Zusammenfassung Montag 16.12.15 MI

- $\exp(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp(r x) = \exp(x)^r \quad \forall r \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R}$

Bsp.: Dezimalbruchfolgen

$$a_n = k_0, k_1, \ldots, k_n \qquad k_0 \in \mathbb{Z}$$

konvergieren gegen eine $\quad k_i \in \{0, \ldots, 9\}$
reelle Zahl, denn sie sind $\quad i = 1, 2, \ldots, n$
monoton wachsend ($k_0 > 0$)
bzw. fallend ($k_0 < 0$) und beschränkt $|a_n| \leq |k_0| + 1$

Die Folgen $a_0 = 0,\ a_1 = 0{,}9,\ a_2 = 0{,}99,\ a_3 = 0{,}999$
$b_0 = 1,\ b_1 = 1{,}0,\ b_2 = 1{,}00,\ b_3 = 1{,}000$
besitzen den selben Grenzwert 1.

Wir haben bereits gesehen, dass Abstände zu Folgegliedern konvergierender Folgen klein werden müssen.

Satz: Ist $a_n$ Cauchy-Folge, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0$, sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$
so ist $a_n$ konvergent

Beweisidee: Sei $a_n$ Cauchy-Folge.
(1)
Die Folge ist beschränkt, denn mit $\varepsilon = 1$ folgt

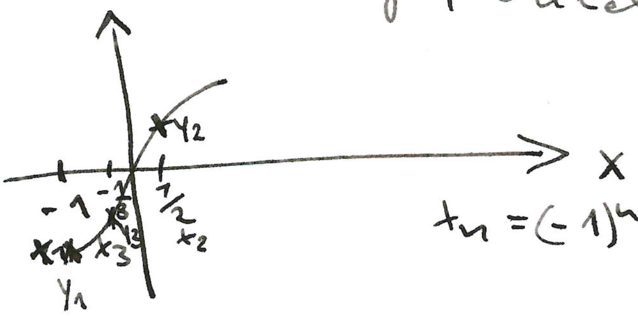
$$|a_n - a_{N+1}| < 1 \quad \forall n > N$$

bzw. $|a_n| \leq |a_{N+1}| + 1$
Damit folgt $a_n \leq \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|$

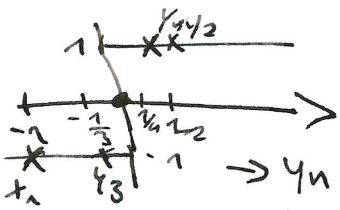
(2) Die Folge ist enthalten im Intervall $[-S; S]$.
Wir halbieren sukzessiv das Intervall und wählen jeweils eine Hälfte aus, die unendlich viele Folgeglieder enthält.


## 5 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Wir betrachten Bilder konvergenter Folgen, d.h. $f(x_n) = y_n$ für konvergente Folgen $x_n$ und stellen die Frage, ob auch $y_n$ konvergent ist.




$x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$




$\to y_n$ nicht konvergent

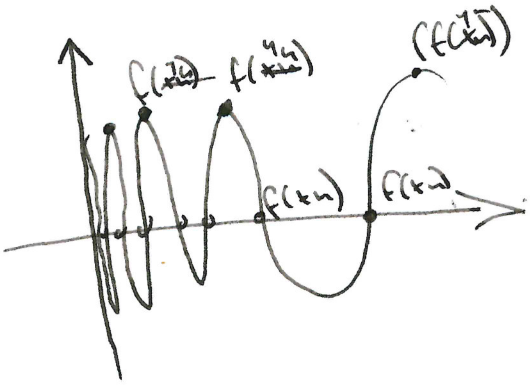
<u>Def.</u>: Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, konvergiert für $x \to x_0$ gegen $a$, wenn $f(x_n) \to a$ für jede Folge $x_n \to x_0$.
Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

<u>Bem.</u>: (1) $f$ muss in $x_0$ nicht definiert sein.
z.B. $f(x) = \frac{g(x)}{x}$

(Im Beispiel rechts- und linksseitiger Grenzwerte betrachten wir nur Folgen $x_n > x_0$ bzw. $x_n < x_0$. Man schreibt dann

$\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$.

Bsp.: (I) $f(x) = \cancel{x}\cdot \sin(\frac{1}{x})$, $x > 0$ besitzt keinen rechtsseitigen Grenzwert in $x_0 = 0$. 16.12.15 MB



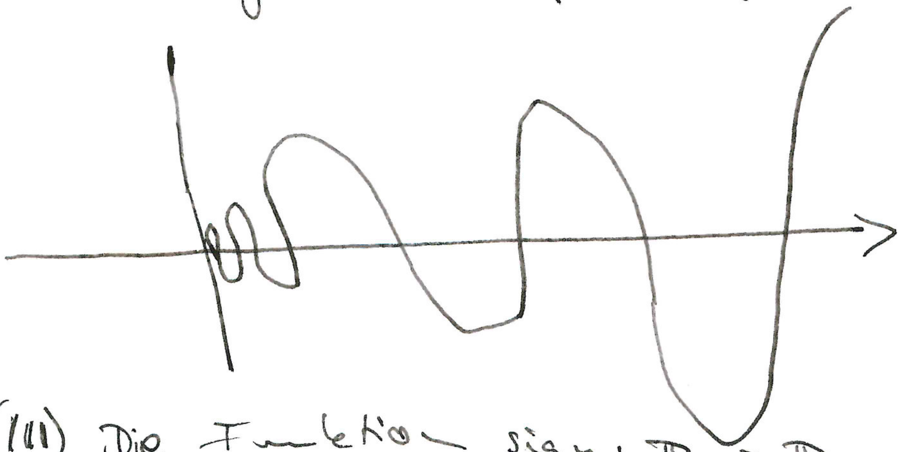

gilt $f(x_n) = 0 \to 0$

$f(y_n) = 1 \to 1$

(II) gilt $g(x) = \cancel{\frac{1}{x}}\, x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hat rechtsseitigen Grenzwert 0, denn

$$|g(x)| = |x_n| \cdot |\sin(x_n)| \leq |x_n|$$

also $g(x_n) \to 0$ falls $x_n \to 0$



(III) Die Funktion $\text{sign}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

hat $x_0 = 0$ den rechtsseitigen Grenzwert $+1$ und den linksseitigen Grenzwert $-1$

Satz: Gilt $f(x) \to a$ und $g(x) \to b$

für $x \to x_0$: So folgt

$$\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \to \alpha \cdot a + \beta \cdot b$$

$$f(x)\, g(x) \to ab$$

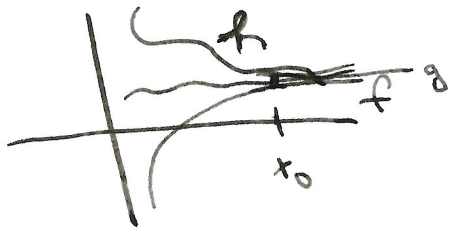
$$\frac{f(x)}{g(x)} \to a/b \qquad b \neq 0$$

Gilt $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in D$

$f(x) \to a$, $h(x) \to a$ für $x \to x_0$, so folgt

$g(x) \to a \quad x \to x_0$

Bew.: Die Aussagen folgen aus den Rechenregeln für Grenzwerte




Def.: $f\; D \to \mathbb{R}$ heißt ~~stetig~~ in $x_0 \in D$

falls gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

d.h. f konvergiert für $x \mapsto x_0$ gegen

$f(x_0)$ (*)

Bem.: Anschaulich bedeutet Stetigkeit in $x_0$, dass der Graph der Funktion ohne Absetzen des Stifts bei $x_0$ gezeichnet werden kann.

(*) f heißt stetig auf D, falls f in jedem Punkt stetig ist.

Bsp. (I) $\sin(x)$ ist stetig in $\mathbb{R}$

(II) $f(x) = \text{sign}(x)$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$