Janosch Krueg   Gruppe 2   Übung 11
Panagiotis Christofaridis   Marcel Cierpinsky

1	2	3	4	Σ
2	3	3	3	11

A1 a) $f: (0,\infty) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}}$$

$$g = f^{-1} = x^4$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{4\cdot(x^{\frac{1}{4}})^3} = \frac{1}{4\cdot x^{\frac{3}{4}}}$$

b) $g: (0,\infty) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln(x^5)$

$$g(x) = u(v(x))$$

$u(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v(x) = x^5 \qquad v'(x) = 5\cdot x^4$

$$g'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$$

$$= \frac{1}{x^5}\cdot 5\cdot x^4 = \frac{5x^4}{x^5} = \frac{5}{x} = \underline{5\cdot x^{-1}}$$

c) $h: (1,\infty) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

$$h(x) = u(v(w(x)))$$

$u(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$w(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad w'(x) = \frac{1\cdot(x-1) - 1\cdot(x+1)}{(x-1)^2}$

$$w'(x) = \frac{x-1-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = u'(v(w(x)))\cdot(v(w(x)))'$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \frac{-2}{2\cdot\frac{x+1}{\cancel{x-1}}\cdot(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{-2}{2\cdot(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-1}{x^2-1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{1-x^2}}}$$

d) $m: (-1,1) \to \mathbb{R} \quad x \to \arcsin(x)$

$g = m^{-1} = \sin(x) \qquad g'(x) = \cos(x)$ Warum ?

$$m'(x) = \frac{1}{g'(m(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-1

2/3

<u>A2</u> a) $f: [a,b] \to [a,b] \quad a,b \in \mathbb{R} \quad a<b$

f ist stetig

Z: $\exists \xi \in [a,b]: f(\xi) = \xi$

Betrachte $h(x) = f(x) - x$

-> Die Nullstellen von $h(x)$ sind die Fixpunkte von $f(x)$, da diese die Schnittstellen mit der ersten Winkelhalbierenden, also $f(x)=x$, sind.

Fixpunkte sind also gerade die Punkte, in denen Urbild und Bild einer Funktion äquivalent sind.

Wenn $h(x) = 0 \to f(x) = x$ bzw. $f(x) - x = 0$ oder $f(\xi) = \xi$

Da $f(a) \in [a,b]$, gilt $f(a) \geq a$, also

$h(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$

Genauso $f(b) \in [a,b]$, gilt $f(b) \leq b$, also

$h(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$

-> $h(a) \geq 0$ und $h(b) \leq 0$

-> nach dem Zwischenwertsatz muss es ein $\xi \in [a,b]$ geben mit $h(\xi) = 0$, also $f(\xi) = \xi$.

Hiermit muss ein Fixpunkt für f in jedem Fall existieren. ✓

b) $g: (0,1) \to (0,1)$ stetig, besitzt aber keine Fixpunkte

=> $g(x) = x^2$ besitzt nur in $g(0) = 0$ oder $g(1) = 1$ einen Fixpunkt, alle anderen Werte sind kleiner als der Funktionswert. x^2 stetig in $(0,1)$ ✓

3/3

A3

a) $a = b^x \qquad x = \log_a b$

(I) $a = b^x$

$\ln(a) = x \cdot \ln(b)$

$x = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \log_a b$ $\square$

(II) Annahme: $\exists\, x' \neq x: \quad x' = \log_a b$

$\Rightarrow b^x = b^{x'}$

$\frac{b^x}{b^{x'}} = 1$

$b^{x-x'} = 1$

$x - x' = 0$

$x = x'$ ↯ Widerspruch zur Annahme

-> Logarithmus muss also eindeutig definiert sein. ✓

Gilt auch wegen strenger Monotonie ln, also Injektivität!

b) $\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, Ableitung angeben

Sei $\frac{1}{\ln(b)}$ ~~stet~~ konstant $\Rightarrow$ stetig

$\ln(x)$ ist stetig

$\Rightarrow \frac{1}{\ln(b)} \cdot \ln(x)$ stetig $\Rightarrow \log_b(x)$ stetig

$(\log_b(x))' = \frac{1}{\ln(b) \cdot x}$ ✓

3/3

44

$$h(t) = \frac{4000}{1+9e^{-0{,}058\cdot t}} - 400$$

a) h ist streng monoton steigend, da $9e^{-0{,}058\cdot t}$ gegen 0 strebt, also streng monoton fällt und somit das Ergebnis des Quotienten $\frac{1}{1+9e^{-0{,}058\cdot t}}$ für t gegen unendlich gegen 1 strebt und streng monoton steigt/wächst. ✓

besser: $h'(t) \geq 0$

Die Maximale Wuchshöhe der Fichte beträgt 3600 cm, da $9e^{-0{,}058\cdot t}$ gegen 0 konvergiert und dann gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \frac{4000}{1-0} - 400 = \underline{3600}$. $\hat{=}$ 36 cm ✓

b) $h'(t) = \frac{2088\cdot e^{0{,}058\cdot t}}{(e^{0{,}058\cdot t}+9)^2}$ $\quad h'(10) = \frac{2088\cdot e^{0{,}058\cdot 10}}{(e^{0{,}058\cdot 10}+9)^2} = 32{,}055\frac{cm}{Jahr}$ ✓

$h(10) = \frac{4000}{1+9\cdot e^{-0{,}058\cdot 10}} - 400 = 262{,}35cm$

Höhe ~~Anstieg~~ nach 3 Monaten:

$$\frac{3}{12}\cdot 32{,}055\,cm\cdot\frac{Jahr}{Jahr} + 262{,}35cm = 270{,}364cm$$

Höhe nach 6 Monaten:

$$\frac{6}{12}\cdot 32{,}055cm\cdot\frac{Jahr}{Jahr} + 262{,}35cm = 278{,}378cm$$

Höhe nach 12 Monaten:

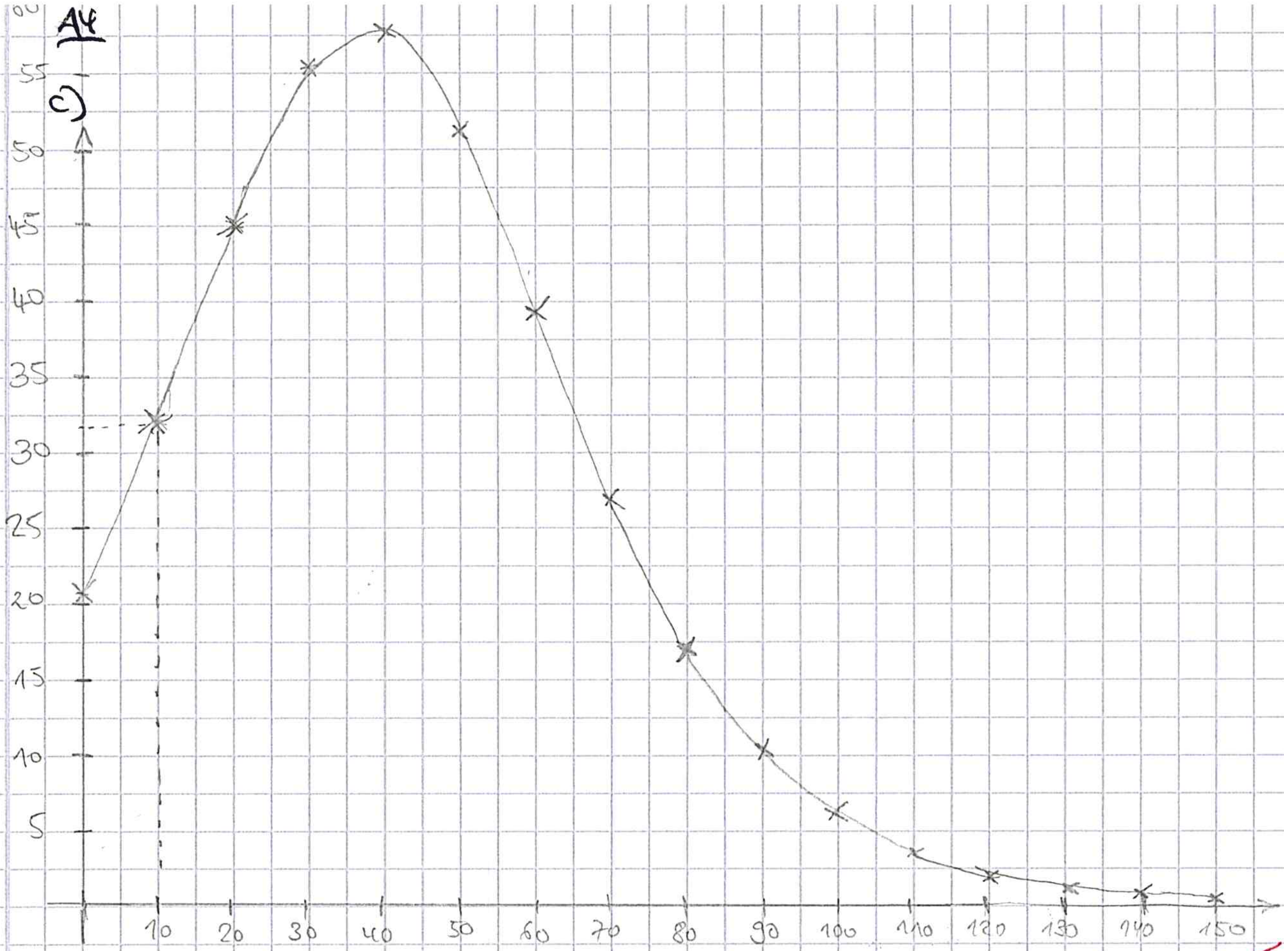
$$\frac{12}{12}\cdot 32{,}055cm\,\frac{Jahr}{Jahr} + 262{,}35cm = 294{,}405\,cm$$

Höhe nach 24 ~~cm~~ Monaten:

$$\frac{24}{12}\cdot 32{,}055cm\,\frac{Jahr}{Jahr} + 262{,}35cm = 326{,}46\,cm$$ ✓

A4

c)



$h'(10-\frac{1}{12}) = 31{,}952$ cm/Jahr	Da die Ableitung von h
$h'(10) = 32{,}055$ cm/Jahr	im $[10-\frac{1}{12}, 10+\frac{1}{12}]$
$h'(10+\frac{1}{12}) = 32{,}159$ cm/Jahr	streng monoton steigt, ist
$h(10-\frac{1}{12}) = 259{,}685$ cm	die Maximale Höhe der
$h(10+\frac{1}{12}) = 265{,}028$ cm	Fichte bei $h(10+\frac{1}{12})$ und die
$h(10) = \cancel{265{,}028\text{ cm}}$ $262{,}352$	Minimalhöhe bei $h(10-\frac{1}{12})$.

$|h(10-\frac{1}{12}) - h(10)| = 2{,}66698$ cm

$|h(10+\frac{1}{12}) - h(10)| = 2{,}67554$ cm

-> Der maximale Fehler bei der Bestimmung der Höhe der Fichte kann also maximal 2,67554 cm betragen (≙ 1,02 %)

3/3