# Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

## Aufgabenblatt 11

**Aufgabe 1** (3 Punkte)

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen nur mit Hilfe der in der Vorlesung besprochenen Sätze und Beispiele:

(a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$, Hinweis: Verwenden Sie Satz 1.4, Ableitung der Umkehrfunktion.

(b) $g : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x^5)$

(c) $h : (1, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

(d) $m : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin(x)$. Siehe Hinweise in Beispiel 1.11 des Vorlesungsskripts.

**Aufgabe 2** (3 Punkte)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Beweisen Sie, dass $f$ in $[a, b]$ einen *Fixpunkt* hat, d.h. es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz mit einer geeigneten Funktion $h$.

(b) Geben Sie eine stetige Funktion $g : (0, 1) \to (0, 1)$ an, die *keinen* Fixpunkt besitzt.

**Aufgabe 3** (3 Punkte)

Seien $a, b \in (0, \infty)$. Der *Logarithmus von a zur Basis b* ist definiert als Lösung $x$ der Gleichung

$$a = b^x.$$

Man schreibt $x = \log_b(a)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Logarithmus in eindeutiger Weise definiert ist, d.h. die Gleichung $a = b^x$ besitzt genau eine Lösung. Beweisen Sie dafür zunächst die Darstellung

$$x = \log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}.$$

(b) Argumentieren Sie, dass $\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist und geben Sie die Ableitung an.

**Aufgabe 4** (3 Punkte)

Die Höhe einer Fichte in cm in Abhängigkeit vom Alter $t$ in Jahren werde durch die Funktion $h(t) = \frac{4000}{1+9e^{-0.058t}} - 400$ beschrieben.

(a) Untersuchen Sie $h$ auf Monotonie. Wie groß kann die Fichte höchstens werden?

(b) Differenzieren Sie die Funktion $h(t)$. Mit welcher Geschwindigkeit wächst die Fichte im Alter von 10 Jahren? Um welchen Betrag würde die Fichte in 3, 6, 12, bzw. 24 Monaten wachsen, wenn sie die Wachstumsgeschwindigkeit, die sie zum Zeitpunkt $t = 10$ erreicht hat, beibehalten würde?

(c) Skizzieren Sie $h'$. Das Alter $t = 10$ Jahre sei mit einer Genauigkeit von 1 Monat bestimmt. Schätzen Sie den Fehler bei der Berechnung der Höhe $h$ ab.

Hinweis: Argumentieren Sie mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Satz 2.3.

---

**Abgabe: Montag, 25.01.2016** vor der Vorlesung.