Ableitung und Integral

- F Stammfunktion zu f, falls $F' = f$
  - Eindeutig bis auf Konstant
- Für jede Stammfunktion $F(x) = F(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$
- $\Rightarrow$ $\boxed{\int_a^b f(t) = F(b) - F(a)}$

$$= [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(x)\Big|_a^b$$

Beispiele für Stammfunktionen

$f(x)$	x^k $k \neq -1$	$\frac{1}{x}$	x^α $\alpha \neq -1, x>0$	$e^{\lambda \cdot x}$
$F(x)$	$\frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1}$	$\ln(x)$	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}$	$\frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot x}$

$f(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$F(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$

Partielle Integration ergibt sich unmittelbar aus der Produktregel für Ableitungen:

Satz: Seien $f, g \in C^1([a,b])$, d.h. stetig mit stetigen Ableitungen. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) \cancel{dx} g'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x) g(x)\,dx + [f(x)g(x)]_a^b$$

Bew.: Die Funktion $F(x) = f(x)g(x)$ ist Stammfunktion von $F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Damit folgt:

$$\int_a^b f'(x) g(x)\,dx + \int_a^b f(x) g'(x)\,dx$$

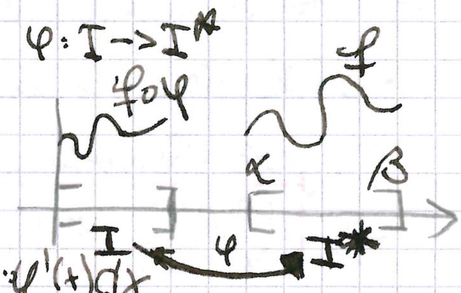
$$= \int_a^b F'(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

$$= [f(x)g(x)]_a^b$$

$$\int_a^b f'(x) g(x)\,dx = -\int_a^b f(x) g'(x)\,dx + [f(x)g(x)]_a^b \quad \square$$

mit der Substitutionsregel, die aus der Kettenregel folgt, kann der Integrationsbereich verändert werden.

Satz: Sei $I=[a,b]$, $I^*=[\alpha,\beta]$ und $\varphi: I \to I^*$ streng monoton.



Ist $f: I^* \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt: $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx$

Bew.: Sei F die Stammfunktion von f. Nach Kettenregel gilt $(F\circ\varphi)' = F'(\varphi)\,\varphi' = f(\varphi)\,\varphi'$

Damit folgt:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)\,dx$$
$$= [F\circ\varphi]_{x=a}^{x=b} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$
$$= [F(y)]_{y=\varphi(a)}^{y=\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$$

Bsp.: (I) Eine Stammfunktion von $\ln$ haben wir nicht kennengelernt. Es gilt jedoch für $t>1$:

$$\int_1^t \ln(t)\cdot dx = \int_1^t \underbrace{1}_{g'(x),\ g(x)=x}\cdot \ln(x)\,dx = \int_1^t g'(x)\cdot\underbrace{\ln(x)}_{=f(x)}\,dx$$

$$= -\int_1^t \underbrace{x}_{g(x)}\cdot \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{=f'(x)}\,dx + [x\cdot\ln(x)]_{x=1}^{x=t}$$

$$= -(t-1) + t\cdot\ln(t) - 1\cdot\underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

$$= -(t-1) + t\cdot\ln(t)$$

(II) Für $n\geq 0$ bestimme $A_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$ ~~$(\sin(x))$~~

Es gilt $A_0 = \frac{\pi}{2}$ sowie

$$A_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2}$$
$$= (-0) - (-1) = 1$$

Bestimme $A_k = \int_0 \sin^k(x)\,dx$; $A_0 = \pi/2$, $A_1 = 1$ [illegible]

Damit folgt:

$$A_{n+1} = \int \sin^{n+1}(x)\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{=g'(x)} \underbrace{\sin^n(x)}_{=f(x)}$$

$$= - \int (-\cos(x))\, n \cdot \sin^{n-1}(x) \cos(x)\,dx$$

$$+ \underbrace{\left[-\cos(x) \sin^n(x) \right]_0^{\pi/2}}_{=0} \qquad \begin{array}{l} -\cos(\pi/2) = 0 \\ \sin^n(0) = 0 \text{ für } n \geq 1 \end{array}$$

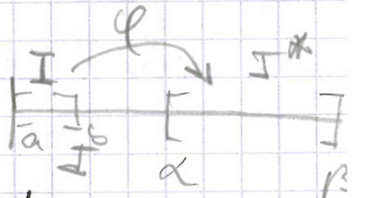
$$= n \cdot \int \underbrace{\cos^2(x)}_{=1-\sin^2(x)} \sin^{n-1}(x)$$

$$= n \cdot \underbrace{\int \sin^{n-1}(x)\,dx}_{A_{n-1}} - \underbrace{n \cdot \int \sin^{n+1}(x)\,dx}_{A_{n+1}}$$

d.h.

$$(n+1) \cdot A_{n+1} = n \cdot A_{n-1} .$$

Weitere Beispiele:



(III): $\varphi(x) = \dfrac{x - x_0}{\lambda}$ gilt

$$\int_\alpha^\beta f(y)\,dy = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\varphi(x)) \underbrace{\varphi'(x)}_{\frac{1}{\lambda}}\,dx = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{x_0+\lambda\alpha}^{x_0+\lambda\beta} f\left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right) dx$$

z.B. $f = 1$, $\varphi(x) = \frac{x}{\lambda}$ zum Test

(IV) Es gilt:

- $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{f'(x)}\,dx = \int_a^b \underbrace{(\ln(f(x)))'}_{\text{Stammfunktion}}\,dx = \left[\ln(f(x)) \right]_{x=a}^{x=b}$

- $\displaystyle\int_a^b u \cdot (1+u^2)^{1/2}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int ((1+u^2)^{3/2})'\,du = \left[(1+u^2)^{3/2} \right]_a^b$

Mit $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}$

folgt $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1/2}{1+x}\,dx + \int \frac{1/2}{1-x}\,dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\text{Stamm-}\\ \text{fkt.}\\ \ln(1-x)}} + \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\substack{\text{Stamm-}\\ \text{fkt}\\ \ln(1+x)}}\,dx = \left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]_a^b = \left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_a^b$$

Wie definiert man das Integral einer Funktion, die an einem Intervallende eine Singularität besitzt oder auf einem unbeschränkten Intervall definiert ist.

Def.: Seien $-\infty \le a < b \le +\infty$ uneigentliches Integral von $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

Sofern dieser Grenzwert existiert. Andernfalls heißt das Integral divergent.

Bsp.: $\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta x^\alpha\,dx$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_1^\beta$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(\beta^{\alpha+1} - 1\right)$$

$\rightarrow$ existiert für $\alpha < -1$ $= \frac{1}{\alpha+1}(0-1) = \frac{-1}{\alpha+1}$