23.11.2015
Mathe I

Aus der Linearfaktor-Darstellung komplexer Polynome wollen wir eine Darstellung reeler Polynome folgern. Jedes reele Polynom $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, $t \in \mathbb{R}$ lässt sich als komplexes Polynom ansehen, d.h. $f(z) = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$ mit reelen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. Komplexe Nullstellen treten dann stets als konjugierte Paare auf.

Folgerung 2: Für jedes reele Polynom vom Grad $n \geq 1$ gilt $f(t) = \hat{a}_0 \cdot \prod_{r=1}^{R} (\lambda - \lambda_r)^{e_r} \cdot \prod_{j=1}^{J} (t^2 - 2\alpha_j t + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{m_j}$

mit den reelen Nullstellen λ_r von f und komplexen Nullstellen $\alpha_j + i \cdot \beta_j$.

Bew.: Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle des reelen Polynoms f, so gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \overline{f(\lambda)} &= \overline{a_0 + a_1 \cdot \lambda_1 + \ldots + a_n \lambda_n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 \cdot \lambda_1} + \ldots + \overline{a_n \cdot \lambda_n} \\ &= a_0 + a_1 \cdot \overline{\lambda_1} + \ldots + a_n \overline{\lambda_n} \\ &= f(\overline{\lambda}) \end{aligned}$$

d.h. mit λ ist auch $\overline{\lambda}$ Nullstelle.

Dann gilt: $(z - \lambda)(z - \overline{\lambda})\, g(z)$

$$\begin{aligned} &= (z - \alpha + i \cdot \beta)(z - \alpha - i \cdot \beta) g(z) \\ &= (z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2)(g(z)) \end{aligned}$$

wobei $\lambda = \alpha + i \cdot \beta$

Es ist noch zu zeigen, dass g reele Koeffizienten besitzt, d.h. $g(x) = b_0, \dots, b_{n-2} x^{n-2}$

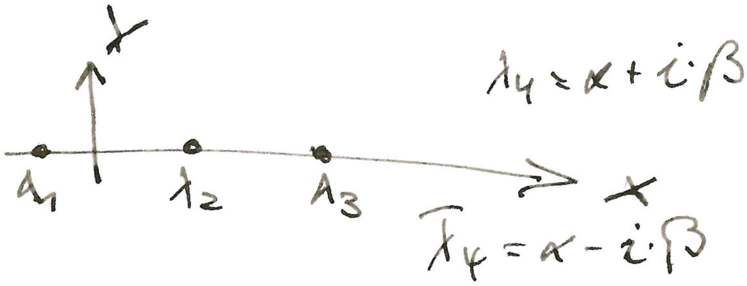
mit $b_0, \dots b_{n-2} \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 = \operatorname{Im} f(x)$$
$$= \operatorname{Im}\Big(\big(\underbrace{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2}_{\neq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}}\big)\, g(x)\Big)$$

Folglich muss auch $g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ reel sein,
d.h. $0 = \operatorname{Im} g(x) = \operatorname{Im}(b_0) + \operatorname{Im}(b_1) \cdot x + \dots + \operatorname{Im}(b_{n-2})\, x^{n-2}$

Dies kann nur gelten, wenn $\operatorname{Im}(b_0) = \dots = \operatorname{Im}(b_{n-2}) = 0$ gilt, also wenn g reelles Polynom ist. Q.E.D.

Illustration:



Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen, d.h.

$$f(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$$

die außerhalb der Nullstellenmenge N_q von q definiert sind.

<u>Lemma</u>: Seien $p(t) = a_0 + a_1 \cdot t^1 + \dots a_n \cdot t^n$ und $q(t) = b_0 + b_1 t^1 + \dots b_m \cdot t^m$ Polynome vom Grad m bzw. n mit $n \geq m$.
Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome g und r mit $\text{grad}(r) < n$, sodass $f(t) = g(t) + \frac{r(t)}{q(t)}$, $t \in \mathbb{R} \setminus N_q$

<u>Beweis</u>: Wir definieren $p_1(t) = p(t) - \frac{a_m}{b_n} t^{m-n} g(t)$
Dann gilt

$$\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p_1(t) + \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} \cdot g(t)}{g(t)}$$

$$= \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} + \frac{p_1(t)}{g(t)}$$

höchster Koeffizient wird eliminiert

Dabei gilt $\text{grad}(p_1) < m$
Für $m = n$ ist die Existenz von g und r damit nachgewiesen. Gilt $m \geq n$ so argumentieren wir per Induktion über die Differenz $i = m - n$ $(n-m)$
Der IA, d.h. $i = 0$, ist bereits bewiesen. Die Aussage gelte für Differenzen $> i$. Insbesondere gilt also

$$\frac{p_1(t)}{q(t)} = g_1(t) + \frac{r_1(t)}{q(t)}$$ mit $\text{grad}\, r_1 < n$.

Damit folgt $\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_n}{b_m} \cdot t^{n-m} + g_1(t) + \frac{r_1(t)}{q(t)}$

Das entspricht der bisherigen Darstellung mit

$$g(x) = \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} + g(t), \quad r(t) = r_1(x)$$

um Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir die Existenz zweier Darstellungen an, d.h. $f(x) = g_1(t) + \frac{r_1(t)}{q(t)} = g_2(t) + \frac{r_2(t)}{q(t)}$

Dann folgt:

$$(g_1(t) - g_2(t)) \underbrace{q(t)}_{\text{grad } n} + \overbrace{(r_1(t) - r_2(t))}^{\text{grad} \leq n} = 0$$

Da die linke Seite ein Polynom ist, mit unendlich vielen Nullstellen, müssen alle Koeffizienten verschwinden.

Da $\text{grad}(r_1 - r_2) < n$ muss zein nicht $g_1 = g_2$ gelten. mit grad r mit $\text{grad}(r) < n$, sodass

$$f(t) = g(t) + \frac{r(t)}{q(t)}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus N_q$$

Dies impliziert also unmittelbar $r_1 = r_2$.

Praktisch folgt die Darstellung aus Polynomialdivision:
Es gilt z.B.:

$$\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{t^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 + 2x} = x^2 + \frac{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - x^2(x^2+2x)}{x^2 + 2x}$$

$$\frac{a_m}{b_n} \cdot t^{m-n}$$

$$= \frac{x^2 - 3x^3 + x^2 - x + 1}{x^2+2x}$$

23.11.15
M I

$$x^2 - 3\cdot x + \frac{\overset{-3+3}{x^2} - x + 1 - (3x)(x^2+2x)}{x^2+2x}$$

$$= x^2 - 3x + \frac{(7x^2 - x + 1) - 7\cdot(x^2+2x)}{x^2+2x}$$

$$= x^2 - 3x + 7 + \frac{-15x + 1}{x^2+2x}$$

Was lässt sich über rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ in der Menge N_q sagen? Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ l-fache Nullstelle von q und k-fache Nullstelle von p_1, so gilt

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-\lambda)\,p_1(x)}{(x-\lambda)\,q(x)}$$

wobei $q(\lambda) \neq 0$ und $p_1(\lambda) \neq 0$ gelte.

- 1. Fall $k > l$, so lassen sich die Faktoren kürzen und ~~man~~ $f(\lambda)$ ist wohldefiniert und λ heißt Singularität
- 2. Fall Gilt $k < l$ so ~~gilt~~ heißt λ Polstelle z.B.: $\frac{x^2+1}{x-1}$