Wie lässt sich $(x)\times y$ geometrisch beschreiben? 11.11.15 MI

Für seine Länge gilt:

$$
\begin{aligned}
|(x)\times y|^2 &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 \\
&\quad + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_2^2 \\
&\quad + x_3^2y_1^2 - 2x_3x_1y_3y_1 + x_1^2y_3^2 \\
&\quad + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 \\
&\quad + x_1^2y_1^2 - x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 - x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2 - x_3^2y_3^2 \\
&= x_1^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2) + x_2^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \\
&\quad + x_3^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - 2\cdot(x_1y_1)(x_3y_3) - 2\cdot(x_1y_1)(x_3y_3) \\
&\quad - 2\cdot(x_1y_1)(x_2y_2) - (x_1y_1)^2 - (x_2y_2)^2 - (x_3y_3)^2 \\
&= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2
\end{aligned}
$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$
\begin{aligned}
&= |x|^2\,|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 \\
&= |x|^2\,|y|^2\cdot(1-\cos^2\Phi) = |x|^2|y|^2\cdot\sin^2\Phi
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist $x \times y = 0$, falls x und y parallel sind.

Ferner gilt: $\langle (x)\times y, z\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\cdot z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\cdot z_2 \\
&\quad + (x_1y_2 - x_2y_1)\cdot z_3 \\
&= z_1x_2y_3 - z_1x_3y_2 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 \\
&\quad + x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3
\end{aligned}
$$

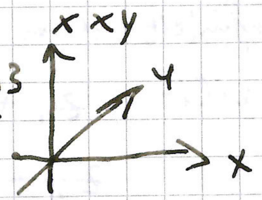
11.11.
MZ

Für die Spezialfälle $z=x$ und $z=y$ folgt:

$$\langle x \times y, x \rangle = x_1 x_2 x_3 + x_2 y_3 x_1 + x_2 y_1 x$$
$$= 0$$

Sowie $\langle x \times y, y \rangle = 0$

d.h. der Vektor $x \times y$ ist senkrecht zu den Vektoren x und y.

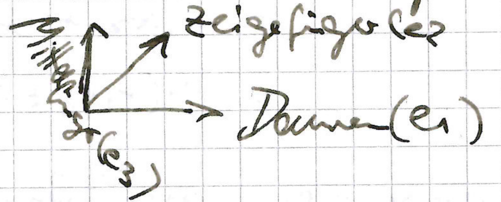


<u>Definition:</u> Die Vektoren x, y und $z \in \mathbb{R}^3$ heißen positiv orientiert, falls $\det(x,y,z) = \langle x \times y, z \rangle > 0$.

d.h. die Determinante von x, y und z ist positiv.

Gilt $(x) \times y \neq 0$ so sind die Vektoren $x, y, x \times y$ positiv orientiert, denn es gilt: $\langle x \times y, x \times y \rangle = |x \times y|^2 > 0$

Dies wird durch die rechte-Hand-Regel veranschaulicht:



5 Komplexe Zahlen

Wir definieren ein kommutatives Produkt von Vektoren in $\mathbb{R}^2$, dass es uns erlaubt, quadratische Gleichungen $x^2 + px + q$ zu lösen. Wir setzen:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = i$$

Und schreiben für $z = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$z = x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x \cdot 1 + i \cdot y$$
$$z = x + iy$$

2/3

und nennen z eine komplexe Zahl.

Die Menge aller solchen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Die reellen Zahlen x und y, die z definieren, heißen Real- bzw. Imaginärteil von z, geschrieben $\operatorname{Re} z$ bzw. $\operatorname{Im} z$.

Die Addition komplexer Zahlen ist durch die Addition der entsprechenden Vektoren in $\mathbb{R}^2$ definiert d.h. für $z_1 = x_1 + i\cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i\cdot y_2$ gilt

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i\cdot y_1 + i\cdot y_2$$

$$z_2 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

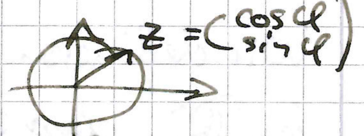
<u>bzw.</u>: $$\underset{(z_1)}{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} + \underset{(z_2)}{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \underset{(z_1 + z_2)}{\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}}$$

Zur Multiplikation definieren wir $i^2 = -1$ und berechnen:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1\cdot i)(x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 \cdot i \cdot x_2 + y_2 y_1 i^2 \\ &= i\cdot(x_1 y_2 + x_2 y_1) + (x_1 x_2 - y_2 y_1) \end{aligned}$$

Wir verwenden, dass sich jeder Punkt auf der Kreislinie mit Radius 1 darstellen lässt als:

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

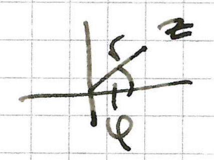


Allgemein lässt sich der Vektor $z \in \mathbb{R}^2$ darstellen als

$$z = |z| \cdot \underbrace{\frac{z}{|z|}}_{=\hat{z}} = \underbrace{|z|}_{r} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ 17.11. MF

diese Darstellung nennt man Polarkoordinaten (r, φ)



Dabei ist r die Länge und φ der mit der x-Achse eingeschlossene Winkel des Vektors z. Damit folgt für:

$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$

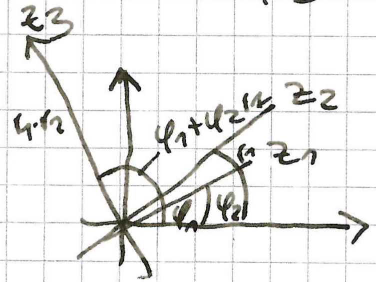
$z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$

$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$

$+ i \cdot r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)$

trigonometrische Identitäten $= r_1 r_2 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$



d.h. die Längen werden multipliziert und die Winkel addiert.