Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $f : A \cup B \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $\inf_{x \in A \cup B} f(x) = \inf\{\inf_{x \in A} f(x),\ \inf_{x \in B} f(x)\}$ gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(b) Sei $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in [0, b]$. Zeigen Sie, dass für das in Kapitel 4, Satz 1.1 definierte Riemann-Integral gilt

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_0^b f(x)\ dx - \int_0^a f(x)\ dx.$$

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Zeigen Sie, dass durch $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ eine Zerlegung Z_n von $[a, b]$ definiert wird, mit $\Delta Z_n \to 0$ für $n \to \infty$. Berechnen Sie für $f(x) = x^3$ das Riemann Integral

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} S_{Z_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Verwenden Sie dabei drei verschiedene Wahlen der Stützstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, nämlich

$$(1)\ \xi_k = x_{k-1}, \quad (2)\ \xi_k = x_k \quad \text{und} \quad (3)\ \xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist konvex, d.h $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

(2) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für alle $x, x_0 \in (a, b)$.

(3) $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$ für alle $\theta \in (0, 1)$ und alle $x, y \in (a, b)$.

Erstellen Sie zu (2) und (3) zunächst eine Skizze.

Hinweis: Zeigen Sie die Äquivalenz durch einen *Ringschluss*: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Dabei wurde (1) $\Rightarrow$ (2) schon in der Vorlesung bewiesen. Untersuchen Sie für (3) $\Rightarrow$ (1) die Hilfsfunktion

$$h(\xi) = \theta f(\xi) + (1-\theta)f(y) - f(\theta\xi + (1-\theta)y)$$

auf Minima. Vergleichen Sie für (2) $\Rightarrow$ (3) die Sekantensteigungen links und rechts von x_0.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{y}$, sei definiert für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, die Funktion f kann in $(0, 0)$ nicht stetig fortgesetzt werden, d.h konstruieren Sie Nullfolgen $x_n, y_n, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n).$$

Folgern Sie, dass die Reihenfolge von Grenzwerten im Allgemeinen nicht vertauscht werden darf.

Abgabe: Montag, 1.02.2016 vor der Vorlesung.