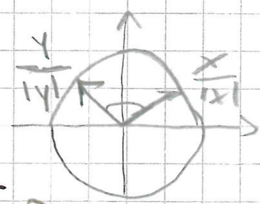
Bemerkung: Es gilt: $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x,y\rangle$ MI

Definition: Der Winkel $\Phi \in [0,\pi]$ zwischen zwei Vektoren $x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist definiert durch $\cos\Phi = \langle \frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \rangle$.
x,y heißen senkrecht oder orthogonal zueinander, wenn $\langle x,y\rangle = 0$ gilt. ($\Phi = \frac{\pi}{2}$)

Erklärung: Die Vektoren $\frac{x}{|x|}$ und $\frac{y}{|y|}$ haben die Länge 1 und liegen (für $n=2$) auf einer Kreislinie und Radius 1. Es existieren Zahlen Φ_1 und Φ_2 mit:



$$\frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} \cos\Phi_1 \\ \sin\Phi_1 \end{pmatrix} \qquad \frac{y}{|y|} = \begin{pmatrix} \cos\Phi_2 \\ \sin\Phi_2 \end{pmatrix}$$

Dann folgt:

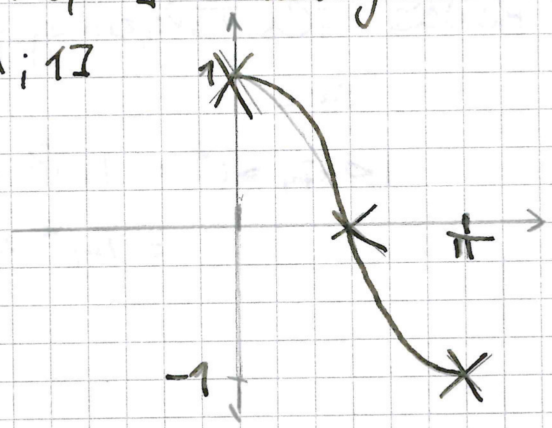
$$\langle \frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \cos\Phi_1 \\ \sin\Phi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\Phi_2 \\ \sin\Phi_2 \end{pmatrix} \rangle$$

Trigonometrischen Identitäten (Additionstheoreme)

$$= \cos\Phi_1 \cdot \cos\Phi_2 + \sin\Phi_1 \cdot \sin\Phi_2$$
$$= \cos(\Phi_1 - \Phi_2)$$

09.11.15
MI

Allgemein d.h. für $n \in \mathbb{N}$ beliebig, zeigen wir, dass stets $\langle \frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \rangle \in [-1, 1)$ gilt, ~~mit~~ sodass der Winkel $\Phi \in [0, \pi]$ eindeutig bestimmt ist, da $\cos : [0, \pi] \to [-1; 1]$ bijektiv ist.



Satz (Cauchy-Schwarz): $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|.$$

Beweis: Für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $|a| = |b| = 1$ gilt:

$$1 + \langle a, b \rangle = \frac{1}{2} \cdot (|a+b|^2) = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + 2 \cdot \langle a, b \rangle)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a_1^2 + \dots a_n^2 + b_1^2 + \dots b_n^2 + 2a_1b_1 + \dots 2a_nb_n)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 + \dots + a_n^2 + b_n^2 + 2 \cdot a_n \cdot b_n)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ((a_1 + b_1)^2 \dots + (a_n + b_n)^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |a+b|^2 \geq 0$$

Analog: $1 - \langle a, b \rangle = \frac{1}{2} |a-b|^2 \geq 0$

Folglich: $\langle a, b \rangle \geq -1$

$\langle a, b \rangle \leq 1$

Für $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ setze $a = \frac{x}{|x|}$ und $b = \frac{y}{|y|}$ und erhalten:

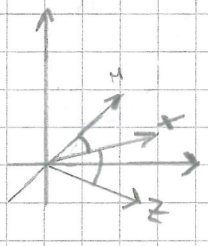
$$|\langle x, y \rangle| = |\langle |x| \cdot a, |y| \cdot b \rangle| = |\,|x| \cdot \langle a, |y| \cdot b \rangle|$$

2/ $= ||x||y| \cdot \langle a, b \rangle| = |x||y| \underbrace{|\langle a, b \rangle|}_{\leq 1} \leq |x||y| \to |\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$

Gilt $x=0$ oder $y=0$, so ist die Aussage klar, da $\langle 0,y\rangle = 0$ bzw. $\langle x,0\rangle = 0$ gilt. Q.E.D.

Beweis: Als Folgerung erhalten wir den Kosinussatz:

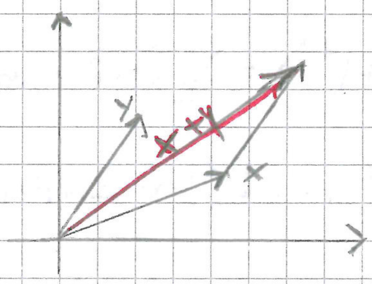
$$|x-y|^2 = |x|^2+|y|^2-2\cdot\langle x,y\rangle$$
$$= |x|^2+|y|^2-2\cdot\cos\Phi\cdot|x||y|$$



Satz (Dreiecksungleichung): $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$ gilt:

$$|x+y| \le |x|+|y|$$

Erklärung:



Das direkte Weg von 0 nach $x+y$ ist kürzer als der Umweg über x.

Beweis: Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2+\langle x,y\rangle\cdot 2$$
$$\le |x|^2+|y|^2+2|x||y|$$
$$= (|x|+|y|)^2$$
$$|x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2$$
$$|x+y|^2 \le |x|+|y|$$

Das beweist die Abschätzung. Q.E.D.

Zusatz: Gleichheit gilt in der Dreiecksungleichung genau dann, wenn $x=\lambda\cdot y$ mit $\lambda\ge 0$ gilt, d.h. genau dann wenn x,y parallel und gleichgerichtet sind.

Bemerkung: Mit dem Skalarprodukt kann man Vektoren auf eindimensionale ~~Unter~~ Teilräume „projizieren"

Ist G_v für $v\in\mathbb{R}^n$ mit $|v|=1$ gegeben durch:

$$G_v := \{t\cdot v \mid t\in\mathbb{R}\},$$

so ~~kann~~ ist die Projektion von $x\in\mathbb{R}^n$ auf G_v definiert durch:

$$x_g = \underbrace{\langle x,v\rangle}_{\lambda}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle x-x_g, v\rangle &= \langle x,v\rangle - \langle x_g,v\rangle \\
&= \langle x,v\rangle - \langle \lambda\cdot v,v\rangle \\
&= \langle x,v\rangle - \lambda\cdot\underbrace{\langle v,v\rangle}_{=|v|^2=1} \\
&= \langle x,v\rangle - \lambda \\
&= \langle x,v\rangle - \langle x,v\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

d.h. $x-x_g$ steht senkrecht zu G_v.

Definition: Für $x,y\in\mathbb{R}^3$ ist das Kreuzprodukt von x und y definiert durch:

$$x\times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Es gilt: (1) $(x)\times(y) = (-y)\times(x)$

(2) $(\lambda\cdot x+\mu\cdot y)\times z = (\lambda\cdot x)\times z + (\mu\cdot y)\times(z)$

<u>Bsp.:</u> Es gilt

- $e_1\times e_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = e_3$
- $e_2\times e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = e_1$
- $e_1\times e_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = e_2$