E(a) ist eine von a abhängige Aussage.

Der Ausdruck $P \Leftrightarrow Q$ steht für $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$.

21.10.15
MI

Abbildungen

Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung von X nach Y wird in d. Form

$$f: X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$

Definitionsbereich

z.B.: $f: \mathbb{R} \to [-1;1], \; x \mapsto \sin(x)$

X heißt Definitionsbereich der Abbildung f.

Als Bild der Funktion f bezeichnen wir die Menge $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$

Das Urbild einer Teilmenge $B \subset Y$ ist

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Hiermit ist nicht die Inverse, als vielmehr das Urbild gemeint

z.B.: $\sin^{-1}(\{0\}) = \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$(x^2)^{-1}(\{9\}) = \pm 3$

Die Beschränkung einer Funktion auf eine Teilmenge $A \subset X$ wird mit $f|_A$ bezeichnet und bezeichnet die Abbildung:

$$f|_A: A \to Y, \; x \mapsto f(x)$$

Die Identität auf einer Menge X ist die Abbildung

$id_X: X \to X, \; x \mapsto x$

1/

Verkettung:

Die Verkettung von Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$.

Ist $g \circ f: X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$

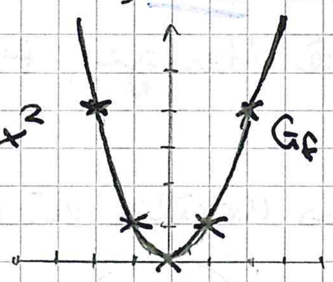
z.B.: $h(x) = x^2 - 25$ $\quad h(x) = g \circ f$ mit $f(x) = x^2$, $g(y) = y - 25$.

Das kartesische Produkt zweier Mengen X und Y ist definiert als

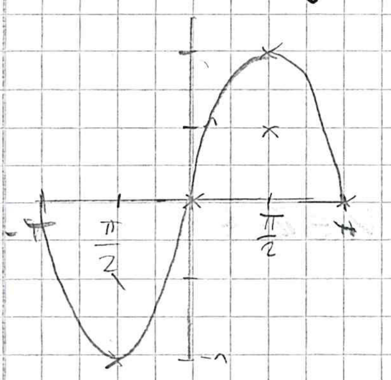
$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Der Graph eine Abbildung $f: X \to Y$ ist gegeben durch: $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$

Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$



Abbildungsverhalten einer Abbildung $f: X \to Y$



- injektiv, wenn aus $f(x) = f(x')$ $x = x'$ folgt
  (zu jedem $y \in Y$ existiert höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$)
- surjektiv, wenn $\forall y \in Y: \exists x \in X$ mit $f(x) = y$ (d.h. zu jedem $y \in Y$ existiert mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$)
- bijektiv wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

$\forall y \in Y : \exists\, x \in X$ mit $f(x) = y$ (nur ein einzigs)

Die Begriffe geben Auskunft über die Lösbarkeits-eigenschaften einer Gleichung:

Für $y \in Y$: $f(x) = y$ (finde $x \in X$ mit $f(x) = y$)

1. Ist f bijektiv, so wird durch

$$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x,\ x \text{ ist Lösung von } f(x) = y$$

In diesem Fall gilt:

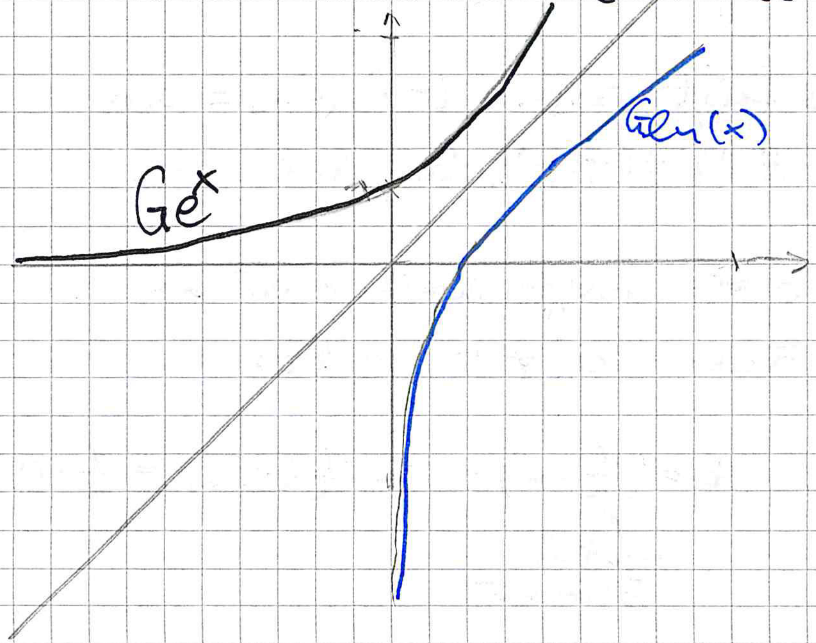
$$f^{-1} \circ f = id_X$$

Zudem ist f^{-1} ebenfalls bijektiv

2. Für den Graph von f^{-1} gilt:

$$G_{f^{-1}} = \{ (y, f^{-1}(y)) \mid y \in Y \}$$
$$= \{ (f(x), x) \mid x \in X \},$$

d.h. $G_{f^{-1}}$ entsteht durch Spiegelung von G_f an der Diagonalen / ersten Winkelhalbierenden $(f(x) = x)$



Zahlen

Bekannte Zahlenmengen sind:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, -1, -2, 3, \}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \{ p/q \mid q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z} \}$ rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ = Punkte der Zahlengerade reelle Zahlen

Addition und Multiplikation erfüllen folgende Gesetze:

Assoziativität: $(a+b)+c = a+(b+c)$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Kommutativität: $a+b = b+a$

$$ab = ba$$

Neutrale ~~Inverses~~ Elemente: $a + 0 = a$

$$1 \cdot a = a$$

Inverses Element: $a + (-a) = 0$

$$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1 \quad | \, a \neq 0$$

Distributivgesetz: $a(b+c) = ab + ac$

Daraus folgt z.B. $(-a)(-b) = ab$

sowie Nullteilerfreiheit, d.h. aus

$a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$

Im Fall $a \neq 0$ gilt:

$$b = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$$

neutrales Element