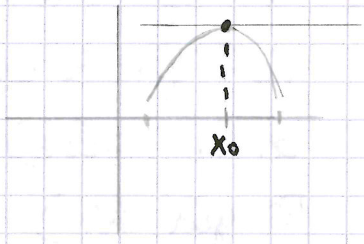
- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f besitzt Min/Max
- für offene Intervalle falsch: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$
- $f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in I = [a,b]$

  $x_0 \in (a,b)$, f diffbar in x_0

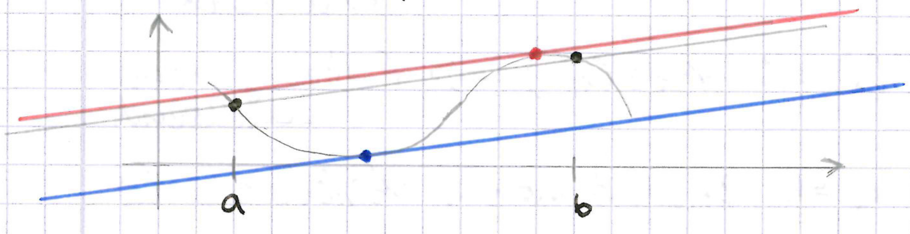
  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$



Bem.: (I) $f'(x_0)$ ist nur notwendige Bedingung für ein Extremum, z.B. besitzt $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ kein Extremum. ($f'(x_0) = 0$)

(II) Liegt ein Extremum am Rand, muss die Steigung nicht Null sein.

Der folgende Satz, sogenannte Mittelwertsatz, besagt, dass jede Sekantensteigung als Steigung einer Tangente auftritt.



Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff-bar. Dann existiert $z \in (a,b)$ mit

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis: (I) Wir betrachten zunächst den Spezialfall $f(a) = f(b)$.

Es existiert Min und Max, d.h. $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$. Liegen beide Zahlen am Rand, d.h. $x_{min}, x_{max} \in \{a,b\}$, so ist f konstant und wir wählen $z \in (a,b)$ beliebig. Gilt $x_{min} \in (a,b)$ oder $x_{max} \in (a,b)$, so gilt:

: $f'(x_{min}) = 0$ oder $f'(x_{max}) = 0$ und wir wählen $z = x_{min}$ oder $z = x_{max}$.

(II) Im allgemeinen Fall $f(a) \neq f(b)$ betrachten wir die Differenz zwischen f und der Sekante,

d.h. $h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$

Es gilt $h(a) = h(b) = 0$. Nach (I) existiert $z \in (a,b)$ mit $h'(z) = 0$.

Es gilt:

$$0 = h'(z) = f'(z) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\rightarrow f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Q.E.D.

Folgerung: Sei f diff-bar in (a,b), stetig in $[a,b]$,

gilt $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ monoton wachsend

Im Fall $f'(x) > 0 \; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend

Beweis: Für $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ existiert nach Mittelwertsatz $z \in (x_1, x_2)$

$$(x_2 - x_1) \cdot f'(z) = f(x_2) - f(x_1)$$

mit $x_2 - x_1 > 0$
$f'(z) \geq 0 \; (>0)$

also $f(x_2) \geq f(x_1)$ bzw. $f(x_2) > f(x_1)$

Bem.: (I) Die Umkehrung der Aussage gilt nicht, denn $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$

(II) Es existiert strenge monotone Funktionen, die nicht differenzierbar sind, z.B.:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & x < 0 \\ 1 \cdot x & x > 0 \end{cases}$$

<u>Definition:</u> Die k-te Ableitung von f in x_0 ist induktiv definiert durch:

$$f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0)$$

Sofern $f^{(k-1)}$ in x_0 differenzierbar ist.

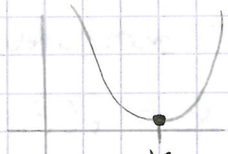
<u>Bemerkung:</u> Höhere Ableitungen müssen nicht existieren.

z.B. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ -x^2, & x \le 0 \end{cases}$

besitzt die Ableitung $f'(x) = \begin{cases} 2\cdot x, & x > 0 \\ -2\cdot x, & x \le 0 \end{cases}$, die in x_0 nicht differenzierbar ist.

<u>Satz:</u> Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Besitzt f ein Minimum in $x_0 \in (a,b)$ und existiert $f''(x_0)$, so gilt $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x) > 0$

<u>Beweis:</u> Wir haben bereits $f'(x_0) = 0$ nachgewiesen. Es gilt:

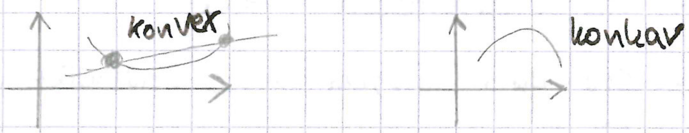


$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

Wäre $f''(x_0) < 0$, so müsste $f'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_0$ gelten, d.h. f ist streng monoton fallend rechts von x_0 und streng monoton wachsend links von x_0 im Widerspruch zur Annahme, dass bei x_0 ein Minimum liegt.

Definition: Sei $I=(a,b)$ und f zweimal diffbar in I.
f heißt konvex, falls $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in I$
gilt (konkav, falls $f''(x)\leq 0$)



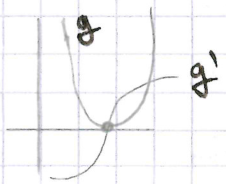
Satz: Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal diffbar.
Dann sind äquivalent:

(I) f ist konvex

(II) f liegt oberhalb der Tangente, d.h.
$\forall\, x_0\in(a,b)$ gilt
$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad \forall x\in(a,b)$$

Bew: Wir betrachten
$$g(x)=f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))$$
Dann gilt $g''(x)=f''(x_0)$ sowie
$$g'(x_0)=0,\ g(x_0)=0.$$

(I) Sei f konvex, d.h. $f''(x)=g''(x)\geq 0$
Also ist g' monoton wachsend.
$$g'(x)=\begin{cases}\leq 0, & x\leq x_0\\ \geq 0, & x\geq x_0\end{cases}$$



Damit ist g monoton fallend für $x\leq x_0$ und monoton wachsend für $x\geq x_0$.

Mit $g(x_0)=0$ also
$$g(x)=\begin{cases}\geq 0, & x\leq x_0\\ \leq 0, & x\geq x_0\end{cases}$$
Dies impliziert die Aussage