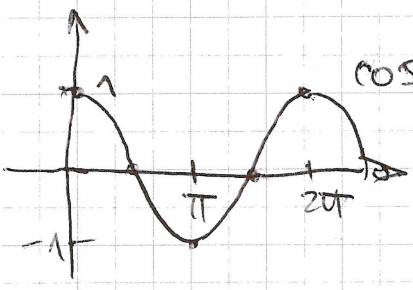


$\cos(\varphi)$

Umkehrfunktion des Kosinus

Wir müssen ein Intervall auswählen, auf das der Kosinus injektiv ist. Üblicherweise

$$\cos[0;\pi] \to [-1;1]$$

cos ist auf $[0;\pi]$ streng monoton fallend.

Es gilt $0 \le x < y \le \pi \to \cos x > \cos y$

rigoros: $e^{iy} - e^{ix} = e^{i\cdot(\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2})} - e^{i\cdot(\frac{y+x}{2} - \frac{y-x}{2})}$

$= e^{i\cdot(\frac{y+x}{2})}\cdot(e^{i\cdot(\frac{x-y}{2})})$

$= e^{i\cdot(\frac{y+x}{2})}\cdot(\cos(\frac{y-x}{2}) - i\cdot\sin(\frac{x-y}{2}))$

$= 2\cdot i\cdot e^{i(\frac{y+x}{2})}\cdot\sin(\frac{y-x}{2})$

$\Rightarrow \cos(y) - \cos(x) = -2\cdot\sin\underbrace{(\tfrac{x+y}{2})}_{\in(0,\pi),\ >0}\cdot\sin\underbrace{(\tfrac{y-x}{2})}_{\in(0,\pi),\ >0}$

Definition: (Umkehrfunktion)

$$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi],\ \cos(\arccos(t)) = t$$

dann gilt auch $\arccos(\cos(x)) = x$, für $x \in [0,\pi]$

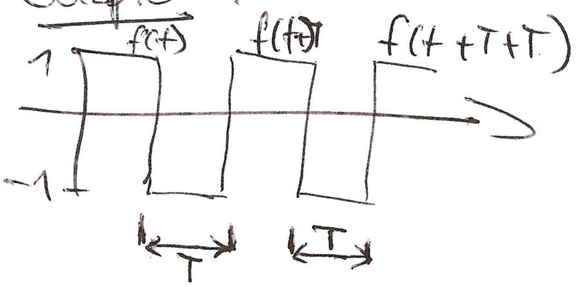
Polarkoordinaten für $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = x + i\cdot y \neq 0$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & \text{falls } y \ge 0 \\ 2\pi - \arccos(\frac{x}{r}) & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

Definition: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $T > 0$ falls $f(t+T) = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Beispiel:

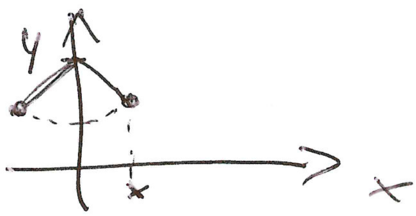


Ist $T>0$ Periode von f, so sind auch alle Zahlen $k \cdot T$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ Periode von f.

$$f(t+k\cdot T) = f(t+(k-1)\cdot T + T) = f(t+(k-1)T) = f(t)$$

Spricht man von der Periode einer Funktion, so meint man die kleinstmögliche.

Harmonische Schwingung:



$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$

Periode $= \frac{2\pi}{\omega}$; Frequenz: $\nu = \frac{1}{T}$

ω heißt auch Kreisfrequenz

Überlagerung von Schwingungen

$x_1(t), x_2(t)$, harmonische Schwingungen

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ist im Allgemeinen keine periodische Funktion

30.11.15
MI

Annahme:

$$\frac{T_2}{T_1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{für } n_1, n_2 \in \mathbb{N}$$

$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ Periode von $x(t)$

$$x(t+T) = x_1(t + n_1 T_1) + x_2(t_2 + n_2 T_2)$$
$$= x_1(t) + x_2(t) = x(t)$$

Es gilt $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{n_1}{n_2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$

Satz: $x_1(t), x_2(t)$ sind harmonische Schwingungen mit der gleichen Periode $T > 0$

$x_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega t + \alpha_1)$, $x_2(t) = A_2 \cdot \cos(\omega t + \alpha_2)$

Dann ist $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ wieder harmonische Schwingung mit $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$

mit $A \cdot e^{i \cdot \alpha} = A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 \cdot e^{\alpha_2}$

Beweis: $z_1(t) = e^{i \cdot (\omega t + \alpha_1)}$ und $z_2(t) = e^{i \cdot (\omega t + \alpha_2)}$

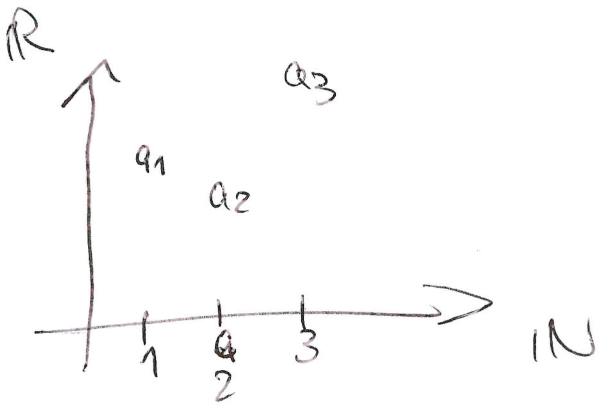
$$z_1(t) + z_2(t) = e^{i \cdot \omega \cdot t}(A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 \cdot e^{i \cdot \alpha_2})$$
$$= A \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \alpha)}$$

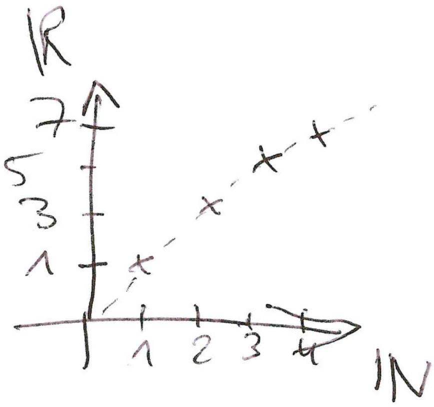
$$x_1(t) + x_2(t) = \mathrm{Re}(z_1(t) + z_2(t)) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) \quad \square$$

4 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Folge von Zahlen $1, 3, 5, 7, 9$

Eine Folge reeler Zahlen ist eine Abfolge der natürlichen Zahlen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$





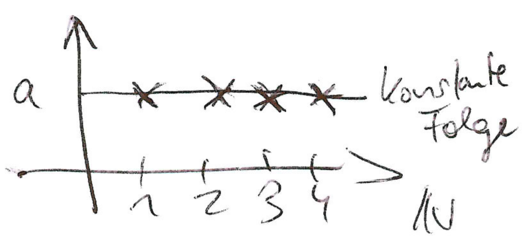
Jeder $n \in \mathbb{N}$ wird das n-te Folgeglied $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Folge anzugeben.

Beispiel:

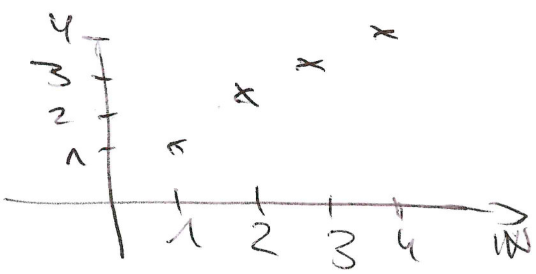
- erste Folgeglieder $a_n = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$
- Bildungsgesetz $a_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Rekursionsvorschrift: $a_n = (\sqrt{a_n} + 1)^2$, $a_1 = 1$

Beispiele:

(1) $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$



(2) $a_n = n \quad n \in \mathbb{N}$



30.11.15
MI

(3) $a_n = a_0 + n\cdot d$ $n = \{0,1,2,\dots\}$

„arithmetische Folge"

(4) $a_n = a_0 \cdot q^n$; $q \in \mathbb{R}$

„geometrische Folge"

(5) $a_n = n \cdot a_{n-1}$; $a_0 = 1$; $n = 0,1,2,\dots$

$a_0 = n!$

a_n	1	1	2	6	24
n	0	1	2	3	4

$a_n = n \cdot a_{n-1} = n\cdot(n-1)\cdot a_{n-2}$
$= n!$

<u>Definition (Konvergenz)</u>

Eine Folge konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt
zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass
$\forall\, n > N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$
Dann heißt a Grenzwert der Folge. Wir schreiben
„$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$" oder „$a_n \to a$ für $n \to \infty$".

a_n ist divergent, wenn a_n nicht konvergiert.

Wähle $\varepsilon > 0$