4. Zahlenfolgen u. Grenzwerte

- $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$
- konvergent: $\exists a \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N$

  (a: Grenzwert)

d.h. für ~~alle~~ jede Toleranz $\varepsilon > 0$ unterscheiden sich Folgeglieder für $n > N$ von a nur um ε.

- Abstand zwischen Folgegliedern muss kleiner werden, denn:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$$

für $n, m > N$

$$\leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

<u>Bsp.:</u> Sei $-1 \leq q \leq 1$ und def.

$$a_n = 1 + q + q^2 + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i$$

Dann ist die Folge konvergent, mit ~~wenn~~ Grenzwert $a = \frac{1}{1-q}$, denn

$$a_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$$

da $q^n \to 0$ für $n \to \infty$

<u>Bsp.:</u> Sei

$$x_n = \frac{a_k \cdot n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0}{b_\ell \cdot n^\ell + b_{\ell-1} \cdot n^{\ell-1} + \dots + b_0} = \frac{p(n)}{q(n)}$$

mit $a_k, b_\ell \neq 0$

$$x_n = n^{k-\ell} \left(\frac{a_n + a_{n-1} \cdot n^{-1} + \dots + a_0 \cdot n^{-k}}{b_\ell + b_{\ell-1} \cdot n^{-1} + \dots + b_0 \cdot n^{-k}} \right)$$

$$\to \begin{cases} a_n / b_\ell \, ; & k = \ell \\ 0 \, ; & k < \ell \\ \pm\infty \, ; & k > \ell \end{cases}$$

Satz: Seien a_n und b_n konvergente Zahlenfolgen mit Grenzwerten a bzw. b.

Dann gilt:

(a) Falls $a_n < b_n \;\forall n$, so folgt $a < b$.

(b) Falls $c \le a_n \le d \;\forall n$, so folgt $c \le a \le d$

(c) Falls $a_n \le c_n \le b_n$ und $a = b$, so ist c_n konvergent mit Grenzwert a.

Beweis: $\forall \varepsilon > 0 \;\exists N_1, N_2 : |a_n - a| < \varepsilon \;\forall n > N_1,$
$|b_n - b| < \varepsilon \;\forall n > N_2$

Setze $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt:

$$a_n > a - \varepsilon \quad \text{sowie}$$
$$b_n < b + \varepsilon \quad \forall n > N.$$

(a) Es gilt: $a - \varepsilon < a_n \le b_n < b + \varepsilon$

d. h. $a < b + 2\varepsilon$

Daraus folgt $a \le b$, da Epsilon beliebig klein gewählt werden darf.
(Achtung: Gleichheit kann tatsächlich auftreten!)

(b) Folgt aus (a) durch Wahl der konstanten Folgen c bzw. d.

(c) Es gilt:
$$a - \varepsilon < a \le c_n \le b_n < b + \varepsilon = a + \varepsilon$$
bzw. $a - \varepsilon \le c_n \le a + \varepsilon$

$\forall n > N \quad |c_n - a| < \varepsilon.$ Q.E.D.

WARNUNG: Aus $a_n < b_n$ folgt „A nicht, dass $a < b$ gilt
Grenzwerte

Z.B.
$$a_n = \frac{1}{2 \cdot n} \to 0, \quad b_n = \frac{1}{n} \to 0 \qquad a_n < b_n.$$

Bsp.: Für $a > 0$ gilt $a^{\frac{1}{n}} \to 1$, wobei $a^{\frac{1}{n}}$ die positive n-te Wurzel aus a ist. Gilt $a > 1$, so ist $a^{\frac{1}{n}} \geq 1$. Definiere $x_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ bzw. $a^{\frac{1}{n}} + 1 = x_n$.
Mit Bernoullis Ungleichung folgt:
$$a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1 + x_n)^n \geq 1 + n \cdot x_n$$

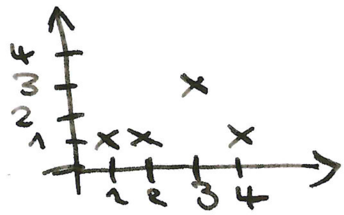
daher $x_n \leq \frac{a-1}{n} \geq 0$ und somit $x_n \to 0$.

Für $0 < a < 1$ gilt $a^{-1} > 1$
und folglich $(a^{-1})^{1/n} \to$
Damit folgt $a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(a^{-1})^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{1} = 1$.

Wir definieren einen Konvergenzbegriff für unbeschränkte Folgen.

Definition: Die Folge a_n konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$, falls
$\forall k > 0 \ \exists N \in \mathbb{R}$, so dass $a_n > k$ für $n > N$ gilt.

Bsp.: Nicht jede unbeschränkte positive Zahlenfolge konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$ $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\right)$
betrachte z.B.:
$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$$



<u>Bsp.:</u> Für $q>1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$,
denn es gilt $\frac{1}{q^n} \to 0$, also
$\exists N \forall K$:

$$\frac{1}{q^n} < \varepsilon = \frac{1}{K} \quad \forall n > N$$

<u>bzw.</u> $K \leq q^n \quad \forall n > N$.

Insgesamt gilt:

$$q>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$$
$$q=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 1$$
$$-1 \leq q < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$
$$q \leq -1 \Rightarrow \text{keine Konvergenz}$$

<u>Bsp.:</u> Die harmonische Reihe

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$

denn

$$a_n = \underbrace{1}_{\geq \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6}$$

$$a_n = \underbrace{1}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}}$$