- Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta(z)\to 0} \sum_{k=0}^{n} \Delta(x_n)\cdot f(z_k)$ 27.01.16M.

- wohldefiniert für

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig (stückweise stetig)

$$\int_a^b \alpha\cdot f+\beta\cdot g\,dt = \alpha\cdot\int_a^b f\,dx + \beta\cdot\int_a^b g\,dx \quad \text{(Linearität)}$$

Satz: Sind $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit

$f(t)\leq g(t)\ \forall x\in[a,b]$.

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(t)\,dx$

Bew.: Für jede Zahl z in $[a,b]$ gilt

$$\sum_{k=1}^{N} \underbrace{\Delta x_k}_{\geq 0}\,\underbrace{f(z_k)}_{\leq g(z_k)} \leq \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k\, g(z_k)$$

Für eine Folge von Zerlegungen bleibt die Ungleichung im Grenzwert erhalten. $\square$

Satz: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\leq (b-a)\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

Bew.: Für jede Zerlegung Z gilt:

Dreiecksungleichung

$$|S_Z(f)| = \left|\sum_{k=1}^{N}\Delta x_k\cdot f(\cancel{z_k}x)\right| \leq \sum_{k=1}^{N}\Delta x_k\cdot|f(x)|$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \qquad\qquad \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\sum_{k=1}^{N}\Delta x_k\cdot|f(\cancel{z_k}x)| \leq \max_{x\in[a,b]}|f(x)|\cdot\sum_{k=1}^{N}\Delta x_k$$

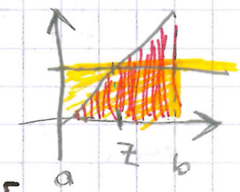
$$= \max_{x\in[a,b]}|f(x)|\cdot(b-a)$$

Alternativ mit obigen Satz mit $g(x) = \max |f|$

Satz: Sei $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$: $\exists z \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\varphi(x) \overset{!!}{=} f(z) \cdot \int_a^b \varphi(x) \cdot dx$

Bsp.: Für $\varphi(x) = 1$ $\forall x \in [a,b]$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(z) \cdot (b-a)$$



Bew.: Gilt $\varphi(x) = 0$, so ist die Aussage klar.

Andernfalls ist $\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$.

Mit m, M, sodass $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ folgt:

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \leq \frac{\int_a^b M \cdot \varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = M$$

$$m = \frac{\int_a^b m \cdot \varphi(x)}{\int_a^b \varphi(x)} \leq \frac{\int f(x)\varphi(x)\,dx}{\int \varphi(x)}$$

Nach ZWS: $\exists z \in [a,b]$ mit

$$f(z) = \frac{\int f(x)\varphi(x)\,dx}{\int \varphi(x)\,dx}$$

$\square$

2 Ableitung und Integral

Sei im Folgenden $I = [a,b]$

Def.: Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Die diff-bare Fkt. $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls $F' = f$.

Satz: Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur in einer Konstanten.

Bew.: Gelten $F' = f$ und $G' = f$, so folgt $(G-F)' = f - f = 0$. Mit MWS folgt, dass $G - F$ konstant ist.

$\square$

Notationskonventionen:

- für $b < a$ def $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- es $\exists$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Damit folgt für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Satz: (Hauptsatz der Diff u. Integralrechnung)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann wird durch $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy$ eine Stammfunktion von f definiert, wobei $x_0 \in I$ beliebig ist.

Bew.: Wir berechnen die Ableitung von F, d.h. wir zeigen, dass F diffbar ist mit Ablt. $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Es gilt $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right|$

$$= \frac{1}{|h|} \left| F(x+h) - F(x) - h \cdot f(x) \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \underbrace{\int_{x_0}^{x+h} f(y)\,dy}_{= F(x+h)} - \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(y)\,dy}_{= F(x)} - h \cdot f(x) \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} f(y)\,dy - \underbrace{h \cdot f(x)}_{= \int_x^{x+h} f(x)\,dy} \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_x^{x+h} f(y) - f(x)\,dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \max_{y \in [x, x+h]} |f(y) - f(x)| \to 0 \text{ f. } h \to 0,$$

da f stetig

$\square$

Folge: (1) Ist F beliebige Stammfunktion von f, so gilt:

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

(2) Ist F Stammfunktion von f auf $[a,b]$,
so gilt $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$
(Konstanten fallen in der Differenz weg)