Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
(a) Verwenden Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Substitution $\omega = (z + \frac{1}{z})$, um die Gleichung

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

in die quadratische Gleichung $\omega^2 + \omega - 1 = 0$ zu überführen.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a) den exakten Wert von $\cos(\frac{2\pi}{5})$. Verwenden Sie dabei die auf Aufgabenblatt 6, Aufgabe 3 hergeleitete Formel

$$\sum_{k=0}^{4} e^{i\frac{2k\pi}{5}} = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\cos(\frac{2\pi}{5})$ als Realteil einer bestimmten Nullstelle von $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Untersuchen Sie die Zahlenfolgen

$$a_n = \frac{1 + 6n + 2n^2}{(n+3)n}, \quad b_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n}, \quad c_n = \frac{n!}{n^n},$$

auf Beschränktheit und Konvergenz. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
(a) Seien a_n, b_n Zahlenfolgen mit $|a_n| \leq |b_n|$. Beweisen Sie die Implikation

$$b_n \to 0 \text{ für } n \to \infty \implies a_n \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

(b) Sei a_n eine Zahlenfolge und $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ die Folge der Mittelwerte der ersten n Folgenglieder. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} A_n = a.$$

Betrachten Sie dabei zunächst den Fall $a = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass in a) und b) die umgekehrten Implikationen im Allgemeinen nicht gelten. Konstruieren Sie hierfür jeweils ein Gegenbeispiel.

Abgabe: Montag, 14.12.2016 vor der Vorlesung.
Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den **Namen des Tutors** und die **Nummer der Übungsgruppe** auf die Lösung.