Kapitel 3 – Kombinatorische Logik

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

UNI FREIBURG

Prof. Dr. Christoph Scholl

Institut für Informatik

WS 2015/16

Überblick

- Boolesche Funktionen kann man durch Schaltkreise darstellen.
- Wir werden uns als nächstes mit Logiksynthese für zweistufige Schaltkreise beschäftigen.
- Bei der Logiksynthese für zweistufige Schaltkreise macht man häufig von einer alternativen Darstellungsform Gebrauch, den Booleschen Ausdrücken.
- Führe daher Boolesche Ausdrücke zunächst sauber ein, vorher aber noch eine etwas genauere Betrachtung von Booleschen Algebren.

Boolesche Algebren - allgemein

- Es sei M eine Menge auf der zwei binäre Operationen $\cdot$ und $+$ und eine unäre Operation $\sim$ definiert sind.

- Das Tupel $(M, \cdot, +, \sim)$ heißt boolesche Algebra, falls M eine nichtleere Menge ist und für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Axiome gelten:

Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Absorption	$x + (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x + y) = x$
Distributivität	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
Komplement	$x + (y \cdot \sim y) = x$	$x \cdot (y + \sim y) = x$

UNI FREIBURG

Beispiele boolescher Algebren

- $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg)$
- Boolesche Algebra der Teilmengen einer Menge S: $(Pot(S), \cap, \cup, ^C)$
- Boolesche Algebra der booleschen Funktionen in n Variablen: $(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \sim)$

$\Rightarrow$ **Allgemein**: Lässt sich eine Aussage direkt aus den Axiomen herleiten, dann gilt sie in allen booleschen Algebren!

- Man darf beim Beweis der Aussage aber auch wirklich nur die Axiome verwenden und keine Eigenschaften der konkreten booleschen Algebra.

Boolesche Algebra der Teilmengen von S $(Pot(S), \cap, \cup, ^C)$

- Menge: Potenzmenge von S
- $\cdot$: $Pot(S) \times Pot(S) \to Pot(S)$; $(M_1, M_2) \mapsto M_1 \cap M_2$
- $+$: $Pot(S) \times Pot(S) \to Pot(S)$; $(M_1, M_2) \mapsto M_1 \cup M_2$
- ^{C}: $Pot(S) \to Pot(S)$; $M \mapsto M^C := S \backslash M$

Satz

$(Pot(S), \cap, \cup, ^C)$ ist eine boolesche Algebra.

- **Beweis**: Nachrechnen, dass alle Axiome gelten.

  Beispiel: Absorption

  - Seien $M_1, M_2 \in Pot(S)$.
  - Dann ist $(M_1 + (M_1 \cdot M_2)) = (M_1 \cup (M_1 \cap M_2)) = M_1$
    und $(M_1 \cdot (M_1 + M_2)) = (M_1 \cap (M_1 \cup M_2)) = M_1$.

Boolesche Algebra der Funktionen in n Variablen $(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \sim)$

- Menge: $\mathbb{B}_n$ (Menge der booleschen Funktionen in n Variablen)
- $\cdot$: $\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$; $(f \cdot g)(\alpha) = f(\alpha) \cdot g(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$
- $+$: $\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$; $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$
- $\sim$: $\mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$; $(\sim f)(\alpha) = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$

Satz

$(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \sim)$ ist eine boolesche Algebra.

- **Beweis**: Nachrechnen, dass alle Axiome gelten.

  Beispiel: Kommutativität
  - Seien $f, g \in \mathbb{B}_n$.
  - Für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$ gilt: $(f+g)(\alpha) = \underbrace{f(\alpha) + g(\alpha)}_{+:\ \mathbb{B}\times\mathbb{B}\to\mathbb{B}} = g(\alpha) + f(\alpha) = \underbrace{(g+f)(\alpha)}_{+:\ \mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n\to\mathbb{B}_n}$.
  - Also $f + g = g + f$.

Weitere, aus den Axiomen ableitbare Regeln:

- Existenz neutraler Elemente:
  $\exists \mathbf{0} : x + \mathbf{0} = x \; \forall x \in M, \quad \exists \mathbf{1} : x \cdot \mathbf{1} = x \; \forall x \in M$
- $\forall x \in M : x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall x \in M : x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$
- Doppeltes Komplement:
  $\forall x \in M : (\sim (\sim x)) = x$
- Eindeutigkeit des Komplements:
  $\forall x, y \in M : (x \cdot y = \mathbf{0} \text{ und } x + y = \mathbf{1}) \Rightarrow y = (\sim x)$
- Idempotenz:
  $\forall x \in M : x + x = x \quad x \cdot x = x$
- de Morgan-Regel:
  $\forall x, y, z \in M : \sim (x + y) = (\sim x) \cdot (\sim y) \quad \sim (x \cdot y) = (\sim x) + (\sim y)$
- Consensus-Regel:
  $\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z) = (x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z) + (y \cdot z)$
  $\forall x, y, z \in M : (x + y) \cdot ((\sim x) + z) = (x + y) \cdot ((\sim x) + z) \cdot (y + z)$
- Diese Regeln gelten in allen booleschen Algebren!

Dualitätsprinzip bei booleschen Algebren

Prinzip der Dualität

Gilt eine aus den Axiomen der booleschen Algebra abgeleitete Gleichung p, so gilt auch die zu p duale Gleichung, die aus p hervorgeht durch gleichzeitiges Vertauschen von $+$ und $\cdot$, sowie **0** und **1**.

- **Beispiel**:
  - $(x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z) + (y \cdot z) = (x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z)$
  - $(x + y) \cdot ((\sim x) + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot ((\sim x) + z)$