Mathe I Nachklausur SS 2013 Zeit: 150min
Prof. Kuwert
Assistent: Magni

Für das Bestehen waren 12 der 36 Punkte ausreichend. Mit 21P hatte man bereits eine 2.3, mit 23P eine 2.0 usw ...

Aufgabe 1 (5 = 1+1+1+2 P)

Ableitungen der folgenden Funktionen:
a) (ln x) / x
b) x*(exp(x)-1)
c) sinh(x^2)
d) phi(x) = Umkehrfunktion von tan y
Tipp (war nicht in der Klausur!): tan y = sin y / cos y

Aufgabe 2 (3 P)

Bestimmen aller komplexen Lösungen für z^6 = -1
*Tipp (war nicht in der Klausur!): Hier reicht es -1 = (1)*e^(rho*PI) gleichzusetzen, wenn man Polynomdivision etc. Verwendet muss dies begründet sein, sonst gibt es nur 1P für die Lösung!*

Aufgabe 3 (4 = 2+2P)

Skizzen der Funktionen mit Angaben von mindestens 3 Fkt. Werten!

a) f(x) = (3x^2 – 7x – 3) / (x – 2) für x !=2
b) f(x) = cot (PI/2 – x) auf 0, 0.75*PI
Tipp (war nicht in der Klausur!): Nicht nur 3 Punkte malen und verbinden, es sollte die Funktion ersichtlich sein und vorallem auf dem ganzen Intervall, falls gegeben!

Aufgabe 4 (6 = 2+2+2P)

Begründete Antwort ob die Folge a) beschränkt und b) konvergent

i) a(n) = (n^2-2n+10)/(3n^2+1000n+1)
ii) a(n) = (n^2)*sin((2n+1)*PI/2)
Tipp (war nicht in der Klausur!): nicht vom sin irritieren lassen, n^2 sorgt für Divergenz!

iii) a(n) = n / (2^n)

Aufgabe 5 (3P)

Eine Funktion f : I = (-1,1) -> |R heißt ungerade (bzw. Gerade), falls f(-x) = -f(x) (bzw. f(-x) = f(x)) für alle x aus I. Zeigen Sie: ist f : I -> |R ungerade und F eine Stammfunktion von f, so ist F gerade.

Aufgabe 6 (2P)

Zeigen (mit Induktion):

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-3) = n^2 - 2n$$

Aufgabe 7 (4 = 2+2 P)

Berechnen Sie den Kern der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das GLS:

1x + 1y + 1z = 6
2x + 2y + 4z = 9
1x + 1y + 3z = 12

Lösung: Am besten (II) halbieren -> x+y+2z=4.5 und dann (III)-(I) und (II)-(I)
=> Wiederspruch, leere Lösungsmenge

Aufgabe 8 (3P)

Sei M = {(x,y) aus |R^2 : x > 0, y = 1/x}. Finden Sie auf M den Punkt mit dem kleinstem Abstand zum Nullpunkt (dessen Existenz kann angenommen werden).

Tipp (war nicht in der Klausur!): Die Aufgabe ist nicht so schwer wie es zuerst aussieht. Im Prinzip habt Ihr einen Graph und sucht einfach den Punkt der am nähesten zu (0,0) ist. Der Abstand ist ja durch sqrt(x^2+y^2) berechenbar. Dann nur noch einsetzen und Ableiten.
(Überlegung: wieso ist das Ergebnis der ersten Ableitung ein Minimum und kein Maximum?)

Aufgabe 9 (3P)

Quadratisches Taylorpolynom berechnen. Während der Klausur wurde nochmals darauf hingewiesen, dass quadratisch Grad 2 bedeutet.

f(x) = (1+x^2)^(3/2)
Im Entwicklungspunkt x0 = 1.

Tipp (war nicht in der Klausur!): Wenn man nur die "Normalform" hinschreibt, also ohne eine einzige Ableitung, bekommt man schon 1P.

Aufgabe 10 (4 = 2+2 P)

Integrale berechnen (Die Lösungen waren natürlich nicht gegeben):

a) Hinweis (war gegeben): partielle Integration

$$\int_0^{\pi} x \sin(x)\, dx = \pi \approx 3.14159$$

b) Hinweis (war gegeben): Substitution x = ln (y^2 + 1)

$$\int_1^2 \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}\, dx = \sqrt{e^2 - 1} - \sqrt{e - 1} \approx 1.21683$$