Kapitel 2 – Kodierung

1. Kodierung von Zeichen
2. **Kodierung von Zahlen**
3. Anwendung: ReTI

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. Christoph Scholl

Institut für Informatik
WS 2015/16

UNI FREIBURG

Zahlensysteme

Definition

Ein Zahlensystem ist ein Tripel $S = (b, Z, \delta)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $b \geq 2$ ist eine natürliche Zahl, die Basis des Zahlensystems.
- Z ist eine b-elementige Menge von Symbolen, den Ziffern.
- $\delta : Z \to \{0, 1, \ldots, b-1\}$ ist eine Abbildung, die jeder Ziffer umkehrbar eindeutig eine natürliche Zahl zwischen 0 und $b-1$ zuordnet.

Beispiele für Zahlensysteme

- Dualsystem: (Binärsystem)
  $b = 2 \quad Z = \{0, 1\}$ $\quad \delta(0) = 0, \delta(1) = 1$

- Oktalsystem:
  $b = 8 \quad Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\quad \delta(0) = 0 \dots \delta(7) = 7$

- Dezimalsystem:
  $b = 10 \quad Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\quad \delta(0) = 0 \dots \delta(9) = 9$

- Hexadezimalsystem:
  $b = 16 \quad Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$
  $\delta(0) = 0, \dots, \delta(9) = 9, \delta(A) = 10, \delta(B) = 11, \dots, \delta(F) = 15$

Festkommazahlen

Definition

Eine Festkommazahl ist eine endliche Folge von Ziffern aus einem Zahlensystem zur Basis b mit Ziffernmenge Z.

- Sie besteht aus $n+1$ Vorkommastellen ($n \geq 0$) und $k \geq 0$ Nachkommastellen.

- Der Wert $\langle d \rangle$ einer nicht-negativen Festkommazahl $d = d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 d_{-1} \ldots d_{-k}$ mit $d_i \in Z$ ist gegeben durch

$$\langle d \rangle = \sum_{i=-k}^{n} b^i \cdot \delta(d_i)$$

Bsp.: Dezimalsystem
$k=2$, $n=2$

$\langle 935{,}76 \rangle = 10^{-2} \cdot 6 + 10^{-1} \cdot 7 + 10^{0} \cdot 5 + 10^{1} \cdot 3 + 10^{2} \cdot 9$

d_2 d_1 d_0 d_{-1} d_{-2}

Festkommazahlen: Schreibweise

- Vorkomma- und Nachkommastellen werden zur Verdeutlichung durch ein Komma oder einen Punkt getrennt:
  $d = d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0 . d_{-1} \dots d_{-k}$
- Um anzudeuten, welches Zahlensystem zu Grunde liegt, wird gelegentlich die Basis als Index an die Ziffernfolge angehängt.
  - Beispiel $(n = 3, k = 0)$:

$$
\begin{aligned}
< 0110_2 > &= 6 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 \\
< 0110_8 > &= 72 = 0 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^3 \\
< 0110_{10} > &= 110 = 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^3 \\
< 0110_{16} > &= 272 = 0 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^3
\end{aligned}
$$

$$< 01.10_2 > = 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 = 1{,}5$$

Wird das Komma um k Stellen nach links verschoben, dann entspricht das einer Multiplikation mit b^{-k}!

Negative Festkommazahlen

(Im Folgenden wird Basis 2 angenommen.)

- Bei der Darstellung negativer Festkommazahlen nimmt die höchstwertigste Stelle d_n eine Sonderrolle ein:
  - Ist $d_n = 0$, so handelt es sich um eine nichtnegative Zahl.
- Bei der Darstellung negativer Zahlen gibt es folgende Alternativen:
  - Darstellung durch Betrag und Vorzeichen:

    $d_n = 0: (-1)^0 = 1$

    $$\underbrace{d_n}_{\hat{=}\text{ Vorzeichen}}, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \, 2^i$$

    $d_n = 1: (-1)^1 = -1$
  - Einer-Komplement-Darstellung:

    $$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_1 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \, 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$$
  - Zweier-Komplement-Darstellung:

    $$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_2 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \, 2^i - d_n \, 2^n$$

UNI FREIBURG

Betrag und Vorzeichen

$$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \, 2^i$$

Beispiel: $n = 2, k = 0$

$d_2 = 0$ $\qquad\qquad$ $d_2 = 1$

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_{BV}$	0	1	2	3	-0	-1	-2	-3

so viele negative Zahlen wie positive

- Der Zahlenbereich ist symmetrisch:
  - Kleinste Zahl: $-(2^n - 2^{-k})$, größte Zahl: $2^n - 2^{-k}$
- Man erhält zu a die inverse Zahl, indem man das erste Bit komplementiert. $(0 \to 1, 1 \to 0)$
- Zwei Darstellungen für die Null (000 und 100 im Beispiel).
- „Benachbarte Zahlen” haben gleichen Abstand 2^{-k}.

größte Zahl: $[d_n \dots d_0 . d_{-1} \dots d_{-k}]_{BV} = \underline{(-1)^{d_n} \cdot \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \cdot 2^i}$

$d_n = 0,\ d_{n-1} = \dots = d_{-k} = 1$

$$(-1)^{d_n}\sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i = (-1)^0 \cdot \sum_{i=-k}^{n-1} 1\cdot 2^i = \sum_{i=-k}^{n-1} 2^i = \sum_{i=0}^{n+k-1} 2^{i-k} = 2^{-k}\cdot\sum_{i=0}^{n+k-1} 2^i$$

$$= 2^{-k}\cdot \frac{2^{n+k}-1}{2-1} = 2^{-k}\cdot\left(2^{n+k}-1\right)$$

$$= 2^n - 2^{-k}$$

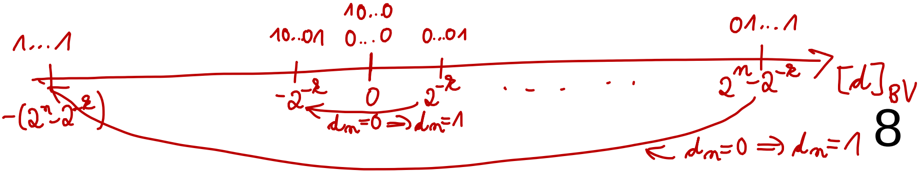
$$\boxed{\sum_{i=0}^{m} q^i = \frac{q^{m+1}-1}{q-1},\ q\neq 1}$$

geometr. Summenformel

Kleinste Zahl:

$d_n = 1,\ d_{n-1} = \dots = d_{-k} = 1$

$$(-1)^{d_n}\cdot\sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i = (-1)\cdot\sum_{i=-k}^{n-1} 2^i = -\left(2^n - 2^{-k}\right)$$



Einer-Komplement

$$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_1 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$$

$-(2^n-2^{-k}) = -3$

Beispiel: $n = 2, k = 0$

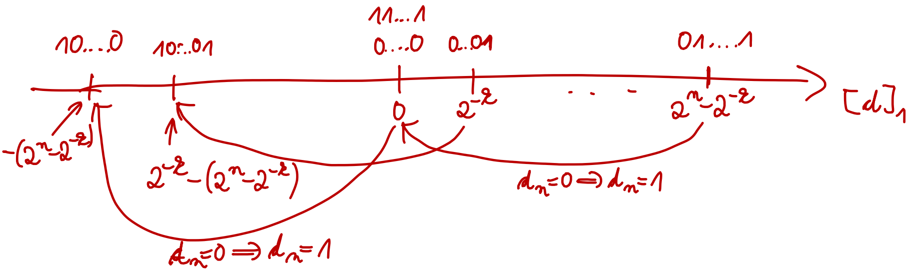
$d_n = 0$ $\qquad$ $d_n = 1$

a	000	001	010	011	100	$\boxed{101}$	110	111
$[a]_1$	0	1	2	3	-3	-2	-1	0

$d_0 = \ldots = d_{n-1} = 0$ $\searrow$ $d_n = 1$ $\qquad$ $d_0 = \ldots = d_{n-1} = 1$ $\swarrow$ $d_n = 0$

- Der Zahlenbereich ist symmetrisch: $-(2^n - 2^{-k}) \ldots 2^n - 2^{-k}$
- Zwei Darstellungen für die Null (000 und 111 im Beispiel).
- „Benachbarte Zahlen" haben gleichen Abstand 2^{-k}.
- Man erhält zu a die inverse Zahl, indem man alle Bits komplementiert (siehe Lemma nächste Folie).

9



10...0
10...01
11...1
0...0
0..01
01...1
$-(2^n-2^{-z})$
$2^{-z}-(2^n-2^{-z})$
0
2^{-z}
2^n-2^{-z}
$[d]_1$
$d_n=0 \Rightarrow d_n=1$
$d_n=0 \Rightarrow d_n=1$

Lemma

Sei a eine Festkommazahl, a' die Festkommazahl, die aus a durch Komplementieren aller Bits ($0 \to 1, 1 \to 0$) hervorgeht. Dann gilt $[a']_1 = -[a]_1$.

Beweis:

a_i	a'_i
0	1
1	0

$a'_i = 1 - a_i$

$$[a']_1 \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{i=-r}^{n-1} a'_i \cdot 2^i - a'_n (2^n - 2^{-r})$$

$$= \sum_{i=-r}^{n-1} \underline{(1-a_i) 2^i} - \underline{(1-a_n)(2^n - 2^{-r})}$$

$$= \sum_{i=-r}^{n-1} \underline{(2^i - a_i 2^i)} - \underline{(2^n - 2^{-r}) + a_n \cdot (2^n - 2^{-r})}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=-k}^{n-1} 2^{i}}_{= \underline{2^{n}-2^{-k}}} - \sum_{i=-k}^{n-1} a_i \cdot 2^{i} \underline{- (2^{n}-2^{-k})} + a_n \cdot (2^{n}-2^{-k})$$

$$= - \sum_{i=-k}^{n-1} a_i \cdot 2^{i} + a_n (2^{n}-2^{-k})$$

$$= (-1) \cdot \underbrace{\left[\sum_{i=-k}^{n-1} a_i \cdot 2^{i} - a_n (2^{n}-2^{-k}) \right]}_{[a]_1}$$

$$= -[a]_1$$

Zweier-Komplement

$$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_2 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \, 2^i - \underline{d_n \, 2^n}$$

Beispiel: $n = 2, k = 0$

$-d_n \cdot 2^n = -4 d_n$

$d_n = 0$ (000 … 011) $d_n = 1$ (100 … 111)

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_2$	0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

- Der Zahlenbereich ist asymmetrisch: $-2^n \dots 2^n - 2^{-k}$
- Die Zahlendarstellung ist eindeutig, auch für die Null.
- „Benachbarte Zahlen" haben gleichen Abstand 2^{-k}.
- Man erhält zu a die inverse Zahl, indem man alle Bits komplementiert und an der niederwertigsten Stelle 1 addiert (siehe Lemma nächste Folie).

$$[d]_2 = \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \cdot 2^i - d_n(2^n)$$

größte Zahl:

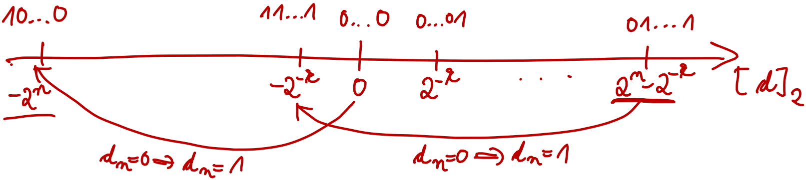
$d_{-k} = \ldots = d_{n-1} = 1, \; d_n = 0$

$\rightsquigarrow \; = 2^n - 2^{-k}$

Kleinste Zahl:

$d_{-k} = \ldots = d_{n-1} = 0, \; d_n = 1$

$$\sum_{i=-k}^{n-1} 0 \cdot 2^i - 1 \cdot 2^n = -2^n$$



Zweier-Komplement: Inversion

Lemma

Sei a eine Festkommazahl, a' die Festkommazahl, die aus a durch Komplementieren aller Bits $(0 \to 1, 1 \to 0)$ hervorgeht. Dann gilt $\underline{[a']_2 + 2^{-k}} = -[a]_2$.

Beweis: Übung

Bsp.: $z=0$, $n=3$

$$a = 0011$$

$$[a]_2 = 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 - 0\cdot 2^3 = 3$$

$$a' = \underline{1100}$$

$$[a']_2 = \underline{0\cdot 2^0} + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 - 1\cdot 2^3 = -4$$

$$\underbrace{[a']_2}_{-4} + 1 = -\underbrace{[a]_2}_{3}$$

$$[1101]_2 = \underline{1\cdot 2^0} + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 - 1\cdot 2^3 = -3$$

Vorteil von Zweier-Komplement

- Wir werden später Schaltungen betrachten, die zwei Zahlen als Eingaben nehmen und ihre Summe oder Differenz an den Ausgängen bereit stellen (Addierer, Subtrahierer).
- Es stellt sich heraus, dass diese Schaltungen besonders einfach sind, wenn Zahlen im Zweier-Komplement dargestellt werden.
- Daher wird in der Praxis oft die Zweier-Komplement-Darstellung verwendet.

Festkommazahlen - Übersicht

Betrag mit Vorzeichen	**Einerkomplement**	**Zweierkomplement**
$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i$	$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_1 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$	$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_2 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n\, 2^n$

$n = 2,\ k = 0$

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_{BV}$	0	1	2	3	0	-1	-2	-3
$[a]_1$	0	1	2	3	-3	-2	-1	0
$[a]_2$	0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

	BV	Einerkompl.	Zweierkompl.
	symmetrisch	symmetrisch	asymmetrisch
kleinste Zahl	$-(2^n - 2^{-k})$	$-(2^n - 2^{-k})$	-2^n
größte Zahl	$2^n - 2^{-k}$	$2^n - 2^{-k}$	$2^n - 2^{-k}$
Inverses durch	kompl. 1. Bit	kompl. alle Bits	kompl. alle Bits, add. 1 auf der letzten Stelle, die mit 2^{-k} gewichtet ist
Null	2 Darstellungen	2 Darstellungen	1 Darstellung
Abstand	2^{-k}	2^{-k}	2^{-k}

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\ \ 11 \\ \hline 1110 \end{array}$$

Probleme von Festkommazahlen

- Betrachte die Menge aller Zahlen, die eine Zweier-Komplement-Darstellung mit n Vor- und k Nachkommastellen haben.
  - Keine ganz großen bzw. kleinen Zahlen darstellbar!
    - Zahlen mit größtem Absolutbetrag: -2^n und $2^n - 2^{-k}$
    - Zahlen mit kleinstem Absolutbetrag: -2^{-k} und 2^{-k}
- Operationen sind nicht abgeschlossen!
  - $2^{n-1} + 2^{n-1}$ ist nicht darstellbar, obwohl die Operanden darstellbar sind.
- Assoziativ- und Distributivgesetz gelten nicht, da bei ihrer Anwendung evtl. der darstellbare Zahlenbereich verlassen wird!

  $(a+b)-c = a+(b-c)$
  - Beispiel: $\underbrace{(2^{n-1} + 2^{n-1})}_{\text{Überlauf}} - 2^{n-1} \neq 2^{n-1} + \underbrace{(2^{n-1} - 2^{n-1})}_{=0}$

Gleitkomma-Zahlen

- Die verfügbaren Bits werden in Vorzeichen S, Exponent E und Mantisse M unterteilt.
- $a = (-1)^S \cdot M \cdot 2^E$.

Exponent kann auch negativ sein

- Einfache Genauigkeit (insg. 32 Bit)

31	30 29 28 27 26 25 24 23	22 21 20 19 ... 3 2 1 0
S	Exponent E	Mantisse M

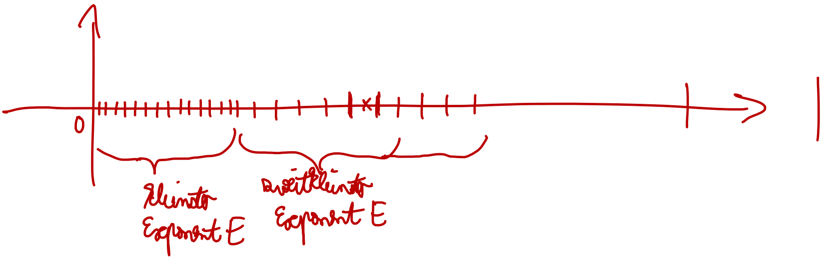
- Doppelte Genauigkeit (insg. 64 Bit)

63	62 61 60 59 ... 54 53 52	51 50 49 48 ... 3 2 1 0
S	Exponent E	Mantisse M

  - Implementierungsdetails: siehe z.B. IEEE754-Standard

20

$$(-1)\cdot M\cdot 2^{E}$$



$\Rightarrow$ im Vergleich zu Festkommazahlen mit gleicher Anzahl von Bit sind größere Zahlen darstellbar

$\Rightarrow$ höhere Genauigkeit nahe bei 0

$\Rightarrow$ „Abstand" zwischen benachbarten Zahlen ist nicht gleich.