Probleklausur Beweis Teil

Aufgabe 1

Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei streng monoton und stetig. Beweisen sie, dass für $f'(x_0) \neq 0$ gilt:

$$f'(x_0) = \frac{1}{f'^{-1}(f(x_0))}$$

Hinweis: Beweisen Sie hierfür zunächst die Kettenregel.

Aufgabe 2

Was sind die Ableitungen folgender Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\ \{0\}$? Beweisen sie ihre Aussagen.

a) $f_1(x) : a^x$

b) $f_2(x) : ln(x)$

c) $f_3(x) : x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3

Sei $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in [0, b]$. Zeigen Sie, dass für das Riemann-Integral gilt: integr(f(x))dx (a, b) = integr(f(x))dx (b, 0) - integr(f(x))dx (a, 0)

Aufgabe 4

Beweisen sie die Partielle Integration für die differenzierbaren Funktionen $f, g\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hinweis: Beweisen sie hierfür zunächst die Produktregel.

Aufgabe 5

Die positive Zahl g, welche $g = 1 + \frac{1}{g}$ erfüllt heisst goldener Schnitt.

a) Bestimmen sie die positve Zahl g.

b) Es sei x_n mit $n \geq 0$, die Folge $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Zeigen Sie, dass $|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass x_n gegen g konvergiert.

Aufgabe 6

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ Definieren Sie präzise, was es bedeutet, dass f im Punkt x_0 stetig ist.

b) Beweisen sie, dass die ϵ - δ - Definition der Stetigkeit die Folgenstetigkeit impliziert.
Hinweis: Folgenstetigkeit bedeutet, dass für alle Folgen y_n mit Grenzwert x_0 für $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$ ein N existiert sodass: $\forall n > N : |y_n - x_0| < \epsilon$.

Aufgabe 7

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen sie, dass zu jedem y_0 zwischen f(a) und f(b) ein $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $f(x_0) = y_0$.

Hinweis: Betrachten sie zunächst den Fall, dass $y_0 = 0$