1 Quine-McCluskey (10 Pkt.)

Die Funktion $f : \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ sei durch ihre OFF-Menge gegeben:

$$OFF(f) := \{0010, 0110, 1011, 1111\}$$

Berechnen sie alle Primimplikanten von f nach dem Verfahren von Quine-McCluskey. Geben sie alle Zwischenschritte (d.h. die Menge L_i^M und $Prim_i$) und das resultierende Minimalpolynom an. Achten Sie darauf, zu welchem Zeitpunkt der Algorithmus die Primimplikanten erkennt.

Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe die abkürzende Schreibweise für Monome verwenden (z.B. statt $\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_4}$: 01-1).

2 Kodierung (2+3+5 Pkt.)

a) Geben Sie die Interpretationsfunktion $[.]_2$ für Zweierkomplementzahlen mit $n+1$ Vor- und k Nachkommastellen (also $d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0 d_{-1} \dots d_{-k}$) an.

b) Geben Sie die Werte folgender Zweierkomplementzahlen im Dezimalsystem an:

   0101.10

   1001.01

c) Beweisen sie folgendes Lemma:

   Lemma: Sei $[a]_2 = [a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0]_2$ eine ganze Zahl in Zweier-Komplement-Darstellung mit n Vorkommastellen und keinen Nachkommastellen. Dann gilt:

   $$[\bar{a}]_2 + 1 = -[a]_2$$

   Hierbei sei $[\bar{a}]_2$ die Zahl im Zweier-Komplement, die aus $[a]_2$ durch Invertieren aller Bits hervorgeht. Abgesehen von der geometrischen Summenformel sollen keine Sätze aus der Vorlesung ohne Beweis benutzt werden.

   Hinweis: bei Zahlen ohne Nachkommastellen gilt k = 0, allerdings gehört k immer noch zu den obigen Defintionen

Lösung 1

Korrekturhinweise (streng):

- Aufteilung in L_i^M fehlt oder garnicht verstanden *[-10 Pkt]*
- OFF-Menge benutzt *[-8 Pkt]*
- $Prim_i$ fehlt *[-3 Pkt]*
- L_0 fehlt *[-2.5 Pkt]*
- Partitionierung innerhalb L_i^M's fehlt *[-2.5 Pkt]*
- Schleifendurchlauf 4 nicht angegeben *[-2 Pkt]*
- Primimplikanten zu falschem Zeitpunkt hinzugefügt *[-2 Pkt]*
- Einzeln fehlende L_i^M, einmalig *[-1.5 Pkt]*
- Minimalpolynom nicht angegeben *[-1 Pkt]*
- $Prim_i$ fortlaufend erweitert *[-1 Pkt]*
- Pro Fehler bei OFF-Mengen überführung *[-0.5 Pkt]*
- Pro falschem/fehlenden Implikanten, auch für Folgefehler innerhalb des Algorithmus *[-0.5 Pkt]*
- Abbruch Bedingung fehlt *[-0.5 Pkt]*
- Sonstige leichte Notationsfehler *[-0.5 Pkt]*

Initialisierung

$L_0^{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$
0000
0001
0100
1000
0011
0101
1001
1010
1100
0111
1101
1110

$Prim_f = \emptyset$

1. Schleifendurchlauf

$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$	$L_1^{\{x_1,x_2,x_4\}}$	$L_1^{\{x_1,x_3,x_4\}}$	$L_1^{\{x_2,x_3,x_4\}}$
000-	00-1	0-00	-000
010-	10-0	0-01	-001
100-	01-1	1-00	-100
110-	11-0	0-11	-101
		1-01	
		1-10	

$Prim_f = \emptyset$

2. Schleifendurchlauf

$L_2^{\{x_1,x_2\}}$	$L_2^{\{x_1,x_3\}}$	$L_2^{\{x_1,x_4\}}$	$L_2^{\{x_2,x_3\}}$	$L_2^{\{x_2,x_4\}}$	$L_2^{\{x_3,x_4\}}$
	0-0-	1−−0	-00-		−−00
	1-0-	0−−1	-10-		−−01

$Prim_f = \emptyset$

3. Schleifendurchlauf

$L_3^{\{x_1\}}$	$L_3^{\{x_2\}}$	$L_3^{\{x_3\}}$	$L_3^{\{x_4\}}$
		−−0-	

$Prim_f = \{0--1, 1--0\}$

4. Schleifendurchlauf

$\mathrm{L}_4^{\{\}}$

$Prim_f = \{0--1, 1--0, --0-\}$

Abbruch

$$\bigcup_M L_4^M(f) = \emptyset$$

$\Rightarrow$ Abbruch der Schleife und *return* $Prim(f)$

Lösung 2

Korrekturhinweise (streng):

a)
- Nachkommastellen nicht mitangegeben *[-1.5 Pkt.]*
- n Vorkomma stellen benutzt *[-1 Pkt]*
- Einerkomplement hingeschrieben *[-1.5 Pkt.]*
- Klammerung nicht eindeutig *[-0.5 Pkt]*
- Kleine Fehler *[-1 Pkt.]*

b) Jeweils *[1.5 Pkt]*, Richtig/Falsch, keine Teilpunkte

c)
- d statt a benutzt *[-1 Pkt.]*
- Klammerung nicht eindeutig, jeweils *[-0.5 Pkt]* maximal *[-1 Pkt.]*
- Für jeden fehlenden Schritt (vgl. Musterlösung), der nicht klar herausgestellt wurde *[-1 Pkt.]*
- Für $n + 1$ Vorkomma stellen gezeigt *[-1 Pkt.]*
- Lösungen mit falscher Definitionen von Zweierkomplement können maximal 2.5 Punkte erhalten.
- Nicht $k = 0$ gesetzt *[-1 Pkt]*
- Die -1 nicht heraus gezogen *[-1 Pkt.]*

Lösungen

a)

$$[d]_2 := \left(\sum_{i=-k}^{n} d_i \cdot 2^i \right) - d_{n+1} \cdot 2^{n+1}$$

b)

$$[0101.10]_2 = 5.5_{dez}$$
$$[1001.01]_2 = -6.75_{dez}$$

c)

$$
\begin{aligned}
[\bar{a}]_2 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1}(1-a_i)\cdot 2^i\right) - (1-a_n)\cdot 2^n \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i - a_i \cdot 2^i\right) - (2^n - a_n \cdot 2^n) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i\right) - (2^n - a_n \cdot 2^n) \\
&\overset{GS}{=} (2^n - a_n \cdot 2^n) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i\right) - (2^n - a_n \cdot 2^n) \\
&= -\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i\right) \\
&\overset{Def}{=} -[a]_2
\end{aligned}
$$