Satz Für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $k \in \{0, .. n\}$ ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen ~~Teilungen~~ Teilmengen von $\{1, \dots n\}$ bzw. der $\emptyset$ im Fall $n=0$.

Bew. (IA) Im Fall $n=0$ ist die leere Menge die einzige Teilmenge und es gilt

$$\binom{0}{0} = 1$$

(IS) Die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}$
Nach dieser Vorraussetzung existieren $\binom{n}{k}$ viele k-Teilmengen von $\{1, \dots n+1\}$, die $n+1$ nicht enthalten
Zudem existieren also $\binom{n}{k-1}$ Teilmengen von $\{1, \dots n+1\}$, die $n+1$ enthalten, denn diesen entsprechen genau den mit $\{n+1\}$ vereinigten $(k-1)$-Teilmengen von $\{1, \dots n\}$.
Insgesamt also:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Satz: (Binomialformel): (Beachte $a^0 = b^0 = 1$)
Es gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Beispiel: $(a+b)^3 = (a+b)^2 (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Vgl. Pascalsches Dreieck.

Beweis: (IA) Für $n=1$ ist die Aussage klar.

(IS) Sei die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Es gilt

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b)$$

$$= (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{k+1-1} \cdot b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k \cdot b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n\cancel{+1}}{n+1-1} a^{n+1} b^{n-1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

$k=0$ in 2. Σ

$$\binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^k b^{n+1-k}$$

$$\binom{n+1}{0} = 1 = + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \qquad = \binom{n+1}{k}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} \cdot a^0 \cdot b^{n+1}$$

Q.E.D.

4. Geometrie im $\mathbb{R}^n$

Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}$, d.h. die Menge der n-Tupel

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots n \right\}$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ heißen auch Vektoren und die Komponenten eines Vektors seine Koordinaten. Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind gleich, falls $x_i = y \;\; \forall i = 1, 2, \ldots n$ gilt z.B.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4/2 \end{pmatrix}, \text{ aber } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren können addiert und mit reellen Zahlen multipliziert werden.

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ bzw. } \lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Multiplikation zweier Vektoren ist im Allgemein nicht möglich.

Als (Standard) Einheitsvektoren bezeichnen wir die Vektoren.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\text{Zahlen}} \cdot \underbrace{e_i}_{\text{Vektoren}} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(2) $x+0 = x$, wobei $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $x+(-x) = 0$

(4) $x+y = y+x$

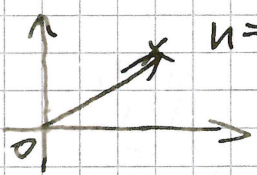
(5) $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$

(6) $(\lambda\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu x)$

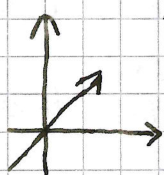
(7) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

(8) $1\cdot x = x$

Anschaulich ist $\mathbb{R}^n$ ein n-dimensionales Gitter mit ausgezeichnetem Nullpunkt und ausgezeichneten Richtungen.



$n=2$



$n=3$

Längen und Winkel Die euklidischen Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist ~~auf~~ definiert durch

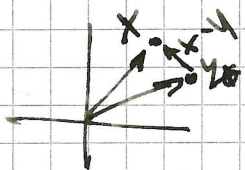
$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es gelten $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$

$$|x| \geq 0,\quad |x| = 0 \Rightarrow x = 0,\quad |\lambda\cdot x| = |\lambda|\cdot|x|$$

Der Abstand zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\mathrm{dist}(x,y) = |x-y|.$$



Zur Definition von Winkeln zwischen Vektoren verwenden wir das Skalarprodukt 04.11.15 MJ

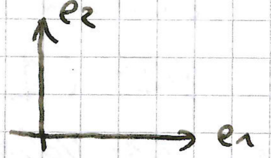
$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n$$

Es gilt: (1) $< x, y > = < y, x >$

(2) $< \lambda x + \mu y, z > = \lambda \cdot < x, z >$

(3) $< x, x > = |x|^2$

Beispiel: $< e_1, e_2 > = 0$



Andere Notation: $x \cdot y$