Klausur: Mathe 1 - WS 13/14

Aufgabe 1

a) existiert Konvergenz für $n \rightarrow \infty$ und Grenzwert angeben

$$a_n = \underset{\rightarrow 1}{(-1)^n} \; \underset{\rightarrow 0}{\frac{1}{n}}, \quad n \in \geq N, n \geq 1$$

Lösung: $\lim(a_n) = 1 * 0 = 0$

$$b_n = \begin{cases} n & , n \leq 100 \\ \frac{n+1}{n} & , n > 100 \end{cases}$$

Lösung: $\lim\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$

b) rekursive Schreibweise finden

$$c_1 = \frac{1}{1}, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = \frac{1}{9}, \ldots \leftrightarrow c_1 = \frac{1}{1^2}, c_2 = \frac{1}{2^2}, c_3 = \frac{1}{3^2}, \ldots \leftrightarrow c_n = \frac{1}{n^2}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 8}$$

a) Definitionsbereich und Symmetrie

Lösung:

$D(f) = R \backslash \{x_1 = 2, x_2 = -2\}$

Polstellen: $q(x) = 0$: $x_1 = 2, x_2 = -2$

Symmetrie: $f(-x) = f(x)$

b) Polstellen und Asymptote für $x \rightarrow \pm\infty$ berechnen

Lösung: $f(x) = \frac{p(x)^n}{q(x)^m} \rightarrow n = m \quad \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2-1}{2x^2-8} = \frac{x^2(1-x^{-2})}{x^2(2-8x^{-2})} \xrightarrow{x\rightarrow\pm\infty} \frac{1}{2}$

c) Nullstellen, Extrempunkt als Maximum/Minimum festlegen

Lösung:

NS: $p(x) = 0$: $x_3 = -1, x_4 = 1$

Max/Min:

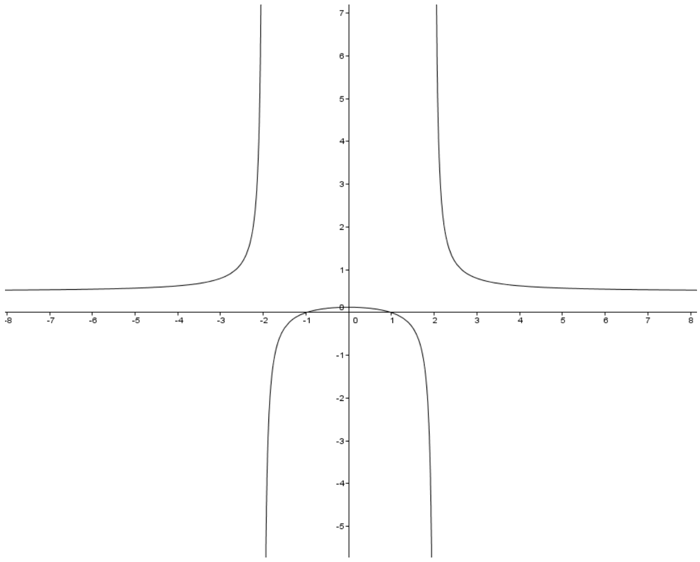
$f'(x) = \frac{-12x}{4x^4-32x^2+64}$ $\qquad$ $f''(x) = \frac{-48x^4+482x^2-768x-768}{(4x^4-32x^2+64)^2}$

$f'(x) = 0: x_5 = 0 \rightarrow Extrempunkt$

$f''(x) < 0: x_5 = \frac{-96}{527}$

$f(x_5) = \frac{\left(\frac{-96}{527}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{-96}{527}\right)^2 - 8}$

d) Skizze:



Aufgabe 3

Polynom 2. Grades, bei P_1(0/3) ein Maximum und bei P_2(-2/0) eine Nullstelle

Lösung:

$f(x) = ax^2 + c, c = 3, x_1 = 2, x_2 = -2$

$f(x) = ax^2 + 3$

$f(2) = a(2)^2 + 3 = 0 \rightarrow a4 + 3 = 0 \rightarrow a = -\frac{3}{4}$

$f(-2) = a(-2)^2 + 3 = 0 \rightarrow a4 += 0 \rightarrow a = -\frac{3}{4}$

$\rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$

Aufgabe 4

erste Ableitung mit allen Zwischenschritten bilden

a) $f(x) = 3^x$ $\qquad f'(x) = 3^x \ln(3)$

b) $f(x) = \ln(\sin(x)) + e^{co(x)}$

$$f(x) = (j\ o\ g) + (h\ o\ i): f'(x) = \frac{1}{\sin\,(x)} * \cos(x) + e^{\cos(x)}(-\sin(x))$$

c) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin\,(x)}{\cos\,(x)}$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) * \cos(x) - \sin(x)\,(-\sin x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} \quad \underset{=}{sin^2(x) + cos^2(x) = 1}$$
$$= \frac{1}{cos^2(x)}$$

Aufgabe 5

erstes Integral mit allen Zwischenschritten bilden

a) $\int_1^2 x^2 + e^x + \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + e^x + \ln\,(x)\right]_1^2 = \frac{8}{3} + e^2 + \ln(2) - \frac{1}{3} - e^1 - \ln\,(1)$

b) $\int_1^3 \frac{2x+7}{x^2+7x} dx = \frac{q'(x)}{q(x)} = [ln|x^2 + 7x|]_1^3 = \ln(30) - \ln(8) = \ln\left(\frac{30}{8}\right)$

c) $\int_0^\pi x\sin(x)dx = [-\cos(x)\,x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x) * 1dx = [-\cos(x) * x + \sin(x) * x]_0^\pi = \pi + 0 + 0 + 0 = \pi$

d) $\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma} \sin\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \ \ , \sigma \in \boldsymbol{R}, \sigma > 0, \mu \in \boldsymbol{R}$

Substitution: $f(y) = \sin(y)\,, g(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$

Aufgabe 6

Ein Schachbrett mit 64 Feldern, 128 Reiskörner werden zufällig auf das Schachbrett geworfen, dabei wird jedes Feld mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von Reiskörnern getroffen

a) ein Feld wird zufällig ausgewählt, die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der Körner auf dem ausgewählten Feld und ist poissonverteilt.Mit welcher Wahrscheinlichkeit landen mindestens 3 Körner auf dem ausgewählten Feld? μ bestimmen

b) man zahlt 20€ Einsatz, und für jedes Korn, welches auf dem ausgewählten Feld landet bekommt man 10€. Welcher Gewinn/ Verlust ist zu erwarten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 10€ reinen Gewinn (ohne Einsatz) zu erhalten?

Aufgabe 7

2 Lostöpfe mit jeweils 3 Kugeln, welche mit 1, 2, 3 nummeriert sind, aus jedem Topf wird einmal gezogen, die Zufallsvariable X steht für die größte der gezogenen Zahlen

a) Ω und $X(\Omega)$ bestimmen

b) Erwartungswert E(X) berechnen

c) Ereignis E={"mindestens eine 1 gezogen"}, F={"größte Zahl ist eine 3"}

P(E|F) berechnen, sind E und F unabhängig voneinander?

Aufgabe 8

Ein Haushalt gilt als arm, wenn er weniger als die Hälfte des Durchschnittseinkommens zur Verfügung hat. Das Haushaltsnettoeinkommen ist mit $\mu = 2000€$, $\sigma = 1000€$ normalverteilt

a) Wie hoch ist der Anteil armer Haushalte

Ansatz: $X \sim N(2000, (1000)^2), P(X \leq 999) = P\left(\frac{999-2000}{1000}\right) \leq X \leq \cdots$

b) Über welches Nettoeinkommen verfügt ein Haushalt mindestens, um zu den Reichsten 10% zu gehören?

Aufgabe 9

ein Turm besteht aus unendlich vielen übereinander gestapelten Würfeln, deren Kantenlänge sich bei jedem weiteren Würfel halbiert, der Startwürfel hat die Kantenlänge 1m

a) Wie hoch wird der Turm

b) Wie hoch wird der Turm, wenn der Startwürfel die Kantenlänge 1m hat, aber jeder weitere Würfel noch 80% des vorherigen?

Aufgabe 10

Grenzwerte berechnen, evtl. l'Hospital anwenden, zuvor die Voraussetzungen prüfen

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{e^x} \begin{matrix} \to 0 \\ \to e^2 \end{matrix} = \frac{0}{e^2} = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x ln(x)}{x^2} \begin{matrix} \to \infty \; l'H \\ \to \infty \; = \end{matrix}$