Intervalle

02.11.15
MI

- (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$
- kleinste obere Schranke einer beschränkten Menge M $\sup M$

z. B.: $M = [a,b) \Rightarrow \sup M = b$

Vollständige Induktion (i) Es gilt $A(1)$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$ (ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$\rightarrow A(n)$ gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Bsp.: (Geometrische Summe)

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Beweis: IA: Für $n=1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{1} x^k = 1 + x = \frac{(1+x)\cdot(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}.$$

IS: Sei die Formel für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1}$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$

$$\frac{1-x^{n+1} + x^{n+1}\cdot(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Q.E.D.

Um m Gegenstände in verschiedenen Schubfächer einzuordnen, werden $n \geq m$ viele Fächer benötigt.

Satz 2: Ist f eine Abbildung:

$$f: \{1,2,\dots,m\} \to \{1,2,\dots,n\}$$

injektiv, so folgt $n \geq m$

Beweis: Wir argumentieren vollständiger Induktion bezüglich n.

IA: Ist $f: \{1,\dots,m\} \mapsto \{1\}$ injektiv, so folgt $m=1$

IS: Sei $f: \{1,\dots,m\} \mapsto \{1,\dots,n+1\}$ injektiv
Gilt $f^{-1}(\{n+1\}) = \emptyset$, so ist $f: \{1,\dots,m\} \mapsto \{1,\dots,n\}$ injektiv, so folgt $m < n \leq n+1$
Gilt $f^{-1}(\{n+1\}) = \ell \in \{1,\dots,m\}$,
Sei $g: \{1,\dots,m-1\} \to \{1,\dots,m^2\} \setminus \{\ell^2\}$ bijektiv. Dann ist

$$\tilde{f} = f|_{\{1,\dots,m\}\setminus\{1\}} \circ g$$

eine injektive Abbildung von $\{1,\dots m-1\}$ in $\{1,\dots,n\}$

und es folgt $m-1 \leq n$ bzw. $m \leq n+1$

Beweis: Der Wert der geometrischen Summe folgt auch aus dem Trick.

$$(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1}$$
$$= (1 + x + \dots + x^n) - (x + x^2 + \dots + x^{n+1})$$
$$= 1 - x^{n+1}.$$

02.11.15
MF

Definition: Sei M eine Menge. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt Anzahl der Elemente in M, falls eine Bijektion $f: \{1, \dots, n\} \to M$ existiert.
Gilt $M = \emptyset$ ist die Anzahl 0.
Wir schreiben $\# M$ für die Anzahl.

Im obigen Satz benötigen wir eine Anordnung einer Menge. Für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei

$$n! = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n, & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

bezeichnet n-Fakultät.
Beachte Rekursionsformel $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

Satz 2 (Zahl der Permutationen): Es gibt $n!$ verschiedene Möglichkeiten, eine n-elementige Menge zu nummerieren.

Bsp.: Betrachte $M = \{a, b, c\}$

1	2	3
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Beweis: IA: Für $n=1$ gibt es $1 = 1!$ Möglichkeiten, also gilt die Aussage.
IS: Sei die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.
Sei $S_{n+1,k}$ die Menge aller Bijektionen von $\{1, \dots n+1\}$ in $\{1, \dots n+1\}$, für die die Nummer k auf $n+1$ abgebildet wird.
Davon exakt $n!$ viele. Es gibt $n+1$ Möglichkeiten, die Nummer k zu wählen.

Insgesamt also $(n+1)$ $\# S_{n+1,k} = (n+1)\cdot n! = (n+1)!$

Definition: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (Sprechweise n über k) definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}^{k\text{-Faktoren}}}{1\cdot 2\cdot\ldots k}$$

Weiter sei $\binom{\alpha}{0} = 1$

Beweis: Für $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \geq k$ gilt

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k!\cdot(\alpha-k)!}$$

Lemma: Es gilt

$$\binom{\alpha+1}{k} \cancel{\alpha+1} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1}$$

~~IA~~: Für $k=1$ gilt:

$$\binom{\alpha+1}{1} = \alpha+1 = \binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{0}$$

Für $k \geq 2$ gilt:

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1)+1)}{(k-1)!}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1) + \alpha(\alpha-1)(\alpha-k+2)\cdot k}{k!}$$

$$= \frac{(\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+2))\overbrace{((\alpha-k+1)+k)}^{=\alpha+1}}{k!}$$