Zusammenfassung Mi:

- Exponentialfunktion $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
- Zinseszins K nach 1 Jahr

  Auszahlung: $K\left(1+\frac{1x}{n}\right)^n$ $\qquad n \ldots$ Zeitintervalle
- $\left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!}$

  falls $m+1 \geq 2|x|$

Satz: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Beweisidee: Nach binomischer Formel gilt:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \overbrace{\frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}}^{k \text{ Faktoren}} \cdot \frac{x^k}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}}_{k\text{-mal}}{}^{\approx 1 \text{ für } n \text{ sehr groß}} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

Beweis: Wir definieren $c(n,k) = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-k+1}{n}$

Für festgehaltenes k gilt:

$$\lim_{k\to\infty} c(n,k) = 1.$$

Weiter gilt: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\cdot\frac{x^k}{k!}$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle m so groß, dass

$$m+1 \geq 2|x| \text{ und } \frac{4|x|^{m+1}}{(m+1)!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit folgt

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \exp(x)\right| = \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e_m(x) + e_m(x) - \exp(x)\right|$$

$$= \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{m} c(n,k)\cdot\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{m} c(n,k)\cdot\frac{x^k}{k!} - e_m(x) + e_m(x) - \exp(x)\right|$$

$|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$ Δ-Ungl.

$$\leq \underbrace{\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{m} c(n,k)\cdot\frac{x^k}{k!}\right|}_{I} + \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{m} c(n,k)\cdot\frac{x^k}{k!} - e_m(x)\right|}_{II} + \overbrace{\left|e_m(x) - \exp(x)\right|}^{III}$$

Nach Wahl von m gilt:

$$\mathrm{III} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Da $c(n,k) \to 1$ folgt: für $n > N$

$$\mathrm{II} = \Big|\underbrace{\sum_{k=0}^{n} c(n,k) - 1}_{\to 0 \,:\, n \to \infty}\Big| \cdot \frac{x^k}{k!} \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Weiter gilt:

$$\mathrm{I} = \Big|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{m} c(n,k)\cdot\frac{x^k}{k!}\Big|$$

$$= \Big|\sum_{k=0}^{n} c(n,k)\cdot\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} c(n,k)\cdot\frac{x^k}{k!}\Big|$$

$$= \Big|\sum_{k=m+1}^{n} c(n,k)\cdot\frac{x^k}{k!}\Big| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \underbrace{|c(n,k)|}_{\leq 1}\Big|\frac{x^k}{k!}\Big| \leq \sum_{k=m+1}^{n}\Big|\frac{x^k}{k!}\Big|$$

$$= |e_m(|x|) - e_n(|x|)| \leq \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!} < \frac{\varepsilon}{4}$$

für hinreichend großen!

Def: Die eulersche Zahl e ist definiert durch

$e = \exp(1)$

Es gilt $e = \sum_{k=0}^{\infty} = \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$

$\approx 2{,}71828\ldots$

Def: Für $z \in \mathbb{C}$ setze ebenfalls $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Satz: Es gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$

Beweis: Nach Binomischer Formel gilt

$$\frac{(z+w)^r}{r!} = \frac{1}{\cancel{r!}}\cdot\sum_{k=0}^{r}\frac{\cancel{r!}}{k!\,(r-k)!} z^k w^{r-k} \qquad \text{mit } r-k = \ell$$

$$= \sum_{\substack{0 \leq \ell, k \leq r \\ \ell + k = r}} \frac{z^k w^\ell}{k!\,\ell!}$$

$0 \leq k, \ell \leq r$, $k+\ell = r$

Damit

$$\exp(z+w) = \sum_{k=0}^{2m} \frac{(z+w)^r}{r!} = \sum^{2n}\sum_{\substack{0\leq k,\ell\leq r\\ k+\ell=r}} \frac{z^k w^\ell}{k!\,\ell!} = \sum_{\substack{0\leq k,\ell\leq n \\ k+\ell=2n}} \frac{z^k w^\ell}{k!\,\ell!}$$

Weiter mit:

$$\exp(z)\exp(w) = \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{2n} \frac{w^\ell}{\ell!}\right)$$

$$= \sum_{0<k,\ell<2n} \frac{z^k w^\ell}{k!\,\ell!}$$

Es folgt:

$$\exp(z+w) = \exp_{2n}(z)\exp_{2n}(w)$$

$$= \Big|\sum_{\substack{0<k,\ell<2n \\ k+\ell>2n}} \frac{z^k w^\ell}{k!\,\ell!}\Big| \leq \sum_{\substack{0<k,\ell\leq 2n \\ k+\ell>2n}} \frac{|z|^k |w|^\ell}{k!\,\ell!}$$

mehr Summanden $\leq \sum_{\substack{0<k,\ell<2n \\ \max\{k+\ell\}>2n}} \frac{|z|^k |w|^\ell}{k!\,\ell!} = \exp_{2n}(|z|)\exp_{2n}(|w|) - \exp_n(|z|) - \exp_n(|w|)$

Da $\exp_n(|z|), \exp_{2n}(|z|) \to \exp(|z|) \ldots$

$\exp_n(|w|), \exp_{2n}(|w|) \to \exp(|w|) \ldots$

folgt $|\exp_{2n}(z+w) - \exp_n(z)\exp(w)|$

$|\exp_{2n}(z+w) - \exp_n(z)(\exp_n(w))| \to 0 : n \to \infty$

Bemerkung: Potenzen positiver reeler Zahlen sind für ganzzahlige Exp. (z.B. $a^n = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{p\cdot|n|}$) sowie Kehrwerte reeler Zahlen. ($a^{1/q}$ ist die Länge von $x^q = a$)

Damit sind die Ausdrücke $a^{p/q} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$ definiert, d.h. a^r ist für rationale Zahlen definiert.

Wir zeigen, dass $\forall r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\exp(r) = e^r$$

Vollständige Induktion mit dem vorherigen Satz zeigt.

$$\exp(nx) = \exp(x)\exp((n-1)\cdot x)$$

$$= \ldots = \exp(x)^n.$$

Ferner $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$

also $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Damit folgt $\forall k \in \mathbb{Z}$ $k \leq 0$,

$$\exp(k\cdot x) = \exp(-(-k\cdot x)) = \frac{1}{\exp(-kx)} = \frac{1}{\exp(x)^{-k}} = \exp(x)^k$$

Für $r = p/q$ folgt

$$\exp(r\cdot x)^q = \exp(qrx) = \exp(px) = \exp(x)^p$$

$$\Rightarrow \exp(r\cdot x) = \exp(x)^{p/q} = \exp(x)^r$$

Für $x = 1$, also

$$\exp(r) = e^r$$

4/4