Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

19.10.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 1

Abgabe: **Donnerstag, 26.10.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen folgende sogenannte **De Morganschen Regeln** für logische Aussagen:

$$
\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B),\\
\neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B),\\
(A \wedge B) \vee C &= (A \vee C) \wedge (B \vee C),\\
(A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C),
\end{aligned}
$$

wobei A, B, C Aussagen sind.
Alternativ können Sie auch die **De Morganschen Regeln** für Mengen beweisen:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B)^{\complement} &= A^{\complement} \cup B^{\complement},\\
(A \cup B)^{\complement} &= A^{\complement} \cap B^{\complement},\\
(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C),\\
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C),
\end{aligned}
$$

wobei A, B, C Mengen sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Beweisen Sie jeweils mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2. \tag{3}$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

(a) Sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; (|x-y+2| \leq 3) \wedge (4x+2<2)\}$. Skizzieren Sie A.

(b) Sei B das von den Punkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ ausgespannte Dreieck (mit Innerem und Kanten). Beschreiben Sie B mit Hilfe von Ungleichungen.

(c) Sei $C := \{(t\cos t, t\sin t) \in \mathbb{R}^2 \; : \; t>0\}$. Skizzieren Sie C.

(d) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; (y \leq |\cos x|)\}$. Skizzieren Sie D.

Denken Sie daran Ihre Ergebnisse zu begründen!

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

(a) $f_1 \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; : \; x \mapsto \sin x$,

(b) $f_2 \; : \; \mathbb{R} \to [0,\infty) \; : \; x \mapsto x^2$,

(c) $f_3 \; : \; [0,\infty) \to \mathbb{R} \; : \; x \mapsto \sqrt{x}$.

Überprüfen Sie, welche dieser Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Schränken Sie den Definitions- und Bildbereich der Funktionen f_1, f_2 und f_3 aus Aufgabe 4 sinnvoll so ein, dass die Funktionen bijektiv werden. Geben Sie die Umkehrfunktionen samt Definitions- und Wertebereich an.

Hinweis:

Den aktuellen Aufgabenzettel und das aktuelle Kapitel des Kurzskripts findet Ihr immer Donnerstag nach der Vorlesung unter der folgenden Adresse:
`http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm1_WS00_01/`
Wem dies zu kompliziert zu merken ist, der kann diese Seite auch ausgehend von `http://www.mathematik.uni-freiburg.de` durch Klicken auf `Institut für Angewandte Mathematik`, dann `Lehre`, nun `Vorlesungsskripte/Übungsblätter` und anschließend auf `Mathematik für Ingenieure und Physiker I` erreichen.

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

26.10.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 2

Abgabe: **Donnerstag, 2.11.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(2 Punkte)**

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $P := (1, 0)$ ein Punkt in der Ebene (mit kartesischen Koordinaten). Drehen Sie die Ebene um den Nullpunkt erst um den Winkel α und anschliessend um den Winkel β. Berechnen Sie jeweils die neuen Koordinaten von P. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit einer Drehung der Ebene um den Winkel $\alpha{+}\beta$. Leiten Sie daraus eine Formel für $\sin(\alpha{+}\beta)$ und $\cos(\alpha{+}\beta)$, die sogenannten Additionstheoreme, her.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Gegeben sei folgendes Parallelogramm

Zeigen Sie, dass gilt: $2a^2 + 2b^2 = c^2 + d^2$, d.h. die Summe der Quadrate der Seiten ist gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen. Dies ist die sogenannte Parallelogrammgleichung. Repräsentieren Sie hierfür $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ durch Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ und versuchen Sie a^2, b^2, c^2 und d^2 mit Hilfe von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ auszudrücken.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren. Beweisen Sie:

(a) **Entwicklungssatz:** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) = (\vec{a} \cdot \vec{c}\,)\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}\,)\,\vec{c}$,

(b) **Jakobi-Identität:** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}\,) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}\,) = 0$,

(c) **Lagrange-Identität:** $(\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}\,) = (\vec{a} \cdot \vec{c}\,)(\vec{b} \cdot \vec{d}\,) - (\vec{b} \cdot \vec{c}\,)(\vec{a} \cdot \vec{d}\,)$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} := \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Projektionen von $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ auf $\vec{a}$.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Skizzieren und charakterisieren Sie folgende Mengen in der Ebene:

(a) $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \leq 10\right\}$,

(b) $B := \left\{\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right) \in \mathbb{R}^2 \;:\; t \in \mathbb{R}\right\}$.

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 2.11.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 3

Abgabe: **Donnerstag, 9.11.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Polynome

$$p(x) = x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 32x^3 - 59x^2 + 44x - 12,$$
$$q(x) = x^4 - ix^3 + (-1+4i)x^2 + (40-11i)x + (128-16i).$$

(a) Faktorisieren Sie p mit Hilfe des Hornerschemas. (Tipp: Die Nullstellen müssen zwar sukzessive geraten werden, aber sie sind alle ganzzahlig. Damit kommen abgesehen vom Vorzeichen nur die Teiler von 12 in Frage.)

(b) Verifizieren Sie per Rechnung, dass $x_0 := -3 + 2i$ und $x_1 := -2 - i$ Nullstellen von q sind. Dividieren Sie die entsprechenden Linearfaktoren $(x - x_0)$ und $(x - x_1)$ per Hornerschema heraus und ermitteln Sie anschließend die restlichen Nullstellen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Die kartesischen Koordinaten der Ecken eines Tetraeders T im $\mathbb{R}^3$ seien

$$A_1 = (1,1,1), \quad A_2 = (2,-1,-1), \quad A_3 = (-1,-1,1), \quad A_4 = (-1,1,-2).$$

(a) Berechnen Sie das Volumen von T und die Flächen der 4 Seiten s_1, s_2, s_3 und s_4, wobei s_i dem Punkt A_i, mit $i = 1, \dots, 4$, gegenüber liegt.

(b) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$, so beschreibt die Menge

$$\{\vec{a} + t\,\vec{b} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade. Hierbei ist $\vec{a} + t\vec{b}$ ist die sogenannte **Parameterdarstellung** dieser Geraden. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden an, welche durch A_1 geht und senkrecht auf s_1 steht, d.h. die Höhe durch A_1.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} := (1,0,-2)^T, \quad \vec{b} := (-1,3,-2)^T, \quad \vec{c} := (2,-1,3)^T, \quad \vec{d} := (1,2,4)^T.$$

(a) Verifizieren Sie an Hand von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ den Entwicklungssatz.

(b) Verifizieren Sie an Hand von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ die Lagrangeidentität.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

(a) Sei $f(x) := x^2-3x+2$ und $g(x) := 2x^2+x-5$. Berechnen Sie $h(x) := (f \circ g)(x)$. Bestimmen Sie die Nullstellen von h.

(b) Sei $a(x, y) = 1 + x - x^2 - y^2$, $b(x) := \sin x$ und $c(x) := \cos x$. Berechnen Sie die Nullstellen von $a(b(t), c(t))$. Bestimmen Sie den Wertebereich von a.

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 4

Abgabe: **Donnerstag, 16.11.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die folgende **Formel von De Moivre (1667-1754)**

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} \cos^{n-k} x \, \sin^k x.$$

Diese Formel führte seiner Zeit Euler zur Entdeckung der Eulerschen Formel.

(b) Beweisen Sie die Formel von De Moivre mit Hilfe der Eulerschen Formel.

(c) Leiten Sie aus der Formel von De Moivre nun Additionstheoreme für $\sin(3x)$, $\sin(4x)$, $\cos(3x)$ und $\cos(4x)$ her, welche nur $\sin(x)$ und $\cos(x)$ benutzen.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

(a) Seien

$$a(x) := x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 41x - 30,$$
$$b(x) := x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 15x - 14.$$

Bestimmen die den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b. (Das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei Polynomen a und b ist definiert, als das normierte Polynom c mit minimalem Grad, so dass a und b Teiler von c sind.) Was ist der Definitionsbereich von $\frac{a}{b}$?

(b) Seien

$$f(x) := 2x^7 + x^6 - 15x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 14x^2 - 21x - 21,$$
$$g(x) := 2x^5 + 3x^4 - 14x^3 + 4x^2 - 12x - 15.$$

Bestimmen Sie die gemeinsamen Nullstellen von f und g. Was ist der Definitionsbereich von $\frac{f}{g}$?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Stützstellen und -werte:

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	0	-1	2	0	1	-1

Bestimmen Sie die Koeffizienten α_i der Newtonschen Interpolationsformel.

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 23.11.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 6

Abgabe: **Donnerstag, 30.11.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Funktionen die Definitionsbereiche an und berechnen Sie die ersten Ableitungen:

$$f(x) := \left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)^9, \qquad g(x) := 3\sin(x^2+1)\cdot\cos^2 x.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $n \geq 1$ und $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Untersuchen Sie g auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Berechnen Sie die Ableitung von g. Hinweis:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien

$$f(x) := \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Skizzieren oder plotten Sie f und g. Untersuchen Sie f und g auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $m \geq 1$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right), \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n^3}\sum_{i=0}^{n} i^2\right).$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Seien f und g jeweils n-mal differenzierbar an der Stelle a, wobei $n \geq 1$ und $a \in \mathbb{R}$ ist. Beweisen Sie die **Leibnizsche Produktregel**, d.h.

$$(f\cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(a)g^{(k)}(a).$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_1|^n + \cdots + |a_m|^n} = \max\{|a_1|, \ldots, |a_m|\}$.

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 30.11.2000

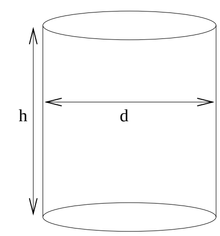
Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 7

Abgabe: **Donnerstag, 07.12.2000** (vor der Vorlesung)

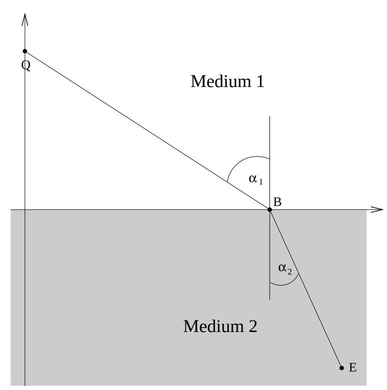
Aufgabe 1 (3 Punkte)

Als Konstrukteur/in einer Dosenfabrik haben Sie die Aufgabe erhalten 1-Liter-Dosen zu konstruieren. In Hinblick auf Produktion und Transport der Dosen müssen diese Zylinderform haben. Damit die Dosen nun möglichst kostengünstig hergestellt werden können, sollen Sie die Höhe und den Durchmesser bestimmen, bei denen am wenigsten Blech benötigt wird. (1 Liter entspricht 1000 cm^3.)



Aufgabe 2 (5 Punkte)

Leiten Sie nun analog zur Spiegelung von Licht (Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel) das Brechungsgesetz von Snellius her:



Der Versuchsaufbau sei wie in der Skizze. Weiterhin sei $Q = (0, a)$ (Quelle), $E = (L, -b)$ (Empfänger) und $B = (x, 0)$ (Brechungspunkt), wobei $a, b, L > 0$ gegeben sind. Bestimmen Sie nun x, so dass das Licht den schnellsten Weg einschlägt (Fermatsches Prinzip). Dabei seien v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des Lichts im Medium 1 bzw. 2.

Leiten Sie hieraus das Brechungsgesetz $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ her.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)-\sin(bx)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}.$$

Tipp: Verwenden Sie die Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Führen Sie eine Kurvendiskussion (siehe 2.14) für die Funktion $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ durch.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Weiterhin sei $n \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die **Ungleichung von Jensen**:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

In anderen Worten: Bei einer konvexen Funktion ist der Funktionswert des Mittelwertes kleiner gleich dem Mittelwert der Funktionswerte.

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 07.12.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 8

Abgabe: **Donnerstag, 14.12.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (Tschebyscheff–Polynome) (2+2+2+1+3=10 Punkte)

Pafnutij Tschebyscheff (1821 - 1894)

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \cos(nx).$$

Zeigen Sie, dass f_n bzgl. $\cos(x)$ ein Polynom vom Grad n ist, d.h. es existieren Polynome $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad n, so dass $\cos(nx) = p_n(\cos(x))$ gilt. Geben Sie $p_0, \ldots, p_4$ an. (Hinweis: Blatt 4 Aufgabe 1.)

(b) Üblicherweise schränkt man den Definitionsbereich der p_n auf das Intervall $[-1,1]$ ein. Für $x \in [-1,1]$ gilt nämlich

$$p_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Die Einschänkung der p_n auf das Intervall $[-1,1]$ bezeichnen wir im Folgenden mit T_n. Die T_n sind die sogenannten **Tschebyscheff–Polynome**. Bestimmen Sie die Extremstellen und den Wertebereich von T_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Verifizieren Sie folgende Rekursionsformel:

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad \text{für alle } x \in [-1,1], n \geq 1.$$

Schließen Sie daraus, dass $2^{1-n}T_n$ für $n \geq 1$ ein normiertes Polynom ist, d.h. der führende Koeffizient ist Eins.

Hinweis: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

(d) Für eine stetige Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definieren wir:

$$\|g\|_\infty := \max_{x \in [-1,1]} |g(x)|.$$

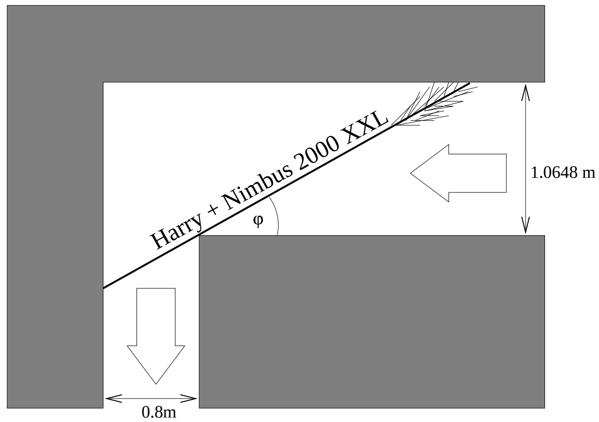
Berechnen Sie $\|T_n\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(e) Sei $n \geq 0$. Beweisen Sie, dass es kein normiertes Polynom $q : [-1,1] \to \mathbb{R}$ vom Grad n gibt, so dass $\|q\|_\infty < \|2^{1-n}T_n\|_\infty$ gilt.

Hinweis: Versuchen Sie für $n \geq 1$ einen Widerspruchsbeweis. Nehmen Sie an es gäbe ein Polynom $q : [-1,1] \to \mathbb{R}$ vom Grad n, mit $\|q\|_\infty < \|2^{1-n}T_n\|_\infty$. Wieviele Vorzeichenwechsel hat dann $q - 2^{1-n}T_n$? Schließen Sie hieraus eine Widerspruch.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Harry hat im Turm der Slytherins einen Streich gespielt, doch plötzlich erscheint Malfoy mit seinen Freunden. Harry bleibt nichts anderes übrig, als mit seinem fliegenden Besen, dem Nimbus 2000 XXL, abzuhauen. Leider sind die Gänge im Slytherinturm furchtbar eng und Harry schwebt plötzlich vor der folgenden Ecke:



(a) Wie lang muss der Nimbus 2000 XXL sein, damit er genau bei dem Winkel φ verkantet. (Der Besen muss dabei waagrecht in der Luft liegen.) Diese Länge bezeichnen wir mit $l(\varphi)$.

(b) Skizzieren Sie $l(\varphi)$ für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

(c) Wie lange dürfte der Nimbus 2000 XXL höchstens sein, damit er nicht verkantet? Kann Harry auf seinem $2,50\,m$ langen Besen entkommen?

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 99x + 1$. Bestimmen Sie die Nullstellen von f mit Hilfe des Newton–Verfahrens, so dass der Fehler kleiner als 10^{-5} ist. Begründen Sie, warum die Voraussetzungen für das Verfahren erfüllt sind. Sie dürfen ausnahmsweise mit dem Taschenrechner rechnen.
Hinweis: Ermitteln Sie zunächst passende Intervalle, in denen jeweils genau eine Nullstelle liegt. Dies kann man z.B. durch Skizze oder durch Einsetzen ganzzahliger Werte mit Hinblick auf Vorzeichenwechsel machen.

Aufgabe 4 **(2 Punkte)**

Für $n \geq 1$ seien $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ differenzierbar. Sei $g := f_1 \cdots f_n$ deren Produkt. Weiterhin sei x_0 ein Extremum vom g. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{f_1'(x_0)}{f_1(x_0)} + \cdots + \frac{f_n'(x_0)}{f_n(x_0)} = 0.$$

Hinweis: Betrachen Sie $\ln(g(x))$.

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 14.12.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 9

Abgabe: **Donnerstag, 21.12.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(2 Punkte)**

Seien $0 < a < b$. Berechnen Sie $\int_a^b x \ln^2 x \, dx$.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^x$. Berechnen Sie die Ableitung f'. Überprüfen Sie, ob die Grenzwerte $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ und $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls. Bestimmen Sie den Wertebereich von f. Prüfen Sie f auf Konvexität.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar ist.

(b) Sei $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to 0^+} q\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

gilt. (Tipp: Benutzen Sie de l'Hospital.)

(c) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist und dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom $q_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f^{(k)}(x) := \begin{cases} q_k\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

(Tipp: Vollständige Induktion. Benutzen Sie (b) bei Induktionsschritt.)

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Machen Sie ein Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$.

Aufgabe 5 **(2 Punkte)**

Beweisen Sie die Additionstheoreme für $\sinh(\alpha + \beta)$ und $\cosh(\alpha + \beta)$.

Aufgabe 6 **(2 Punkte)**

Bestimmen Sie die Ableitungen von $(x^x)^x$ und $x^{(x^x)}$ für $x > 0$.

Institut für Angewandte Mathematik 21.12.2000
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 10

Abgabe: **Donnerstag, 11.01.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c, d > 1$. Berechnen Sie folgenden Integrale

$$A := \int_a^b x \arctan(x)\, dx \qquad B := \int_c^d x \ln(x^2-1)\, dx,$$

$$C := \int_c^d \frac{\ln x}{x^2}\, dx, \qquad D := \int_{\frac{5}{8}}^{\frac{3}{4}} \frac{3}{\cos^2(4x-2)}\, dx,$$

$$E := \int_a^b \cos(x)\cosh(x)\, dx, \qquad F := \int_c^d \frac{1}{(x+1)x^2}\, dx,$$

$$G := \int_{1-a}^{1+a} \frac{1+\sin^3(x-1)}{\sqrt{1+(x-1)^2}}\, dx, \qquad H := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\, dx.$$

Tipp: Für alle Aufgaben benötigen Sie partielle Integration und/oder Substitution. Für E benötigen Sie nur partielle Integration (mehrmals?). Nutzen Sie für G Symmetrie aus.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen

$$0,038 < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\, dx < 0,05, \qquad 0 < \int_0^{200} \frac{e^{-5x}}{20+x}\, dx < 0,01.$$

Tipp: Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Frohe Weihnachten!

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 11.01.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 11

Abgabe: **Donnerstag, 18.01.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren. Überprüfen Sie im Falle der Divergenz, ob das uneigentliche Integral gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert.

$$A := \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx, \qquad B := \int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx, \qquad C := \int_1^e \frac{1}{x\ln x}\,dx,$$
$$D := \int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx, \qquad E := \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx.$$

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Sei $a > 0$. Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos^3 t \\ a\sin^3 t \end{pmatrix}$$

im Intervall $0 \le t \le 2\pi$.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Berechnen Sie die Fläche zwischen den Kurven $\sqrt{1-x^2}$ und $1-\sqrt{1-x^2}$ mit $-1 \le x \le 1$.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

(a) Berechnen Sie den Cauchyschen Hauptwert von

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{\sin x}\,dx.$$

(b) Überprüfen Sie, ob der Cauchysche Hauptwert von

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{e^x - 1}\,dx$$

existiert.

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 18.01.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 12

Abgabe: **Donnerstag, 25.01.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Sei γ die ebene, geschlossene Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 3t^3 - t \end{pmatrix}, \qquad -\tfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von γ umrandeten Fläche. Bestimmen Sie die maximale Krümmung von γ für $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ und berechnen Sie den Normalenvektor von γ an der Stelle, an der die maximale Krümmung angenommen wird. Berechnen Sie außerdem den Winkel α, den die Tangentialvektoren an den Stellen $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ bilden.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Bei der Rotation einer durch die Gleichung $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, mit $0 < a < b$, bestimmten Kreisfläche um die x–Achse, wird ein sogenannter Torus erzeugt. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Torus.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei $x_j := \frac{\pi}{6} j$ für $j = 0, \ldots, 6$. Nähern Sie das Integral $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ für die Stützstellen $x_0, \ldots, x_6$ mittels

(a) der Riemannschen Summe $\sum_{j=0}^{5} f(x_j)(x_{j+1} - x_j)$,

(b) der Trapezregel und

(c) der Simpson Regel an.

Vergleichen Sie die Werte mit der exakten Lösung.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Überprüfen Sie, ob die folgenden Reihen bedingt und/oder absolut konvergieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k) k^2 q^k,$$

wobei $0 < q < 1$.

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 25.01.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 13

Abgabe: **Donnerstag, 01.02.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf bedingte und absolute Konvergenz:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}, \qquad B := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ fest},$$

$$C := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}, \qquad D := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}},$$

$$E := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}, \qquad F := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass die folgenden Reihen für alle $x \in (-1,1)$ absolut gegen die nebenstehenden Werte konvergieren:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

(b) Aufgrund der Identität

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x},$$

lässt sich die dritte Reihe als Summe (mit Vorfaktor 1/2) und als Produkt der ersten beiden Reihen darstellen. Verifizieren sie an diesem Beispiel die Rechenregeln für unendliche Reihen, d.h. Addition und Cauchyprodukt von unendlichen Reihen.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} x^n, \qquad B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} x^{5n}, \qquad C := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n!} x^n.$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Reihen auf dem Rand des Konvergenzkreises. (Tipp für den rechten Rand bei C: Sie dürfen die Stirlingsche Formel benutzen, welche besagt, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}(n/e)^n/n! = 1$ ist.)

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

01.02.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 14

Abgabe: **Donnerstag, 08.02.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen im Entwicklungspunkt $a = 0$:

$$f(x) := \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \qquad g(x) := \frac{50x^2 + 55x - 73}{(x-1)(5x-1)},$$

$$h(x) := \sqrt[3]{2 + x^2}, \qquad p(x) := \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Konvergenzradien.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe von Taylor-Reihen die folgenden Grenzwerte:

$$A := \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin x}, \qquad B := \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}\right).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und Koeffizientenvergleichs die Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y''(x) = 6y(x)$$

in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen $y(0) = a$ und $y'(0) = b$. Für welche Werte von a und b ist die Funktion y ein Polynom.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die ersten vier Glieder der Taylor-Reihe um den Punkt $a = 0$ von

$$f(x) := (1 + \cos(x))^x.$$

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

08.02.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 15 (letztes)

Abgabe: **Donnerstag, 15.02.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(4 Extra–Punkte)**

Bilden Sie soweit möglich die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 **(2 Extra–Punkte)**

Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 **(4 Extra–Punkte)**

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & & & & & - & 6x_4 & + & 3x_5 & = & 0\,. \end{array}$$

(b) Bringen Sie das folgende Gleichungssystem auf Stufenform und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 3 & -2 & -8 & 1 & -7 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 8 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 9 & -3 & -12 & -1 & -14 & 2 \end{array}\right).$$

Wichtige Information

Vergessen Sie bitte nicht, sich spätestens bis zum 20.02.2001 für die Klausur anzumelden. Diese Anmeldung ist sowohl für die Erstesemester als auch für die Drittsemester (oder höher) verpflichtend. Genauere Informationen sowie das Anmeldeformular gibt es im Prüfungsamt der Mikrosystemtechnik.

Die Klausur selbst wird am 29. März in der Zeit von 9:00 bis 12:00 Uhr stattfinden. Der genaue Ort wird jedoch noch bekanntgegeben.

Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 08.02.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 15 — Musterlösung

Aufgabe 1 **(4 Extra–Punkte)**

Bilden Sie soweit möglich die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 26 \\ 7 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Das Produkt $B \cdot A$ ist nicht definiert.

Aufgabe 2 **(2 Extra–Punkte)**

Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion nach n.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig.
Induktionsschritt $(n \mapsto n+1)$*:*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe durch vollständige Induktion bewiesen.

Aufgabe 3 **(4 Extra–Punkte)**

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & & & & & - & 6x_4 & + & 3x_5 & = & 0\,. \end{array}$$

(b) Bringen Sie das folgende Gleichungssystem auf Stufenform und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 3 & -2 & -8 & 1 & -7 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 8 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 9 & -3 & -12 & -1 & -14 & 2 \end{array}\right).$$

Lösung:
Wir wenden das Eliminationsverfahren an!

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \cdot\frac{1}{2}; & \\ ; & -2\times\text{Gl. } 1 \\ ; & -4\times\text{Gl. } 1 \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} ; & -\frac{1}{2}\times\text{Gl. } 2 \\ ; & \\ ; & +2\times\text{Gl. } 2 \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} ; & +\frac{1}{2}\times\text{Gl. } 3 \\ ; & \\ \cdot\frac{1}{2}; & \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Buchführungsmenge ist $B = \{1, 2, 3\}$. Damit werden zwei Parameter für die Darstellung der Lösungen benötigt. Seien also $r, s \in \mathbb{R}$ zwei freie Parameter, dann sind die Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5$ beschrieben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{3}{2}r - \tfrac{3}{4}s, \\ x_2 &= r - s, \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}s, \\ x_4 &= r, \\ x_5 &= s. \end{aligned}$$

Man kann die Lösungsmenge auch folgendermaßen schreiben:

$$L = \left\{ r \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Lin}\big(\{(\tfrac{3}{2}, -1, 0, 1, 0,)^T, (-\tfrac{3}{4}, 1, -\tfrac{1}{2}, 0, 0, 1)^T\}\big).$$

(b)

$$
\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 3 & -2 & -8 & 1 & -7 & 0 \\
-2 & 6 & 2 & 8 & 2 & 12 & 0 \\
3 & 9 & -3 & -12 & -1 & -14 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{rl}
; & \\
; & +2\times \text{Gl. } 1 \\
; & -3\times \text{Gl. } 1
\end{array} \\
\to \left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 3 & -2 & -8 & 1 & -7 & 0 \\
0 & 12 & -2 & -8 & 4 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 12 & -4 & 7 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{rl}
; & -3\times \text{Gl. } 2 \\
\cdot\frac{1}{12}; & \\
; &
\end{array} \\
\to \left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & \frac{-3}{2} & -6 & 0 & \frac{-13}{2} & 0 \\
0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \\
0 & 0 & 3 & 12 & -4 & 7 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{rl}
; & +\frac{3}{2}\times \text{Gl. } 3 \\
; & +\frac{1}{6}\times \text{Gl. } 3 \\
\cdot\frac{1}{3}; &
\end{array} \\
\to \left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 1 & 4 & \frac{-4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Die Buchführungsmenge ist $B = \{1, 2, 3\}$. Als spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems wählen wir $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (1, \frac{1}{9}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0)^T$. Für die Lösung des homogenen Gleichungssystems werden drei Parameter benötigt. Seien also $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ drei freie Parameter, dann sind die Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \in \mathbb{R}^6$ des homogenen Gleichungssystems beschrieben durch

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2r_2 + 3r_3, \\
x_2 &= -\tfrac{1}{9}r_2 - \tfrac{2}{9}r_3, \\
x_3 &= -4r_1 + \tfrac{4}{3}r_2 - \tfrac{7}{3}r_3, \\
x_4 &= r_1, \\
x_5 &= r_2, \\
x_6 &= r_3.
\end{aligned}
$$

Dies ergibt die folgenden Lösungen des inhomogene Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 + 2r_2 + 3r_3, \\
x_2 &= \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{9}r_2 - \tfrac{2}{9}r_3, \\
x_3 &= \tfrac{2}{3} - 4r_1 + \tfrac{4}{3}r_2 - \tfrac{7}{3}r_3, \\
x_4 &= r_1, \\
x_5 &= r_2, \\
x_6 &= r_3.
\end{aligned}
$$

Man kann die Lösungsmenge auch folgendermaßen schreiben:

$$
\begin{aligned}
L &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{2}{9} \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= (1, \tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{3}, 0, 0, 0)^T \\
&\quad + \operatorname{Lin}\big(\{(0, 0, -4, 1, 0, 0)^T, (2, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{4}{3}, 0, 1, 0)^T, (3, -\tfrac{2}{9}, -\tfrac{7}{3}, 0, 0, 1)^T\}\big).
\end{aligned}
$$