- Leibniz Kriterium $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert, falls $a_k \geq 0$, a_k monoton fallend gegen 0.
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Potenzreihe, Konvergenzradius R
- Funktionsfolge f_n konvergiert gegen f
  - punktweise $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x$
  - gleichmäßig $\max |f_n(x) - f(x)| \to 0$

- f_n stetig, $f_n \to f$ gleichmäßig $\to f$ stetig
- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx$

Satz: Sei f_n Folge differenzierbarer Funktionen mit $f_n \to f$ punktweise in I und $f_n' \to g$ gleichmäßig. Dann ist f differenzierbar mit $f' = g$.

Bew.: Es gilt: $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(z)\,dz$

$$\begin{array}{ccccc} f_n(x) & = & f_n(x_0) & + & \int_{x_0}^{x} f_n'(z)\,dz \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f(x) & = & f(x_0) & + & \int_{x_0}^{x} g(z)\,dz \end{array}$$

Diese Identität impliziert $f' = g$

$\square$

Potenzreihen konvergieren gleichmäßig auf abgeschlossenen Teilmengen ihres Konvergenzbereiches, denn ist $\rho < R$, so folgt mit

$$P(x) - P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k, \text{ dass}$$

$$\max_{x\in[-\rho,\rho]} |P(x) - P_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \underbrace{|x|^k}_{\leq \rho^k = r^k \left(\frac{\rho}{r}\right)^k} \qquad \left(\frac{\rho}{r}\right)^k = q^k, \; q<1$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{|a_k| r^k}_{\leq M} q^k$$

$$\leq M \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = M q^{n+1} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} q^\ell = \frac{M \cdot q^{n+1}}{1-q},$$

also $$\max_{x \in [-\rho, \rho]} |P(x) - P_n(x)| \leq \frac{M \cdot q^{n+1}}{1-q} \to 0$$

bzw. $P_n(x) \to P(x)$ gleichmäßig in $[-\rho, \rho]$.

Da die Polynome P_n stetig sind, ist also auch P stetig.

Lemma: Besitzt $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den Konvergenzradius R, so ~~dass~~ auch $Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1}$.

Beweis: Wir verwenden wieder $|a_k| r^k \leq M$, sofern $r < R$. Für $0 \leq |x| < r$ folgt:

$$k \cdot |a_k| \, |x|^{k-1} = \frac{|a_k|}{|x|} r^k \cdot k \frac{|x|^k}{r^k}$$

$$\leq \frac{M}{|x|} \cdot k \cdot q^k \qquad q = \frac{|x|}{r}$$

Durch Vergleich der Summanden $k \cdot q^k$ mit dem Integral $\int_0^\infty s \cdot q^s \, ds$ auf $[0, \infty)$ folgt die Konvergenz von $Q(x)$.

$\square$

10. Feb '16
MI

Satz: Besitzt $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den Konvergenz-radius $R > 0$, so ist P in $(-R, R)$ diffbar mit $P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$.

Bew.: Die Polynome P_n und ihre Ableitungen P_n' konvergieren gleichmäßig gegen P bzw. Q und es folgt: $P' = Q$. $\square$

Bsp.: (I) Die Ableitung von $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(i^k) \frac{x^k}{k!}$ ist gegeben durch $\cos'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(i^k)\, k \cdot \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$

$= -\sin(x)$

(II) Wir wollen zeigen,

dass $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$, $x \in (-1, 1)$

Wir verwenden, dass $\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$

Weiter gilt:

$$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \int_0^x \ln'(1+z)\,dz$$

$$= \underbrace{\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k \, dz}_{\text{konvergiert gleichmäßig auf } [0,x]} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \int_0^x z^k \, dz$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$$

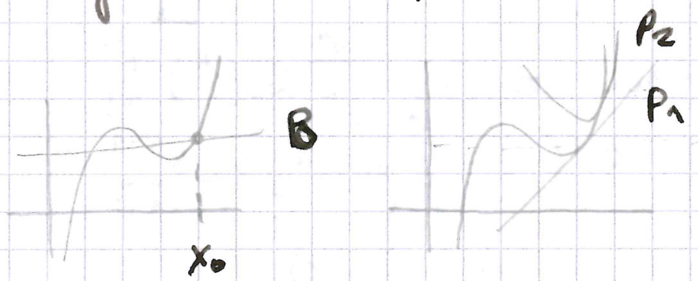
4 Taylorentwicklung

16. Feb. 16
MF

Also Taylorpolynom einer Funktion $f \in C^k(I)$ an der Stelle $x_0 \in I$ bezeichnet man

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x-x_0)^j .$$

Es gilt $P_k^{(\ell)}(x_0) = f^{\ell}(x_0)$, $\ell = 0, \dots, k$



Annäherung von f durch Polynome.

Satz: Für $f \in C^{k+1}(I)$ und $x_0 \in I$ gilt

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x)$$

mit

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \cdot \int_{x_0}^{x} (x-y)^k f^{(k+1)}(y)\, dy$$
$$= \frac{f^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}$$

Bew.: Induktion

IA: Für $k=0$ gilt

$$f(x) = P_0(x) = f(x) - f(x_0)$$
$$= \int_{x_0}^{x} f'(y)\, dy = R_0(x)$$

bzw. nach MWS

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(z) \cdot (x-x_0)}_{=R_0(x)}$$

IV: Aussage gilt für ein $k \in \mathbb{N}_0$

IS: Es gilt

$$R_k(x) = f(x) - P_k(x) = P_{k-1}(x) + R_{k-1}(x) - P_k(x)$$
$$= -\frac{f^{(k)}(x-x_0)^k}{k!} + R_{k-1}(x)$$

10. Feb '16
MI

$$= P_{k-1}(x) - P_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0} (x-y)^{f(y)}\, dy - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k+1}$$

$$= -\int_{x_0}^{x} -\frac{(x-y)^k}{k} \cdot f^{(k+1)}(y)\, dy$$

$$+ \left[\frac{(x-y)^k}{} \cdot f^{(k+1)} \right]_{x_0}^{x}$$

$$= 0 - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\Rightarrow \frac{+1}{k!}\int_{x_0}^{x} (x-y)^k f^{(k+1)}(y)\, dy$$

2. Darstellung folgt aus MWS für Integrale