Die Gesetze implizieren, dass $a \cdot 0 = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$ gilt: Denn existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot 0 \neq 0$, so folgt:

$$0 \cdot a + a \neq 0 + a = a$$

also:

$$\underbrace{a \cdot (\underbrace{0 + 1}_{=1})}_{a} \neq a$$

D.h. es gilt $\neg(\forall a \in \mathbb{R} \ a \cdot 0 = 0) \Rightarrow a \neq a$

Dies kann nur dann gelten, wenn $a \cdot 0 = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt.

**Nullteilerfreiheit** Gilt $a \cdot b = 0$, so folgt $a = 0$ oder $b = 0$

Ist $a = 0$, so ist die Aussage klar.

Gilt $a \neq 0$, so existiert $\frac{1}{a}$ (bzw. $a^{-1}$) und es folgt:

$$b = \frac{1}{a} \cdot a \cdot b = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

**Brüche:** Ein Bruch $\frac{p}{q}$ ist zu verstehen als Produkt $p \cdot \frac{1}{q}$

**Satz:** (Bruchrechnung)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Es gilt:

(I) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + c \cdot b}{cd}$ mit $cd \neq 0$

(II) $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$

(III) $\frac{a/c}{b/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ sofern $b \neq 0$

**Beweis (I):** Es gilt:

$$c \cdot d \left( \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \right) = c \cdot d \cdot \frac{a}{c} + c \cdot d \cdot \frac{b}{d}$$

$$= d \cdot a + c \cdot b$$

Multiplikation mit $\frac{1}{c \cdot d}$ zeigt:

$$\frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}$$

Aussage (II) und (III) folgen analog.

QED

**Anordnung von $\mathbb{R}$ (Ungleichungen)**

Die Ungleichung $a < b$ bedeutet, dass $a$ links von $b$ auf der Zahlengerade liegt bzw. $a-b$ links von $0$.

Es gilt stets entweder $a < b$, $a = b$ oder $a > b$

**Es gelten folgende Regeln:**

- $a, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0, \ a + b > 0$
- $a > b, \ b > c \Rightarrow a > c$
- $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \quad c > 0$
- $a > b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad c < 0$
- $a > 0 \Rightarrow -a < 0$

Quadrate sind stets positiv.

## Beträge reeler Zahlen

26.10.15
MI

**Definition** Für $a \in \mathbb{R}$ setze $|a| = \begin{cases} a & \geq 0 \\ -a & \text{sonst } (a<0) \end{cases}$

**Satz (Betrag)**: Seien $a, b \in \mathbb{R}$

(I) $|-a| = |a|$ und $a \leq |a|$

(II) $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$

(III) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(IV) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

(V) $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$ (umgekehrte Dreiecks-ungleichung)

**Beweis**: (I) Wir argumentieren mit einer Fallunterscheidung:

Gilt $-a \geq 0$, so ist
$|-a| = -a$ und $|a| = -a$; gilt
$-a \leq 0$ so ist $|-a| = a$ und
$|a| = a$.

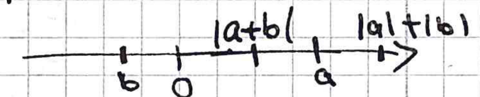
Gilt $a \geq 0$, folgt $|a| - a = a - a = 0$,
Andernfalls $(a<0)$ ist $|a| - a = -a - a \geq 0$

(II) Folgt aus der Definition von $|a|$

(III) Auf Grund von (I) dürfen wir $a, b \geq 0$ annehmen
Damit ist $a \cdot b \geq 0$ und

$$|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$$

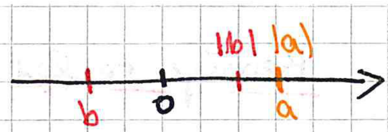
(IV) Falls $a+b \geq 0$ gilt,




folgt, dass $|a+b| = a+b \leq |a| + |b|$
andernfalls (d.h. $a+b \leq 0$) gilt

$$|a+b| = -(a+b)$$
$$= (-a) + (-b) \leq |-a| + |-b|$$
$$= |a| + |b|$$

(V) Es gilt:




$$|a| = |a-b+b|$$
$$|a| = |(a-b)+b|$$
$$|a| \le |a-b| + |b| \qquad | -|b|$$
$$|a| - |b| \le |a-b|$$

Analog folgt: $|b| - |a| \le |a-b|$

$-|a-b|$

QED

Wie unterscheiden sich reelle und rationale Zahlen? Offensichtlich gilt $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Es gilt zudem $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$

Bsp.: Es sei eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$

Angenommen es gibt eine solche Zahl $x$, wir dürfen $x > 0$ annehmen.
und $x = \frac{p}{q}$, wobei p oder q als ungerade angenommen werden darf (gerade können mit 2 gekürzt werden)

Es folgt

$$\frac{p^2}{q^2} = x^2 = 2 \quad \text{also} \quad p^2 = 2q^2$$

d. h. $p^2$ ist gerade! Damit ist aber auch p gerade, d. h. $p = 2p'$

Damit folgt: $4 \cdot (p')^2 = p^2$

$$4 \cdot (p')^2 = 2q^2$$

<u>also:</u> $q^2 = 2 \cdot (p')^2$

d.h. $q^2$ und somit auch $q$ ist gerade! 26.10.15 HI

Dies stellt allerdings einen Widerspruch zur Annahme dar, dass $\frac{p}{q}$ nicht kürzbar ist.

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist also irrational bzw. es existiert kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

Die Lösung lässt sich jedoch beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren.

Wir konstruieren sukzessiv die Dezimalstellen

1. Schritt: Da $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$ gilt $\sqrt{2} = 1,\dots$

2. Schritt: Da $1,4^2 = 1,96$ und $1,5^2 = 2,25$ folgt $\sqrt{2} = 1,4\dots$