Institut für Angewandte Mathematik
Priv.-Doz. Dr. K. Deckelnick
Dipl.-Math. A. Veeser

04.02.1998

$\Sigma = 29$ von 40 Pkt.

Klausur zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 1997/98

Beachten Sie folgende Hinweise:
a) Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
b) Begründen Sie Ihre Antworten, indem Sie auf Resultate aus der Vorlesung verweisen.
c) 20 der möglichen 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen der Klausur.

✓ Aufgabe 1: Beweise durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(3 Punkte)

✓ Aufgabe 2:

a) Berechne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{16}+2x+3}{2x^{16}+x^6} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

✓ b) Sei $q \in (0,1)$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k$?

(3+2 Punkte) ✓

✓ Aufgabe 3:

In welchen Punkten ist die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x(y-1)}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig?

(3 Punkte)

✓ Aufgabe 4:

Berechne alle Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 4x + 2 = 0$$

Hinweis: Bestimme zunächst mit Hilfe des Newtonverfahrens (2 Iterationen) einen Nährungswert $\bar{x}$ für eine Nullstelle von $x^3 - 4x + 2$ und spalte anschließend den Faktor $(x - \bar{x})$ ab.

(5 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 5:

Bestimme das globale Maximum und Minimum der Funktion

Randwerte

$$f(x) = x^3 e^{-x}$$

auf $[0,4]$. (4 Punkte)

Aufgabe 6:

Berechne die Ableitung der Funktion $\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$, wo sie existiert.

(3 Punkte)

Aufgabe 7:

Berechne das Taylorpolynom 2. Ordnung in $(0,0)$ zur Funktion

$$f(x,y) = \sin x \, \sin y.$$

Ist $(0,0)$ ein lokales Extremum? (4 Punkte)

Aufgabe 8:

Berechne

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \cos^2 x \, dx$$

$\frac{1}{x} \cdot \ln x$ (2+1 Punkte)

$\downarrow$

e' e

r=1

Aufgabe 9:

Für jede Teilaufgabe gibt es einen Punkt.

a) Gib $e^{j\frac{\pi}{4}}$ in kartesischen Koordinaten an. $z = 1 + j$

b) Berechne alle Lösungen von $z^2 + 2z + 5 = 0$.

c) Untersuche die Funktion $f : I\!R \to I\!R, f(x) := |x|$ auf Injektivität und Surjektivität.

d) Seien $f, g : I\!R \to I\!R^3$ differenzierbar; zeige, daß die Funktion $f \cdot g : I\!R \to I\!R^3, t \mapsto f(t) \cdot g(t)$ ebenfalls differenzierbar ist und daß

$$\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt}$$

gilt.

e) Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß die Aussage

„ ist $(a_k^2)_{k \in N}$ konvergent, so auch $(a_k)_{k \in N}$“

nicht richtig ist.

f) Existiert der Grenzwert von

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$$

für $x \to 1$?

g) Zeige, daß die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$, $x \geq 0$, in 0 nicht differenzierbar ist.

h) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$.

i) Skizziere die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to I\!R^2, t \mapsto (\cos t, \cos t \sin t)$.

j) Ist die Aussage

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0 \implies f(x) = 0 \text{ für alle } x \in [0, 1]$$

richtig?

[redacted]

$\Sigma = 29$

A.1

IA: für $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \overset{!}{=} \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

IS: für $n \Rightarrow n+1$ ~~$(n \Rightarrow n+1)$~~

(1) $$\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

n. IV: $$= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

Ergebnisse sind gleich

→ gezeigt für alle $n \in \mathbb{N}$

3/

[redacted]

\# [redacted]

A.2

a) $$\cancel{\lim_{x\to\infty} \frac{x^{16}+2x+3}{2x^{16}+x^6} = \frac{\infty}{\infty}} \;↯$$

~~-> Regel von de l'Hospital~~

$$\cancel{f'(x) = \frac{(16x^{15}+2)(2x^{16}+x^6)-(x^{16}+2x+3)(32x^{15}+6x^5)}{(2x^{16}+x^6)^2}}$$

ungültig!

$$(x^{16}+2x+3):(2x^{16}+x^6) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}x^6 - 2x - 3}{2x^{16}+x^6}$$

$$-(x^{16}+\tfrac{1}{2}x^6)$$

$$-\tfrac{1}{2}x^6 + 2x + 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}x^6 - 2x - 3}{2x^{16}+x^6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \;↯$$

-> de l'Hospital

$$\frac{\frac{1}{n}\cdot n - \ln n \cdot 1}{n^2} = \frac{1-\ln n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{\ln n}{n^2}\right)$$

l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$= 0 - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

wie bewiesen (Vorlesg.) steigt $\ln x$ langsamer, als x^2

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$= 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

1,5

Aufg. 2b $\longrightarrow$ [illegible]!

[redacted]

<u>4.3</u>

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x(y-1)}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$x_{k_1} = \frac{1}{k} \quad , x_{k_2} = -\frac{1}{k}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{k_1} = \lim_{k\to\infty} x_{k_2} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{k_1}, x_{k_2}) \overset{\lim_{k\to\infty}}{=} \frac{\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{k}-1\right)}{\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^4}} = \lim_{k\to\infty} \frac{-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}}{2\frac{1}{k^4}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k^3 = -\infty$$

$f(x,y)$ ist im Punkt $x_0 = (0,0)$ nicht stetig,

da $-\infty \neq 0$ ist $(0 = f(0,0))$ ✓

andere / übrige Punkte: $\Rightarrow (x,y) \neq 0,0$

$$\lim_{k\to\infty} x_{k_3} = x_{0_1} \quad ; \lim_{k\to\infty} x_{k_4} = x_{0_2}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{k_3}, x_{k_4}) = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{k_3}(x_{k_4}-1)}{x_{k_3}^4 + x_{k_4}^4} = \frac{x_{0_1}(x_{0_2}-1)}{x_{0_1}^4 + x_{0_2}^4} = f(x_{0_1}, x_{0_2})$$

$\Rightarrow f(x,y)$ ist nur im Pkt. $(x,y) = (0,0)$ unstetig!

oder $f(x,y)$ ist überall stetig, ausgenommen Punkt $(0,0)$. ✓

3

[redacted]

A.4

$f(x) = x^3 - 4x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 4$

VZW im Intervall $[0,1]$ $\rightarrow$ Nst.

$\Rightarrow$ Startwert: $0 = x_1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Nebenrechnung:

$\frac{1}{8} - 2 + 2 = \frac{1}{8}$

$\frac{3}{4} - \frac{16}{4} = -3\frac{1}{4} = -\frac{13}{4}$

$\Rightarrow$ $\cancel{x_2 = 1 - \frac{-1}{-1} = 0}$

$\Rightarrow$ $x_2 = 0 - \frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$ (1. Iteration)

$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{13}{4}} = \underline{\underline{\frac{7}{13}}}$ (2. Iterat.)

Horner-Schema:

1	0	-4	$+2$
	$\frac{7}{13}$	$\frac{49}{169}$	$-1{,}997$ ~~6,89~~
1	$\frac{7}{13}$	$-3{,}71$	%

$\Rightarrow (x^3 - 4x + 2) : (x - \frac{7}{13}) = x^2 + \frac{7}{13}x - 3{,}71$

$\rightarrow x^2 + \frac{7}{13}x - 3{,}71 = 0$

$x_{2/3} = -\frac{7}{26} \pm \sqrt{\frac{49}{676} + 3{,}71}$

$x_2 \approx 1{,}68$, $x_3 \approx -2{,}21$

$\underline{x_1 = \frac{7}{13}, \quad x_2 = 1{,}68, \quad x_3 = -2{,}21}$ ✓

5P

[redacted]

\# [redacted]

A.5

$$f(x) = x^3 e^{-x}$$

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3 (-1) e^{-x}$$

$$= 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = e^{-x}(3x^2 - x^3)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(3x^2 - x^3) + e^{-x}(6x - 3x^2)$$

$$= e^{-x}(-3x^2 + x^3 + 6x - 3x^2) = e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x)$$

$$\cancel{\Rightarrow}\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(3x^2 - x^3) = 0 \quad | e^{x} > 0 \Rightarrow \cdot \frac{1}{e^{-x}}$$

$$3x^2 - x^3 = 0$$

$$x^2(3 - x) = 0$$

$$\underline{x_{1,2} = 0}, \ \underline{x_3 = 3}$$

$$f''(0) = e^{-0}(0 - 0 + 0) = 0$$ toll! genau

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ 1 > x > 0}} f'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{>0}(3x^2 - x^3) = \underbrace{e^{-x}}_{>0} \cdot \underbrace{x^2}_{>0}\underbrace{(3 - x)}_{>0} \Rightarrow \text{pos}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ -1 < x < 0}} f'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\text{pos}}\ \underbrace{x^2}_{\text{pos}}\ \underbrace{(3 - x)}_{\text{pos}} \Rightarrow \text{pos}$$

kein VZW ⇒ kein (Hp/Tp) Extr.Pkt

Vorsicht: $x = 0$ ist Randpkt

$$f''(3) = e^{-3}(27 - 54 + 18) = -9e^{-3} < 0 \Rightarrow Hp \text{ (lokal)}$$

$$f(3) = 27 \frac{1}{e^3} \approx 1{,}34 \Rightarrow Hp\left(3; 27 \frac{1}{e^3}\right)$$

Randpunkte: $f(0) = 0$

$$f(4) = 64 \cdot \frac{1}{e^4} \approx 1{,}17$$

⇒ im Intervall $[0, 4]$: globales Max. ist $Hp\left(3; 27 \frac{1}{e^3}\right)$

globales Min. ist $R_l(0, 0)$

3,5

[redacted]
[redacted]

A.6

$f(x) = \arccos x$ ~~ttt~~

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D = [-1, 1]$

Woher? $B = [0, \pi]$ OP

[redacted] [redacted]

4.7 P_2 in $(0,0)$

$f(x,y) = \sin x \sin y$

$f_x(x,y) = \cos x \sin y$ ✓

$f_y(x,y) = \sin x \cos y$ ✓

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \cos x \cos y$ ✓

$f_{xx}(x,y) = -\sin x \sin y$ ✓

$f_{yy}(x,y) = -\sin x \sin y$ ✓

$P_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)\cdot x + f_y(0,0)\, y$

$= 0 + 0 + 0 = 0$ (Oh!) Kommt vor!

$P_2(x,y) = P_1 + \frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)\, x^2 + f_{xy}(0,0)\, xy + f_{yx}(0,0)\, xy + f_{yy}(0,0)\, y^2\}$

$= \frac{1}{2}\{0 + 2xy + 0\} = \underline{\underline{xy}}$ ✓

~~Ja, (0,0) ist lok. Extremum, da:~~

~~$\nabla f(0,0) = 0$~~ ungültig!

~~und [illegible]~~

Nein, (0,0) ist kein lok. Extr., da

zwar $\nabla f(x,y) = 0$ ✓, aber

$f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = -1 < 0$ ✓

=> da kleiner Null -> kein lok. Extr.

gut! (4)

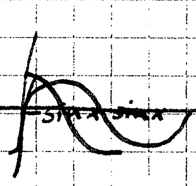
[redacted]

A. 8

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + c$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$ ✓ 2

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \cancel{\int_0^\pi \underbrace{\cos x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'} = \cos x \sin x - \int \sin x \sin x}$$



$$= \int_0^\pi (1-\sin^2 x)\,dx = x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$

$= \pi$ – siehe Vorlesungsnotiz.

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \sin x\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(-0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi}}$$ ✓

das kommt aber von einem anderen Ansatz!

1

① I.-A.: $n=1$: $1 \overset{!}{=} \frac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

I.-S.: $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n+1 \underset{I.-V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 =$$

$$= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n+1\,(n+2)}{2}$$ ✓

② a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{16}+2x+3}{2x^{16}+x^6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{16}(1+\frac{2}{x^{15}}+\frac{3}{x^{16}})}{x^{16}(2+\frac{1}{x^{10}})} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \text{(L'Hospital)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot 1 = 0$$

b) siehe 9k)

④ $x^3 - 4x + 2 = 0$: ungefähre Nst bei $x_1 = 1{,}7$

$f(x) = x^3 - 4x + 2$; $f'(x) = 3x^2 - 4$

$\Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}7 - \frac{f(1{,}7)}{f'(1{,}7)} = 1{,}675803$

$\Rightarrow x_3 = 1{,}6751314$ $\Rightarrow x_4 = 1{,}6751309$

$$(x^3-4x+2):(x-x_4) = x^2 + x_4 x + (x_4^2-4)$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - x_4x^2) \\ \hline x_4x^2 - 4x + 2 \\ -(x_4x^2 - x_4^2 x) \\ \hline (x_4^2-4)x + 2 \\ -((x_4^2-4)x - (x_4^3 - 4x_4)) \\ \hline x_4^3 - 4x_4 + 2 \quad \approx 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x^2 + x_4 x + (x_4^2 - 4) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-x_4 \pm \sqrt{x_4^2 - 4x_4^2 + 16}}{2}$

$\Rightarrow x_1 \approx 0{,}5392$; $x_2 \approx -2{,}2143$; $x_3 \approx 1{,}6758$

⑤ $f'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x}$

$f''(x) = 6x\,e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} = (6x - 6x^2 + x^3)\,e^{-x}$

$f(0) = 0$; $f(4) = \frac{64}{e^4} \approx 1{,}17$ Randwerte

Extremwerte : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - x^3)\,e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

$f''(0) = 0$ Sattelpkt

$f''(3) = -\frac{9}{e^3}$ Hochpunkt

mit $f(x) > 0$ für $x > 0$

$\Rightarrow$ $P(0|0)$ globales Minimum

und $f(3) = \frac{27}{e^3} \approx 1{,}34$ $> f(4)$ Randwert

$\Rightarrow$ $Q\left(3 \middle| \frac{27}{e^3}\right)$ globales Maximum

(6) $f(x) = \cos x$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(8) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\,dx$ (Produktintegration)

$\Leftrightarrow$ $2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2$

$\Leftrightarrow$ $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \underbrace{[\sin x \cos x]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\,dx$$

$\Leftrightarrow$ $2\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi 1\,dx$ $\Leftrightarrow$ $\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}[x]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

(9) a) $e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ Euler?

b) $z^2 + 2z + 5 = 0$ $\Leftrightarrow$ $z_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4} - 5} = -1 \pm 2j$

c) inj.? nein, denn z.B. $x_1 \neq x_2$ mit $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

$\Rightarrow$ $f(x_1) = 1 = f(x_2) = 1$

surj.? nein, denn $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+ \neq W = \mathbb{R}$

e) z.B. $a_k = (-1)^k$ $\Rightarrow$ $a_k^2 = 1$ konv.,

aber a_k nicht konv. (alternierend)

f) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = 2$

g) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{x}}{x_0-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x_0}-\sqrt{x})(\sqrt{x_0}+\sqrt{x})} \to \infty$

h) $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$

$\Rightarrow$ Divergenz für $|x| \geq 1$, Konvergenz für $|x| < 1$

j) falsch, z.B. für $f(x) = \sin(2\pi x)$ gilt:

$\int_0^1 \sin(2\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right]_0^1 = 0$, aber $\sin(2\pi x) \neq 0$ $\forall x \in [0,1]$