Prof. Dr. Christoph Scholl
Dr. Paolo Marin

Freiburg, 30. Oktober 2015

Technische Informatik
Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 Punkte)

Es sei $\mathbb{B} := \{0, 1\}$. Auf $\mathbb{B}$ seien wie in der Vorlesung vorgestellt die booleschen Operatoren $\vee, \wedge$ und $\neg$ definiert. $+, \cdot$ und $-$ bezeichnen hingegen die üblichen Operatoren aus dem Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$):

$$\begin{aligned} x \vee y &:= x + y - x \cdot y \\ x \wedge y &:= x \cdot y \\ \neg x &:= 1 - x \end{aligned}$$

Beweisen Sie formal durch Beweis der folgenden in der Vorlesung vorgestellten Axiome, dass $(B, \wedge, \vee, \neg)$ die folgenden Axiome einer Booleschen Algebra erfüllt

a) Assoziativität	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
b) Absorption	$x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$
c) Komplementregel	$x \vee (y \wedge \neg y) = x$	$x \wedge (y \vee \neg y) = x$

Benutzen Sie dabei ausschließlich die obigen Operatordefinitionen und Rechenregeln aus $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, gehen Sie formal vor und nicht über Tabellen wie in der Vorlesung.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Boolesche Algebra $(\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$ vorgestellt. Sie haben gesehen, dass für jede Boolesche Algebra folgende Axiome gelten:

(i)	Kommutativität	$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$
(ii)	Assoziativität	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
(iii)	Absorption	$x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$
(iv)	Distributivität	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
(v)	Komplementregel	$x \vee (y \wedge \neg y) = x$	$x \wedge (y \vee \neg y) = x$

Sie haben ebenso einige Folgerungen aus diesen Axiomen kennen gelernt (siehe Kap. 1.1, Folie 17. Beweisen Sie durch ausschließliche Verwendung der Axiome, dass das doppelte Komplement gültig ist:

$$\neg\neg x = x \quad \text{für } x \in \{0, 1\}$$

Geben Sie in jedem Schritt an, welche Regel Sie benutzt haben.

Hinweise:

- Die LaTeX-Kommandos für die logischen Opratoren lauten `\land` für $\land$, `\lor` für $\lor$ und `\neg` für $\neg$.
- Nutzen Sie wirklich ausschließlich die angegebenen Axiome. Ein „Beweis“ durch Funktionstabellen ist <u>nicht</u> zulässig.
- x, y und z sind beliebige Elemente aus der Booleschen Algebra, insbesondere kann auch $x = y$ gelten.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gerichtete, azyklische Graphen kennengelernt und gehört, dass die Tiefe von G als die Länge des längsten Pfades in G definiert ist (s. Kap. 1.1, Folie 20). Beweisen Sie nun folgenden Satz:

„Der längste Pfad in einem gerichteten, azyklischen Graphen G geht immer von einer Wurzel zu einem Blatt.“

Tipp: Versuchen Sie es mit einem Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

> Für alle $n = 2^m$ mit $m \in N$ gibt es einen binären Baum mit 2^m Blättern und Graph-Tiefe $m = \log n$.

Aufgabe 5 (1 + 2 + 1 Punkte)

a) Kommentieren Sie ausführlich die Auswirkungen jedes einzelnen Befehles des folgendes Programms.

b) Welchen Inhalt hat die Speicherzelle $S(0)$ nach Ablauf des Programms?

c) Wie oft wird die Schleife durchlaufen? Begründen Sie Ihre Antwort.

```
0 LOADI ACC 4

1 STORE 0

2 LOAD ACC 0

3 SUBI ACC 1

4 STORE 0

5 JUMP> -3

6 ENDE
```

Abgabe: 6. November 2015, $17^{\underline{00}}$ über das Übungsportal