Kapitel 3 – Kombinatorische Logik

1. Kombinatorische Schaltkreise
2. **Boolesche Algebren**
3. Boolesche Ausdrücke, Normalformen, zweistufige Synthese
4. Berechnung eines Minimalpolynoms
5. Arithmetische Schaltungen
6. Anwendung: ALU von ReTI

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

UNI FREIBURG

Prof. Dr. Christoph Scholl

Institut für Informatik

WS 2015/16

Überblick

- Boolesche Funktionen kann man durch Schaltkreise darstellen.
- Wir werden uns als nächstes mit Logiksynthese für zweistufige Schaltkreise beschäftigen.
- Bei der Logiksynthese für zweistufige Schaltkreise macht man häufig von einer alternativen Darstellungsform Gebrauch, den Booleschen Ausdrücken.
- Führe daher Boolesche Ausdrücke zunächst sauber ein, vorher aber noch eine etwas genauere Betrachtung von Booleschen Algebren.

2

Boolesche Algebren - allgemein

„Und“ „Oder“

- Es sei M eine Menge auf der zwei binäre Operationen $\cdot$ und $+$ und eine unäre Operation $\sim$ definiert sind.

„Nicht“

- Das Tupel $(M, \cdot, +, \sim)$ heißt boolesche Algebra, falls M eine nichtleere Menge ist und für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Axiome gelten:

Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Absorption	$x + (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x + y) = x$
Distributivität	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
Komplement	$x + (y \cdot \sim y) = x$	$x \cdot (y + \sim y) = x$

Beispiele boolescher Algebren

$\{0,1\}$
$=$

- $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg)$

$\mathcal{P}(S), 2^S$

- Boolesche Algebra der Teilmengen einer Menge S: $(Pot(S), \cap, \cup, ^c)$
- Boolesche Algebra der booleschen Funktionen in n Variablen: $(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \sim)$

⇒ **Allgemein**: Lässt sich eine Aussage direkt aus den Axiomen herleiten, dann gilt sie in allen booleschen Algebren!

- Man darf beim Beweis der Aussage aber auch wirklich nur die Axiome verwenden und keine Eigenschaften der konkreten booleschen Algebra.

UNI FREIBURG

Boolesche Algebra der Teilmengen von S $(Pot(S), \cap, \cup, ^C)$

- Menge: Potenzmenge von S
- $\cdot$: $Pot(S) \times Pot(S) \to Pot(S)$; $(M_1, M_2) \mapsto M_1 \cap M_2$
- $+$: $Pot(S) \times Pot(S) \to Pot(S)$; $(M_1, M_2) \mapsto M_1 \cup M_2$
- ^{C}: $Pot(S) \to Pot(S)$; $M \mapsto M^C := S \setminus M = \{ s \in S \mid s \notin M \}$
  M^C bzw. $\overline{M}$ bzw. $\neg M$ bzw. $\sim M$

Satz

$(Pot(S), \cap, \cup, ^C)$ ist eine boolesche Algebra.

- **Beweis**: Nachrechnen, dass alle Axiome gelten.

  $\boxed{\forall x, y \in M: x + (x \cdot y) = x}$

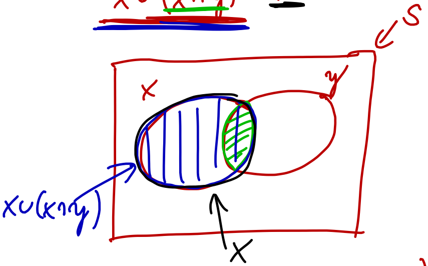
  Beispiel: Absorption
  - Seien $M_1, M_2 \in Pot(S)$.
  - Dann ist $(M_1 + (M_1 \cdot M_2)) = (M_1 \cup (M_1 \cap M_2)) = M_1$
    und $(M_1 \cdot (M_1 + M_2)) = (M_1 \cap (M_1 \cup M_2)) = M_1$.

UNI FREIBURG

Veranschaulichung, dass Absorptionsgesetz gilt:

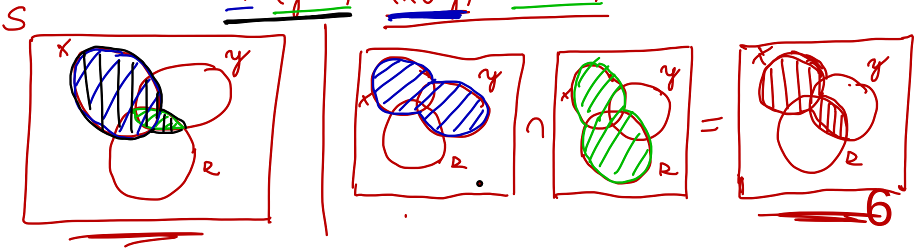
$\forall\, x, y \in \mathrm{Pot}(S)$: $\quad x + (x \cdot y) = x$

$$x \cup (x \cap y) = x$$



Distributivgesetz: $\quad x + yz = (x+y)\cdot(x+z)$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$



Boolesche Algebra der Funktionen in n Variablen $(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \sim)$

- Menge: $\mathbb{B}_n$ (Menge der booleschen Funktionen in n Variablen)

  in $\mathbb{B}_n$ in $\mathbb{B}$
- $\cdot$: $\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$; $(f \cdot g)(\alpha) = f(\alpha) \cdot g(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$
- $+$: $\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$; $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$

  $\sim[f(\alpha)] = 1$
- $\sim$: $\mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$; $(\sim f)(\alpha) = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$ „Komplementfunktion"

  nicht in $\mathbb{B}_n$ nicht in $\mathbb{B}$

Satz

$(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \sim)$ ist eine boolesche Algebra.

- **Beweis**: Nachrechnen, dass alle Axiome gelten.

  Beispiel: Kommutativität
  - Seien $f, g \in \mathbb{B}_n$.   z.z.: $f+g = g+f$
  - Für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$ gilt: $(f+g)(\alpha) = \underbrace{f(\alpha) + g(\alpha)}_{+:\ \mathbb{B}\times\mathbb{B}\to\mathbb{B}} = g(\alpha) + f(\alpha) = \underbrace{(g+f)(\alpha)}_{+:\ \mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n\to\mathbb{B}_n}$.

    nach Def.   Komm. in $\mathbb{B}$ nach Def.
  - Also $f + g = g + f$.

UNI FREIBURG

7

Betrachte folgende spezielle Boolesche Algebra von Teilmengen:

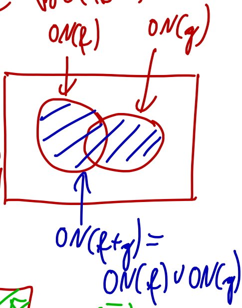
$(\mathrm{Pot}(\mathbb{B}^n), \cap, \cup, \neg)$ $\quad (S \triangleq \mathbb{B}^n)$

Zusammenhang zwischen B_n und $\mathrm{Pot}(\mathbb{B}^n)$:

Funktion $f \in B_n$ entspricht umkehrbar eindeutig einer Teilmenge von $\mathrm{Pot}(\mathbb{B}^n)$: $\quad ON(f) = \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 1\}$.

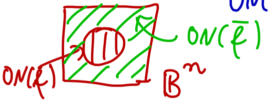
Operationen in $(B_n, \wedge, \vee, \neg)$ übertragen ~~sich~~ sich auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{B}^n)$:

$$
\begin{aligned}
ON(f+g) &= \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid (f+g)(\alpha) = 1\} \\
&= \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 1 \text{ oder } g(\alpha) = 1\} \\
&= \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 1\} \cup \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid g(\alpha) = 1\} \\
&= ON(f) \cup ON(g)
\end{aligned}
$$



$$ON(f \cdot g) = ON(f) \cap ON(g)$$

$$ON(\neg f) = \mathbb{B}^n \setminus ON(f) = \neg(ON(f))$$



Weitere, aus den Axiomen ableitbare Regeln:

- Existenz ~~neutraler Elemente~~: und Eindeutigkeit neutraler Elemente:
  $\exists \mathbf{0} : x + \mathbf{0} = x \; \forall x \in M, \quad \exists \mathbf{1} : x \cdot \mathbf{1} = x \; \forall x \in M$
  (0: Nullelement, 1: Einselement)
  und außerdem sind 0 und 1 mit der angegebenen Eigenschaft eindeutig.
- $\forall x \in M : x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall x \in M : x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$
- Doppeltes Komplement:
  $\forall x \in M : (\sim(\sim x)) = x$
- Eindeutigkeit des Komplements:
  $\forall x, y \in M : (x \cdot y = \mathbf{0} \text{ und } x + y = \mathbf{1}) \Rightarrow y = (\sim x)$
- Idempotenz:
  $\forall x \in M : x + x = x \quad x \cdot x = x$
- de Morgan-Regel:
  $\forall x, y, z \in M : \sim(x + y) = (\sim x) \cdot (\sim y) \quad \sim(x \cdot y) = (\sim x) + (\sim y)$
- Consensus-Regel:
  $\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z) = (x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z) + (y \cdot z)$
  $\forall x, y, z \in M : (x + y) \cdot ((\sim x) + z) = (x + y) \cdot ((\sim x) + z) \cdot (y + z)$
- Diese Regeln gelten in allen booleschen Algebren!

Bsp.: $(\mathrm{Pot}(S), \cap, \cup, \neg)$

$\exists 0 \in \mathrm{Pot}(S)$ mit $x \cup 0 = x \; \forall x \in \mathrm{Pot}(S)$

$\Rightarrow$ $\underset{\cdots}{\emptyset}$ ist Nullelement.

$\exists 1 \in \mathrm{Pot}(S)$ mit $x \cap 1 = x \; \forall x \in \mathrm{Pot}(S)$

$\Rightarrow$ $\underset{\cdots}{S}$ ist Einselement.

Bsp.: De Morgan am Bsp. der Aussagenlogik.

$M = \{\text{true}, \text{false}\}$

$(M, \wedge, \vee, \neg)$

$\forall x, y \in M: \underline{\neg(x \vee y)} = \underline{\neg x \wedge \neg y}$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg(x \vee y)$	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \wedge \neg y$
false	false	false	false	true	true	true	true
false	true	false	true	false	true	false	false
true	false	false	true	false	false	true	false
true	true	true	true	false	false	false	false

Beweis von Regeln der Booleschen Algebra

- Existenz und Eindeutigkeit des neutralen Elements (1. Hälfte):

1) $\exists 0 \in M$ mit $x + 0 = x \;\forall x \in M$ (Existenz)

2) Falls es $0, 0' \in M$ mit $\underbrace{x+0=x}_{(*)}, \underbrace{x+0'=x}_{(**)} \;\forall x \in M$, dann gilt $0 = 0'$.
(Eindeutigkeit)

zu 1): folgt einfach aus der Komplementregel:
Wähle $y \in M$ beliebig, dann gilt $\forall x \in M$:

$$x + \underbrace{y \cdot \sim y}_{:=0} = x$$

zu 2):

$$0 \underset{(**) \text{ mit } x=0}{=} 0 + 0' \underset{\text{Komm.}}{=} 0' + 0 \underset{(*) \text{ mit } x=0'}{=} 0'$$

$\Longrightarrow 0 = 0'$

<u>Korollar</u>: $\forall y \in M$ gilt: $y \cdot \neg y = 0$ und $y + \neg y = 1$.

- Beweis zur Eindeutigkeit des Komplements:

z.z.: $\forall x,y \in M$: Falls $\underbrace{x\cdot y = 0 \text{ und } x+y=1}_{(*)}$, dann gilt $y = \neg x$.

(Umkehraussage gilt auf jeden Fall:
Wenn $y = \neg x$, dann $x \cdot y = 0$ und $x+y=1$, siehe Korollar von oben!)

Zu zeigen: $(*)$ gilt nur für das Komplement $\underline{\neg x} = y$.

Beweis: $$y \underset{\text{Kompl.}}{=} y\cdot(x+\neg x) \underset{\text{Distr.}}{=} y\cdot x + y\cdot \neg x \underset{\text{Komm.}}{=} \underbrace{x\cdot y}_{=0} + y\cdot\neg x \underset{(*)}{=} 0 + y\cdot \neg x$$

$$\underset{\text{Komm., Neutr. Element}}{=} y\cdot\neg x \underset{\text{Kompl.}}{=} y\cdot\neg x + (x\cdot\neg x) \underset{\text{... Komm.}}{=} \neg x\cdot y + \neg x\cdot x =$$

$$\underset{\text{Distr.}}{=} \neg x\cdot(y+x) \underset{\text{Komm.}}{=} \neg x\cdot\underbrace{(x+y)}_{=1} \underset{(*)}{=} \neg x \cdot 1 \underset{\text{Neutr. Element}}{=} \neg x$$

Dualitätsprinzip bei booleschen Algebren

Prinzip der Dualität

Gilt eine aus den Axiomen der booleschen Algebra abgeleitete Gleichung p, so gilt auch die zu p duale Gleichung, die aus p hervorgeht durch gleichzeitiges Vertauschen von $+$ und $\cdot$, sowie **0** und **1**.

- **Beispiel**:
  - $(x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z) + (y \cdot z) = (x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z)$
  - $(x + y) \cdot ((\sim x) + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot ((\sim x) + z)$