Prof. Dr. Christoph Scholl
Dr. Paolo Marin

Freiburg, 27. November 2015

Technische Informatik
Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Es ist die Ansteuerungslogik einer 7-Segment-Anzeige zu entwickeln (siehe Abb. 1).

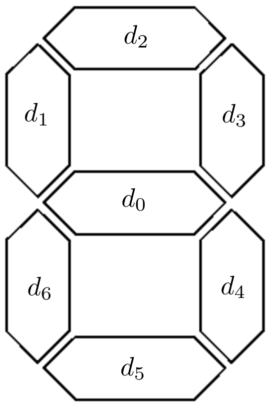

Abbildung 1: Eine 7-Segment-Anzeige.

Seien die darzustellenden Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ durch Binärdarstellungen mit den Bits d_3, d_2, d_1, d_0 gegeben. Die 7-Segment-Anzeige habe 7 Eingangsleitungen (für jedes Segment eine). Segment $i \in \{0, ..., 6\}$ leuchtet genau dann auf, wenn die Eingangsleitung i auf 1 gesetzt wird.
Gesucht ist eine Boolesche Funktion $f : \{0,1\}^4 \implies \{0,1\}^7$, die dafür sorgt, dass bei Anlegen von $(d_3, \ldots, d_0)$ mit $\sum_{i=0}^{3} d_i 2^i \in \{0, ..., 9\}$ die Ziffer $\sum_{i=0}^{3} d_i 2^i$ auf der 7-Segment-Anzeige dargestellt wird.

a) Geben Sie eine geeignete Funktion f durch eine Funktionstabelle an.

b) Bestimmen Sie für die Boolesche Funktion, die das mittlere Segment (d_0) ansteuert, ein möglichst billiges Polynom p bzgl. des in der Vorlesung angegebenen Kostenmaßes.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zu zeigen: Seien m, m' Monome aus $BE(X_n)$. Falls $m \leq m'$, dann ist die Menge der Literale, die in m' vorkommen, eine Teilmenge der Literale, die in m vorkommen.

Hinweis: Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zu zeigen (aus der Vorlesung, Kap. 3.4 Folie 5): Ein Monom m ist genau dann ein Implikant von f, wenn entweder m ein Minterm von f ist, oder $m \cdot x$ und $m \cdot x'$ Implikanten von f sind für eine Variable x, die nicht in m vorkommt.

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

a) Betrachten Sie den PLA in Abbildung 2, der eine boolesche Funktion $g\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ realisiert. Beachten Sie, dass die schwarzen Punkte Inverter darstellen sollten.

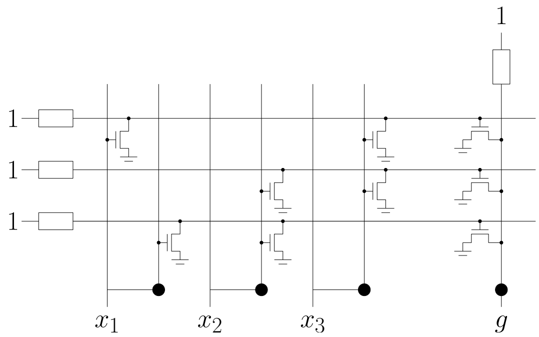

Abbildung 2: Ein PLA

1) Geben Sie das vom PLA dargestellte Polynom p_g zu g an.
2) Zeigen Sie, dass das Polynom p_g kein Minimalpolynom von g ist.

b) Zeigen Sie, dass es zu einer Booleschen Funktion f verschiedene Minimalpolynome geben kann.

Hinweis: Es genügt hierzu, z.B. eine Funktion $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ zusammen mit ihren Primimplikanten anzugeben (ohne Beweis, dass die genannten Monome Primimplikanten sind), und aus diesen Primimplikaten zwei verschiedene Minimalpolynome zu bilden (ohne Beweis, dass die Polynome minimal sind). Sie können zur Herleitung der Minimalpolynome den 3-dimensionalen Würfel in Abb. 3 benutzen.

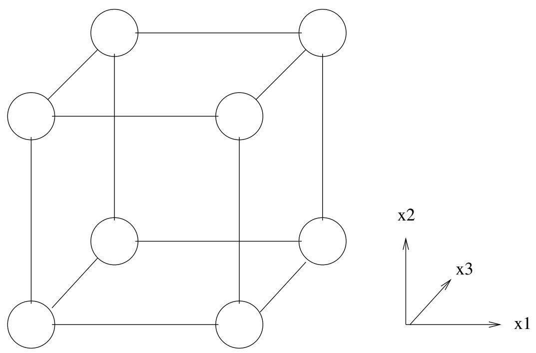

Abbildung 3: 3D-Würfel

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

Zeichnen Sie die **OFF**-Menge von f in den Hypercube aus Abbildung 4, indem Sie die entsprechenden Knoten markieren.

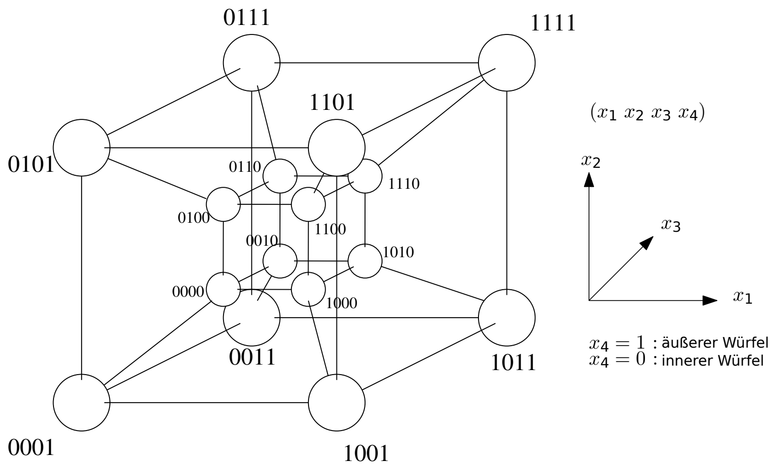

Abbildung 4: Hypercube

Aufgabe 6 (4 + 1 + 1 Punkte)

Die Funktion $f\colon \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ sei durch ihre **ON**-Menge gegeben:

$$ON(f) = \{0000, 0001, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1010, 1100, 1110, 1111\}$$

a) Bestimmen Sie durch Anwendung des Quine-McCluskey-Algorithmus die Primimplikantenmenge von f. Geben Sie alle Zwischenschritte, d.h. alle Mengen L_i^M und $Prim$ an.

   Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe die abkürzende Schreibweise für Monome verwenden (z.B. statt „$\overline{x}_1 x_2 x_4$“ „`01-1`“)

b) Zeichnen Sie in einem Hypercube die **ON**-Menge von f ein. Markieren Sie zusätzlich im Hypercube alle Primimplikanten, die Sie durch den Quine-McCluskey-Algorithmus erhalten haben.
   Hinweis:
   Wenn Ihnen im Quine-McCluskey-Algorithmus kein Fehler unterlaufen sein, sollten die Teilwürfel, die durch die Primimplikanten aufgespannt werden, jeweils maximal sein, d.h. es ist nicht möglich, die Würfel zu vergrößern, ohne die **ON**-Menge zu verlassen. Gleichzeitig sollten alle Ecken, die in der **ON**-Menge vorkommen auch in mindestens einem der Teilwürfel vorkommen.

c) Bestimmen Sie die Kosten (($cost_1$, $cost_2$) gemäß der Vorlesung) des vollständigen Polynoms, das aus allen Primimplikanten der Funktion besteht.

Abgabe: 4. Dezember 2015, $17^{\underline{00}}$ über das Übungsportal