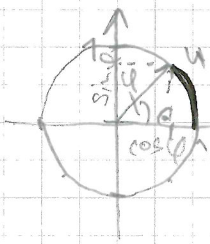
25.11.2015
M I

3 Kreisfunktionen

Wir haben mehrfach Punkte mit $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ dargestellt als $v = \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ als Winkel im Bogenmaß.



Länge φ (im Bogenmaß)

Dies ist eine Möglichkeit cos und sinus zu definieren. Es sei $D_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Winkel x im mathematisch positiven Sinne (d.h. gegen den Uhrzeigersinn).

Es gilt: $D_x \cdot e_1 = \binom{\cos x}{\sin x}$, $D_x \cdot e_2 = \binom{-\sin x}{\cos x}$

Beachte, dass $D_x e_1$ und $D_x e_2$ orthogonal sind.
Es gilt

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

wobei z.B. $\cos^2 x$ für $(\cos x)^2$ steht. Insbesondere gilt $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$. Weiter ist cos eine gerade und sin eine ungerade Funktion.

Drehung um 2π ist die Identität und dabei gilt:

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$$

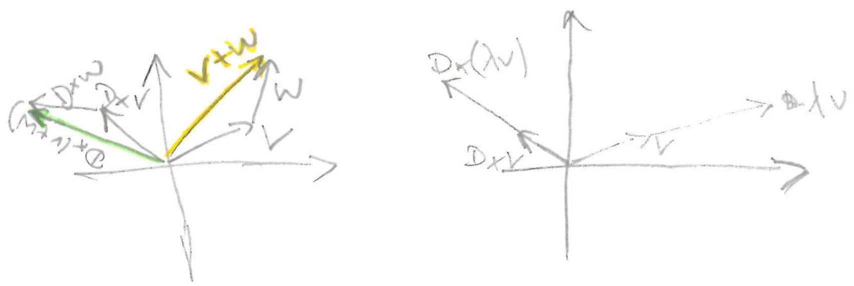
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Nullstellen sind Vielfachen von π für sin und $\frac{\pi}{2}$

$\forall k \in \mathbb{Z}$:
$$\sin(x) = 0 \iff x \in k \cdot \pi$$
$$\cos(x) = 0 \iff x \in (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Die Drehung D_x hat die wichtige Eigenschaft linear zu sein, d.h.

$$D_x(v+w) = D_x v + D_x w, \quad D_x(\lambda v) = \lambda D_x v$$



Weiter gilt $D_{x+y} = D_x \circ D_y = D_y \circ D_x$

<u>Satz (Additions-Theorem):</u> $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(x)$$

<u>Beweis</u>: Es gilt

$$\begin{pmatrix} \cos(x+y) \\ \sin(x+y) \end{pmatrix} = D_{x+y} e_1 = D_y(D_x e_1)$$
$$= D_y \cdot \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$
$$= D_y(\cos x \cdot e_1 + \sin(x) \cdot e_2)$$

Linearität von der Drehung von D_x $\rightarrow$
$$= \cos x \cdot D_y e_1 + \sin x \cdot D_y \cdot e_2$$
$$= \cos(x)\begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix} + \sin x \begin{pmatrix} -\sin(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\sin(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) \\ + \sin x \cos y \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

24

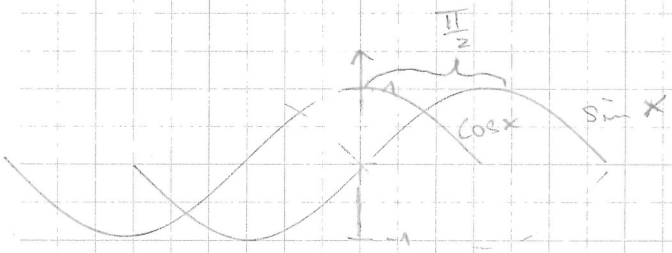
25.11.15

MI

Beweis: Für $y = \pm\frac{\pi}{2}$ folgt aus $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ sowie $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$, dass

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$



d.h. cos und sin sind um $\frac{\pi}{2}$ zueinander verschoben

Def: Wir definieren:

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus k\cdot\pi$$

Wir kehren zurück zur Darstellung komplexer Zahlen in Polardarstellung. Für $z \in \mathbb{C}$ existiert $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit: $z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

Wir verwenden im Folgenden die Abkürzung

$$e^{i\cdot x} = \cos x + i\cdot\sin x$$

d.h. es gilt:

$$\mathrm{Re}(e^{ix}) = \cos(x), \quad \mathrm{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$$

Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\cdot\sin(x+y)$$

$$= (\cos(x))(\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(y)) - \sin(x)\sin(y) + i\cdot\sin y\,\overset{\cos y}{\cancel{\sin x}} + i\cdot\cos x\cdot\sin y$$

3/4 $= \cos(x)(\cos(y)) + i^2\sin(x)(\sin(y)) + i\cdot\sin y\cos y$

$= (\cos x + \sin(x) \cdot i)(\cos y + i \cdot \sin y)$

$= e^{i \cdot x} \cdot e^{i \cdot y}$

Diese Identität begründet die Schreibweise als Exponent
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist damit die Polarkoordinaten-darstellung:

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Insbesondere gilt: $-1 = e^{i \cdot \pi}$ bzw. $1 + e^{i \cdot \pi} = 0$

Satz: (de Moivre) f.a. $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Identitäten:

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}, \quad \overline{e^{i(x)}} = e^{-i \cdot x} = \frac{1}{e^{ix}}$$

$$e^{i \cdot n \cdot x} = \left(e^{i \cdot x}\right)^n$$

Beweis: 1 ist bereits gezeigt

2. es gilt: $\overline{e^{ix}} = \cos x - i \sin(x)$

$= \cos(x) + i \cdot \sin(-x) = e^{-i \cdot x}$

sowie $e^{ix} \cdot e^{-i \cdot x} = e^{i \cdot 0} = 1$ d.h. $\frac{1}{e^{i \cdot x}} = e^{-i \cdot x}$

3. Für $n = 1$ ist $e^{i \cdot 1 \cdot x} = \left(e^{i \cdot x}\right)^1 = e^{i \cdot x}$

Induktion: folgt $e^{i(n+1) \cdot x} \overset{(1)}{=} e^{i \cdot n \cdot x + x} = e^{i \cdot n \cdot x} \cdot e^{ix}$

$= \left(e^{ix}\right)^n \cdot e^{i \cdot x}$

$= \left(e^{ix}\right)^{n+1}$