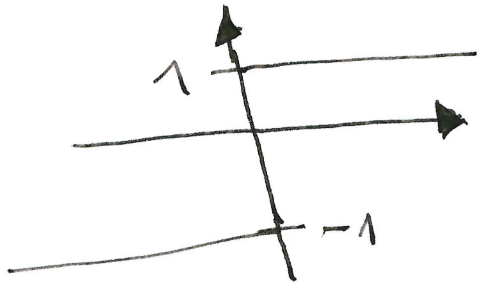
5. Grenzwerte u. Stetigkeit von Funktionen

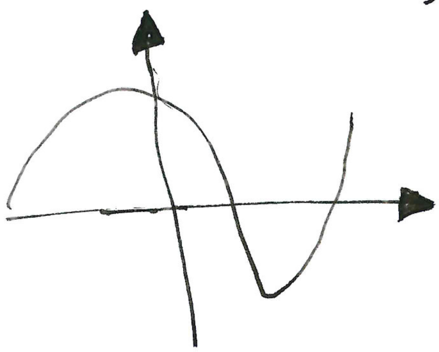
- Frage: werden konvergente Folgen auf konvergente Folgen abgebildet und stimmen die Grenzwerte überein?

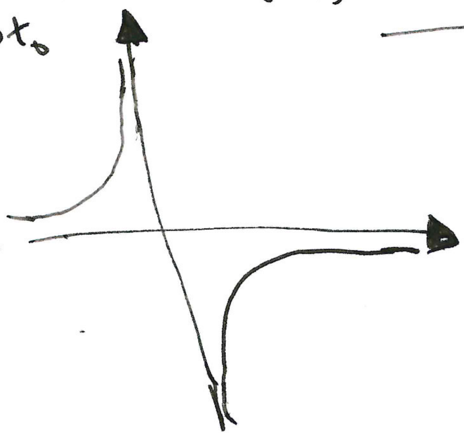
- Def.: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, falls $f(x_n) \to a$ $\forall$ Folgen $x_n \to x_0$

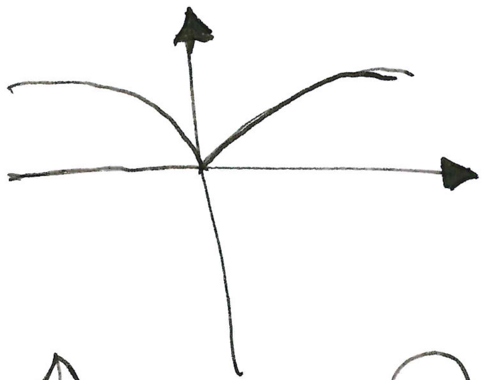
f stetig in x_0, falls



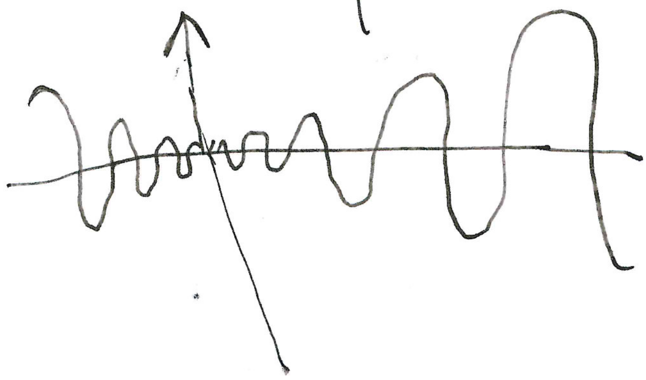
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_n)$$







Bsp.: $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \\ 0 \end{cases}$



$x_n \to 0$

$\to |f(x_n) - f(0)|$

$= |x_n \sin(\frac{1}{x})| = |x_n| \underbrace{|\sin(\frac{1}{x_n})|}_{\leq 1} \leq |x_n|$

$\Rightarrow f(x_n) \to 0 = f(0)$

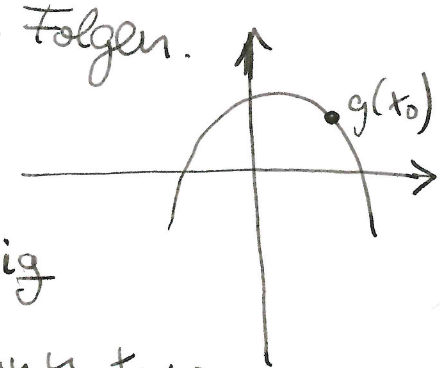
<u>Satz</u>, Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$.

(I) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ stetig in x_0

(II) $f \cdot g$ ist stetig in x_0

(III) $\frac{f}{g}$ ist stetig in x_0, sofern $g(x_0) \neq 0$

<u>Bew</u>.: Rechenregeln für konvergente Folgen.



<u>Bsp</u>.: (I) konstante Funktionen sind stetig

(II) $f(x) = x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn $x_n \to x_0$ impliziert $f(x_n) \to f(x_0)$

(III) Mit dem Satz folgt, dass Polynome stetige Funktionen.

(IV) Rationale Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p, q sind stetig auf $\mathbb{R} \setminus N_q$ mit der Nullstellenmenge N_q von q.
Möglicherweise besitzt f jedoch Grenzwerte in $x_0 \in N_q$, z.B. wenn x_0 auch Nullstelle von p mit gleicher oder größerer Vielfachheit, d.h. ist $\lambda \in N_q$

und $p(x) = (x-\lambda)^k \cdot p_1(x)$ $\qquad p_1(x) \neq 0$
$q(x) = (x-\lambda)^m \, q_1(x)$ $\qquad q_1(x) \neq 0$

aber
$$f(x) = (x-\lambda)^{k-m} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \to \begin{cases} 0 & k > m \\ \frac{p_1(x)}{q_1(x)} & k = m \\ \pm\infty & \text{falls } k < m \end{cases}$$

$x \to x_0 = \lambda$

(v) $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

charakteristische Fkt. der Menge $\mathbb{Q}$

ist nicht stetig, denn ist z.B. x_n eine Folge in $x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, so gilt $f(x_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, aber $f(\sqrt{2}) = 0$

__Satz__: Sind $f: D \mapsto \mathbb{R}$, $g: E \mapsto \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und sind f stetig in x_0 und g stetig in $y_0 = f(x_0)$ so ist $g \circ f$ stetig in x_0.

__Bew__: Sei x_n eine Folge in D mit $x_n \mapsto x_0$

Wir müssen zeigen, dass $g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) =$

Da f stetig ist in x_0, gilt $f(x_n) \mapsto f(x_0) \ g(y_0)$ konv.

bzw. $y_n \mapsto y_0$ mit $y_n = f(x_n)$. Da g stetig ist in y_0 gilt $g(y_n) \mapsto g(y_0)$

Dies bedeutet, dass

$$g(f(x_n)) \mapsto g(y_n) \to g(y_0) = g(f(x_0))$$

Q.E.D.

__Bsp__: Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn

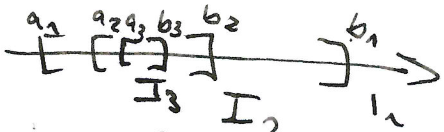
$$x_n \mapsto x_0 \to \big||x_n| - |x_0|\big| \leq |x_n - x_0| \to 0$$

Folglich ist $|f|$ stetig für jede stetige Funktion f

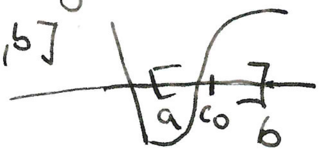
Satz: Sind $I_n=[a_n,b_n]$ geschachtelte Intervalle, d.h. $I_n \supset I_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ mit $b_n-a_n \to 0$,

So ex. eindeutig x_0 ~~mit~~ $x_0 \in I_n$ und $a_n, b_n \to x_0$ für $n \to \infty$

Bew.: Übung



Lemma: Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ~~mit~~ stetig mit $f(b)\cdot f(a) \leq 0$. Dann $\exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0)=0$



Bew: Wir definieren eine Folge von Intervallen $I_n=[a_n,b_n]$, indem wir $a_0=a$ und $b_0=b$ und für $n\geq 0$ I_n definieren durch

$$I_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n,c_n] & \text{falls } f(a_n)f(c_n)\leq 0 \\ [c_n,b_n] & \cancel{\text{sonst}}\ f(b_n)f(c_n) \geq 0 \end{cases}$$

mit $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$

Per Induktion: zeigen wir, dass $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ $\forall n \geq 0$ gilt

Für $n=0$ ist dies nach Voraussetzung klar.

Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$

Dann haben $f(a_n)$ und $f(b_n)$ nicht dasselbe Vorzeichen und $f(c_n)$ hat nicht gleichzeitig dasselbe Vorzeichen wie $f(a_n)$ und $f(b_n)$.

Es gilt $b_n - a^n = 2^{-n}(b_0-a_0)$, also $b_n - a_n \to 0$.

Ferner gilt $I_n \supset I_{n+1}$. Nach vorherigen Satz $\exists x_0$ mit $x_0 \in I_n$ $\forall n\geq 0$ und $a_n, b_n \to x_0$

Mit Stetigkeit von f folgt:

$$0 \leq f(x_0)^2 = f(x_0)\cdot f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\, f(b_n) \leq 0$$

Damit gilt $f(x_0)=0$.

Bem: Allgemein gilt: für eine stetige Fkt. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, dass für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ ~~indem wir $a_0=a$, $b_0=b$ und~~ ein $x \in [a,b]$ existiert mit $f(x)=y$.

Bew. Betrachte $g(x) = f(x) - y$.

<u>Satz</u>: Sei $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig.

Dann gilt:

(I) $f(I) = [f(a), f(b)]$

(II) Die Umkehrfunktion $g: [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

<u>Bew</u>:

(I) Monotonie von f impliziert $f(x) \in [f(a), f(b)]$ $\forall x \in I = [a,b]$

Stetigkeit von f und vorheriges Lemma impliziert $f(I) = [f(a), f(b)]$, d.h. $\forall y \in [f(a), f(b)]$ $\exists x \in I: f(x) = y$.

(II) Wäre g nicht streng monoton wachsend, so gäbe es $y_1, y_2 \in f(I)$ mit $y_1 < y_2$ und $g(y_2) < g(y_1)$

Die Monotonie von f liefert dann

$$f(g(y_2)) \leq f(g(y_1))$$

bzw. $y_2 \leq y_1$ ↯ Widerspruch zur Wahl.