Prof. Dr. Christoph Scholl
Dr. Paolo Marin

**Freiburg, 18. Dezember 2015**

# Technische Informatik
## Übungsblatt 8

**Aufgabe 1** ($(2 + 3)$ **Bonus** Punkte)

Berechnen Sie das Ergebnis der folgenden Subtraktionen indem Sie die Subtraktion von Zweierkomplementzahlen auf geeignete Additionen zurückführen.

a) [1101] − [0011]

b) [01010101] − [11110000]

**Aufgabe 2** ($4 + 2 + 2$ Punkte)

a) In der Vorlesung wurde für die Tiefe des Carry-Ripple-Addierers $CR_n$ und des Conditional-Sum-Addierers $CSA_n$ gezeigt:
$depth(CR_n) = 2(n - 1) + 3$
$depth(CSA_n) = 3logn + 3$
Betrachten Sie Addierer, deren Bitbreite $n = 2^k$ eine Zweierpotenz ist.

- Berechnen Sie $depth(CR_n)$ und $depth(CSA_n)$ für $k = 0, 1, \ldots, 16$ und fassen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.
- Für welche Bitbreite hat der Conditional-Sum-Addierer eine größere Tiefe als der Carry-Ripple-Addierer?

b) Zeigen Sie:

i) $4log^2n + 10logn + 6 \in O(log^2n)$

ii) $5n + 3logn - 7 \in O(n)$

c) Zeigen Sie die folgende Aussage, die für den Spezialfall $k = l = 1$ in der Vorlesung benutzt wurde:
Falls $f \in O(n^k)$ und $g \in O(n^l)$ für $l, k \in \mathbb{N}$, dann ist $f \cdot g \in O(n^{k+l})$.

## Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte)

Berechnen Sie nach der Schulmethode das Ergebnis der folgenden Multiplikationen. Kennzeichnen Sie die Partialprodukte $PP_i$.

a) $\langle 1101 \rangle \times \langle 0011 \rangle$

b) $\langle 01010101 \rangle \times \langle 11110000 \rangle$

## Aufgabe 4 (6 + 5 Punkte)

a) Geben Sie einen möglichst kleinen Schaltkreis an, der zu einer $n-$Bit-Zweierkomplementzahl deren Betrag berechnet, das heißt entwerfen Sie einen Schaltkreis zu der Boolschen Funktion

$$abs_n : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, (a_{n-1}, \dots, a_0) \mapsto (s_{n-1}, \dots, s_0)$$

mit $\langle s_{n-1}, \dots, s_0 \rangle = |[a_{n-1}, \dots, a_0]|$.
Bestimmen Sie die Kosten Ihrer Schaltkreisrealisierung.
Hinweis: Berücksichtigen Sie die Definition des Betrags einer Zahl $r$ mit: $|r| = \begin{cases} r, & \text{falls } r \geq 0 \\ -r, & \text{falls } r < 0 \end{cases}$
Aus der Vorlesung bekannte Schaltkreise (wie Addierer, Inkrementer) dürfen Sie verwenden.

b) Ein Multiplizierer für zwei $n$-Bit Binärzahlen (siehe Abb. 1), wie er in der Vorlesung vorgestellt wurde, berechnet die Funktion

$$mul_n : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{2n} \text{ mit}$$

$$mul_n(a_{n-1}, \dots, a_0, b_{n-1}, \dots, b_0) = (p_{2n-1}, \dots, p_0) \text{ und } \langle p_{2n-1}, \dots, p_0 \rangle = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle.$$

Geben Sie aufbauend auf dieser Definition einen Schaltkreis an, der zwei $n$-Bit *Zweierkomplementzahlen* multiplizieren kann.

$$twoc\_mul_n : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{2n} \text{ mit}$$

$$twoc\_mul_n(a_{n-1}, \dots, a_0, b_{n-1}, \dots, b_0) = (p_{2n-1}, \dots, p_0) \text{ und } [p_{2n-1}, \dots, p_0]_2 = [a]_2 \cdot [b]_2.$$

Erklären Sie zusätzlich kurz die Idee Ihrer Lösung.

Hinweis: Sie dürfen für Ihre Lösung die arithmetischen Schaltungen, die in der Vorlesung vorgestellt wurden, verwenden (z.B. Addierer, Inkrementer, Multiplizierer,...). Außerdem dürfen Sie die Realisierung einer Betragsfunktion aus Teilaufgabe *a)* verwenden. Für diese Teilschaltkreise ist es ausreichend, in der Schaltung einen entsprechend beschriftetes Rechteck einzuzeichnen.

**Abgabe: 08. Januar 2016, $17^{\underline{00}}$ über das Übungsportal**

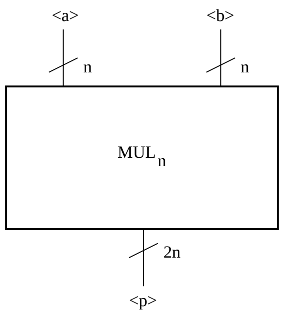


Abbildung 1: $n$-Bit Multiplizierer