Def.: (I) Eine Funktion heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar ist und f' stetig ist. Entsprechend heißt f k-mal stetig differenzierbar, wenn f k-mal differenzierbar ist und alle Ableitungen $f^{(i)}$ mit $i = 0, \dots, k$ stetig sind.

Die Menge aller k-mal stetig differenzierbarer Funktionen wird mit $C^k(I)$ bezeichnet.

Ferner bezeichnet $C^\infty(I)$ die Menge aller Funktionen $f: I \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^k(I)\ \forall k \in \mathbb{N}$

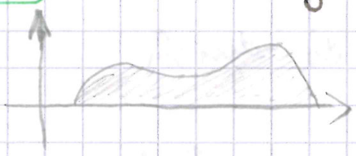
Bsp.: Für $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ gilt $f \in C^1([-1,1])$

aber $f \notin C^2([-1,1])$

4. Integralrechnung

1. Riemann-Integral

Ziel: Bestimmung des Flächeninhalts unter Graphen



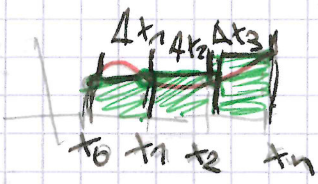
Unter einer Zerlegung Z von $[a,b]$ verstehen wir eine endliche Folge von Punkten $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$.

Die Feinheit von Z ist:

$$\Delta(Z) = \max \underbrace{x_k - x_{k-1}}_{= \Delta x_k}$$

Def.: Die Riemannsche Summe von $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ zur Zerlegung Z ist

$$S_Z = \sum_{k=1}^{N} f(z_k)\, \Delta x_k$$



mit Stützstellen $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Satz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\to \exists\, S\in\mathbb{R}$, sodass für jede ~~Zerlegung~~ Folge von ~~Zerlegungen~~ Z_n mit $A(Z_n)\to 0$

gilt

$$S_{Z_n}(f) \to S \text{ für } n\to\infty$$

Wir schreiben $S=\int_a^b f(x)\,dx$ und ~~nennen~~ nennen S Integral von f.

Bsp.: (I) Ist $f(x)=c$ konstant, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\cdot(b-a)$$

denn

$$S_Z(f) = \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k\cdot c$$

$$= c\cdot\sum_{k=1}^{N} \cancel{\Delta x_k}\, x_k - x_{k-1}$$

$$= c\cdot\sum_{k=1}^{N} x_1-x_0+x_2-x_1+x_3-x_2+-x_3\ldots+x_n$$

für jede Zerlegung $= c\cdot(x_n-x_0) = c\cdot(b-a)$

(II) Ist $f(x)=x$, so betrachte die durch

$$x_k = a+k\cdot\frac{b-a}{N}\,,\ k=0,1,\ldots,N$$

definierte Zerlegung Z_n mit $A(Z_n)=\frac{b-a}{N}$

Mit $z_k=x_k$, $k=1,\ldots,N$ folgt

$$S_{Z_n}(f) = \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k\, f(z_k) \quad = x_k = z_k = a+k\cdot\frac{b-a}{N}$$

$$x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{N}$$

$$= \frac{b-a}{N}\cdot\sum_{k=1}^{N}\left(a+k\cdot\frac{b-a}{N}\right)$$

$$= \frac{b-a}{N}\left(N\cdot a+\frac{b-a}{N}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}k}_{=\frac{N\cdot(n+1)}{2}}\right)$$

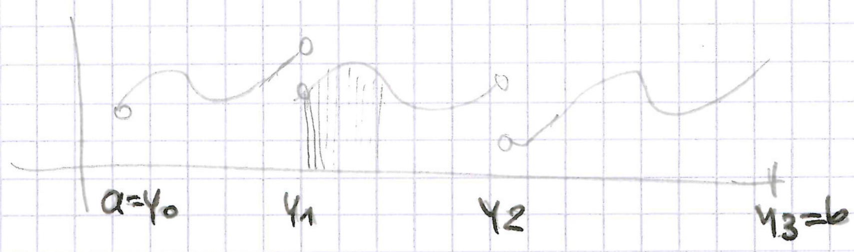
$$=(b-a)\cdot a+\frac{(b-a)^2}{N^2}\cdot\frac{N\cdot(n+1)}{2}$$

3/5

$$=(b-a)\cdot a+\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\left(\frac{N(n+1)}{N^2}\right) \to 1 : n\to\infty$$

$$(b-a)\cdot a + \frac{(b-a)^2}{2}$$
$$= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$
$$= (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2)$$

Die Definition des Integrals lässt sich auf stückweise stetige Funktionen verallgemeinern, d.h. wenn eine Zerlegung $a=y_0<y_1<\dots<y_n=b$ existiert, so dass f eingeschränkt auf $[y_{n+1}, y_n]$ stetig ist $\forall\, n=1,\dots,M$.
Das Integral von f unter $[a,b]$ ist dann als Summe der Integrale über die Teilintervalle $[y_{m+1}, y_m]$ definiert



Bem.: Flächeninhalte unterhalb der x-Achse gehen negativ ein.

Satz: Für $f,g: I\to\mathbb{R}$ mit $I=[a,b]$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ gilt:
$$\int_a^b (\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\,dx$$
$$= \alpha\cdot\int_a^b (f(x)+\beta\cdot g(x))\,dx$$

Bew.: Für beliebige Zerlegungen Z gilt:
$$S_Z(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)) = \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k\cdot(\alpha f(z_k)+\beta\cdot g(z_k))$$
$$\int_a^b \alpha f+\beta g$$
$$= \alpha\cdot\sum_{k=1}^{N} \Delta x_k\cdot(f(z_k)+\beta\cdot g(z_k))$$
$$= \alpha\cdot\sum_{k=1}^{N} \Delta x_k f(z_k) + \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k\cdot\beta\cdot g(z_k)$$
$$= \alpha\cdot \underbrace{S_Z(f)}_{\to\int f} + \beta\cdot S_Z(g) \to \int f$$