# Nachklausur zur Mathematik I — WS 12/13

Prof. Dr. E. Kuwert — 23. September 2013

**Beginn der Klausur: 14:30 Uhr** — **Ende der Klausur: 17:00 Uhr**

Name, Vorname: ................................................................................

Matrikelnummer: ................................................................................

Studiengang: .................................... Semesterzahl: ..........

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | | | | | |

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Kennzeichen Sie alle Zettel mit Namen und Nummer der Aufgabe.
- Geben Sie alle Zettel, auch die mit Nebenrechnungen, gemeinsam mit dem vollständig ausgefüllten Deckblatt ab.
- zugelassene Hilfsmittel: ein Notizblatt (DIN A4), Stifte
- Ein Täuschungsversuch kann zum sofortigen Ausschluss und Nichtbestehen der Klausur führen.
- Resultate aus der Vorlesung dürfen Sie als bekannt voraussetzen.
- Es sind insgesamt 10 Aufgaben.
- Insgesamt sind 36 Punkte zu vergeben. Zum Bestehen sind 12 Punkte notwendig.

**Nachklausur zur Mathematik I** **WS 12/13**

Prof. Dr. E. Kuwert 23. September 2013

---

**Aufgabe 1** (5 = 1 + 1 + 1 + 2 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x\,(\exp(x) - 1)$.

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sinh(x^2)$.

(d) $\varphi(x) =$ Umkehrfunktion von $\tan y : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

---

**Aufgabe 2** (3 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^6 = -1$.

---

**Aufgabe 3** (4 = 2 + 2 Punkte)
Skizzieren Sie folgende Funktionen mit Angabe von mindestens 3 Funktionswerten:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x - 3}{x - 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $f(x) = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \left[0, \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

---

**Aufgabe 4** (6 = 2 + 2 + 2 Punkte)
Entscheiden Sie jeweils, ob die Folge $a)$ beschränkt ist und ob Sie $b)$ konvergiert. Geben Sie für jede Antwort eine Begründung.

(i) $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 10}{3n^2 + 1000n + 1}$

(ii) $a_n = n^2 \sin\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$

(iii) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

---

**Aufgabe 5** (3 Punkte)
Eine Funktion $f : I = (-1, 1) \to \mathbb{R}$ heißt ungerade (bzw. gerade), falls $f(-x) = -f(x)$ (bzw. $f(-x) = f(x)$) für alle $x \in I$. Zeigen Sie: ist $f : I \to \mathbb{R}$ ungerade und $F$ eine Stammfunktion von $f$, so ist $F$ gerade.

---

**Aufgabe 6** (2 Punkte)
Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-3) = n^2 - 2n.$$

**Aufgabe 7** (4 = 2 + 2 Punkte)
Bestimmen Sie den Kern der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie alle Lösungen des Systems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & = & 18 \\ x & + & y & + & 3z & = & 12. \end{array}$$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)
Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y = \frac{1}{x}\}$. Finden Sie auf $M$ den Punkt mit kleinstem Abstand zum Nullpunkt (die Existenz kann angenommen werden).

**Aufgabe 9** (2 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorentwicklung einschließlich quadratischer Terme für die Funktion

$$f(x) = (1 + x^3)^{3/2},$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

**Aufgabe 10** (4 = 2 + 2 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(x)\, dx$ (Hinweis: partielle Integration).

(b) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\exp(x)}{2\sqrt{\exp(x) - 1}}\, dx$ (Hinweis: Substitution $x = \ln(y^2 + 1)$).

ENDE DER KLAUSUR:

Viel Glück und Erfolg!