

42

a) 1A: $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = \frac{4}{4} \quad \checkmark$$

IV: $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ ✓

IS: $n \mapsto n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = 1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3$$

$$= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1) + 4 \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{4}$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4}$$

$$= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} \quad \square$$

$$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$$

$$(n+1)^2(n+1)$$

$$= (n^2 + 2n + 1)(n+1)$$

$$n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \frac{n^2 \cdot (2n^2 + n^2 + 1)}{4} = 2n^3$$

$$\frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} = \frac{(n^2 + 2n + 1) \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 2n^3 + 8n^2 + 8n + n^2 + 4n + 4}{4}$$

$$= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} \quad \square \quad \checkmark$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

b) $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in [0, b]$

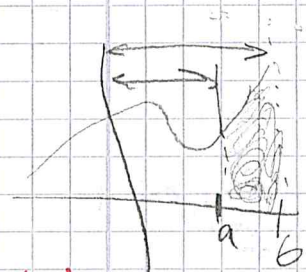
$\cong: \int_a^b f(x) dx = \int_0^b f(x) dx - \int_0^a f(x) dx$

$\sum_{k=1}^N \Delta x_k \cdot f(\xi_k) \Big| \int_0^b f(x) dx - \int_0^a f(x) dx \Rightarrow$

$\lim_{\Delta(x_k) \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^N \Delta(x_k) f(\xi_k) - \sum_{k=1}^n \Delta x_k f(\xi_k) \right)$

$= \lim_{\Delta(x_k) \rightarrow 0} \sum_{k=a}^b \Delta(x_k) f(\xi_k) = \int_a^b f(x) dx \quad \square \quad \checkmark$

Da musst du aufpassen



c) $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$

mit $\Delta x_k \rightarrow 0$

zerlegung für $[a, b]$

$n \rightarrow \infty$ Integral für $f(x) = x^3$

⋮

2/3

A3 Mathe

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

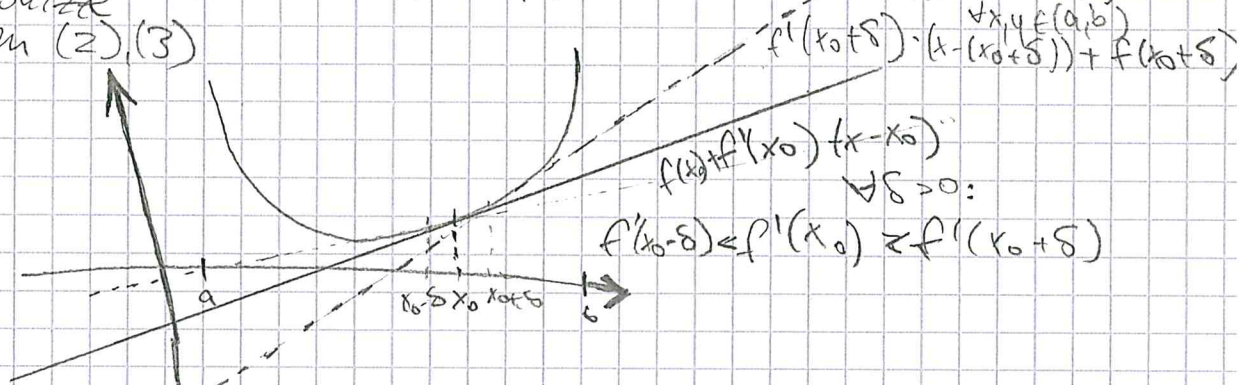
ZZ:

(1) f ist konvex, $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

(2) $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x, x_0 \in (a,b)$

(3) $f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \quad \forall \theta \in (0,1)$

Skizze
zu (2), (3)



$$Q(\xi) = \theta f(\xi) + (1-\theta) \cdot f(y) - f(\theta \xi + (1-\theta) \cdot y)$$

$$f(x_0 - \delta) + f'(x_0 - \delta) \cdot (x - (x_0 - \delta)) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x < x_0$$

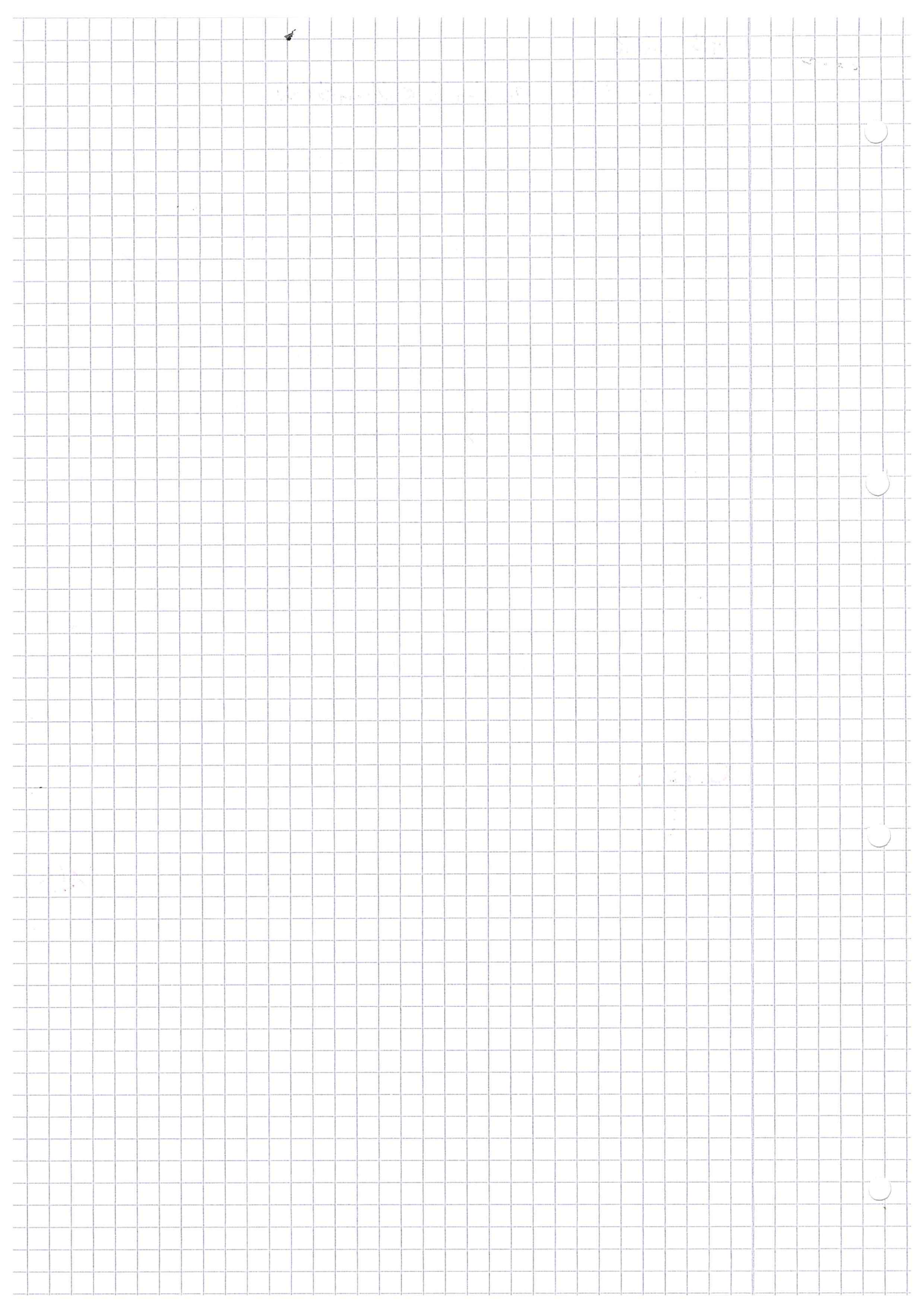
$$f(x_0 - \delta) + f'(x_0 - \delta) \cdot (x - (x_0 - \delta)) < f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x > x_0$$

$$f(x_0 + \delta) + f'(x_0 + \delta) \cdot (x - (x_0 + \delta)) < f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x < x_0$$

$$f(x_0 + \delta) + f'(x_0 + \delta) \cdot (x - (x_0 + \delta)) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x > x_0$$

Beweis ?

...



Aufgabe 1

$$f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Z}: \inf_{x \in A \cup B} f(x) = \inf \left\{ \inf_{x \in A} f(x), \inf_{x \in B} f(x) \right\}$$

Bew.: Ohne Einschränkung $\inf_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x)$

Sei $z \in A \cup B$, dann gilt:

$$1.) \quad z \in B: \quad f(z) \geq \inf_{x \in B} f(x) \geq \inf_{x \in A} f(x)$$

$$2.) \quad z \in A: \quad f(z) \geq \inf_{x \in A} f(x)$$

$\inf_{x \in A} f(x)$ ist untere Schranke von $f(x)$ für $x \in A \cup B$.

Sei s beliebige untere Schranke von $f(x)$ für $x \in A \cup B$,

so ist s auch untere Schranke von $f(x)$ für $x \in A$, sodass $\inf_{x \in A} f(x) \geq s$

$\Rightarrow \inf_{x \in A} f(x)$ ist größte untere Schranke von $f(x)$ für $x \in A \cup B$,

$$\text{also } \inf \left\{ \inf_{x \in A} f(x), \inf_{x \in B} f(x) \right\} = \inf_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in A \cup B} f(x)$$

Aufgabe 2

$$a) \quad \mathbb{Z}: \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(IA): \quad n=1 \quad 1^3 = \frac{1 \cdot (1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = 1 \quad \checkmark$$

(IV): Gleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$(IS) \quad n \mapsto n+1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4 \cdot (n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $a \in [0, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^b f(x) dx - \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{N.: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k) (x_k - x_{k-1})$$

stiert für
Folgen von
Zerlegungen Z_n

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k) (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=\{ \ell \mid \ell_2 = a \}}^b f(z_k) (x_k - x_{k-1})$$

$$\text{so dass } a \in [0, b] = \int_0^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx$$

Skizze ist.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^b f(x) dx - \int_0^a f(x) dx \quad \square$$

$b \in \mathbb{R}, a < b$

$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ eine Zerlegung Z_n von $[a, b]$ definiert
wird mit $\Delta Z_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$,

$$x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = a + b - a = b$$

$$x_0 = a$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n} - a - k \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq n} \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0$$

Berechne für $f(x) = x^3$ das Riemann Integral

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{b}{=} \int_0^b f(x) dx - \int_0^a f(x) dx$$

2. Zerlegung $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$2) = x_{k-1}^3 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left((k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \right)^3 \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \right)^4 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \stackrel{a)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \right)^4 \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{b^4}{4} - \frac{1}{2n^2} + \frac{b^2}{4n}}_{\rightarrow 0} = \frac{b^4}{4}$$

$$2.) f(z_k) = x_k^3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(k \cdot \frac{b}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{n}\right)$$

$$\stackrel{\text{analog zu 1}}{=} \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} + \underbrace{\frac{b^4}{2n} + \frac{b^4}{2n^2}}_{\rightarrow 0} = \frac{b^4}{4}$$

$$3.) f(z_k) = \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k \cdot \frac{b}{n} + (k-1) \cdot \frac{b}{n}}{2}\right)^3 \cdot \frac{b}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2}\right)^3$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^n \underbrace{k^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot k^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot k + \left(-\frac{1}{2}\right)^3}_{\rightarrow 0}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^n k^3 \stackrel{\text{analog}}{=} \frac{b^4}{4}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

Aufgabe 3

$f(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

(1) f ist konvex, d.h. $f''(x) > 0$

(2) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

(3) $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \quad \forall \theta \in \{0,1\}$

Bew.: (1) \rightarrow (2)

$$x > x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \quad \left. \begin{array}{l} \text{MWS} + f''(x) > 0 \\ \geq f'(x_0) \end{array} \right\}$$

$$x < x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0)$$

(2) \Rightarrow (3)

Aus (2) folgt:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

Setze $x_0 = \theta x + (1-\theta)y$ mit $\theta \in (0,1)$

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq f(y) - \frac{f(\theta x + (1-\theta)y) - f(x)}{\theta - x} \cdot (\theta - x) + f(x)$$

$$\frac{x_0 - x}{1 - x_0} \cdot \frac{1-\theta}{\theta} \Rightarrow f(y) - f(\theta x + (1-\theta)y) \cdot \frac{1-\theta}{\theta} + f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

$$(3) \Rightarrow (1)$$

$$h(\psi) := \theta f(\psi) + (1-\theta) \cdot f(\psi) - f(\theta \psi + (1-\theta)y)$$

Es gilt: $h(\psi) \geq 0$ nach (3)

$$\text{sowie } h(y) = 0$$

$\Rightarrow h$ hat bei y ein Minimum

$$\Rightarrow 0 \leq h''(\psi) = \underbrace{\theta(1-\theta)}_{\geq 0} \cdot f''(\psi)$$

$$\Rightarrow f''(\psi) \geq 0 \xrightarrow{\geq 0} f \text{ konvex}$$

Aufgabe 4 $f(x,y) = \frac{x}{y} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

\exists : f kann in $(0,0)$ nicht stetig fortgesetzt werden.

Bew.: Definiere Nullfolgen $a_n = (0, \psi(n))$, $b_n = (\psi(n), \psi(n))$ mit $\psi(n)$ Nullfolge

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(0, \psi(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\psi(n)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\psi(n), \psi(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n)}{\psi(n)} = 1$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$, also nicht stetig fortsetzbar.