Parasyriotis Christoforidis Übung 12 Gruppe 2
Janosch Lang
Marcel Ciepinsky

42

a) IA: $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = \frac{4}{4}$$ ✓

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{9}{i} a^{n-i} b^i$$

IV: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ ✓

1	2	3	4	Σ
–	2	1	–	3

IS: $n \mapsto n+1$ $\quad \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = 1^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{n^2 \cdot (n^2+2n+1) + 4 \cdot (n^3 + 3n^2 \cdot 1 + 3n + 1)}{4}$$

$(n+2)^2 = n^2+4n+4$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4}$$

$(n+1)^2(n+1)$

$= (n^2+2n+1)(n+1)$

$n^3+2n^2+n+n^2+2n+1$

n^3+3n^2+3n+1

$$= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} \quad \square$$

$$\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \frac{n^2 \cdot (2n + n^2 + 1)}{4} = \quad 2n^3$$

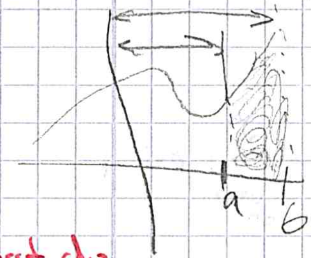
$$\frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} = \frac{(n^2+2n+1) \cdot (n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 2n^3 + 8n^2 + 8n + n^2 + 4n + 4}{4}$$

$$= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} \quad \square$$ ✓

b) $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ $\quad a \in [0,b]$

z: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$



$\sum_{k=1}^{N} \Delta x_k \cdot f(z_k) \Big| \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx \Rightarrow$

$\lim_{\Delta(x_k)\to 0} \left(\sum_{k=1}^{b\;N} \Delta(x_k)\, f(z_k) - \sum_{k=1}^{a} \Delta x_k\, f(z_k) \right)$ $\quad =$

Da musst du aufpassen

$= \lim_{\Delta(x_k)\to 0} \sum_{k=a}^{b} \Delta(x_k)\, f(z_k) = \int_a^b f(x)\,dx$ $\square$ ✓

c) $a,b \in \mathbb{R}$ $\quad a<b$

$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ $\quad$ Zerlegung für $[a,b]$

mit $\Delta z_k \to 0$ $\quad n \to \infty$ $\quad$ Integral für $f(x) = x^3$

⋮

2/3

A3 Mathe

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

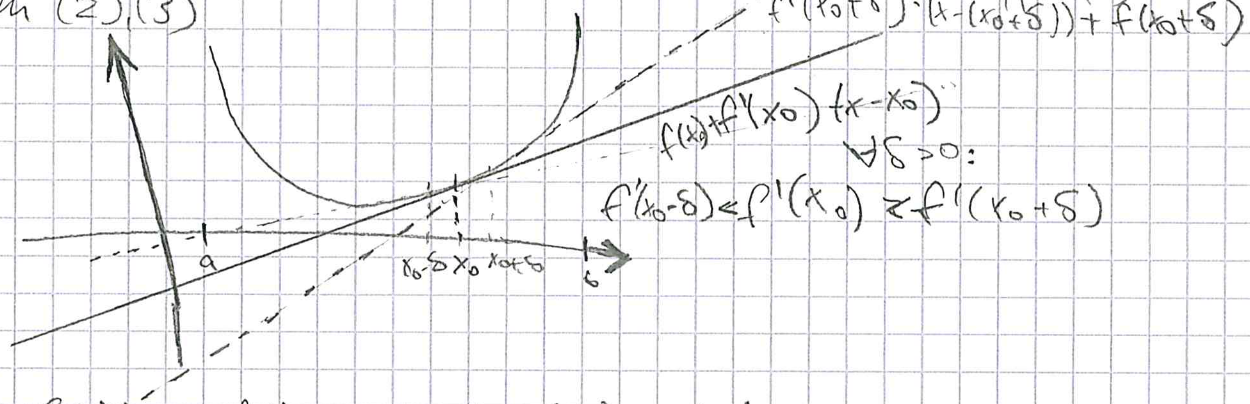
zz:

(1) f ist konvex, $f''(x)>0 \quad \forall x\in(a,b)$

(2) $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x,x_0\in(a,b)$

(3) $f(\theta x+(1-\theta y)) < \theta f(x)+(1-\theta)f(y) \quad \forall \theta\in(0,1)$
$\forall x,y\in(a,b)$

Skizze zu (2),(3)



$\forall \delta>0$:
$f'(x_0-\delta)<f'(x_0)<f'(x_0+\delta)$

$g(\xi)=\theta f(\xi)+(1-\theta)\cdot f(y)-f(\theta\xi+(1-\theta)\cdot y)$

$f(x_0-\delta)+f'(x_0-\delta)\cdot(x-(x_0-\delta)) > f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad \forall x<x_0$

$f(x_0-\delta)+f'(x_0-\delta)\cdot(x-(x_0-\delta)) < f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad \forall x>x_0$

$f(x_0+\delta)+f'(x_0+\delta)\cdot(x-(x_0+\delta)) < f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x<x_0$

$f(x_0+\delta)+f'(x_0+\delta)\cdot(x-(x_0+\delta)) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x>x_0$

Beweis ?

⋮

1/3

$f: A \cup B \to \mathbb{R}$

z.z.: $\inf\limits_{x \in A \cup B} f(x) = \inf \{ \inf\limits_{x\in A} f(x), \inf\limits_{x \in B} f(x) \}$

Bew.: Ohne Einschränkung $\inf\limits_{x\in A} f(x) \leq \inf\limits_{x\in B} f(x)$

Sei $z \in A \cup B$, dann gilt:

1.) $z \in B$: $f(z) \geq \inf\limits_{x\in B} f(x) \geq \inf\limits_{x\in A} f(x)$

2.) $z \in A$: $f(z) \geq \inf\limits_{x\in A} f(x)$

$\inf\limits_{x\in A} f(x)$ ist untere Schranke von $f(t)$ für $x \in A \cup B$.

Sei s beliebige untere Schranke von $f(t)$ für $x \in A \cup B$, so ist s auch untere Schranke von $f(t)$ für $x \in A$, sodass $\inf\limits_{x\in A} f(x) \geq s$

$\Rightarrow \inf\limits_{x\in A} f(x)$ ist größte untere Schranke von $f(t)$ für $x \in A \cup B$,

also $\inf \{ \inf\limits_{x\in A} f(t), \inf\limits_{x\in B} f(t) \} = \inf\limits_{x\in A} f(t) = \inf\limits_{x\in A\cup B} f(t)$

Aufgabe 2

a) z.z.: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(IA): $n=1$

$1^3 = \frac{1\cdot(1+1)^2}{4} = \frac{1\cdot 2^2}{4} = 1$ ✓

(IV): Gleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

(IS) $n \mapsto n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4\cdot(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$ $\square$

b) $f: [0,b] \to \mathbb{R}$ stetig $a \in [0,b]$

z.z.: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$

Bew.: $\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_n - x_{n-1})$

existiert für alle Folgen von Zerlegungen Z_n

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\{l \mid x_l = a\}} f(z_k)(x_n - x_{n-1}) + \sum_{k=\{l \mid x_l = a\}}^{b} f(z_k)(x_n - x_{n-1})$

Wähle Z_n, sodass $a \in [0,b]$ eine Stützstelle ist.

$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$ □

c) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ eine Zerlegung Z_n von $[a,b]$ definiert wird mit $\Delta Z_n \to 0$ für $n \to \infty$.

$x_n = a + \cancel{n} \cdot \frac{b-a}{\cancel{n}} = a + b - a = b$

$x_0 = a$

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n} - \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \Delta Z_n = \lim_{n\to\infty} \max_{0 \le k \le n} \Delta x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$

z.z.: Berechne für $f(x) = x^3$ das Riemann Integral

${}_a\int^b f(x)\,dx \overset{b)}{=} \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$

Wähle Zerlegung $x_n = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$

$\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$

1) $f(z_k) = x_{k-1}^3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left((k-1) \cdot \frac{b}{n}\right)^3 \cdot \frac{b}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \overset{a)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4} \underbrace{- \frac{1}{2n^2} + \frac{b^2}{4n}}_{\to 0} = \frac{b^4}{4}$

2.) $f'(z_k) = x_k^3$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(k\cdot\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{n}\right)$$

$$\overset{\text{analog zu 1}}{=} \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4} + \underbrace{\frac{b^4}{2n} + \frac{b^4}{2n^2}}_{\to 0} = \frac{b^4}{4}$$

3.) $f(z_k) = \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)^3$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k\cdot\frac{b}{n} + (k-1)\cdot\frac{b}{n}}{2}\right)^3 \cdot \frac{b}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2}\right)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^{n} k^3 + \underbrace{3\cdot -\frac{1}{2}\cdot k^2 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot k + \left(-\frac{1}{2}\right)^3}_{\to 0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^{n} k^3 \overset{\text{analog}}{=} \frac{b^4}{4}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

Aufgabe 3

$f(a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

(1) f ist konvex, d.h. $f''(x) > 0$

(2) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)$

(3) $f(\theta x + (1-\theta)\cdot y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)\cdot f(y) \quad \forall\, \theta \in \{0,1\}$

Bew.: (1) $\Rightarrow$ (2)

MWS + $f''(x) \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} x > x_0 &\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'(x_0) \\ x < x_0 &\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'(x_0) \end{aligned}\right\} f(x) \geq f(x_0) + f'(x)(x-x_0)$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

Aus (2) folgt:

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

Setze $x_0 = \theta x + (1-\theta) y$ mit $\theta \in (0,1)$

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq f(y) - \frac{f(\theta x + (1-\theta)y)}{y - x_0} \cdot (x_0 - x) + f(x)$$

$\frac{x_0 - x}{y - x_0}$ $\frac{1-\theta}{\theta}$

$$\Rightarrow f(y) - f(\theta x + (1-\theta)y) \overset{!}{} \frac{1-\theta}{\theta} + f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

(3) $\Rightarrow$ (1)

$$h(\psi) := \theta f(\psi) + (1-\theta) \cdot f(y) - f(\theta \psi + (1-\theta) y)$$

Es gilt: $h(\psi) \geq 0$ nach (3)

sowie $h(y) = 0$

$\Rightarrow$ h hat bei y ein Minimum

$$\Rightarrow 0 \leq h''(\psi) = \underbrace{\theta(1-\theta)}_{>0} \cdot f''(\psi)$$

$$\Rightarrow f''(\psi) \geq 0 \Rightarrow f \text{ konvex}$$

<u>Aufgabe 4</u> $f(x,y) = \frac{x}{y}$ $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

z.z.: f kann in $(0,0)$ nicht stetig fortgesetzt werden.

Bew.: Definiere Nullfolgen $a_n = (0, \psi(n))$, $b_n = (\psi(n), \psi(n))$ mit $\psi(n)$ Nullfolge

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(0, \psi(n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\psi(n)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(\psi(n), \psi(n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{\psi(n)} = 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$, also nicht stetig fortsetzbar.