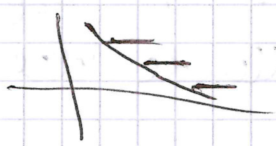
- Reihe ist unendliche Summe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- Reihen konvergieren, falls Partialsummen S_n konvergieren

  $\lim S_n \to S$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$
- Vgl. mit Integral $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, mon. fallend uneigentlich integrierbar

  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent 

  (konv. $f(k-1) > f(k) > f(k)$)
- $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ← absolut konv.

Satz: Es gelte $|a_k| < c_k$ und $\sum_{a=0}^{\infty} a_k < \infty$. (Reihe konvergiert)
Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Bew.: Die Partialsummen $\sum_{a=0}^{\infty} |a_k|$ sind monoton wachsend und beschränkt durch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Damit folgt die Konvergenz der Partialsummen. ∎

Oszilliert das Vorzeichen der Summanden und sind deren Beträge eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die zugehörige Reihe.

Satz: Sei a_k monoton fallende Folge mit $a_k \geq 0$ und $a_k \to 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

Bew.: Wir betrachten die Partialsummen S_{2l} und S_{2l+1}. Für die geraden gilt:

$$S_{2l} = \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2(l-1)} (-1)^k a_k - a_{2l-1} + a_{2l}$$

$$= S_{2(l-1)} + \underbrace{a_{2l} - a_{2l-1}}_{\leq 0}$$

also ist S_{2l} monoton fallende Folge

Die ungeraden Partialsummen sind monoton wachsend:

$$S_{2l+1} = S_{2l-1} + \underbrace{a_{2l} - a_{2l+1}}_{\geq 0}$$

Da $a_0 - a_1 = S_1 \leq S_{2l+1} \leq S_{2l+2} \leq S_0 = a_0$

Damit sind die Folgen S_{2l} und S_{2l-1} konvergent. da $|S_{2l} - S_{2l-1}| = |a_{2l}| \to 0$, stimmen die Grenzwerte überein. $\square$

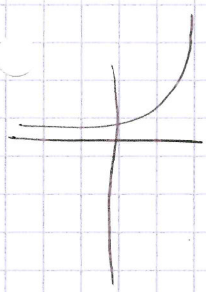
Bsp.: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ konvergiert

Bem.: weitere hinreichende Konvergenzkriterien sind:

das Wurzelkriterium $\sqrt[k]{|a_k|} \leq c < 1$

und das Quotientenregel

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < q \leq 1$$



Def.: Als Potenzreihe bezeichnet man Funktionen

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \quad \text{(unendliches Polynom)}$$

Der Konvergenzradius ist die Zahl $R \in [0, \infty]$

$$P(x) \begin{cases} \text{konv.} & \forall\, |x| < R \\ \text{divergiert} & |x| > R \end{cases}$$

Bsp.: (I) Die Exponentialfunktion $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert $\forall\, x \in \mathbb{R}$ d.h. es gilt $R = \infty$

(II) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ besitzt Konvergenzradius $R = 1$.

(III) Für $x = 0$ ist jede Potenzreihe konvergent, da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0$ $(0^0 = 1)$

Satz: Der Konvergenzradius ist eindeutig bestimmt.

Bew.: Setze $R = \sup\{|x| \mid P(-x), P(x) \text{ konvergiert}\}$

Gilt $R > 0$, so müssen wir zeigen, dass $P(x)$ konvergiert $\forall\, x \in \mathbb{R} : |x| < R$

Für $|x| < R$ $\exists\, x_0$ mit $|x| < |x_0| \leq R$, so dass $P(x_0)$ konv. $\cancel{|x| < R}$

Ebenso $P(-x_0)$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x_0^k|$ konvergiert

$|a_k||x_0|^k$ ist Nullfolge bzw.

$|a_k||x_0|^k \leq M$ für eine Zahl $M \geq 0$

Damit folgt

$$|a_k|\,|x|^k = \underbrace{|a_k|\,|x_0|^k}_{\leq M} \underbrace{\left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^k}_{= q^k \text{ mit } q < 1}$$

Damit ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent. $\square$

Um Potenzreihen "naiv" ableiten zu dürfen, benötigen wir einen geeigneten Konvergenzbegriff für Folgen von Funktionen.

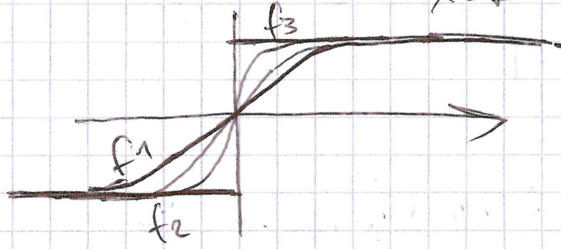
<u>Def.:</u> Eine Folge von Funktionen $f_n: I \to \mathbb{R}$ konvergiert

- <u>punktweise</u> gegen $f: I \to \mathbb{R}$, falls

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in I$$

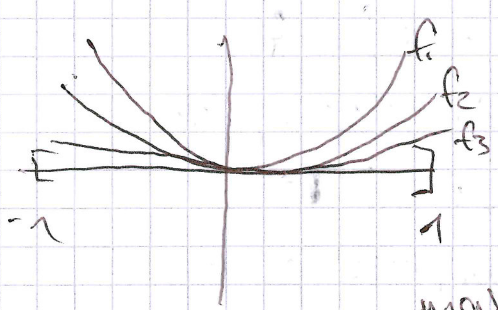
- <u>gleichmäßig</u> gegen $f: I \to \mathbb{R}$, falls

$$\max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$



$f = \text{sign}(x)$

punktweise, aber nicht gleichmäßig



$$f_n(x) = \frac{x^2}{n}$$
$$f(x) = 0$$

$$\max_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \to 0$$

<u>Bem.:</u> Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz, aber nicht umgekehrt.

<u>Satz:</u> Konvergiert eine Folge $f_n: I \to \mathbb{R}$ stetiger Funktionen gleichmäßig gegen eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, so ist auch f stetig.

<u>Bew.:</u> Sei x_k Folge in I mit $x_k \to x_0$

Wir müssen zeigen, dass $f(x_k) \to f(x_0)$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$

$$\exists n : \max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\to |f(x_k) - f(x_0)| = |f(x_k) - f_n(x_k) + f_n(x_k) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\le \underbrace{|f(x_k) - f_n(x_k)|}_{\le \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x_k) - f(x_k)|}_{\to 0} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\le \frac{\varepsilon}{3}}$$

$\to 0$ wegen Stetigkeit von f_n

$$\le \varepsilon \quad k \ge N_0$$

$\square$

<u>Satz:</u> Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig, so folgt

$$\lim \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \quad (\text{für stetige Fkt. } f_n)$$

<u>Bew.:</u> Da f stetig $\exists \int_a^b f(x)\,dx$ und es gilt

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b f_n - f \, dx \right|$$

$$\le \underbrace{\max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b-a)}_{\to 0}$$

$\square$