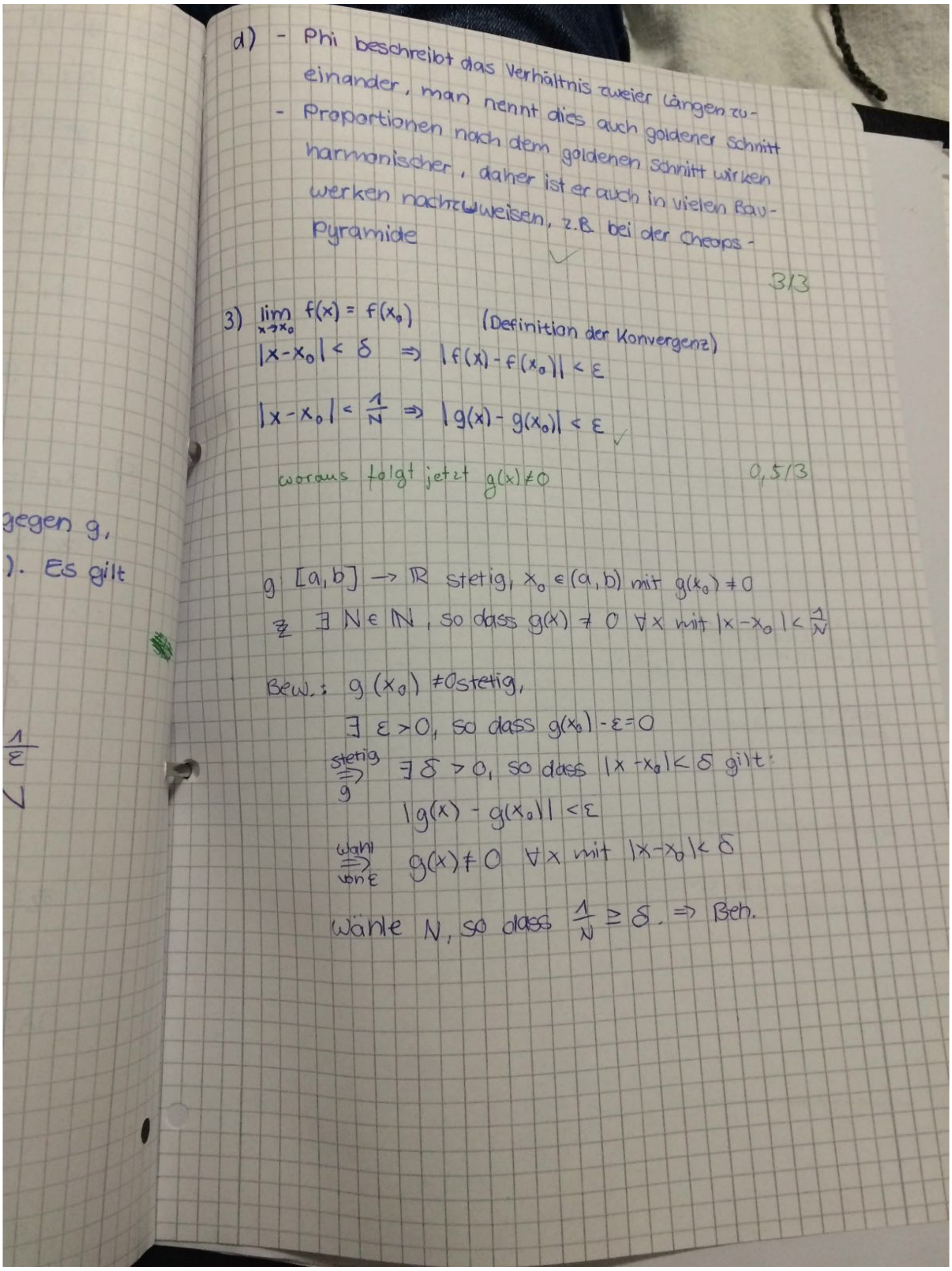
$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \lim_{x_n \to x_0} \frac{0}{x_n - x_0} = 0$$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

QED

1,5/3

Mathe-20.jpg



d) - Phi beschreibt das Verhältnis zweier Längen zueinander, man nennt dies auch goldener Schnitt
- Proportionen nach dem goldenen Schnitt wirken harmonischer, daher ist er auch in vielen Bauwerken nachzuweisen, z.B. bei der Cheops-Pyramide

3/3

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Definition der Konvergenz)

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$|x - x_0| < \frac{1}{N} \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

woraus folgt jetzt $g(x) \neq 0$ 0,5/3

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in (a,b)$ mit $g(x_0) \neq 0$

z.z. $\exists N \in \mathbb{N}$, so dass $g(x) \neq 0 \ \forall x$ mit $|x - x_0| < \frac{1}{N}$

Bew.: $g(x_0) \neq 0$ stetig,

$\exists \varepsilon > 0$, so dass $g(x_0) - \varepsilon = 0$

$\overset{\text{stetig}}{\underset{g}{\Rightarrow}} \exists \delta > 0$, so dass $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

$\overset{\text{Wahl}}{\underset{\text{von } \varepsilon}{\Rightarrow}} g(x) \neq 0 \ \forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$

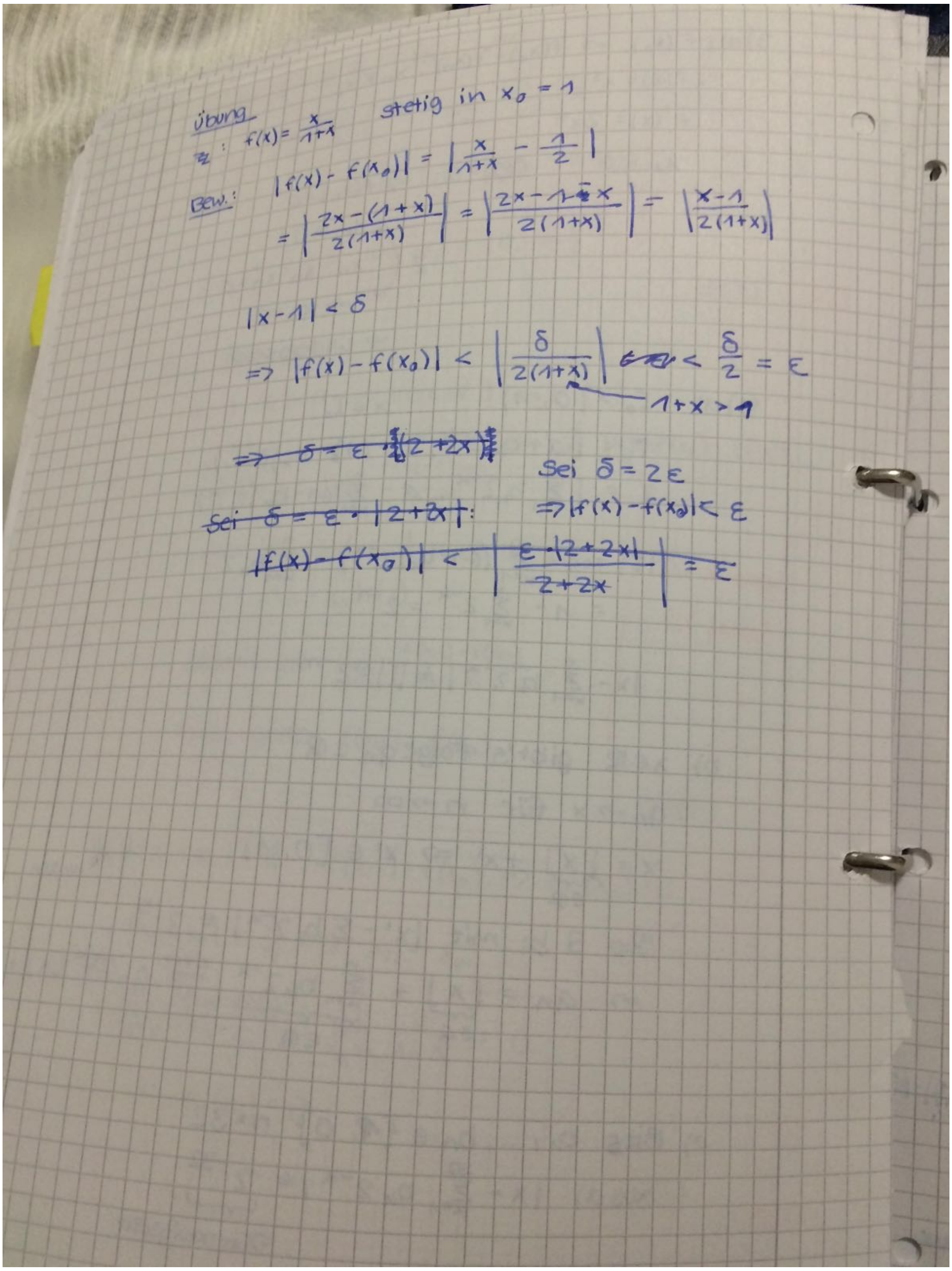
Wähle N, so dass $\frac{1}{N} \geq \delta$. $\Rightarrow$ Beh.

gegen g,

). Es gilt

$\frac{1}{\varepsilon}$

Mathe-21.jpg



Übung

z: $f(x) = \frac{x}{1+x}$ stetig in $x_0 = 1$

Bew.: $|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}\right|$

$= \left|\frac{2x-(1+x)}{2(1+x)}\right| = \left|\frac{2x-1-x}{2(1+x)}\right| = \left|\frac{x-1}{2(1+x)}\right|$

$|x-1| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \left|\frac{\delta}{2(1+x)}\right| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$

$1+x > 1$

$\cancel{\Rightarrow \delta = \varepsilon \cdot |2+2x|}$

Sei $\delta = 2\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

~~Sei~~ $\cancel{\delta = \varepsilon \cdot |2+2x|}$:

$\cancel{|f(x) - f(x_0)|} < \left|\frac{\cancel{\varepsilon \cdot |2+2x|}}{\cancel{2+2x}}\right| = \varepsilon$

Mathe-22.jpg

Mathe, Blatt 11

1) a) $f:(0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{1/4}$

$f(x) = x^4 \qquad g(x) = x^{1/4} \qquad f'(x) = 4x^3$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x^{1/4})} = \frac{1}{4x^{3/4}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

b) $g:(0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x^5)$

$$g' \ \ln'(x^5) = \frac{1}{x^5} \cdot 5x^4 = \frac{5}{x}$$

c) $h:(1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{1}{2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1\cdot(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{2(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x^2-1}$$

d) $m:(-1;1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin(x)$

$$m'(x) = \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$\cos = \sqrt{1-\sin^2(x)}$

arcsin(x)

$\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

Mathe-23.jpg

2) b) $g(x) = x^2$ besitzt keinen Fixpunkt in dem Intervall

$x^2 = x$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

$\Rightarrow$ nicht enthalten

oder $x_0^2 = x_0$

$\Rightarrow x_0^2 - x_0 = 0$

$x_0(x_0 - 1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

3) a) $a = b^x$

$x = \log_b a$

Z: $x = \log_b a = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

$b^{\log_b a} = a$

① $\ln(b^{\log_b a}) = \ln a$

② $\ln(b^{\log_b a}) = \ln b \cdot \log_b a$

Bew.: $\ln a^x = x \cdot \ln a$

$e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$

$a^x = (e^{\ln a})^x$

$a^x = a^x$

QED

$\Rightarrow \ln a = \ln b \cdot \log_b a$

$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$

$a = b^{x_1}$ $\qquad a = b^{x_2}$

$\log_b a = \frac{\ln b^{x_1}}{\ln b} = \frac{x_1 \cdot \ln b}{\ln b} = x_1$

$\Rightarrow$ eindeutig

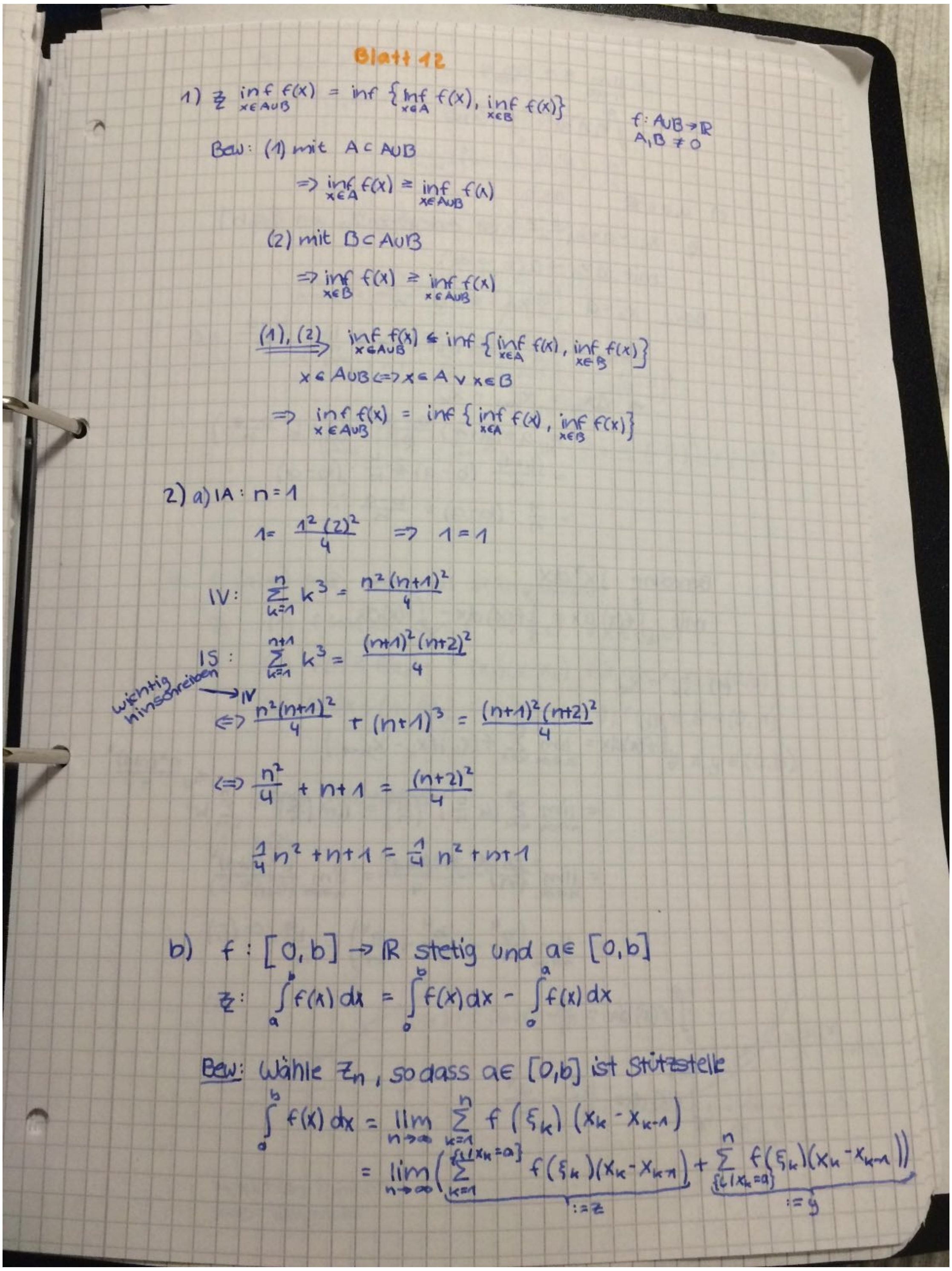
b) $\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

$f'(x) = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln b}$

stetig, da $\log_b a = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ und $\ln(a)$ ist definiert von $(0, \infty)$

Mathe-24.jpg



Blatt 12

1) z.z. $\inf\limits_{x \in A \cup B} f(x) = \inf \{ \inf\limits_{x \in A} f(x), \inf\limits_{x \in B} f(x) \}$ $\quad f: A \cup B \to \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$

Bew: (1) mit $A \subset A \cup B$

$\Rightarrow \inf\limits_{x \in A} f(x) \geq \inf\limits_{x \in A \cup B} f(x)$

(2) mit $B \subset A \cup B$

$\Rightarrow \inf\limits_{x \in B} f(x) \geq \inf\limits_{x \in A \cup B} f(x)$

$\xRightarrow{(1),(2)} \inf\limits_{x \in A \cup B} f(x) \leq \inf \{ \inf\limits_{x \in A} f(x), \inf\limits_{x \in B} f(x) \}$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Rightarrow \inf\limits_{x \in A \cup B} f(x) = \inf \{ \inf\limits_{x \in A} f(x), \inf\limits_{x \in B} f(x) \}$

2) a) IA: $n = 1$

$1 = \frac{1^2 (2)^2}{4} \Rightarrow 1 = 1$

IV: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

IS: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$

wichtig hinschreiben $\rightarrow$ IV

$\Leftrightarrow \frac{n^2 (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{(n+2)^2}{4}$

$\frac{1}{4} n^2 + n + 1 = \frac{1}{4} n^2 + n + 1$

b) $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in [0, b]$

z.z.: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$

Bew: Wähle Z_n, so dass $a \in [0, b]$ ist Stützstelle

$\int_0^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\{k \mid x_k = a\}} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{:= z} + \underbrace{\sum_{\{k \mid x_k = a\}}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{:= y} \Big)$

Mathe-25.jpg

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gilt: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall (x, x_0) \in (a,b)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}}_{*_1} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

$$*_1 \quad -f'(x_0)(x - x_0) \geq f(x_0) - f(x)$$

$$*_2 \quad +f'(x_0)(x - (x_0) \leq f(y) - f(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

setze $x_0 := \theta x + (1 - \theta) y$

$$\Rightarrow \frac{f(\theta x + (1-\theta)y) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(y) - f(\theta x + (1-\theta)y)}{y - x_0}$$

$$\Leftrightarrow f(\theta x + (1-\theta)y) \leq (f(y) - f(\theta x + (1-\theta)y)) \cdot \frac{1-\theta}{\theta} + f(x)$$

NR: $\frac{x_0 - x}{y - x_0} = \frac{\theta x + y - \theta y - x}{y - \theta x - y + \theta y + x} = \frac{1-\theta}{\theta}$

$$\Leftrightarrow \theta f(x_0) \leq (f(y) - f(x_0))(1 - \theta + f(x))\theta$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \leq f(y) \cdot (1 - \theta) + f(x)\theta$$

$(3) \Rightarrow (1)$: $h(\xi) = \theta f(\xi) + (1-\theta) f(y) - f(\theta \xi + (1-\theta)y)$

Es gilt $h(\xi) \geq 0$ nach 3

und $h(y) = 0$

$\Rightarrow$ h hat in y ein Minimum

$$\Rightarrow 0 \leq h''(\xi) = \theta \underbrace{(1-\theta)}_{>0} f''(\xi)$$

$$\Rightarrow f''(\xi) \geq 0 \ \forall \xi$$

4) $f(x,y) = \frac{x}{y} \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Z: f kann $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar

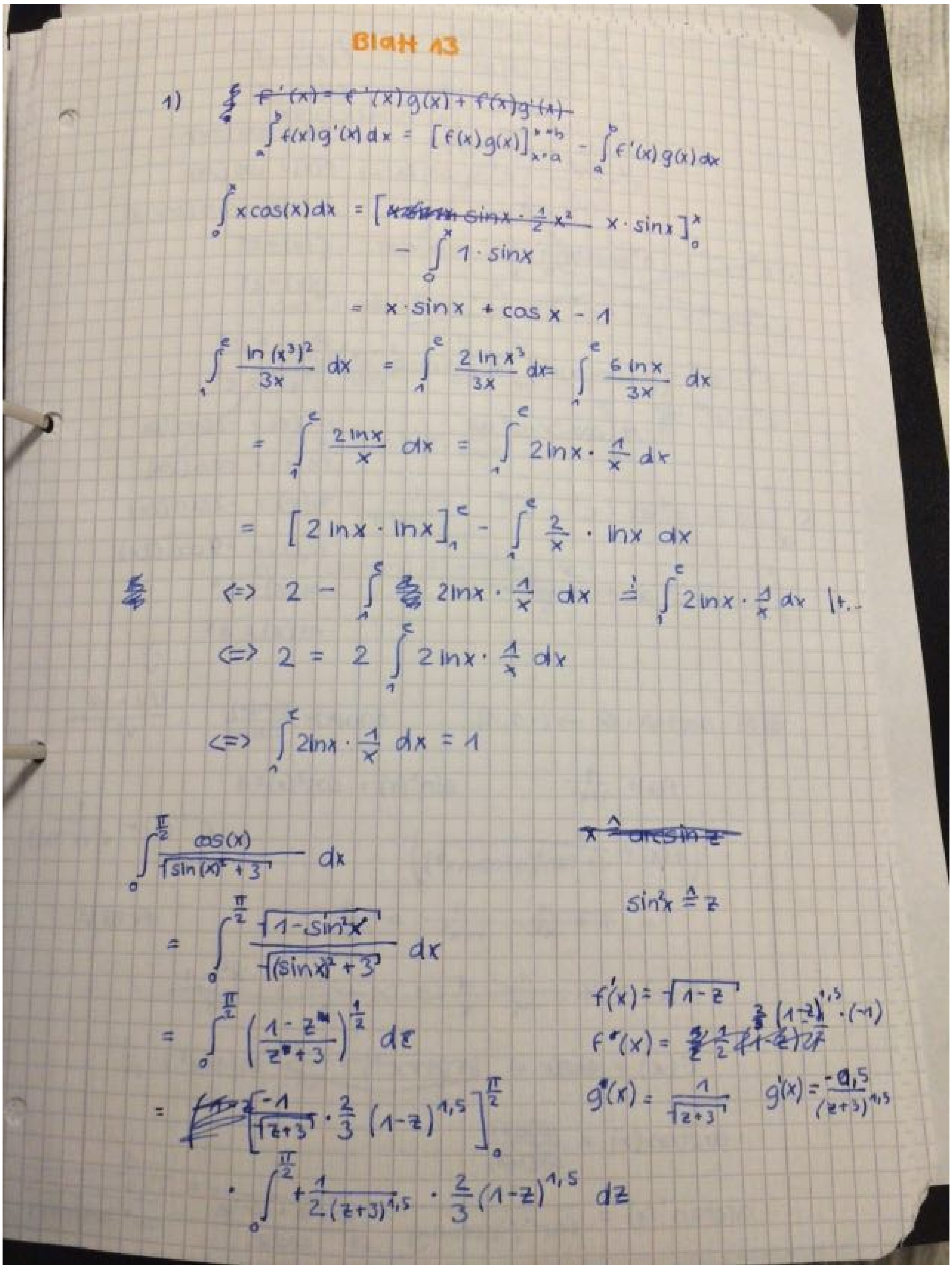
Def. $a_n = (0, \underset{\frac{1}{n}}{\varphi_n})$, $b_n = (\varphi_n, \varphi_n)$ mit φ_n Nullf.

Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (0, \varphi_n) = \frac{0}{\varphi_n} = 0 \\ \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n, \varphi_n) = \frac{\varphi_n}{\varphi_n} = 1 \end{aligned}\right\} \neq \text{↯}$$

$\Rightarrow \lim f(x_n) \neq f(\lim_{n\to\infty}(x_n))$

Mathe-26.jpg



Blatt 13

1) $\cancel{f'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

$$\int_0^x x\cos(x)\,dx = \left[\cancel{\sin x \cdot \tfrac{1}{2}x^2}\; x\cdot\sin x\right]_0^x - \int_0^x 1\cdot\sin x$$

$$= x\cdot\sin x + \cos x - 1$$

$$\int_1^e \frac{\ln(x^3)^2}{3x}\,dx = \int_1^e \frac{2\ln x^3}{3x}\,dx = \int_1^e \frac{6\ln x}{3x}\,dx$$

$$= \int_1^e \frac{2\ln x}{x}\,dx = \int_1^e 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[2\ln x\cdot\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{x}\cdot\ln x\,dx$$

$$\Leftrightarrow 2 - \int_1^e 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx \stackrel{!}{=} \int_1^e 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx \quad |+\ldots$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2\int_1^e 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)^2+3}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{(\sin x)^2+3}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-z}{z+3}\right)^{\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= \left[\frac{-1}{\sqrt{z+3}}\cdot\frac{2}{3}(1-z)^{1,5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} +\frac{1}{2(z+3)^{1,5}}\cdot\frac{2}{3}(1-z)^{1,5}\,dz$$

$\cancel{x \,\hat{=}\, \arcsin z}$

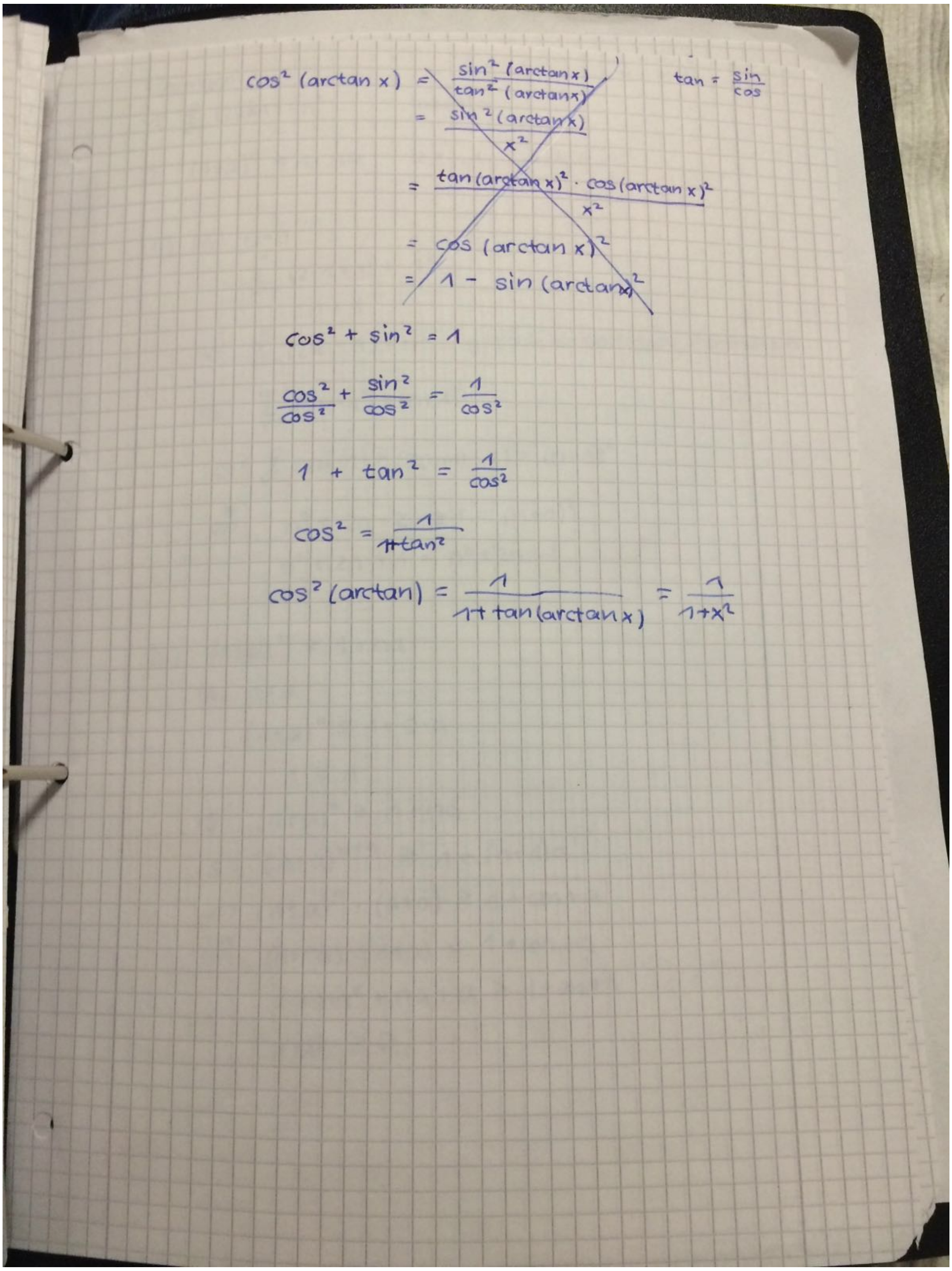
$\sin^2 x \,\hat{=}\, z$

$f'(x) = \sqrt{1-z}$

$f(x) = \frac{2}{3}(1-z)^{1,5}\cdot(-1)$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{z+3}}$ $\quad g'(x) = \frac{-0,5}{(z+3)^{1,5}}$

Mathe-27.jpg



$$\cos^2(\arctan x) = \frac{\sin^2(\arctan x)}{\tan^2(\arctan x)} \qquad \tan = \frac{\sin}{\cos}$$

$$= \frac{\sin^2(\arctan x)}{x^2}$$

$$= \frac{\tan(\arctan x)^2 \cdot \cos(\arctan x)^2}{x^2}$$

$$= \cos(\arctan x)^2$$

$$= 1 - \sin(\arctan x)^2$$

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

$$\frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$$

$$\cos^2(\arctan) = \frac{1}{1+\tan(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Mathe-28.jpg

1)b) $$\int_1^e \frac{(\ln(x^3))^2}{3x}\,dx \underset{\ln(x^3)::=u}{\overset{\text{Subst.}}{=}} \int_{\ln(1^3)=0}^{\ln e^3 = 3\ln e = 3} \frac{u^2}{3x}\cdot\frac{x}{3}\,du$$

Ableitung

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{x}$$
$$du = \frac{3}{x}\,dx$$
$$dx = \frac{x}{3}\,du$$

$$= \int_0^3 \frac{u^2}{9}\,du = \left[\frac{1}{27}u^3\right]_0^3 = 1$$

c) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{(\sin x)^2+3}}\,dx \underset{u:=\sin x}{=} \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{u^2+3}}\,\cancel{dx}\,\frac{1}{\cos x}\,du$$

$$\operatorname{arsinh} = \ln(y+\sqrt{y+1})$$
$$\operatorname{arsinh}' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$
$$\Leftrightarrow dx = \frac{1}{\cos x}\,du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+3}}\,du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{3}+1}}\,du \underset{y:=\frac{u}{\sqrt{3}}}{=} \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{y^2+1}}\cdot\sqrt{3}\,du$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = \left[\ln(y+\sqrt{y+1})\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln\sqrt{3}$$

2)a) z: $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx < \infty \Rightarrow \int f(x)\,dx < \infty$$

Beweis: $$\int_a^b f(x)\,dx \leq \left|\int f(x)\,dx\right| \underset{\text{Monotonie}}{\leq} \int |f(x)|\,dx \leq \int g(x)\,dx < \infty$$

QED

b) $$T(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-t}t^{x-1}\,dt,\quad x>0$$

z: wohldefiniert & endlich

Tipp: $$\int_0^k e^{-t}t^{x-1}\,dt = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt + \int_1^k e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

NR: $$e^{-t}t^{x-1} \overset{t>0}{\leq} t^{x-1} = \frac{t^x}{t} = \frac{t^{x+1}}{t^2} \overset{x>0,\,t>1}{\leq} \frac{1}{t^2}$$

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^x}{t}\,dt \overset{x>0}{=} \int_0^1 t^{\overset{x-1}{\alpha}}\,dt < \infty$$

$$\int_1^k e^{-t}t^{x-1}\,dt \leq \int_1^k \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^k = 1-\frac{1}{k} \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^k e^{-t}t^{x-1}\,dt < \infty$$

Mathe-29.jpg

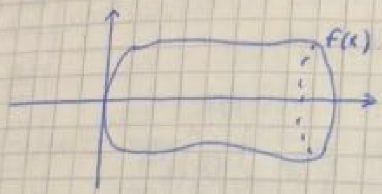
c) z.z. $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$$\int_0^\infty \underbrace{e^{-t}}_{f'(x)} \underbrace{t^x}_{g(x)} dt = \left[-e^{-t} t^x\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} x \cdot t^{x-1} dt$$

$$= x \int e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$= x\,\Gamma(x)$$

4)a) $f: [0, \frac{\pi}{4}] \to [0, \infty]$ $f(x) = \tan(x)$



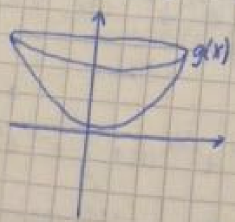
$$\Rightarrow \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi/4} \tan^2(x) dx$$

$$\underset{\tan'(x)=1+\tan^2(x)}{\overset{3a)}{=}} \pi \int_0^{\pi/4} \tan'(x) - 1 \, dx$$

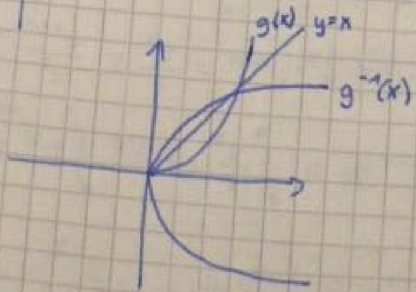
$$= \pi \int_0^{\pi/4} \tan'(x) dx - \frac{\pi^2}{4}$$

$$= \pi \left[\tan(x)\right]_0^{\pi/4} - \frac{\pi^2}{4} = \pi - \frac{\pi^2}{4}$$

b) $g: [a,b] \to [0, \infty)$ stetig und streng monoton



$$V_g = \pi \int_{g(a)}^{g(b)} (g^{-1}(y))^2 dy$$



$$V_g = \pi \int_{g(a)}^{g(b)} (g^{-1}(y))^2 dy$$

$$\underset{y=g(x)}{=} \pi \int_a^b g(g^{-1}(x))^2 \cdot g'(x) dx$$

$$= \pi \int_a^b x^2 g'(x) dx$$

$$\int^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx$$

Mathe-30.jpg

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(2x)\,dx$$

$$= \left[\cos 2x\, e^x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot (-\sin 2x \cdot 2)\,dx$$

$$= e^{\pi} - e^{-\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot (-\sin 2x \cdot 2)$$

$$\cancel{= e^{\pi} - e^{-\pi} - \left[e^x \cos(2x)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(2x)\,dx}$$

$$\cancel{= e^{\pi} - e^{-\pi} - \left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] + \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(2x)\,dx}$$

$$= e^{\pi} - e^{-\pi} - \left(\left[-2\sin(2x) e^x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -4\cos 2x \cdot e^x\right) dx$$

$$= e^{\pi} - e^{-\pi} - 4\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cdot e^x\,dx$$

$$5\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cdot e^x\,dx = e^{\pi} - e^{-\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cdot e^x\,dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{5}$$

$\cancel{f(x) = e^x}$

$\cancel{f'(x) = e^x}$

$\cancel{g'(x) = \cos(2x)}$

$f(x) = \cos(2x)$

$f'(x) = -\sin(2x) \cdot 2$

$g'(x) = e^x$

$g(x) = e^x$

$\cancel{h(x) = e^x}$

$\cancel{h'(x) = e^x}$

$\cancel{m'(x) = -2\sin 2x}$

$\cancel{m(x) = \cos(2x)}$

$h(x) = -2\sin(2x)$

$h'(x) = -4\cos(2x)$

$m'(x) = e^x$

$m(x) = e^x$

$\frac{u}{v}$

3) a) $\arctan : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ $\qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\qquad \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\left(f(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}\right)$ $\qquad f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$= \cancel{1 + \frac{1}{x^2}} \quad \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad \cancel{v = 1+x^2}$

$\cancel{F(x) = x + \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}}$

$F(x) = \boxed{\ln(1+x^2) \cdot \frac{1}{2x}} \quad \ln(1+x^2) \cdot \frac{1}{2x}$

$\arctan(x) = \cancel{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}}$$

Mathe-31.jpg

(2) $\xi_k = x_{k-1}$

$$\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum \left((k-1)\frac{b}{n}\right)^3 \left(\frac{b}{n}\right) = \frac{b^4}{4}$$

(3) $\xi_k = \dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum \left(\frac{\frac{k\cdot b}{n} + \frac{(k-1)b}{n}}{2}\right)^3 \left(\frac{b}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2}\right)^3 \left(\frac{b}{n}\right)$$

$(k - \frac{1}{2})^3$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3k^2 \cdot \frac{1}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 k + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{b^4}{4}$$

3) $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

Z: (1) f konvex, d.h. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

(2) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für alle $x, x_0 \in (a,b)$

(3) $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y) \quad \forall \theta \in (0,1)$

$\forall x, y \in (a,b)$

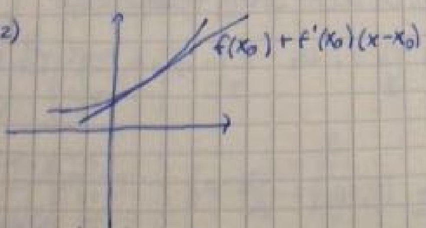
sind äquivalent

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2 \Rightarrow (3)$ s.h. Skript Satz 2.5

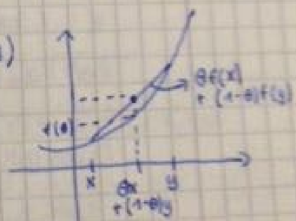
$(3) \Rightarrow (1)$

(2)



Funktion immer über Tangente

(3)



Mathe-32.jpg

$$= \lim_{n\to\infty} z + \lim_{n\to\infty} y$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

c) $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a<b$

$Z: x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ ist Zerlegung Z_n von $[a,b]$

mit $\Delta Z_n \to 0 \ (n \to \infty)$

Bew.: $x_0 = a$, $x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta Z_n = \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \Delta x_k \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$$

$$* \ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$= a+(k+1)\frac{b-a}{n} - \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{(k+1)}{n}(b-a) - \frac{k}{n}\cdot(b-a)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot(b-a) = \frac{b-a}{n}$$

Berechne $\int x^3 dx$

mit $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$

(1) $\xi_k = x_k$

$$\int_0^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(k\frac{b}{n}\right)^3 \left(\frac{b}{n}\right) = \lim \left(\frac{b}{n}\right)^4 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^3}_{\overset{a)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4(n+1)^2}{4n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b^4}{4} + \frac{b^4}{2n} + \frac{b^4}{4n^2}\right) = \frac{b^4}{4}$$

$$\int_0^a f(x)\,dx = \frac{a^4}{4}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

Mathe-33.jpg

2)a) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ $f: [a,b] \to \underset{\text{stetig}}{[a,b]}$

$h: [a,b] \to \mathbb{R}$ $h := f(x) - x$

$h(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$

$h(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$

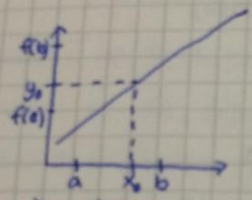
$h(\xi) = \xi$ $\Rightarrow$ Fixpunkt

QED

ZWS: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

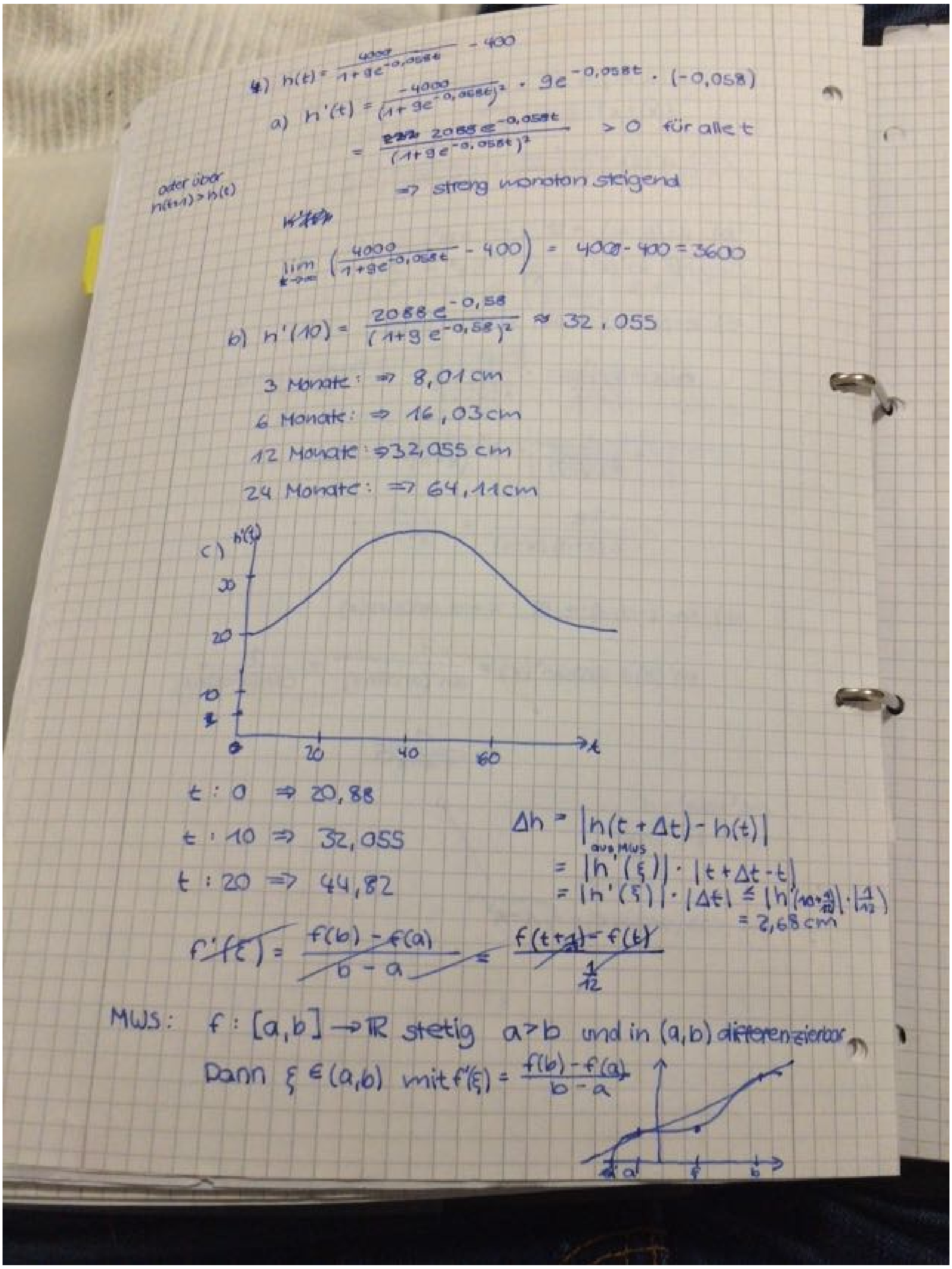
Dann existiert zu jedem y_0 zwischen

$f(a) \vee f(b)$ $\exists\, x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$.



~~Wenn ein~~ es gibt einen Wert y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$, ~~dann gibt es~~ für den es auch ein zugehöriges x_0 zwisch a und b gibt.

Mathe-34.jpg



4) $h(t) = \frac{4000}{1+9e^{-0,058t}} - 400$

a) $h'(t) = \frac{-4000}{(1+9e^{-0,058t})^2} \cdot 9e^{-0,058t} \cdot (-0,058)$

$= \frac{2088\, e^{-0,058t}}{(1+9e^{-0,058t})^2} > 0$ für alle t

oder über $h(t+1) > h(t)$

$\Rightarrow$ streng monoton steigend

$\lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{4000}{1+9e^{-0,058t}} - 400\right) = 4000 - 400 = 3600$

b) $h'(10) = \frac{2088\, e^{-0,58}}{(1+9e^{-0,58})^2} \approx 32,055$

3 Monate: $\Rightarrow$ 8,01 cm

6 Monate: $\Rightarrow$ 16,03 cm

12 Monate: $\Rightarrow$ 32,055 cm

24 Monate: $\Rightarrow$ 64,11 cm

c)

t : 0 $\Rightarrow$ 20,88

t : 10 $\Rightarrow$ 32,055

t : 20 $\Rightarrow$ 44,82

$\Delta h = |h(t+\Delta t) - h(t)|$

aus MWS

$= |h'(\xi)| \cdot |t + \Delta t - t|$

$= |h'(\xi)| \cdot |\Delta t| \leq |h'(10+\frac{1}{12})| \cdot |\frac{1}{12}|$

$= 2,68$ cm

$\cancel{f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(t+\frac{1}{12}) - f(t)}{\frac{1}{12}}}$

MWS: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $a > b$ und in (a,b) differenzierbar

Dann $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Mathe-35.jpg

3) a) z.z.: $f'(x_0) \Rightarrow f(x_0) \neq f(x_n)$, $x_n \neq x_0$

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$x_0 = 0 \qquad f(0) = 0 \qquad \Rightarrow f(x_n) = 0$

$$\text{↯} \left(\begin{array}{l} x_n \neq 0 \\ x_n \cdot x_n \cdot x_n = 0 \\ \Rightarrow x_n = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Widerspruch

4) a) $I_0 = [0, 1) \qquad x \in I_0$

$I_k = [a + b_k 2^{-k}, b - (1 - b_k) 2^{-k})$

$I = [\sum_{k=1}^{n} b_k 2^{-k}, 1 - \sum_{k=1}^{n} (1 - b_k) 2^{-k})$

$|I| = 1 - \sum_{k=1}^{n} ((1-b_k) 2^{-k}) - \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{-k}$

$= 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 2^{-n}$

$|x - \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{-k}| \leq |I| = 2^{-n}$

b) $x \in \mathbb{R}$ gibt's Folge $q_n \subset \mathbb{Q}$

$q_n \to x$ für $n \to \infty$

$x = \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Q}} + x' \Rightarrow x' \in [0, 1) \qquad \lfloor\ \rfloor$ runden

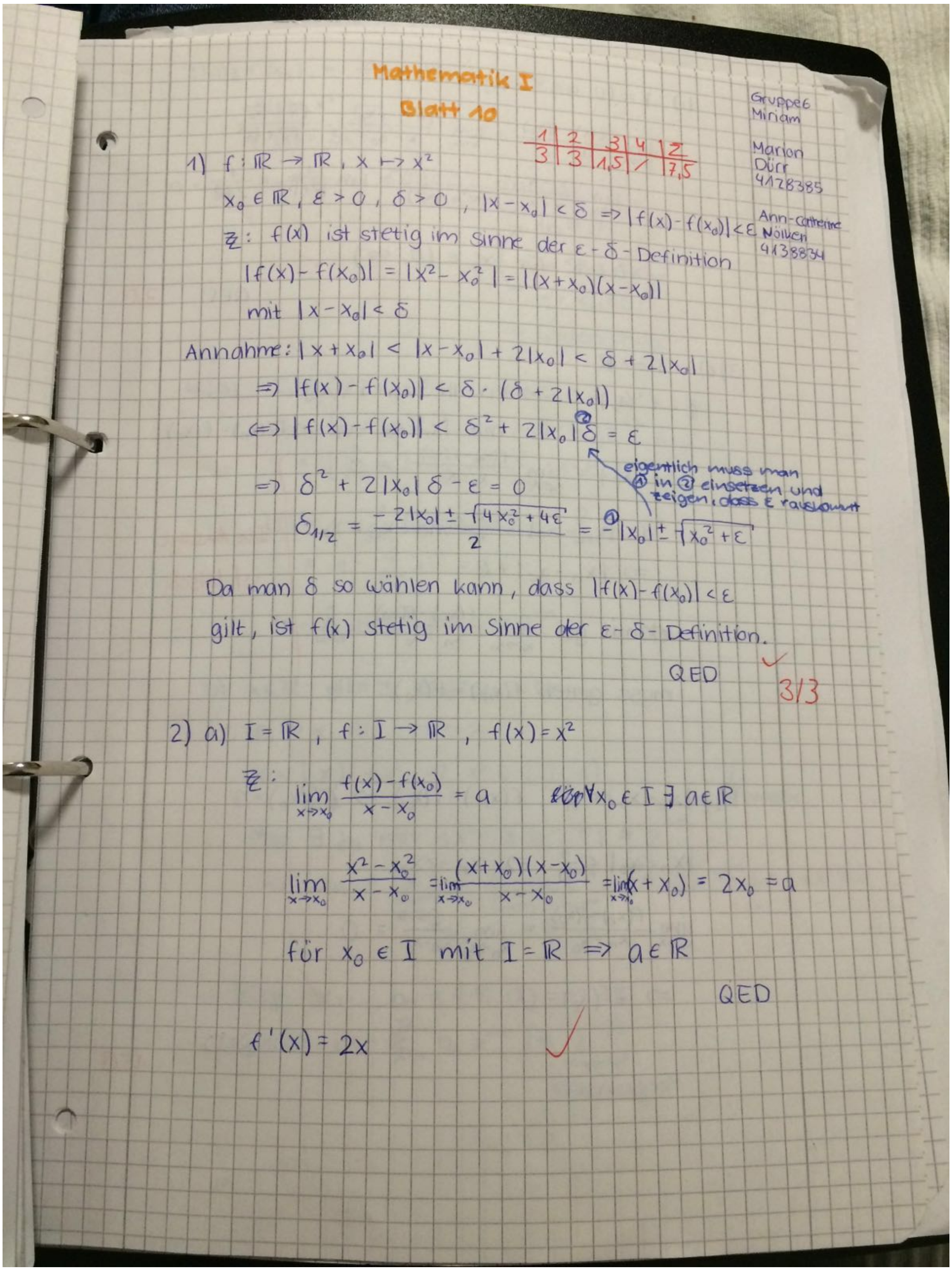
$\overset{a)}{\Rightarrow} \exists\, b_i$ mit $|x' - \sum b_k 2^{-k}| \leq 2^{-n}$

$\Rightarrow q_n = \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k 2^{-k}}_{\in \mathbb{Q}} \overset{n \to \infty}{\Rightarrow} q_n \xrightarrow{n \to \infty} \lfloor x \rfloor + x' = x$

c) Bits $b_1, \ldots, b_n \in \{1, 0\}$ $n = 32$

aus a) $|x - \sum_{k=1}^{32} b_k 2^{-k}| \leq \underbrace{2^{-32}}_{\Rightarrow \text{Genauigkeit}}$

Mathe-36.jpg



Mathematik I

Blatt 10

1	2	3	4	Σ
3	3	1,5	/	7,5

Gruppe 6 Miriam

Marlon Dürr 4128385

Ann-Catherine Nölken 4138834

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

$x_0 \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

z: $f(x)$ ist stetig im Sinne der ε-δ-Definition

$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x + x_0)(x - x_0)|$

mit $|x - x_0| < \delta$

Annahme: $|x + x_0| < |x - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0|$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \cdot (\delta + 2|x_0|)$

$\Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta^2 + 2|x_0| \delta = \varepsilon$ ②

eigentlich muss man ① in ② einsetzen und zeigen, dass ε rauskommt

$\Rightarrow \delta^2 + 2|x_0|\delta - \varepsilon = 0$

$$\delta_{1/2} = \frac{-2|x_0| \pm \sqrt{4x_0^2 + 4\varepsilon}}{2} = -|x_0| \pm \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} \quad ①$$

Da man δ so wählen kann, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt, ist $f(x)$ stetig im Sinne der ε-δ-Definition.

QED

3/3

2) a) $I = \mathbb{R},\ f: I \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

z: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad \forall x_0 \in I\ \exists a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0 = a$$

für $x_0 \in I$ mit $I = \mathbb{R} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$

QED

$f'(x) = 2x$

Mathe-37.jpg

IV: $|x_n - g| \le \frac{1}{g^{n+1}}$ ✓

IS: $|x_{n+1} - g| \le \frac{1}{g^{n+2}}$

$\Leftrightarrow |1 + \frac{1}{x_n} - g| \le \frac{1}{g^{n+1} \cdot g}$

$\Leftrightarrow |1 + \frac{1}{x_n} - 1 - \frac{1}{g}| \le \frac{1}{g^{n+1} \cdot g}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{g - x_n}{g x_n}\right| \le \frac{1}{g^{n+1} \cdot g}$

$\Leftrightarrow |g - x_n| \frac{1}{g x_n} \overset{IV}{\le} |x_n - g| \cdot \frac{1}{g}$

$\Leftrightarrow |x_n - g| \frac{1}{x_n} \le |x_n - g|$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \le 1$

Da gilt $|x_n - g| \le \frac{1}{g^{n+1}}$, konvergiert x_n gegen g, nach $|x - x_0| \le \varepsilon$ (Definition der Konvergenz). Es gilt daher $x_n \to g$ für $n \to \infty$. ✓

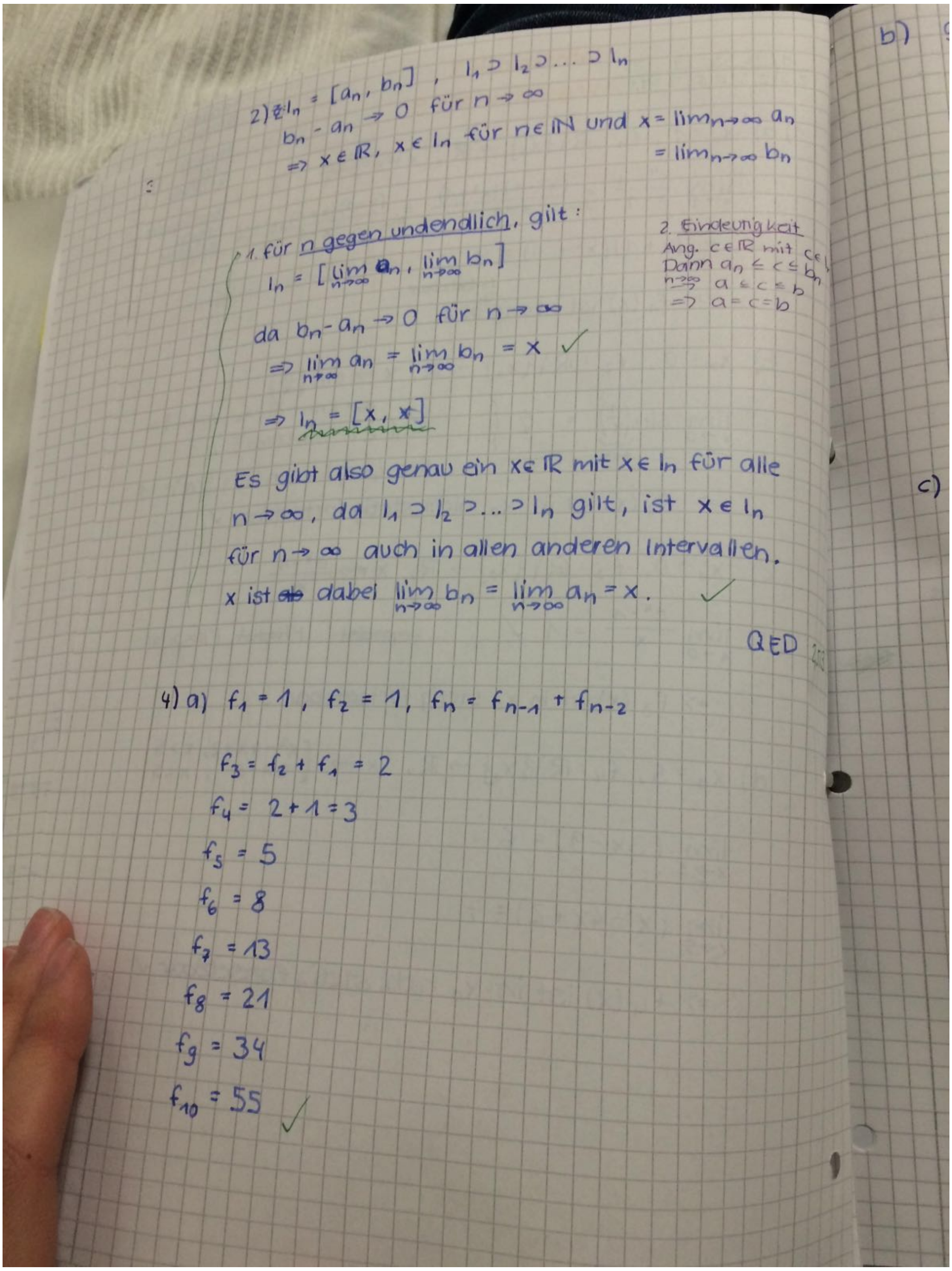
Z: $x_n \xrightarrow{n \to \infty} g$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N > 0$, so dass $g^N < \frac{1}{\varepsilon}$

$|x_n - g| \le \frac{1}{g^n} < \frac{1}{g^N} < \varepsilon \quad \forall n > N$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{n \to \infty} g$

Mathe-38.jpg



2) $I_n = [a_n, b_n]$, $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$

$b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$, $x \in I_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x = \lim_{n\to\infty} a_n$
$= \lim_{n\to\infty} b_n$

1. für <u>n gegen undendlich</u>, gilt:

$I_n = [\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n]$

da $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$ ✓

$\Rightarrow I_n = [x, x]$

2. <u>Eindeutigkeit</u>
Ang. $c \in \mathbb{R}$ mit $c \in I_n$
Dann $a_n \leq c \leq b_n$
$\overset{n\to\infty}{\Rightarrow} a \leq c \leq b$
$\Rightarrow a = c = b$

Es gibt also genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \to \infty$, da $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$ gilt, ist $x \in I_n$ für $n \to \infty$ auch in allen anderen Intervallen. x ist ~~als~~ dabei $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = x$. ✓

QED

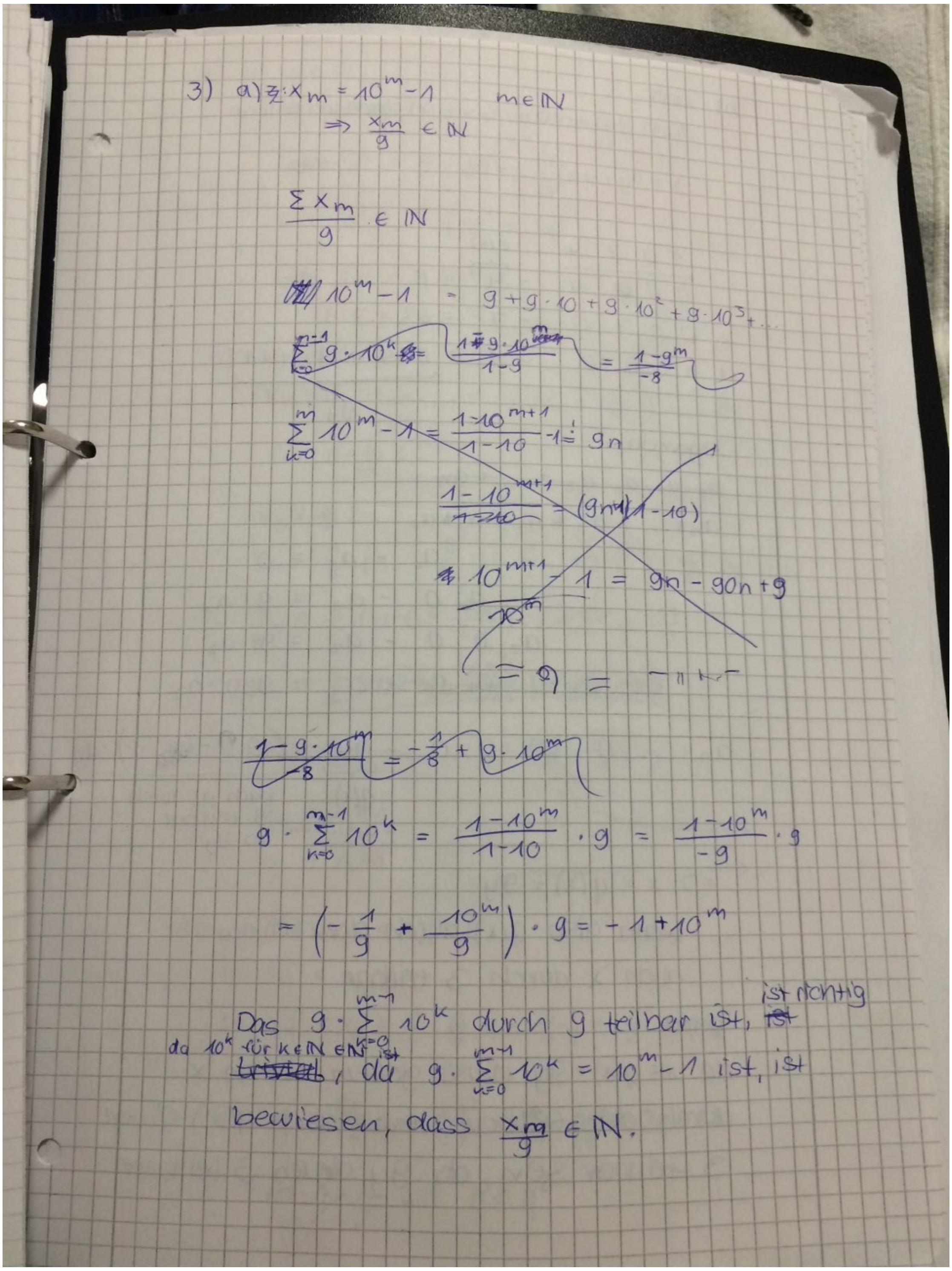
4) a) $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

$f_3 = f_2 + f_1 = 2$
$f_4 = 2 + 1 = 3$
$f_5 = 5$
$f_6 = 8$
$f_7 = 13$
$f_8 = 21$
$f_9 = 34$
$f_{10} = 55$ ✓

b)

c)

Mathe-39.jpg



3) a) z.z.: $x_m = 10^m - 1$ $\quad m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{x_m}{9} \in \mathbb{N}$

$\frac{\sum x_m}{9} \in \mathbb{N}$

$10^m - 1 = 9 + 9\cdot 10 + 9\cdot 10^2 + 9\cdot 10^3 + \dots$

$\cancel{\sum_{k=0}^{m-1} 9\cdot 10^k = \frac{1-9\cdot 10^m}{1-9} = \frac{1-9^m}{-8}}$

$\cancel{\sum_{k=0}^{m} 10^m - 1 = \frac{1-10^{m+1}}{1-10} - 1 \overset{!}{=} 9n}$

$\cancel{\frac{1-10^{m+1}}{1-10} = (9n+1)(1-10)}$

$\cancel{10^{m+1} - 1 = 9n - 90n + 9}$

$\cancel{\Rightarrow 9 = -\,''\,-}$

$\cancel{\frac{1-9\cdot 10^m}{-8} = -\frac{1}{8} + 9\cdot 10^m}$

$9\cdot\sum_{k=0}^{m-1} 10^k = \frac{1-10^m}{1-10}\cdot 9 = \frac{1-10^m}{-9}\cdot 9$

$= \left(-\frac{1}{9} + \frac{10^m}{9}\right)\cdot 9 = -1 + 10^m$

Das $9\cdot\sum_{k=0}^{m-1} 10^k$ durch 9 teilbar ist, ~~ist~~ ist richtig, da 10^k für $k \in \mathbb{N}$ $\in \mathbb{N}$ ist ~~trivial~~, da $9\cdot\sum_{k=0}^{m-1} 10^k = 10^m - 1$ ist, ist bewiesen, dass $\frac{x_m}{9} \in \mathbb{N}$.

Mathe-40.jpg

4) a|b)

c) z: $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n < a$

1. $\sqrt{a} < x_{n+1}$
2. $x_{n+1} < x_n$
3. $x_n < a$

IA: $n=1$

1. $\sqrt{a} < x_2$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} < \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$

$\Leftrightarrow a < \frac{1}{4}\left(x_1^2 + 2a + \frac{a^2}{x_1^2}\right)$

$\Leftrightarrow a < \frac{x_1^4 + 2ax_1^2 + a^2}{4x_1^2} = \frac{(x_1^2+a)^2}{4x_1^2}$

$a \cdot 4x_1^2 < x_1^4 + 2ax_1^2 + a^2$

$0 < x_1^4 - 2ax_1^2 + a^2$

$0 < (x_1^2 - a)^2$

Bleibt $x_1^2 - a \neq 0$

Ang.: $x_1^2 - a = 0$

$\Leftrightarrow x_1^2 = a$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(a+1)\right)^2 = a$

$\frac{1}{4}a^2 + a + \frac{1}{2} = a$

$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}}_{\neq 0}\underbrace{\left(\frac{1}{2}a^2 + 1\right)}_{\neq 0,\ \text{da } a^2 \neq -2} = 0$

2. $x_2 < x_1$

$\frac{1}{4}(a+1) + \frac{a}{a+1} < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}a - \frac{1}{4} + \frac{a}{a+1} < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4} + a < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} < 0$

Mathe-41.jpg

1) a) z. $a_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$

<u>Bew.:</u> $a_n \to \infty \Rightarrow$ zu jedem $k > 0\ \exists\ N \in \mathbb{R}$, so dass $a_n > k\ \forall n > N$

Wähle N so, dass $a_n > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n > N$.

Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_N} < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

b) $a_n \to 0,\ a_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty$

d.h. zu jedem $k > 0\ \exists\ N \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{a_n} > k\ \forall n > N$.

<u>Bew.:</u> Es gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{a_n}{a_n}\right| < \varepsilon\ \forall n > N$

$\underset{a_n > 0}{\Rightarrow}$ Es gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $a_n < \varepsilon\ \forall n > N$

$\Rightarrow \exists\ N \in \mathbb{N}$ mit $a_n < \frac{1}{k}\ \forall n > \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a_n} > k\ \forall n > N$

$\Rightarrow \forall k > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{a_n} > k\ \forall n > N$

QED

2) a) b) c)

d) konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen

<u>Bew:</u> zu jedem $\varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > N$.

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| < |a_n - a| + \underbrace{|a - a_m|}_{\text{wegen Betrag } = |a_m - a|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m > N$$

QED

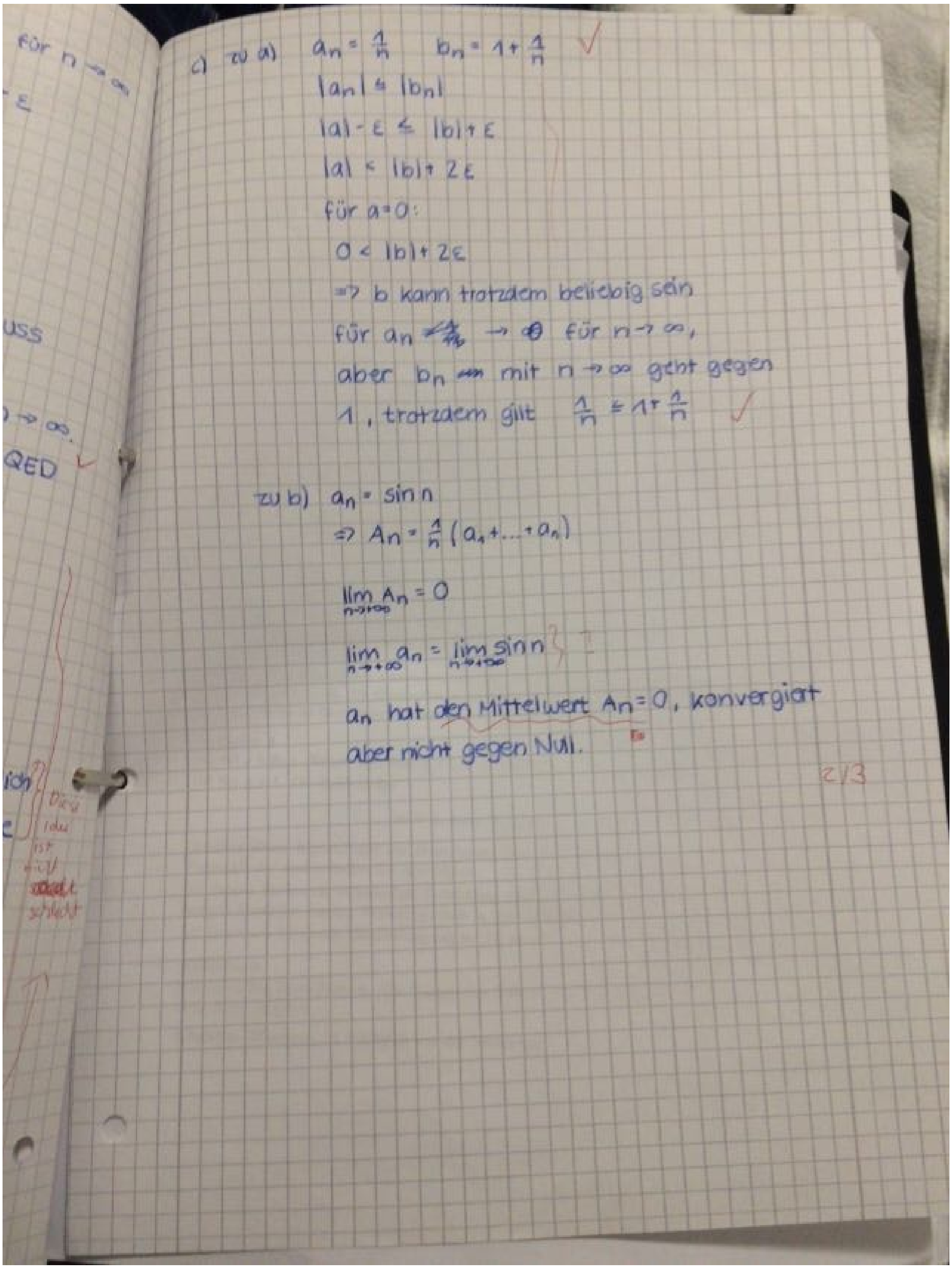
3) a) z.: $x_m = 10^m - 1\ \forall m \in \mathbb{N}$ ist durch 9 teilbar

Bew.: $\frac{10^m - 1}{10 - 1} = \sum_{k=0}^{m-1} 10^k \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow 10^{m} - 1 = 9 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} 10^k$

b)

Mathe-42.jpg



c) zu a) $a_n = \frac{1}{n}$ $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ ✓

$|a_n| \le |b_n|$

$|a| - \varepsilon \le |b| + \varepsilon$

$|a| \le |b| + 2\varepsilon$

für $a = 0$:

$0 \le |b| + 2\varepsilon$

$\Rightarrow$ b kann trotzdem beliebig sein

für $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$,

aber b_n mit $n \to \infty$ geht gegen

1, trotzdem gilt $\frac{1}{n} \le 1 + \frac{1}{n}$ ✓

zu b) $a_n = \sin n$

$\Rightarrow A_n = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = 0$

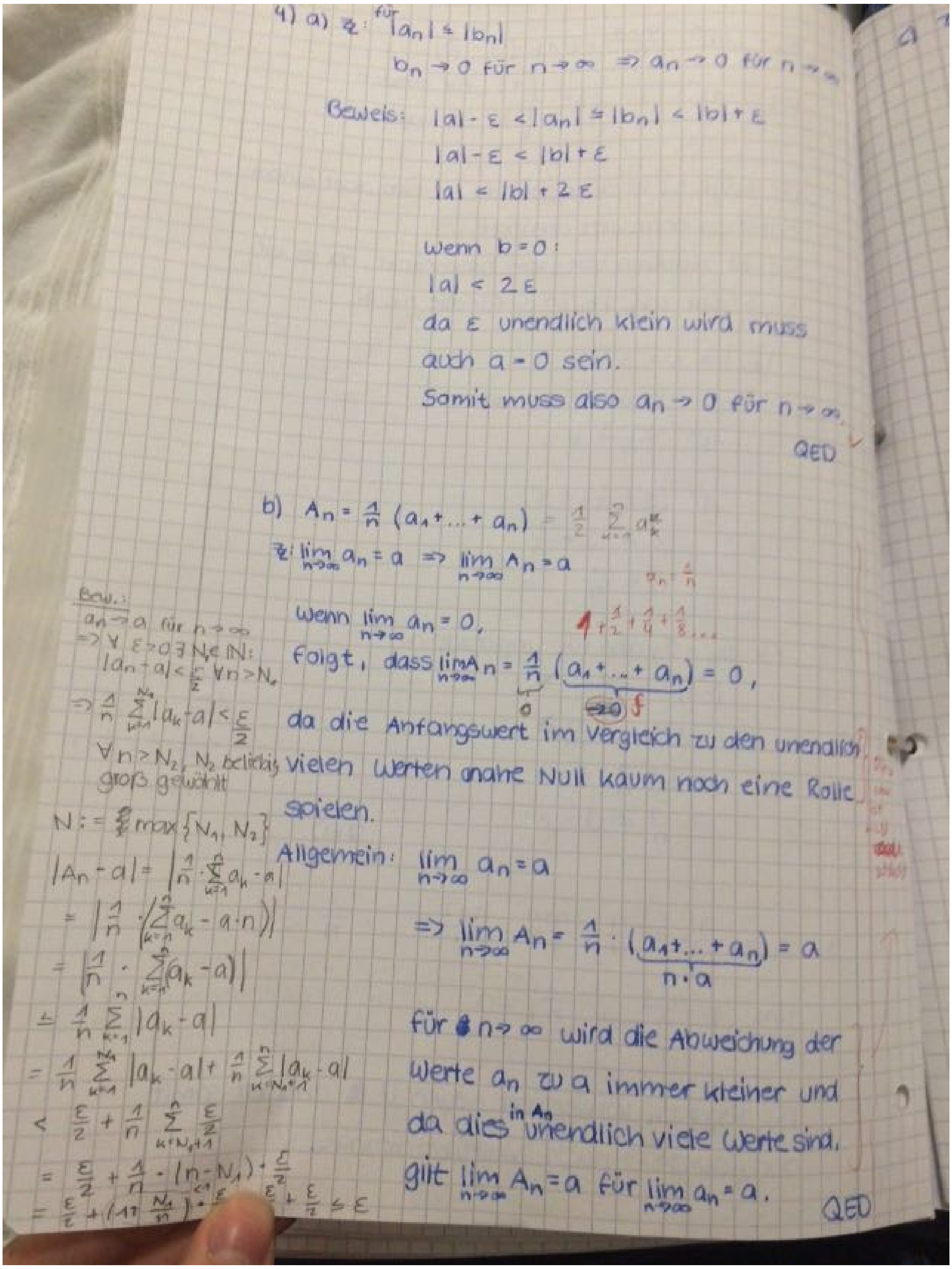
$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin n$?

a_n hat den Mittelwert $A_n = 0$, konvergiert

aber nicht gegen Null.

2/3

Mathe-43.jpg



4) a) z: für $|a_n| \leq |b_n|$

$b_n \to 0$ für $n \to \infty \Rightarrow a_n \to 0$ für $n \to \infty$

Beweis: $|a| - \varepsilon < |a_n| \leq |b_n| < |b| + \varepsilon$

$|a| - \varepsilon < |b| + \varepsilon$

$|a| < |b| + 2\varepsilon$

wenn $b = 0$:

$|a| < 2\varepsilon$

da ε unendlich klein wird muss auch $a = 0$ sein.

Somit muss also $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

QED

b) $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k$

z: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = a$

$a_n = \frac{1}{n}$

Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots$

folgt, dass $\lim_{n\to\infty} A_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} \underbrace{(a_1 + \ldots + a_n)}_{\to \infty} = 0$, f

da die Anfangswert im Vergleich zu den unendlich vielen Werten nahe Null kaum noch eine Rolle spielen.

Allgemein: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(a_1 + \ldots + a_n)}_{n \cdot a} = a$

für $n \to \infty$ wird die Abweichung der Werte a_n zu a immer kleiner und da dies in A_n unendlich viele Werte sind, gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = a$ für $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

QED

Bew.:

$a_n \to a$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n > N_1$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n > N_2$, N_2 beliebig groß gewählt

$N := \max\{N_1, N_2\}$

$|A_n - a| = \left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k - a\right|$

$= \left|\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - a \cdot n\right)\right|$

$= \left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k - a)\right|$

$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - a|$

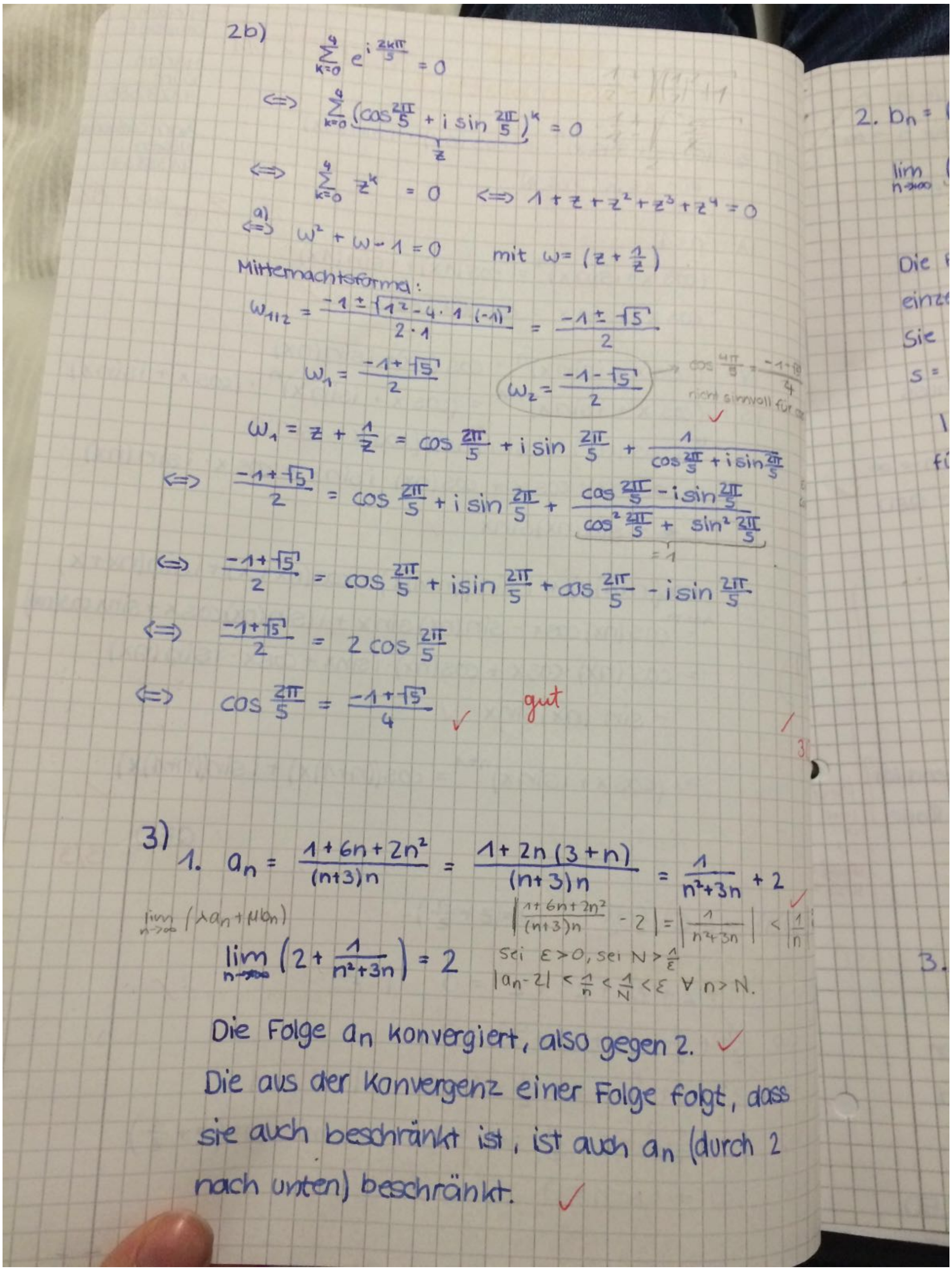
$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k - a|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2}$

$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \cdot (n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{2}$

$= \frac{\varepsilon}{2} + \left(1 - \frac{N_1}{n}\right) \cdot \ldots \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

Mathe-44.jpg



2b)

$$\sum_{k=0}^{4} e^{i\frac{2k\pi}{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4} \underbrace{\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)}_{z}^{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4} z^k = 0 \Leftrightarrow 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

$$\overset{a)}{\Leftrightarrow} w^2 + w - 1 = 0 \quad \text{mit } w = \left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Mitternachtsformel:

$$w_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$w_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad w_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ nicht sinnvoll für ✓

$$w_1 = z + \frac{1}{z} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} + \frac{\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}}{\underbrace{\cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{2\pi}{5}}_{=1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$ ✓ gut

3

3) 1. $a_n = \frac{1+6n+2n^2}{(n+3)n} = \frac{1+2n(3+n)}{(n+3)n} = \frac{1}{n^2+3n} + 2$ ✓

$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n^2+3n}\right) = 2$$

$\left|\frac{1+6n+2n^2}{(n+3)n} - 2\right| = \left|\frac{1}{n^2+3n}\right| < \left|\frac{1}{n}\right|$

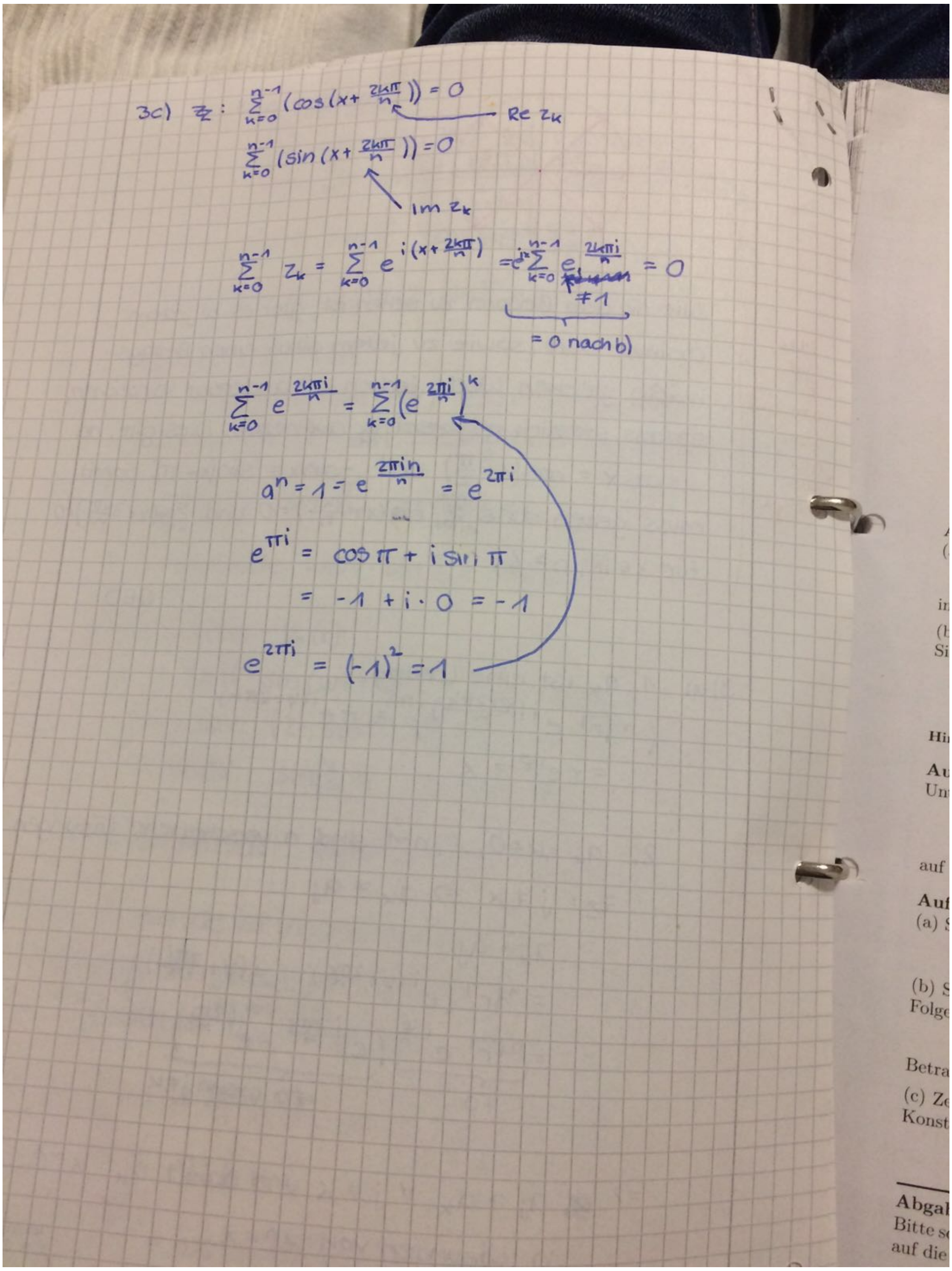
sei $\varepsilon > 0$, sei $N > \frac{1}{\varepsilon}$

$|a_n - 2| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \ \forall n > N.$

Die Folge a_n konvergiert, also gegen 2. ✓

Die aus der Konvergenz einer Folge folgt, dass sie auch beschränkt ist, ist auch a_n (durch 2 nach unten) beschränkt. ✓

Mathe-45.jpg



3c) z: $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)=0$ ← Re z_k

$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)=0$ ← Im z_k

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)} = \underbrace{e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{e^{\frac{2k\pi i}{n}}}_{\neq 1}}_{=0 \text{ nach b)}} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k$$

$$a^n = 1 = e^{\frac{2\pi i n}{n}} = e^{2\pi i}$$

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi$$
$$= -1 + i\cdot 0 = -1$$

$$e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$$

Mathe-46.jpg

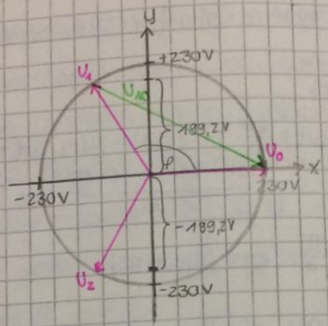
4)

$U_k(t) = 230V \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$, $\omega > 0$

a) $U_0(0) = 230V \cdot \sin(0) = 0V$

$U_2(0) = 230V \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -199{,}2V$

$U_1(0) = 230V \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 199{,}2V$



$\varphi = 120°$

$|\vec{U}_{10}| = 398{,}37V$

✓ sehr schön

b) z.z.: $\sin x - \sin y = 2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}$

$\sin x - \sin y = \sin\left(\frac{x+x+y-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+y+x-x}{2}\right)$

$= \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}\right)$

Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$= \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$

$- \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{y-x}{2} - \sin\frac{y-x}{2} \cos\frac{x+y}{2}$

$\cos x = \cos(-x)$

$= \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}$

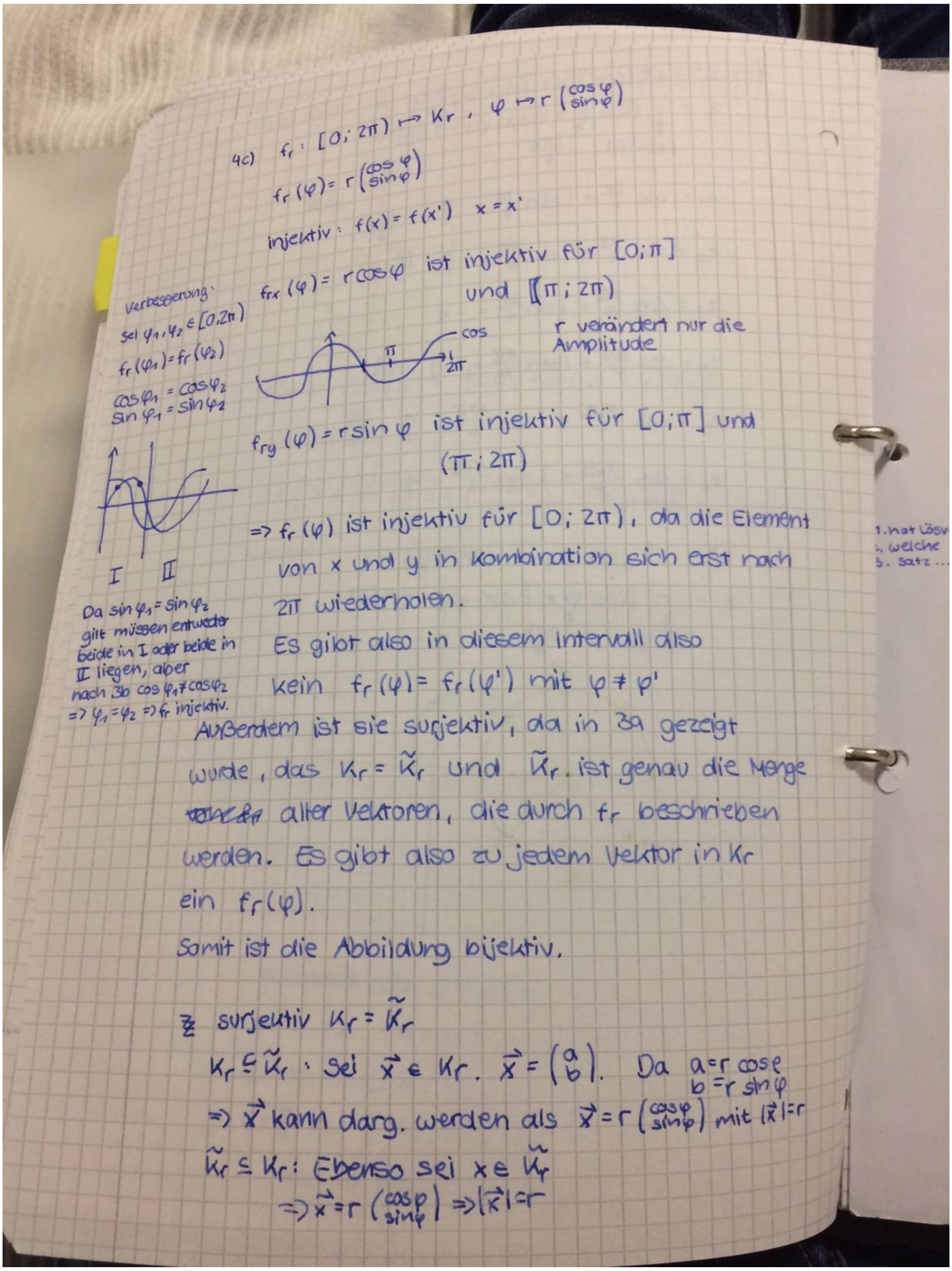
$\sin(-x) = -\sin$

$- \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}$

$= 2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}$ ✓

QED

Mathe-47.jpg



4c) $f_r : [0; 2\pi) \mapsto K_r$, $\varphi \mapsto r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

$f_r(\varphi) = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

injektiv: $f(x) = f(x')$ $x = x'$

$f_{rx}(\varphi) = r\cos\varphi$ ist injektiv für $[0;\pi]$ und $(\pi; 2\pi)$

r verändert nur die Amplitude

cos

π

2π

Verbesserung:
sei $\varphi_1, \varphi_2 \in [0,2\pi)$
$f_r(\varphi_1) = f_r(\varphi_2)$
$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$
$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$

I II

Da $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$ gilt müssen entweder beide in I oder beide in II liegen, aber nach 3b $\cos\varphi_1 \neq \cos\varphi_2$
$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow f_r$ injektiv.

$f_{ry}(\varphi) = r\sin\varphi$ ist injektiv für $[0;\pi]$ und $(\pi; 2\pi)$

$\Rightarrow f_r(\varphi)$ ist injektiv für $[0; 2\pi)$, da die Element von x und y in Kombination sich erst nach 2π wiederholen.

Es gibt also in diesem Intervall also kein $f_r(\varphi) = f_r(\varphi')$ mit $\varphi \neq \varphi'$

Außerdem ist sie surjektiv, da in 3a gezeigt wurde, das $K_r = \tilde{K}_r$ und $\tilde{K}_r$ ist genau die Menge ~~von der~~ aller Vektoren, die durch f_r beschrieben werden. Es gibt also zu jedem Vektor in K_r ein $f_r(\varphi)$.

Somit ist die Abbildung bijektiv.

z.z. surjektiv $K_r = \tilde{K}_r$

$K_r \subseteq \tilde{K}_r$: sei $\vec{x} \in K_r$. $\vec{x} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. Da $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

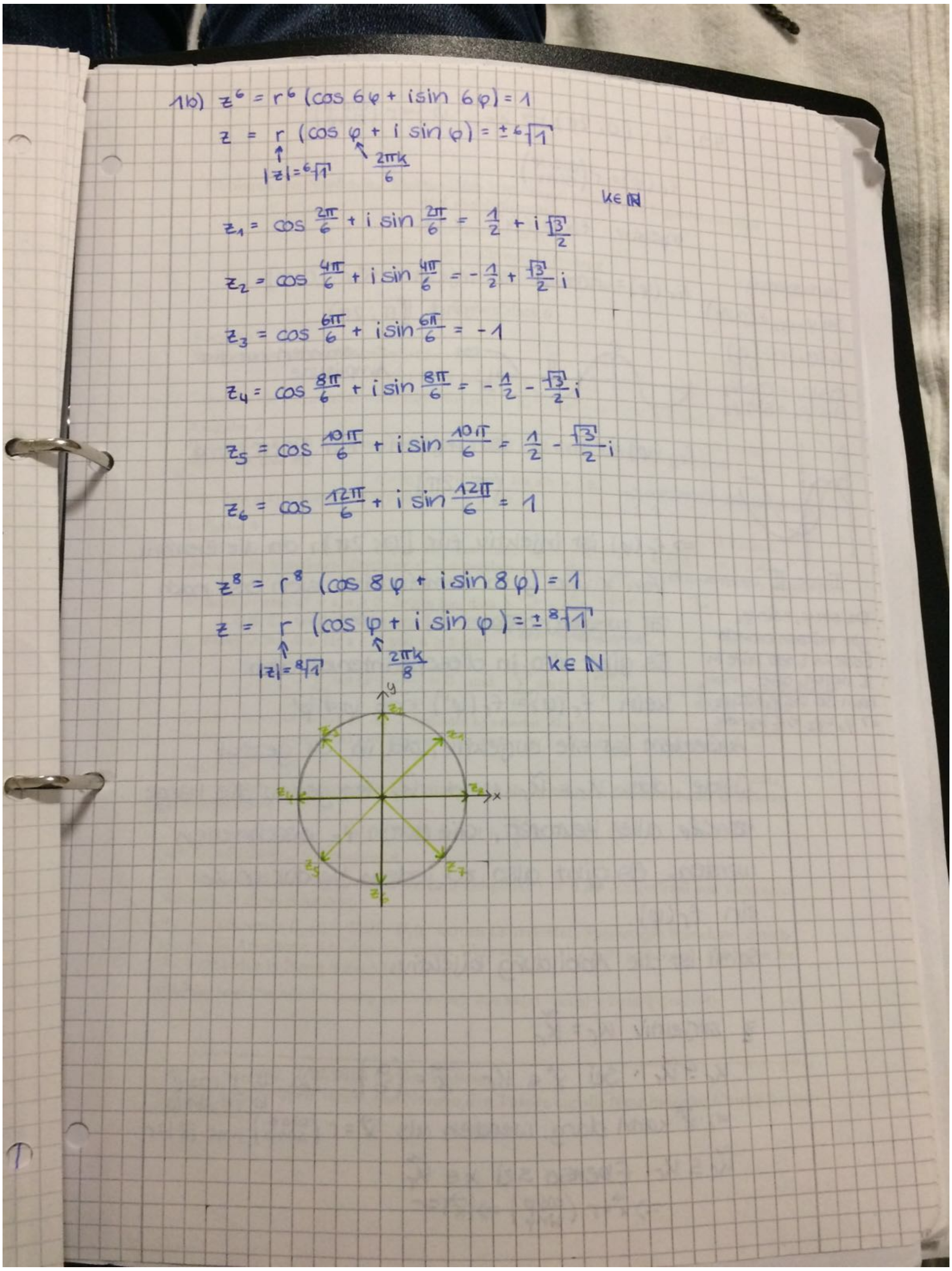
$\Rightarrow \vec{x}$ kann darg. werden als $\vec{x} = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ mit $|\vec{x}| = r$

$\tilde{K}_r \subseteq K_r$: Ebenso sei $x \in \tilde{K}_r$

$\Rightarrow \vec{x} = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{x}| = r$

1. hat Lösu... 2. welche 3. Satz ...

Mathe-48.jpg



1b) $z^6 = r^6 (\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = 1$

$z = \underset{\substack{\uparrow \\ |z| = \sqrt[6]{1}}}{r} (\cos \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{2\pi k}{6}}}{\varphi} + i \sin \varphi) = \pm \sqrt[6]{1}$

$k \in \mathbb{N}$

$z_1 = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_3 = \cos \frac{6\pi}{6} + i \sin \frac{6\pi}{6} = -1$

$z_4 = \cos \frac{8\pi}{6} + i \sin \frac{8\pi}{6} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_5 = \cos \frac{10\pi}{6} + i \sin \frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_6 = \cos \frac{12\pi}{6} + i \sin \frac{12\pi}{6} = 1$

$z^8 = r^8 (\cos 8\varphi + i \sin 8\varphi) = 1$

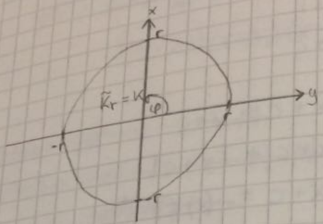
$z = \underset{\substack{\uparrow \\ |z| = \sqrt[8]{1}}}{r} (\cos \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{2\pi k}{8}}}{\varphi} + i \sin \varphi) = \pm \sqrt[8]{1}$

$k \in \mathbb{N}$

Mathe-49.jpg

4) a) $r > 0$: $\tilde{K}_r = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0, 2\varphi)\}$

$K_r = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{x}| = r\}$

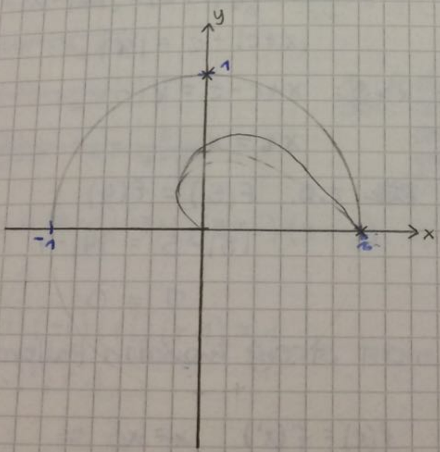


$|\vec{x}| = \left| r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right| = r \cdot \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = r \cdot 1 = r$

$\Rightarrow \tilde{K}_r \Leftrightarrow K_r$

b) $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, 0 \leq \varphi \leq \pi, 1 - \frac{\varphi}{\pi} \leq r \leq 1\}$

$\cancel{r = 1 \quad 1 - \frac{\varphi}{\varphi} = 1}$



Halbkreis, da $0 \leq \varphi \leq \pi$

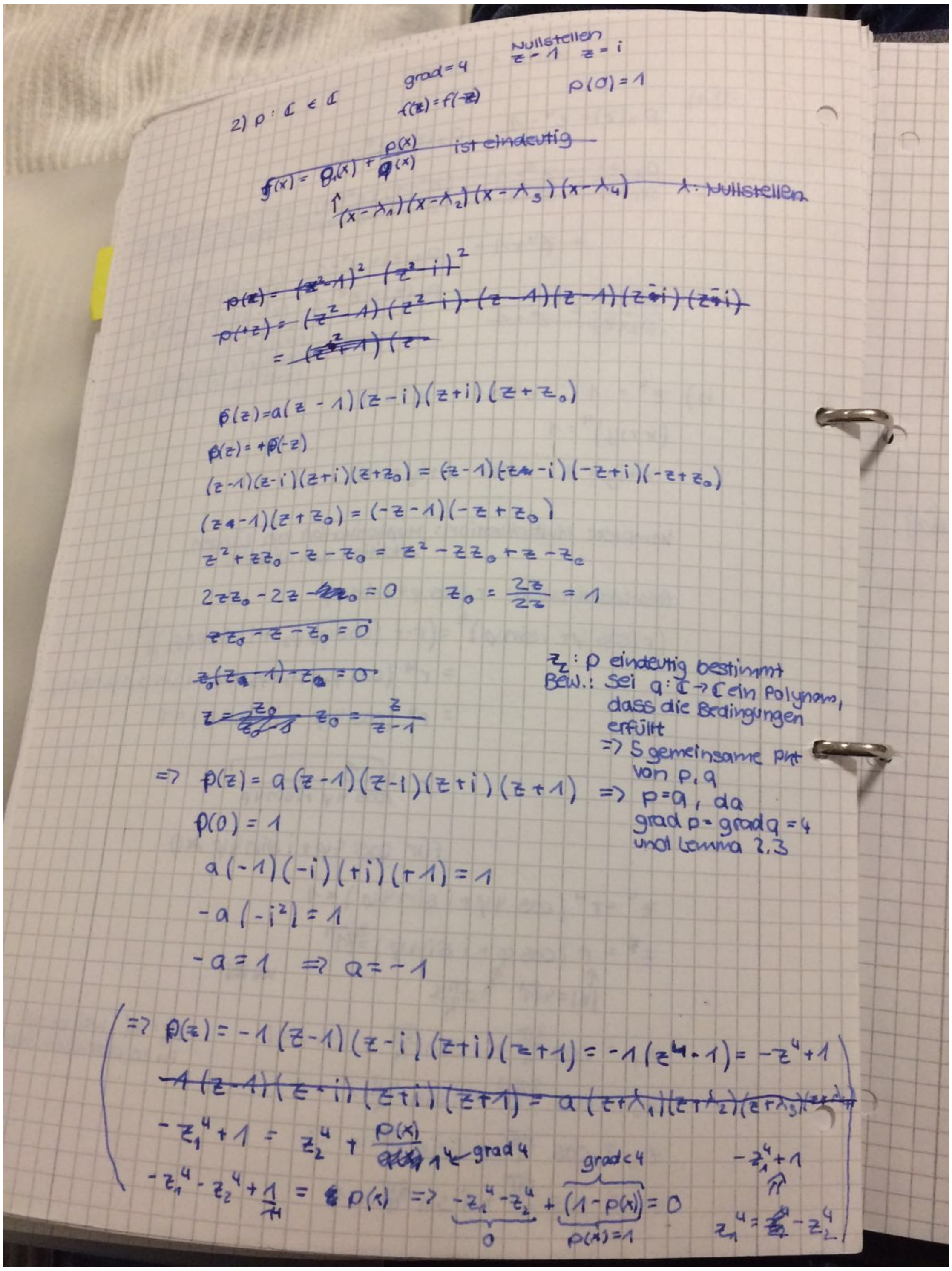
$\varphi = 0 \Rightarrow 1 \leq r \leq 1$

$\varphi = \pi \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq r \leq 1$

... nimmt linear zu von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$.

Mathe-50.jpg



Nullstellen $z=1 \quad z=i$

grad = 4

2) $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = f(-z)$ $\quad p(0) = 1$

~~$f(x) = g_1(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$ ist eindeutig~~

~~$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)$ λ: Nullstellen~~

~~$p(z) = (z^2-1)^2 (z^2-i)^2$~~

~~$p(z) = (z^2-1)(z^2-i)(z-1)(z-1)(z-i)(z-i)$~~

~~$= (z^2+1)(z-$~~

$p(z) = a(z-1)(z-i)(z+i)(z+z_0)$

$p(z) = p(-z)$

$(z-1)(z-i)(z+i)(z+z_0) = (-z-1)(-z-i)(-z+i)(-z+z_0)$

$(z-1)(z+z_0) = (-z-1)(-z+z_0)$

$z^2 + zz_0 - z - z_0 = z^2 - zz_0 + z - z_0$

$2zz_0 - 2z = 0 \qquad z_0 = \frac{2z}{2z} = 1$

~~$zz_0 - z - z_0 = 0$~~

~~$z_0(z-1) - z_0 = 0$~~

~~$z = \frac{z_0}{z_0-1}$~~ $z_0 = \frac{z}{z-1}$

z_2: p eindeutig bestimmt

Bew.: Sei $q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom, dass die Bedingungen erfüllt

$\Rightarrow$ 5 gemeinsame Pkt von p, q

$\Rightarrow p(z) = a(z-1)(z-i)(z+i)(z+1)$ $\Rightarrow$ $p = q$, da grad p = grad $q = 4$ und Lemma 2.3

$p(0) = 1$

$a(-1)(-i)(+i)(+1) = 1$

$-a(-i^2) = 1$

$-a = 1 \Rightarrow a = -1$

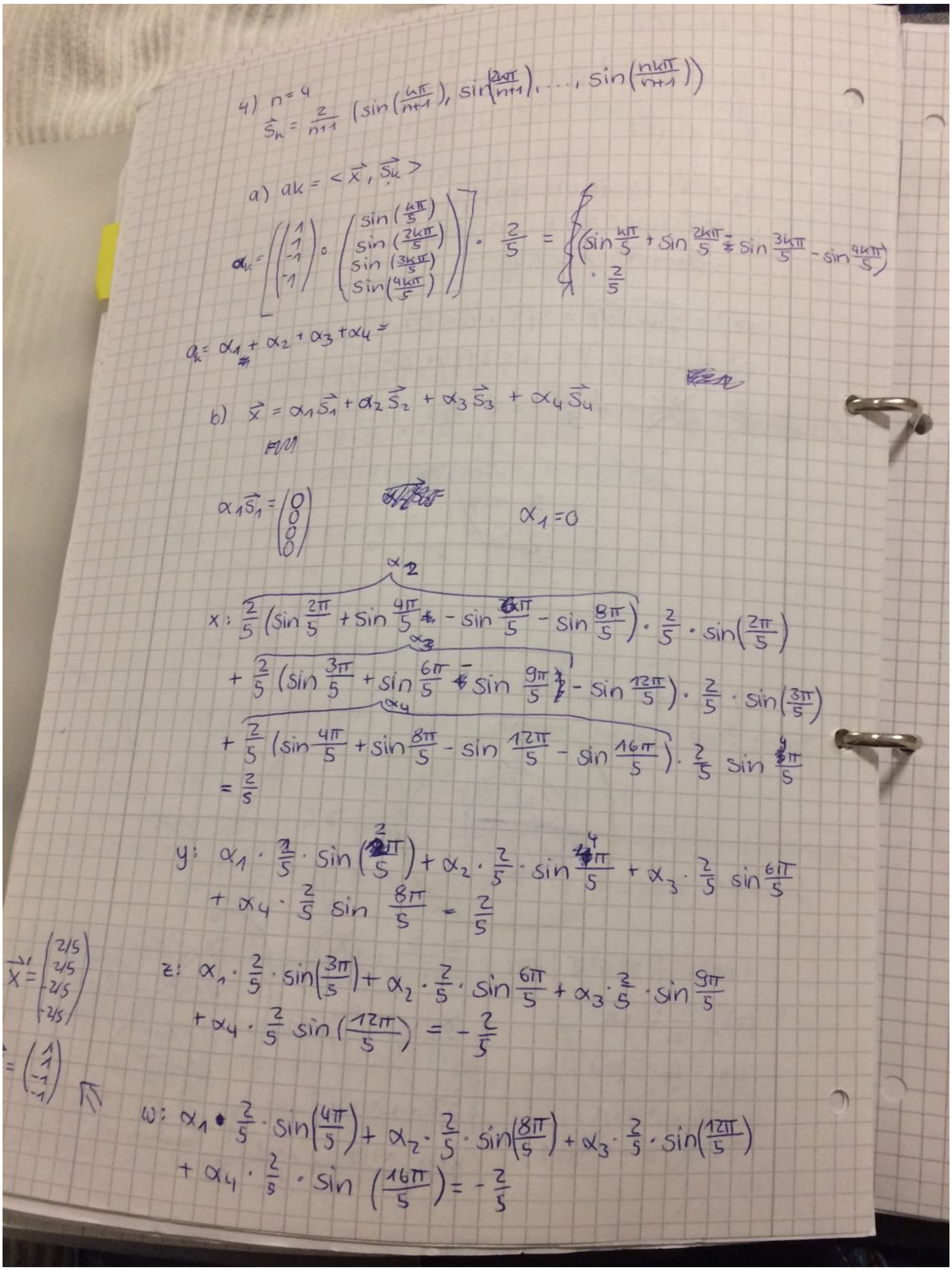
$\Rightarrow p(z) = -1(z-1)(z-i)(z+i)(z+1) = -1(z^4-1) = -z^4+1$

~~$-1(z-1)(z-i)(z+i)(z+1) = a(z+\lambda_1)(z+\lambda_2)(z+\lambda_3)(z+\lambda_4)$~~

$-z_1^4 + 1 = z_2^4 + \frac{p(x)}{1^4}$ grad 4

$-z_1^4 - z_2^4 + \frac{1}{1} = p(x) \Rightarrow \underbrace{-z_1^4 - z_2^4}_{0} + \overbrace{\underbrace{(1-p(x))}_{p(x)=1}}^{\text{grad}<4} = 0$ $\qquad -z_1^4+1 \Uparrow z_1^4 = z_2^4 - z_2^4$

Mathe-51.jpg



4) $n=4$

$\vec{s}_k = \frac{2}{n+1}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right)\right)$

a) $a_k = \langle \vec{x}, \vec{s}_k \rangle$

$$\alpha_k = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}\sin(\frac{k\pi}{5})\\ \sin(\frac{2k\pi}{5})\\ \sin(\frac{3k\pi}{5})\\ \sin(\frac{4k\pi}{5})\end{pmatrix}\right] \cdot \frac{2}{5} = \left(\sin\frac{k\pi}{5} + \sin\frac{2k\pi}{5} - \sin\frac{3k\pi}{5} - \sin\frac{4k\pi}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}$$

$a_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 =$

b) $\vec{x} = \alpha_1\vec{s}_1 + \alpha_2\vec{s}_2 + \alpha_3\vec{s}_3 + \alpha_4\vec{s}_4$

$\alpha_1\vec{s}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_1 = 0$

$$x: \overbrace{\frac{2}{5}\left(\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{6\pi}{5} - \sin\frac{8\pi}{5}\right)}^{\alpha_2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$+ \overbrace{\frac{2}{5}\left(\sin\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} - \sin\frac{9\pi}{5} - \sin\frac{12\pi}{5}\right)}^{\alpha_3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$+ \overbrace{\frac{2}{5}\left(\sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} - \sin\frac{12\pi}{5} - \sin\frac{16\pi}{5}\right)}^{\alpha_4}\cdot\frac{2}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$= \frac{2}{5}$$

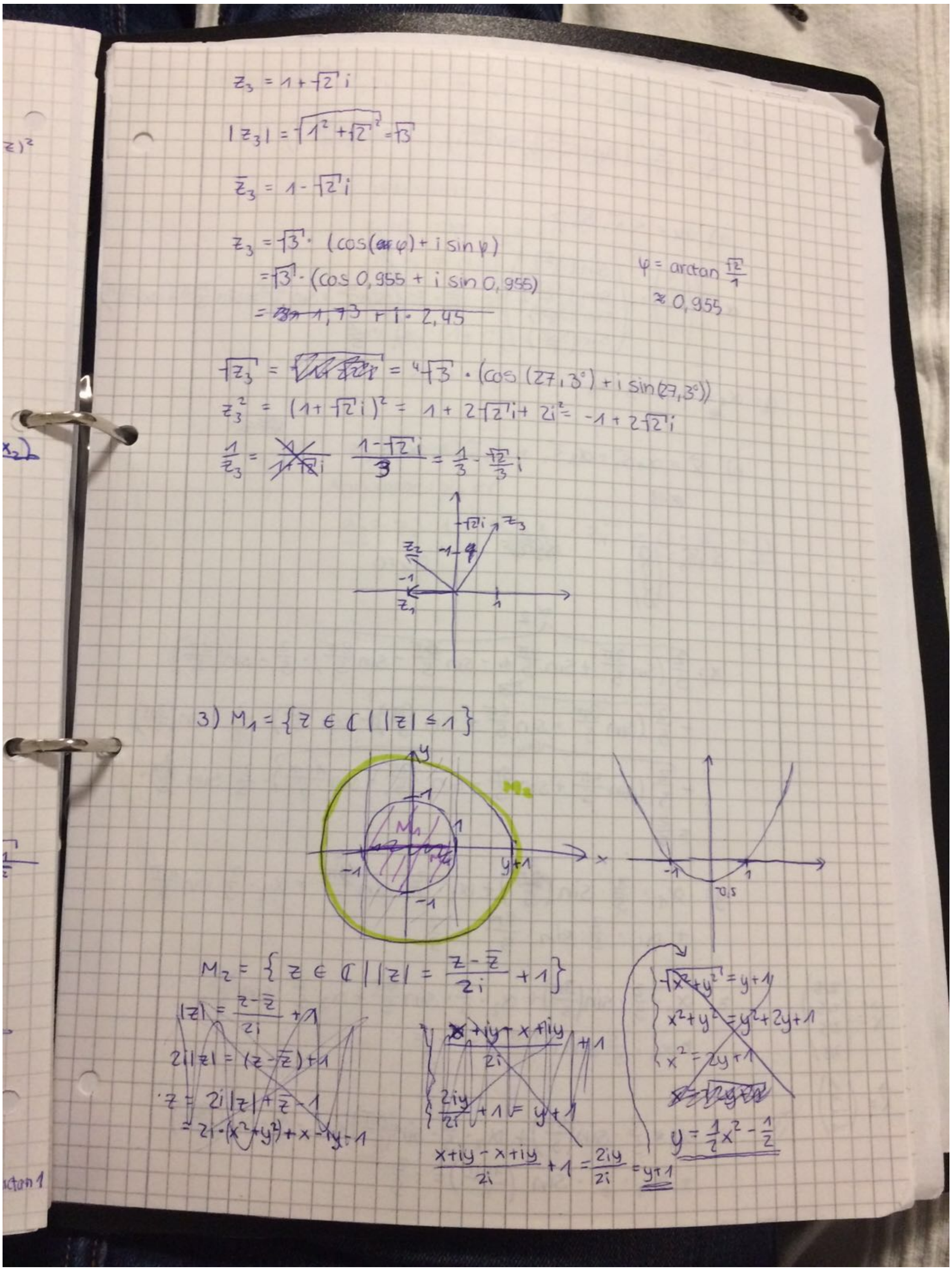
$$y: \alpha_1\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \alpha_2\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\frac{4\pi}{5} + \alpha_3\cdot\frac{2}{5}\sin\frac{6\pi}{5} + \alpha_4\cdot\frac{2}{5}\sin\frac{8\pi}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2/5\\2/5\\-2/5\\-2/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$z: \alpha_1\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \alpha_2\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\frac{6\pi}{5} + \alpha_3\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\frac{9\pi}{5} + \alpha_4\cdot\frac{2}{5}\sin\left(\frac{12\pi}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$w: \alpha_1\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \alpha_2\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) + \alpha_3\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\left(\frac{12\pi}{5}\right) + \alpha_4\cdot\frac{2}{5}\cdot\sin\left(\frac{16\pi}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

Mathe-52.jpg



$z_3 = 1 + \sqrt{2}\,i$

$|z_3| = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{3}$

$\bar{z}_3 = 1 - \sqrt{2}\,i$

$z_3 = \sqrt{3} \cdot (\cos(\varphi) + i \sin\varphi)$

$= \sqrt{3} \cdot (\cos 0{,}955 + i \sin 0{,}955)$

$\cancel{= 1{,}73 + i \cdot 2{,}45}$

$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{2}}{1} \approx 0{,}955$

$\sqrt{z_3} = \sqrt[4]{3} \cdot (\cos(27{,}3°) + i \sin(27{,}3°))$

$z_3^2 = (1 + \sqrt{2}\,i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}\,i + 2i^2 = -1 + 2\sqrt{2}\,i$

$\frac{1}{z_3} = \cancel{\frac{1}{1+\sqrt{2}\,i}}\ \frac{1-\sqrt{2}\,i}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\,i$

3) $M_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$

$M_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 1 \}$

$\frac{x + iy - x + iy}{2i} + 1 = \frac{2iy}{2i} = y + 1$

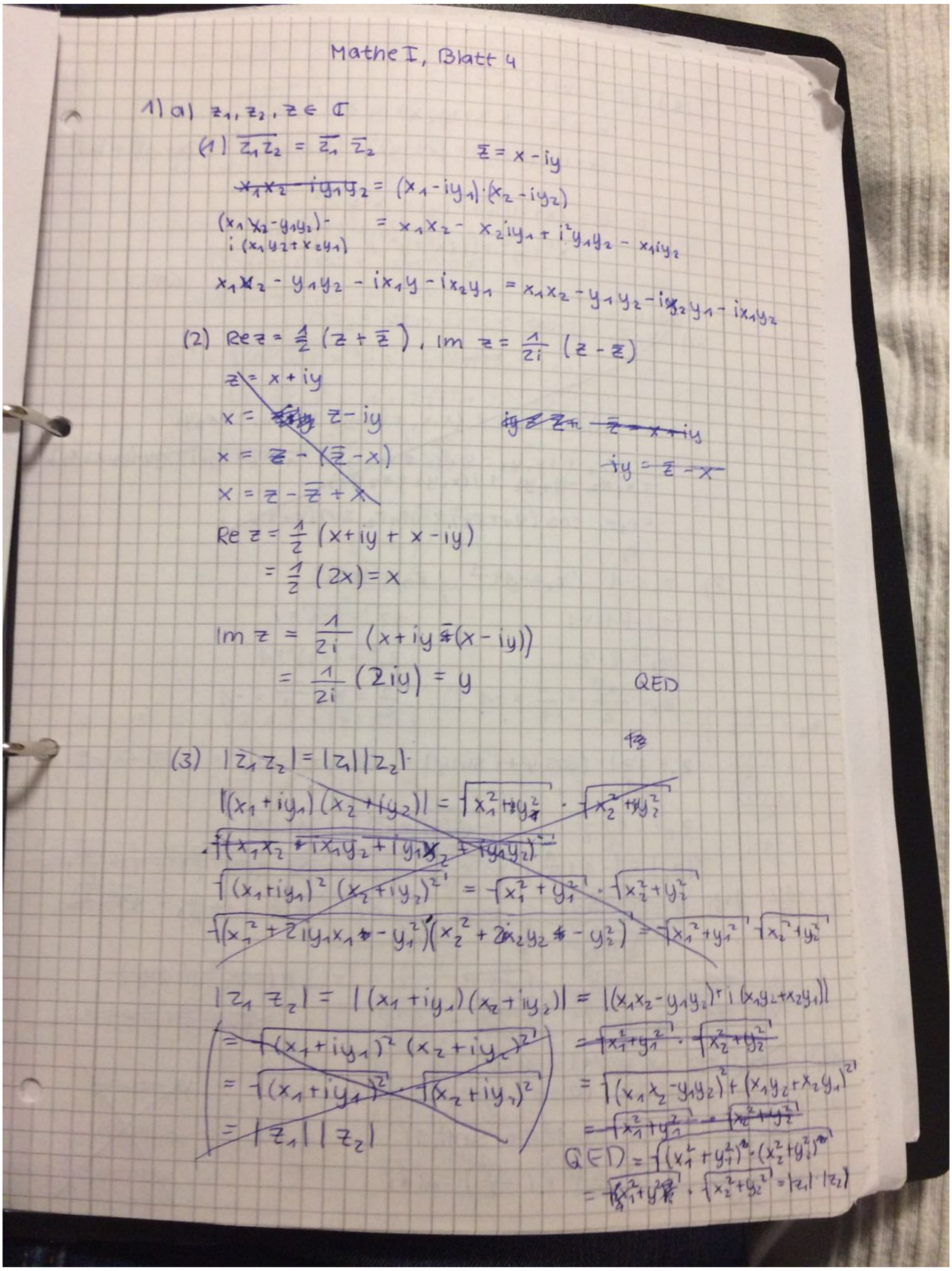
$\sqrt{x^2 + y^2} = y + 1$

$x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1$

$x^2 = 2y + 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

Mathe-53.jpg



Mathe I, Blatt 4

1) a) $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$

(1) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ $\qquad \overline{z} = x - iy$

$\cancel{x_1x_2 - iy_1y_2} = (x_1 - iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)$

$(x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = x_1x_2 - x_2iy_1 + i^2y_1y_2 - x_1iy_2$

$x_1x_2 - y_1y_2 - ix_1y - ix_2y_1 = x_1x_2 - y_1y_2 - ix_2y_1 - ix_1y_2$

(2) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$z = x + iy$

$x = z - iy$

$x = z - (\overline{z} - x)$

$x = z - \overline{z} + x$

$\cancel{iy = \overline{z} - x + iy}$

$\cancel{-iy = \overline{z} - x}$

$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy)$

$= \frac{1}{2}(2x) = x$

$\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy))$

$= \frac{1}{2i}(2iy) = y$ QED

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$|(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$\cancel{\sqrt{(x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + iy_1y_2)}}$

$\sqrt{(x_1 + iy_1)^2 (x_2 + iy_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$\sqrt{(x_1^2 + 2iy_1x_1 - y_1^2)(x_2^2 + 2ix_2y_2 - y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$|z_1 z_2| = |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)|$

$= \sqrt{(x_1 + iy_1)^2 (x_2 + iy_2)^2}$

$= \sqrt{(x_1 + iy_1)^2} \cdot \sqrt{(x_2 + iy_2)^2}$

$= |z_1||z_2|$

$\cancel{= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

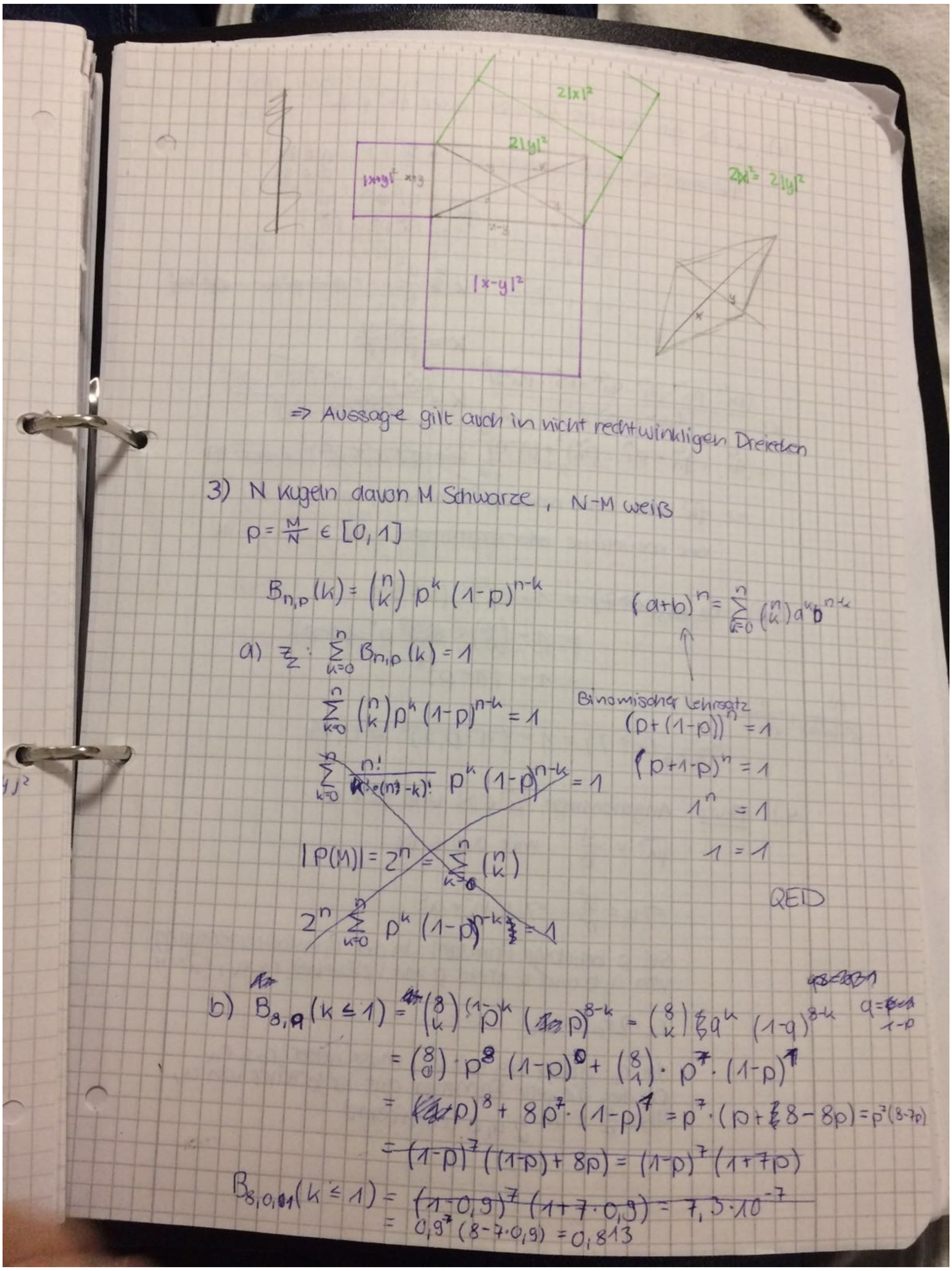
$= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$

$\cancel{= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

QED $= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2)}$

$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1| \cdot |z_2|$

Mathe-54.jpg



⇒ Aussage gilt auch in nicht rechtwinkligen Dreiecken

3) N Kugeln davon M Schwarze, N−M weiß

$p = \frac{M}{N} \in [0,1]$

$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

a) z.z.: $\sum_{k=0}^{n} B_{n,p}(k) = 1$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$

Binomischer Lehrsatz

$(p+(1-p))^n = 1$

$(p+1-p)^n = 1$

$1^n = 1$

$1 = 1$

QED

$\cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = 1}$

$\cancel{|P(M)| = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$

$\cancel{2^n \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} = 1}$

b) $B_{8,q}(k \le 1) = \binom{8}{k} p^k (1-p)^{8-k} = \binom{8}{k} q^k (1-q)^{8-k}$ $\quad q = 1-p$

$= \binom{8}{0} \cdot p^8 (1-p)^0 + \binom{8}{1} \cdot p^7 \cdot (1-p)^1$

$= (p)^8 + 8p^7 \cdot (1-p)^1 = p^7 \cdot (p + 8 - 8p) = p^7(8-7p)$

$\cancel{= (1-p)^7((1-p)+8p) = (1-p)^7(1+7p)}$

$B_{8,0{,}1}(k \le 1) = \cancel{(1-0{,}9)^7 (1+7 \cdot 0{,}9) = 7{,}3 \cdot 10^{-7}}$

$= 0{,}9^7 (8 - 7 \cdot 0{,}9) = 0{,}813$

Mathe-55.jpg

<u>für $q < 0$:</u>

$q^k < 1 + s - \frac{s}{q}$

$\Leftrightarrow \frac{q^k - 1}{1 - \frac{1}{q}} > s$

es gilt: $1 - \frac{1}{q} > 1$

<u>für $q \in (-1; 0)$:</u>

$\lim_{k\to\infty} q^k - 1 = -1$

$\Rightarrow$ es gibt ein $s \in \mathbb{R}$ für das gilt:

$\frac{q^k - 1}{1 - \frac{1}{q}} > s$

<u>für $q < -1$:</u>

$\lim_{k\to\infty} q^k - 1 = \pm\infty$

$\Rightarrow$ es gibt kein $s \in \mathbb{R}$ für das gilt:

$\frac{q^k - 1}{1 - \frac{1}{q}} > s$

$\Rightarrow$ für $|q| < 1$ gibt es eine Schranke ✓ QED

$\boxed{„\Leftarrow"}$ $|q| < 1$

Annahme: M hat eine Schranke s

$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} (1-q^{n+1})$

$= \frac{1}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}\right) = \frac{1}{1-q}(1-0) = \frac{1}{1-q}$ ✓

QED 2,5/3

Mathe-56.jpg

Blatt I

1)· $M_1 = \{\cos(n\pi) - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Annahme: $S_{M_1} = 1$

Beweis S_{M_1} ist obere Schranke:

$$(-1)^n - \frac{1}{n} \le S_{M_1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(-1)^n - \frac{1}{n} \le 1$$

$$n \cdot (-1)^n - 1 \le n$$

$$n(-1)^n \le n+1$$

- n ist gerade: $n \cdot 1 \le n+1$

  $n \le n+1$ (wahr)

- n ist ungerade: $n \cdot (-1) \le n+1$

  $-n \le n+1$ (wahr)

kleinste obere Schranke:

$$(-1)^n - \frac{1}{n} > \underbrace{1-t}_{\text{angenommene Schranke}} \quad t \in \mathbb{R} \quad t > 0$$

$$(-1) - 1 + t > \frac{1}{n}$$

$$(1-1) + t > \frac{1}{n}$$

wähle: n: gerade

$$t > \frac{1}{n}$$

$$\underbrace{n > \frac{1}{t}}_{\text{es gibt ein n, das größere als jede kleinere Schranke ist}}$$

kein Maximum:

Annahme: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\cos(n\pi) - \frac{1}{n} \ne S_{M_1}$

- n gerade: $\cos(n\pi) = 1$

  $1 - \frac{1}{n} \ne 1$

  $-\frac{1}{n} \ne 0$

  $-1 \ne 0$

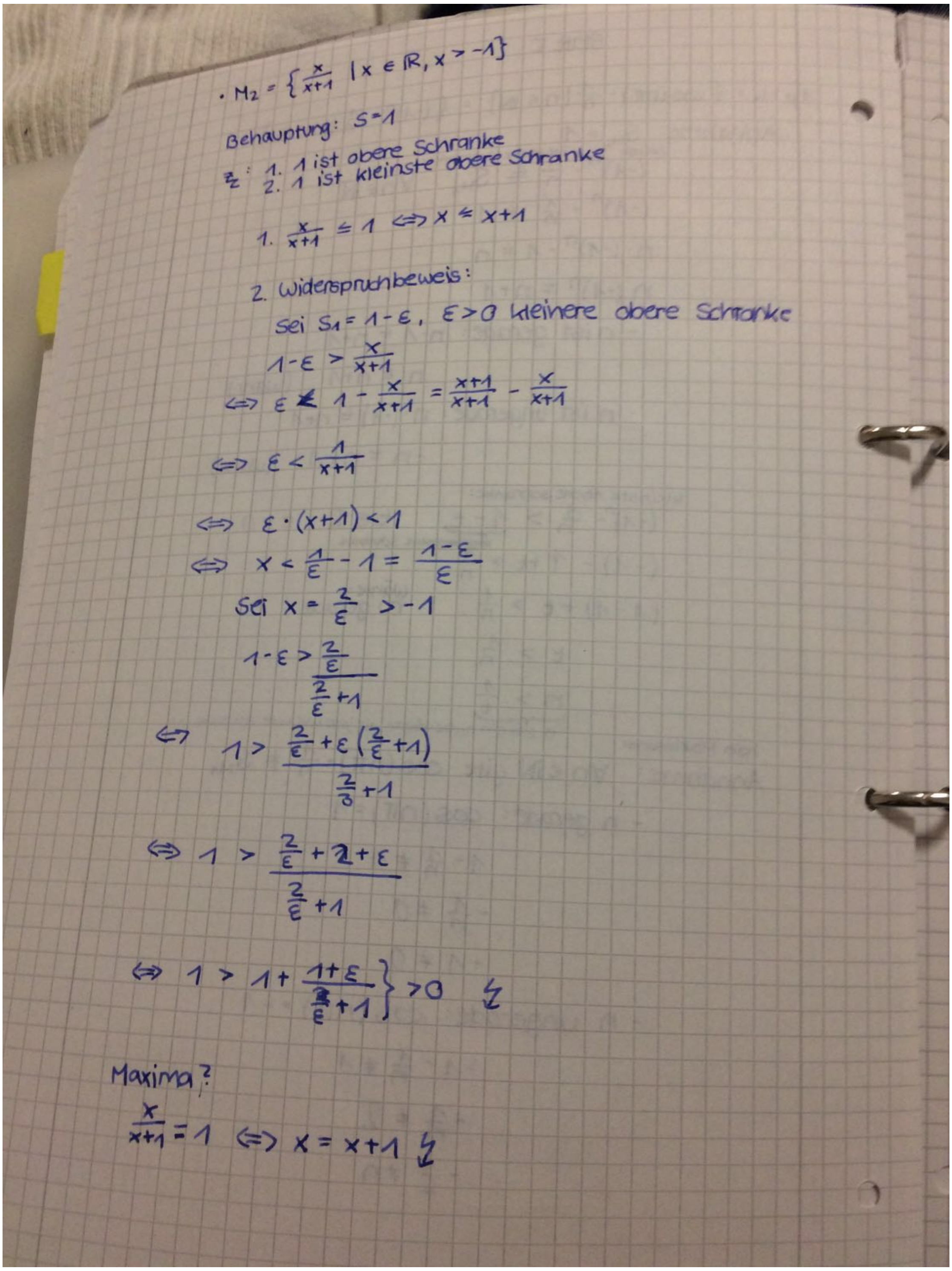
- n ungerade: $\cos(n\pi) = -1$

  $-1 - \frac{1}{n} \ne 1$

  $-\frac{1}{n} \ne 2$

  $-\frac{1}{2} \ne n$

Mathe-57.jpg



• $M_2 = \left\{ \frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{R}, x > -1 \right\}$

Behauptung: $S = 1$

z.z.: 1. 1 ist obere Schranke
2. 1 ist kleinste obere Schranke

1. $\frac{x}{x+1} \le 1 \Leftrightarrow x \le x+1$

2. Widerspruchbeweis:

Sei $S_1 = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ kleinere obere Schranke

$$1 - \varepsilon > \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon < 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon < \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot (x+1) < 1$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Sei $x = \frac{2}{\varepsilon} > -1$

$$1 - \varepsilon > \frac{\frac{2}{\varepsilon}}{\frac{2}{\varepsilon}+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\frac{2}{\varepsilon} + \varepsilon\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)}{\frac{2}{\varepsilon}+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\frac{2}{\varepsilon} + 2 + \varepsilon}{\frac{2}{\varepsilon}+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 > 1 + \underbrace{\frac{1+\varepsilon}{\frac{2}{\varepsilon}+1}}_{>0} \quad ↯$$

Maxima?

$$\frac{x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = x+1 \quad ↯$$

Mathe-58.jpg

Blatt I

1). $M_1 = \{\cos(n\pi) - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Annahme: $S_{M_1} = 1$

Beweis S_{M_1} ist obere Schranke:

$$(-1)^n - \frac{1}{n} \leq S_{M_1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$(-1)^n - \frac{1}{n} \leq 1$$
$$n \cdot (-1)^n - 1 \leq n$$
$$n(-1)^n \leq n+1$$

- n ist gerade: $n \cdot 1 \leq n+1$
  $n \leq n+1$ (wahr)
- n ist ungerade: $n \cdot (-1) \leq n+1$
  $-n \leq n+1$ (wahr)

kleinste obere Schranke:

$$(-1)^n - \frac{1}{n} > \underbrace{1-t}_{\text{angenommene Schranke}} \qquad t \in \mathbb{R} \quad t > 0$$
$$(-1) - 1 + t > \frac{1}{n}$$
$$(1-1) + t > \frac{1}{n} \qquad \text{Wähle: } n \text{: gerade}$$
$$t > \frac{1}{n}$$
$$\underbrace{n > \frac{1}{t}}_{\text{es gibt ein } n \text{, das größere als jede kleinere Schranke ist}}$$

kein Maximum:

Annahme: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\cos(n\pi) - \frac{1}{n} \neq S_{M_1}$

- n gerade: $\cos(n\pi) = 1$
  $$1 - \frac{1}{n} \neq 1$$
  $$-\frac{1}{n} \neq 0$$
  $$-1 \neq 0$$
- n ungerade: $\cos(n\pi) = -1$
  $$-1 - \frac{1}{n} \neq 1$$
  $$-\frac{1}{n} \neq 2$$
  $$-\frac{1}{2} \neq n$$

Mathe-59.jpg

b) Annahme: $\exists\, s$ mit $s \leq \frac{x}{x+1}$

Sei $x = \frac{1}{n} - 1$

$$\frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} + 1 - 1} = n\left(\frac{1}{n} - 1\right) = 1 - n$$

$s \leq 1 - n$ ↯

$$\frac{x}{x+1} = n$$
$$x = n(x+1)$$
$$x = nx + n$$
$$x - nx = n$$
$$x(1-n) = n$$
$$x = \frac{n}{1-n}$$

Wähle ein $x > \frac{n}{1-n}$

2) a) ~~Z: $a \cdot 0 = 0$~~

~~Es~~ unsere Lösung ist richtig

b) $-(ab) = (-a)b$

$$\begin{aligned}
-(a) \cdot b &= (-a)b + 0 \\
&= (-a)b + (ab + (-ab)) \\
&= ((-a + a)b) + (-(ab)) \\
&= 0b + (-(ab)) \\
&= 0 + (-(ab)) \\
&= -(ab)
\end{aligned}$$

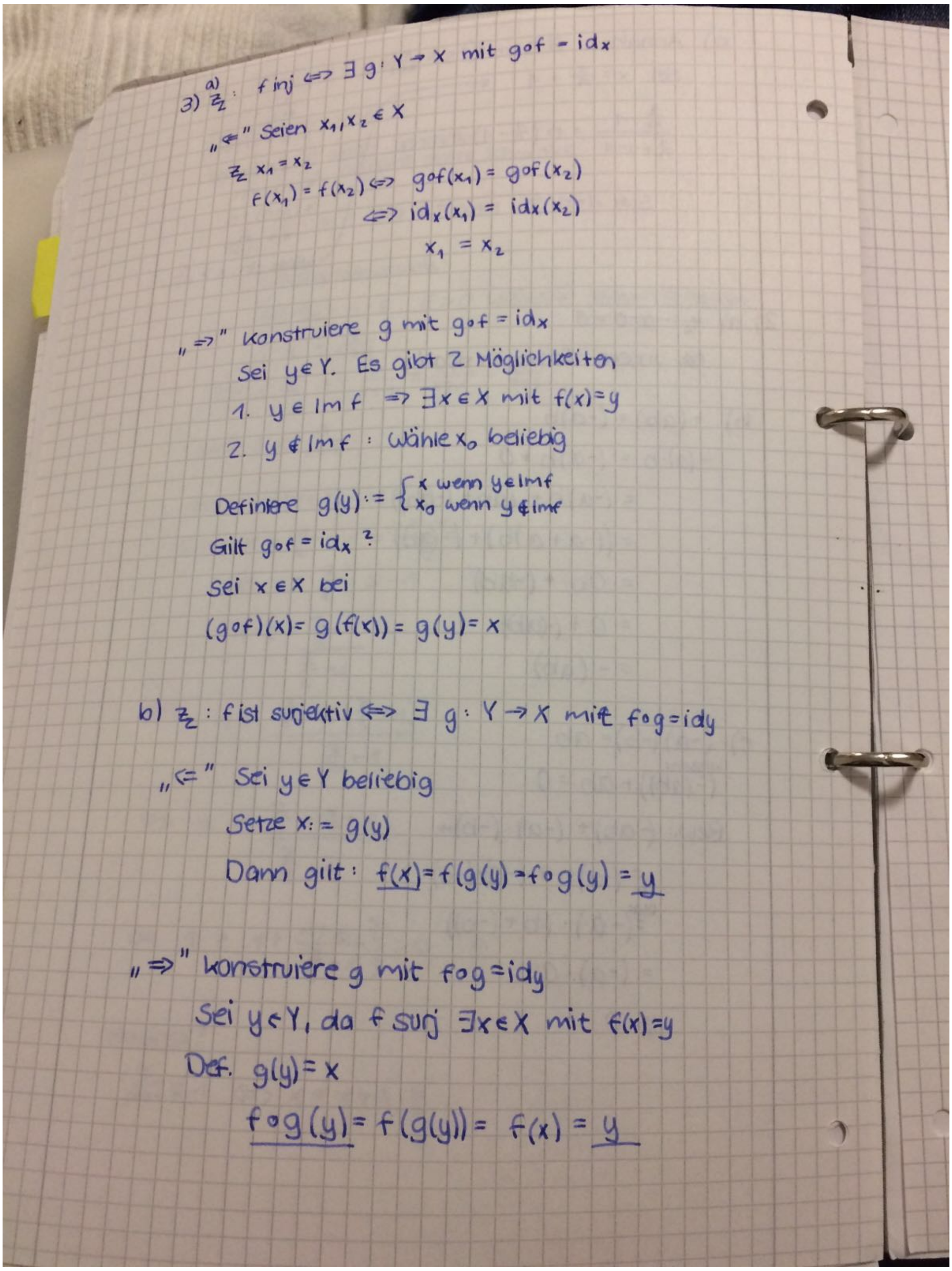
c) $(-a)(-b) = ab$

wissen: $(-(ab)) + ab = 0$

Bew.: $(-ab) + (-a) \cdot (-b)$

$$\begin{aligned}
&\overset{b)}{=} (-a)b + (-a) \cdot (-b) \\
&\overset{\text{Distr.}}{=} (-a) \cdot (b + (-b)) \\
&= (-a) \cdot 0 \\
&\overset{a)}{=} 0
\end{aligned}$$

Mathe-60.jpg



3) a) z.z.: f inj $\Leftrightarrow \exists\, g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$

„$\Leftarrow$" Seien $x_1, x_2 \in X$

z.z. $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow g\circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

$\Leftrightarrow id_X(x_1) = id_X(x_2)$

$x_1 = x_2$

„$\Rightarrow$" Konstruiere g mit $g \circ f = id_X$

Sei $y \in Y$. Es gibt 2 Möglichkeiten

1. $y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists x \in X$ mit $f(x) = y$
2. $y \notin \operatorname{Im} f$: Wähle x_0 beliebig

Definiere $g(y) := \begin{cases} x & \text{wenn } y \in \operatorname{Im} f \\ x_0 & \text{wenn } y \notin \operatorname{Im} f \end{cases}$

Gilt $g \circ f = id_X$?

Sei $x \in X$ bel

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$

b) z.z.: f ist surjektiv $\Leftrightarrow \exists\, g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$

„$\Leftarrow$" Sei $y \in Y$ beliebig

Setze $x := g(y)$

Dann gilt: $\underline{f(x)} = f(g(y)) = f \circ g(y) = \underline{y}$

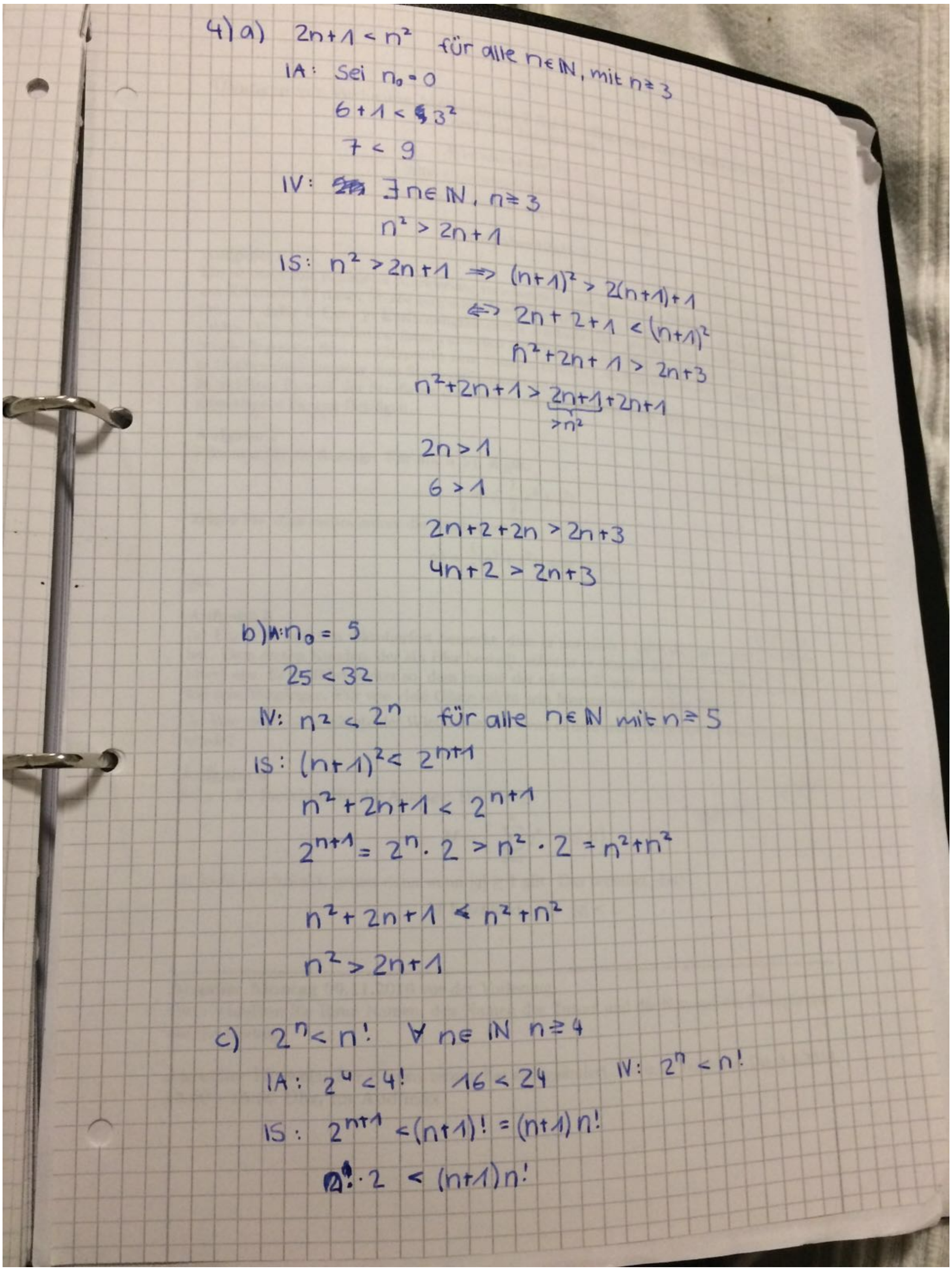
„$\Rightarrow$" Konstruiere g mit $f \circ g = id_Y$

Sei $y \in Y$, da f surj $\exists x \in X$ mit $f(x) = y$

Def. $g(y) = x$

$\underline{f \circ g(y)} = f(g(y)) = f(x) = \underline{y}$

Mathe-61.jpg



4) a) $2n+1 < n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 3$

IA: Sei $n_0 = 0$

$6+1 < 3^2$

$7 < 9$

IV: $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$

$n^2 > 2n+1$

IS: $n^2 > 2n+1 \Rightarrow (n+1)^2 > 2(n+1)+1$

$\Leftrightarrow 2n+2+1 < (n+1)^2$

$n^2+2n+1 > 2n+3$

$n^2+2n+1 > \underbrace{2n+1}_{>n^2}+2n+1$

$2n > 1$

$6 > 1$

$2n+2+2n > 2n+3$

$4n+2 > 2n+3$

b) IA: $n_0 = 5$

$25 < 32$

IV: $n^2 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$

IS: $(n+1)^2 < 2^{n+1}$

$n^2+2n+1 < 2^{n+1}$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n^2 \cdot 2 = n^2+n^2$

$n^2+2n+1 < n^2+n^2$

$n^2 > 2n+1$

c) $2^n < n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 4$

IA: $2^4 < 4!$ $16 < 24$

IV: $2^n < n!$

IS: $2^{n+1} < (n+1)! = (n+1)\,n!$

$n! \cdot 2 < (n+1)\,n!$

Mathe-62.jpg

Aufgabenblatt 2
Mathematik I

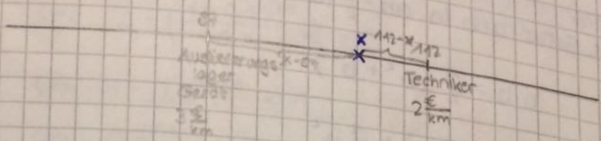
1	2	3	4	Σ
3	2,5	3	2,5	11

Miriam
Gruppe 6

Ann-Catherine Nölken
4138834

Marion Dürr
4128385

1)



$p = |x-87| \cdot 3 + |112-x| \cdot 2 \leq 100$

für $87 \leq x \leq 112$: $|x-87| = x-87$ und $|112-x| = 112-x$

$3x - 261 + 224 - 2x \leq 100$

$\Leftrightarrow x - 37 \leq 100$

$\Leftrightarrow x \leq 137$ ✓

$\Rightarrow$ gilt für $x \in [87; 112]$

für $x < 87$: $|x-87| = 87-x$ und $|112-x| = 112-x$

$261 - 3x + 224 - 2x \leq 100$

$\Leftrightarrow 485 - 5x \leq 100$

$\Leftrightarrow -5x \leq -385$

$\Leftrightarrow x \geq 77$ ✓

für $x > 112$: $|112-x| = x-112$ und $|x-87| = x-87$

$3x - 261 + 2x - 224 \leq 100$

$\Leftrightarrow 5x - 485 \leq 100$

$\Leftrightarrow 5x \leq 585$

$\Leftrightarrow x \leq 117$ ✓

Die Summe der Fahrtkosten ist im Bereich von $x \in [77; 117]$ nicht größer als 100€. ✓ 3/3

Mathe-63.jpg

2) z: $ab = \frac{1}{2}(a^2+b^2) \Leftrightarrow a=b$

Bew.:

1. Setze $a=b$ in $ab = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$:

$$b \cdot b = \frac{1}{2}(b^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = b^2 \quad ✓$$

2. $a \cdot b = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$$2a \cdot b = a^2 + b^2$$

$$\left(2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$0 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$0 = (a-b)^2$$
$$\Rightarrow a = b$$

$\Rightarrow$ es muss gelten $\frac{a}{b} = 1$ und $\frac{b}{a} = 1$

$\Rightarrow$ es gilt: $a = b$

Das muss man zeigen

z: $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$

$a \leq b \qquad b = a + x \qquad x \geq 0$

$$a \cdot (a+x) \leq \frac{1}{2}(a^2 + (a+x)^2)$$

$$a^2 + ax \leq \frac{1}{2}(a^2 + a^2 + 2ax + x^2)$$

$$a^2 + ax \leq \frac{2}{2}a^2 + ax + \frac{1}{2}x^2$$

$$0 \leq \frac{1}{2}x^2 \quad ✓$$

QED

Mathe-64.jpg

3) a) $n \in \mathbb{N}$

$$1 - \left(\left(\sum_{i=0}^{n} 0{,}5^i\right) - 1\right) > 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} 0{,}5^i = \left(\sum_{i=0}^{n} 0{,}5^i\right) - 1 \checkmark$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1-0{,}5^{n+1}}{1-0{,}5} - 1\right) > 0$$

Geometrische Summe

$$\Leftrightarrow 2 - \left(\frac{1-0{,}5^{n+1}}{0{,}5}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}5^{n+1} < 1 \qquad \cancel{\frac{0{,}5^{n+1}}{0{,}5} = 0{,}5^n}$$

vergiss es :)

$$\Leftrightarrow 0{,}5^{n+1} > 0$$

Da $0{,}5^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N} > 0$, reicht der Biervorrat für unendlich viele Gäste. ✓

b)

$$1 - \left(\sum_{i=0}^{n} 0{,}6 \cdot 0{,}5^n\right) > 0 \qquad \text{Personenanzahl} \mathrel{\hat{=}} p$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}6 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 0{,}5^n\right) > 0 \qquad p = n+1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}6 \cdot \left(\frac{1-0{,}5^{n+1}}{0{,}5}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > 0{,}6 \cdot \left(\frac{1-0{,}5^{n+1}}{0{,}5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} > \frac{1-0{,}5^{n+1}}{0{,}5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} > 1 - 0{,}5^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5^{n+1} > \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow n+1 > \frac{\ln \frac{1}{6}}{\ln 0{,}5}$$

$$\Leftrightarrow n > 1{,}58 \qquad p = 1{,}58 + 1 = 2{,}58$$

2,5/3

$\Rightarrow$ Das Bier reicht für 2 Kunden. ✓

3/3

Mathe-65.jpg

4)

$M = \{\sum_{k=1}^{n} q^k \mid n \in \mathbb{N}\}$

z.z.: M ist nicht beschränkt $\Leftrightarrow |q| \geq 1$

bzw. M ist beschränkt $\Leftrightarrow |q| < 1$

$\boxed{\text{„}\Rightarrow\text{"}}$ Es muss ein $s \in \mathbb{R}$ geben, für das gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} q^k < s$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) - 1 < s$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-q^{k+1}}{1-q} < s+1$$

für $q < 1$:

$$1 - q^{k+1} < (s+1)(1-q)$$

$$\Leftrightarrow 1 - q^{k+1} < s - sq + 1 - q$$

$$\Leftrightarrow q^{k+1} > q + sq - s$$

$$\Leftrightarrow q^k \cdot q > q + sq - s$$

? und weiter?

für $q \in (0;1)$:

$$q^k > 1 + s - \frac{s}{q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^k - 1}{1 - \frac{1}{q}} < s$$

$$\lim_{k\to\infty} q^k = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} q^k - 1 = -1$$

$$1 - \frac{1}{q} < 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{q^k - 1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{q}}$$

$\Rightarrow$ für $q \in (0;1)$ gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ für das gilt

$$\frac{q^k - 1}{1 - \frac{1}{q}} < s \quad ✓$$

für $q > 1$:

$$1 - q^{k+1} \overset{<}{>} s - sq + 1 - q$$

$$\Leftrightarrow q^{k+1} > q + sq - s$$

$$\Leftrightarrow q^k > 1 + s - \frac{s}{q}$$

$$\Leftrightarrow q^k - 1 > s\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^k - 1}{1 - \frac{1}{q}} > s \quad \lightning\text{, da}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\overbrace{q^k - 1}^{\to\infty}}{\underbrace{1 - \frac{1}{q}}_{>0}} = +\infty$$

$\frac{1}{q} \to < 1$

ok