Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 4$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$n^2 < 2^n < n!$$

Induktionsanfang: Für $n=5$ gilt

$$n^2 < 2^n < n!$$

denn $25 < 32 < 120$ 1

Gelte nun die Gleichung für n, dann gilt

1) $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2n^2 < 2^{n+1}$

Hier wurde benutzt, dass für $n>4$ gilt 1,5

$$2n+1 < 3n < n \cdot n = n^2 .$$

2) $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!$

Hier wurde benutzt, dass für $n>4$ gilt: 1,5

$$2 < n+1 .$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)

Seien $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

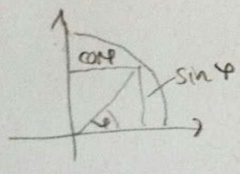
1. Berechnen Sie den Winkel φ, welcher durch diese beiden Vektoren aufgespannt wird.
   Hinweis: Lösen Sie die auftretende Gleichung $\cos(\varphi) = \cdots$ *durch geometrische Überlegungen.*
2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Dreiecks.

1. Es gilt die Formel

$$\cos \varphi = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \quad 1$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 1$$

Der cos ist durch die folgende Strecke gegeben:



Daraus folgt $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, also

$$\frac{1}{2} + \sin^2 \varphi = 1, \text{ also}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}, \text{ also}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Da $\sin \varphi = \cos \varphi$ muss $\varphi = 45°$ gelten. 1

2. Der Flächeninhalt ist die Hälfte desjenigen des aufgespannten Parallelogrammes, also

$$\frac{1}{2}\|v \times w\| \qquad \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{9} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen Sie die komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 2X^2 + 12X - 11$$

Durch Raten sieht man, das $X_0 = 1$ eine Nullstelle ist.
Wir führen Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{l}
X^3 - 2X^2 + 12X - 11 : (X-1) = X^2 - X + 11 \\
\underline{X^3 - X^2} \\
\quad -X^2 + 12X \\
\quad \underline{-X^2 + X} \\
\qquad\quad 11X - 11 \\
\qquad\quad \underline{11X - 11} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Die weiteren Nullstellen sind also diejenigen des Polynoms

$$X^2 - X + 11, \text{ d.h.}$$

$$X_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 11} = \frac{1 \pm \sqrt{-43}}{2}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_3(x, 0)$ dritten Grades mit Entwicklungspunkt $a = 0$ von der Funktion

$$e^{-\sin(x)}$$

Bezeichne $f(x) = e^{-\sin(x)}$

Wir haben $f'(x) = -\cos(x) e^{-\sin(x)}$

und $f''(x) = \sin(x) e^{-\sin(x)} + \cos^2(x) e^{-\sin(x)}$

$$f'''(x) = \cos(x) e^{-\sin(x)} + -\sin(x)\cos(x) e^{-\sin(x)}$$

$$\pm 2\sin(x)\cos(x) e^{-\sin(x)} + -\cos^3(x) e^{-\sin(x)}$$

An der Stelle $x=0$ bekommen wir

$f(0) = 1$

$f'(0) = -1$

$f''(0) = 1$

$f'''(0) = 0$

Daher ist das Taylorpolynom gegeben durch

$$T_3(x,0) = f(0) + f(0) \cdot X + \frac{f''(0)}{2} X^2 + \frac{f'''(0)}{6} X^3$$

$$= 1 \pm X + \frac{X^2}{2}$$

$$T_n f(x, a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Aufgabe 5 (1+3 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie präzise, was es bedeutet, dass f im Punkt x_0 stetig ist.

b) Begründen Sie, dass ε-δ-Stetigkeit Folgenstetigkeit impliziert.

Lösung:

a) Die Funktion f ist im Punkt x_0 stetig, falls für alle reellen $\varepsilon > 0$ ein reelles $\delta > 0$ existiert mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Sei (y_n) eine Folge, welche gegen x_0 konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen (Folgenstetigkeit), dass ein N existiert so, dass

$$|f(y_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

Wegen der ε-δ-Stetigkeit gibt es aber ein δ, so dass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

und wegen der Konvergenz der Folge gegen x_0 ein N, so dass

$$|y_n - x_0| < \delta$$

für alle $n > N$. Zusammengenommen ergibt sich die behauptete Aussage für dieses N.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x)$$

im Intervall zwischen $\frac{1}{2}$ und 2 gegeben ist.

Die Länge ergibt sich durch das Integral

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Berechne:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{x}$$

$$f'(x)^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$1 + f'(x)^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right)^2$$

Daher:

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{15}{16} + \ln(2)$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)
Begründen Sie, dass der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^{5x}+1}$$

Lösung 1:

Wir untersuchen $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{5x}+1$

im Intervall $(0,\infty($. Hier ist $g(x) \neq 0$ und

$f'(x) = e^x$ und $g'(x) = 5e^{5x}$ erfüllen

~~sind bestimmt divergent~~

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5e^{5x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5} e^{-4x} = 0$$

daher gilt nach de l'Hôpital auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^{5x}+1} = 0 .$$

---

alt. Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^{5x}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-4x}}{1+e^{-5x}}$$

(kürzen durch e^{5x}) $\underbrace{\text{und } \lim_{x\to\infty} 1+e^{-5x} \neq 0}$

Zähler und Nenner sind stetig und Nenner $\neq 0$ im Intervall $(0,\infty($, daher

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-4x}}{1+e^{-5x}} = \frac{\lim_{x\to\infty} e^{-4x}}{\lim_{x\to\infty} 1+e^{-5x}} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$