Differentiationsregeln Beweise

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann gelten folgenden Formeln:

Beweisstruktur: Wir mussen jeweils für $x \neq x_0$ die Differenzenquotienten bilden und zeigen, dass diese mit $x \to x_0$ gegen das gewünschte konvergieren.

Linearität

z.Z: $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

Beweis

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\beta g(x) - \beta g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Produktregel

z.Z.: $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Beweis

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + (g(x) - g(x_0))f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \\
&= g(x_0)f'(x_0) + g'(x_0)f(x_0)
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, da $g(x) \to g(x_0)$ wenn $x \to x_0$, da g in x_0 differenzierbar ist und folglich in x_0 auch stetig ist.

q.e.d.

Quotientenregel

z.Z.: $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Wir zeigen zunächst das gilt: $(\frac{1}{f})'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{f})'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\cdot(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0})\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\cdot(\frac{f(x_0)}{f(x)\cdot f(x_0)} - \frac{f(x)}{f(x_0)\cdot f(x)})\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\cdot\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)}\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)\cdot f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}\\
&= -\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)\cdot f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&= -\frac{1}{f(x_0)^2}\cdot f'(x_0)\\
&= -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}
\end{aligned}$$

Jetzt führen wir die Quotientenregel auf die Produktregel zurück:

$$\begin{aligned}
(\frac{f}{g})'(x_0) &= (f\circ\frac{1}{g})'(x_0)\\
&= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot(\frac{1}{g})'(x_0)\\
&= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\cdot\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\\
&= f'(x_0)\cdot\frac{g(x_0)}{g(x_0)^2} - f(x_0)\cdot\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Kettenregel

z.Z.: $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Beweis: Wir betrachten für $x \neq x_0$ den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(g(f(x)) - g(f(x_0)))(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)(f(x) - f(x_0))} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{(f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile nutzen wir aus, dass $f(x) \to (f(x_0))$ für $x \to x_0$, was aus der Integrierbarkeit und damit Stetigkeit von f in x_0 folgt.

Ein technisches Problem gibt es, wenn $f(x) = f(x_0)$ für x nahe x_0, aber das wollen wir hier wie auch in der Vorlesung nicht behandeln, da es die Komplexität des Beweises sehr erhöhen würde.

Potenzregel

z.Z.: Sei $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $f'(x) = x \cdot a^{x-1}$.

Wir benutzten die Identität $a^x = e^{a \cdot ln(x)}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^a \\
&= e^{a \cdot ln(x)} \\
f'(x) &= e^{a \cdot ln(x)} \cdot \frac{a}{x} \\
&= a \cdot e^{a \cdot ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \\
&= a \cdot e^{a \cdot ln(x)} \cdot x^{-1} \\
&= a \cdot e^{a \cdot ln(x)} \cdot e^{-ln(x)} \\
&= a \cdot e^{a \cdot ln(x) \cdot (-ln(x))} \\
&= a \cdot e^{(a-1) ln(x)} \\
&= a \cdot e^{(a-1) ln(x)} \\
&= a \cdot x^{a-1}
\end{aligned}$$

Äquivalent lässt sich zeigen $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = ln(a)a^x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x \\ &= e^{x \cdot ln(a)} \\ f'(x) &= e^{x \cdot ln(a)} \cdot ln(a) \\ f'(x) &= a^x \cdot ln(a) \\ &= ln(a)a^x \end{aligned}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Die Funktion $f : (a, b) \to R$ sei streng monoton und stetig. Ist $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit Ableitung

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

.

Aus *streng monoton und stetig* folgt, dass die Umkehrfunktion existiert und auch *stetig* ist.

$$\begin{aligned} g'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} \\ &= \frac{1}{f'(g(x))} \end{aligned}$$

Ableitung von ln(x)

z.Z.: $ln'(y) = \frac{1}{y}$.

Wir verwenden die Ableitung der Umkehrfunktion: $ln'(y) = \frac{1}{exp'(ln(y))} = \frac{1}{exp(ln(y))} = \frac{1}{y}$.

Sinus / Cosinus / Tan

Ableiten von sin/cos: Todo

z.Z. $arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$
\begin{aligned}
sin(x)^2 + cos(x)^2 &= 1 \\
sin(x)^2 &= 1 - cos(x)^2 \\
sin(x) &= \sqrt{1 - cos(x)^2} \\
sin(arccos(x)) &= \sqrt{1 - arccos(cos(x)^2)} \\
sin(arccos(x)) &= \sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}
$$

Wir leiten $arccos(x)$ ab:

$$
\begin{aligned}
arccos'(x) &= \frac{1}{cos'(arccos(x))} && \text{Ableitung der Umkehrfunktion} \\
&= -\frac{1}{sin(arccos(x))} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned}
$$

$arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ lässt sich äquivalent zeigen.