Prof. Dr. Christoph Scholl
Dr. Paolo Marin

Freiburg, 13. November 2015

Technische Informatik
Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (3 Punkte)

In der Vorlesung wurde die **Zweier-Komplement-Darstellung** ($[\cdot]_2$) wie folgt definiert:

$$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_2 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i 2^i - d_n 2^n$$

Zeigen Sie, dass die Subtraktion von *ganzen* Zweierkomplementzahlen, d.h. Zweierkomplementzahlen ohne Nachkommastelle, auf die Addition mit 1 zurückgeführt werden kann :

$$[a]_2 - [b]_2 = [a]_2 + [\bar{b}]_2 + 1$$

$[\bar{b}]_2$ ist die Festkommazahl im Zweierkomplement, die aus $[b]_2$ durch Komplementieren aller Bits hervorgeht, d.h. $\overline{0} = 1$ und $\overline{1} = 0$

Sie dürfen Sätze bzw. Lemmata aus der Vorlesung benutzen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $y \in \mathbb{B}^{24}$. Dann heißt $\text{sext}(y) := y_{23}^8 y$ sign extension von y.
Beweisen Sie, dass $[y] = [\text{sext}(y)]$ gilt.

Aufgabe 3 (1 + 3 Punkte)

Beim Entwurf des Instruktionssatzes eines neuen Rechners wird die Befehlsbreite auf 64 Bit festgelegt.

a) Wieviele verschiedene Befehle können durch diese 64 Bit prinzipiell kodiert werden, wenn jeder Befehl einen 42-Bit-Parameter beinhaltet?

b) Zur Realisierung eines `MOVE`-Befehls, der den Inhalt des Registers `S` in das Register `D` schreibt, werden bei der Befehlskodierung zwei Bit-Blöcke mit je 3 Bit für die Angabe von `S` und `D` reserviert, wie nachfolgende Abbildung beispielhaft veranschaulicht.

63 . . . 48	S	D	41 . . . 0
	47 46 45	44 43 42	

Abbildung 1: Beispielhafte Aufteilung der Datenleitungen für den `MOVE`-Befehl

Desweiteren kann man annehmen, dass `S` und `D` immer unterschiedlich sind (d.h. die Befehle „`MOVE S S`“ bzw. „`MOVE D D`“ kommen nie vor). Ausserdem sind die restlichen Bits (63-48 und 41-0 in der Abbildung) frei wählbar. Wieviele gültige Möglichkeiten gibt es d ann für den `MOVE`-Befehl?

Aufgabe 4 (3 + 2 + 2 + 1 Punkte)

Gegeben sei der Schaltkreis SK_1 wie folgt:
$SK_1 := (X_3, G, typ, IN, Y)$, wobei

$$\begin{aligned}
X_3 &= (x_1, x_2, x_3)\\
Y_2 &= (v_1, v_6)\\
G &= (V, E)\\
V &= \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \cup \{0, 1\}\\
E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}\}
\end{aligned}$$

Die Abbildungen Q, Z, typ und IN sind durch die beiden folgenden Funktionstabellen gegeben:

$e_i \in E$	$Q(e_i)$	$Z(e_i)$
e_1	v_8	v_1
e_2	v_2	v_3
e_3	v_4	v_6
e_4	v_3	v_1
e_5	v_7	v_8
e_6	x_1	v_2
e_7	x_3	v_7
e_8	v_5	v_3
e_9	x_1	v_5
e_{10}	x_2	v_4
e_{11}	x_2	v_5
e_{12}	x_3	v_2
e_{13}	x_2	v_7
e_{14}	v_2	v_8
e_{15}	x_1	v_4
e_{16}	x_3	v_6

$v_i \in V$	$IN(v_i)$	$typ(v_i)$
v_1	(e_4, e_1)	AND_2
v_2	(e_6, e_{12})	OR_2
v_3	(e_8, e_2)	AND_2
v_4	(e_{15}, e_{10})	XOR_2
v_5	(e_9, e_{11})	OR_2
v_6	(e_3, e_{16})	XOR_2
v_7	(e_{13}, e_7)	OR_2
v_8	(e_{14}, e_5)	AND_2

a) Zeichnen Sie SK_1.

b) Eine topologische Sortierung eines azyklischen Graphen $G = (V, E)$ ist eine bijektive Abbildung $topsort : V \to \{1, \ldots, |V|\}$ mit folgender Eigenschaft: $\forall e \in E : topsort(Q(e)) < topsort(Z(e))$. Unter einer topologischen Sortierung eines kombinatorischen Schaltkreises versteht man eine topologische Sortierung des azyklischen Graphen, der dem Schaltkreis zugrunde liegt. Geben Sie für SK_1 eine topologische Sortierung an.

c) Bestimmen Sie die Kosten sowie die Tiefe von SK_1, wobei die Kosten sich aus der Anzahl der benutzen Gatter ergibt und die Tiefe entspricht der Anzahl Gatter, die auf dem längsten Pfad von G liegen.

d) Geben Sie eine Simulation für den Eingangsvektor $(0, 1, 0)$ an. Werten Sie dazu die Gatter in der durch Ihre topologische Sortierung gegebenen Reihefolge aus.

Aufgabe 5 (3 + 2 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass es zu jedem Schaltkreis eine topologische Sortierung gibt.

b) Geben Sie aufgrund der Beweisidee aus *a)* ein Algorithmus an, der eine topologische Sortierung zu einem azyklischen Graphen berechnet.

Hinweise:

- Zeigen Sie zunächst, dass es in jedem azyklischen Graphen mindestens eine Senke gibt, d.h. einen Knoten v mit $\text{outdeg}(v) = 0$.
- Überlegen Sie sich, dass man in einer topologischen Sortierung $\textit{topsort} : V \implies \{1, \ldots, |V|\}$ für eine Senke s, $\textit{topsort}(s) = |V|$ definieren kann.
- Führen Sie den Beweis durch vollständige Induktion über die Anzahl $n = |V|$ von Knoten in einem azyklischen Graphen. Benutzen Sie im Induktionsschritt die Eigenschaft, dass bei streichen eines Knotes aus einem azyklischen Graphen (zusammen mit allen Kanten, deren Quelle oder Ziel der Knoten ist) der resultierende Graph ebenfalls azyklisch ist.

Abgabe: 20. November 2015, 17$^{\underline{00}}$ über das Übungsportal