Prof. Dr. Christoph Scholl
Dr. Paolo Marin

Freiburg, 20. November 2015

Technische Informatik
Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (2 + 3 Punkte)

Sei $\mathcal{B} = (M, \cdot, +, \neg)$ eine Boolesche Algebra. Zeigen Sie ausschließlich durch Anwendung der Axiome (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Komplementregel), der in der Vorlesung beweisenenen Existenz und Eindeutigkeit der Neutralen Elemente (inklusive Korrolar) und der Eindeutigkeit des Komplements, daß für $\mathcal{B}$ die folgenden Gesetze gelten:

a) Idempotenz: $\forall m \in M : m + m = m$

b) De-Morgan: $\forall m, n \in M : \neg(m + n) = \neg m \cdot \neg n$
Hinweis: Verwenden Sie die Eindeutigkeit des Komplements.

Geben Sie bei jedem Schritt die angewandte Regel an.

Aufgabe 2 (1 + 3 + (2–Bonus) Punkte)

Gegeben sei der Schaltkreis aus Abbildung 1 für eine Boolesche Funktion $f : \mathbb{B}^2 \mapsto \mathbb{B}$.

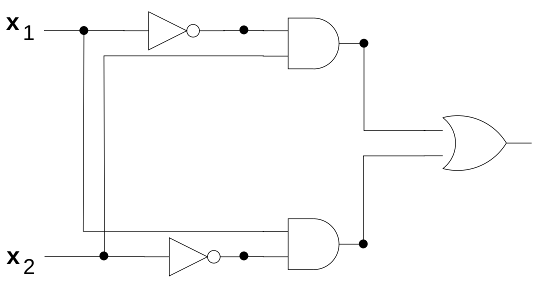

Abbildung 1: Implementierung von f

a) Führen Sie eine symbolische Simulation für den Schaltkreis durch, indem Sie für alle Gatterausgänge einen Booleschen Ausdruck erstellen.

b) Erstellen (d.h. zeichnen) Sie einen neuen Schaltkreis für f, der nur aus NAND_2-Gattern auskommt, wobei $\text{NAND2}_2(x_1, x_2) = \neg(x_1 \wedge x_2)$. Versuchen Sie, mit möglichst weniger NAND_2-Gattern auszukommen (2 Bonuspunkte).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie folgendes Lemma der Vorlesung:

Zu jedem Booleschen Ausdruck $e \in BE(X_n)$ gibt es einen Schaltkreis $SK = (\vec{X_n}, G, typ, IN, \vec{Y_1})$, so dass gilt: $\psi(e) = f_{SK}$.

Hinweis: Induktion über die Struktur Boolescher Ausdrücke.

Aufgabe 4 (1 + 3 Punkte)

a) Geben Sie für die gegebene Booleschen Funktion einen Booleschen Ausdruck in der kanonischen disjunktiven Normalform an. Sie müssen den Ausdruck nicht in vollständig geklammerter Form angeben.

$x_1\ x_2\ x_3$	f
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

b) Geben Sie für den Booleschen Ausdruck $e = \neg x_1 + \neg(x_2 \cdot x_3)$ die zugehörige Interpretationsfunktion $\psi : BE(x_1, x_2, x_3) \to \mathbb{B}_3$ an. Gehen Sie dabei schrittweise vor und stellen Sie $\psi(e)$ durch Disjunktion/Konjunktion/Negationen von Projektionsfunktionen dar. Berechnen Sie schließlich die Funktionstabelle von $\psi(e)$.

Aufgabe 5 (4 + 3 Punkte)

a) Geben Sie einen kombinatorischen Schaltkreis SK_1 über die Bibliothek $BIB = \{and_2, or_2, not\}$ an mit $\psi(SK_1) \in \mathbb{B}_8$ und

$$\psi(SK_1)(a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a_i = b_i\ \forall 1 \leq i \leq 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie viele Gatter benötigt der Schaltkreis?

b) Geben Sie einen zweiten Schaltkreis SK_2 über die Bibliothek $BIB = \{and_2, or_2, exor_2, not\}$ an mit $\psi(SK_1) = \psi(SK_2)$, der weniger Gatter benötigt.

Abgabe: 27. November 2015, $17^{\underline{00}}$ über das Übungsportal