

Aufgabe 1 (5 = 1 + 1 + 1 + 2 Punkte)

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1}$

b) $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x \ln(x) - x$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \exp(x^3 + 1)$

d) $\varphi: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \text{Umkehrfunktion von } \tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = -1$.

Aufgabe 3 (4 = 2 + 2 Punkte)

Skizzieren Sie folgende Funktionen mit Angabe von mindestens 3 Funktionswerten.

a) $f(x) = e^{-x^2/2}, \quad (x \in \mathbb{R})$

b) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in [0, \frac{4\pi}{3}]$

Aufgabe 4 (4 = 2 + 2 Punkte)

Ist die Folge a_n beschränkt? Ist die Folge a_n konvergent? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

a) $a_n = \frac{n^2+3n-7}{3n+5}$

b) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

c) $a_n = \exp(n - n^2)$

Aufgabe 5 (3 = 1 + 1 + 1 Punkte)

Betrachten Sie für $k \in \mathbb{Z}$ die Integrale

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx \quad \text{und} \quad b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx$$

a) Betrachten Sie a_0 und b_0

b) Zeigen Sie $a_k = b_k$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (z.B. mit partieller Integration)

c) Berechnen Sie a_k und b_k für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion: $\sum_{k=1}^n (4k - 3) = 2n^2 - n$

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren im \mathbb{R}^3 linear unabhängig sind (mit Begründung):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Bestimmen Sie unter allen Rechtecken mit Flächeninhalt $A = 1$, das mit kleinstem Umfang.

Aufgabe 9 (3 = 1 + 1 + 1 Punkte)

Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Reihen konvergieren.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{n}\right)^n$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 3^{-n}$

Aufgabe 10 (2 Punkte)

wurde in der Klausur gestrichen

Bestimmen Sie die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ sowie den Konvergenzradius für die Funktion: $f(x) = \frac{x^2}{1-x^4}$

Aufgabe 11 (4 = 2 + 2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale

- a) $\int_4^6 \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$ (Hinweis: Partialbruchzerlegung)
- b) $\int_{-1}^1 x\sqrt{x+1} dx$ (Hinweis: Substitution $x = t^2 - 1$)