• Diff.-regeln $(\alpha f + \beta\cdot g)' = \alpha\cdot f' + \beta\cdot g'$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2}\cdot g'$$

• Kettenregel $(g\circ f)' = g'(f(x))\cdot f'(x)$

• Umkehrabbildung $f = g^{-1}$ $\quad f'(y) = \frac{1}{g'(f(y_0))}$

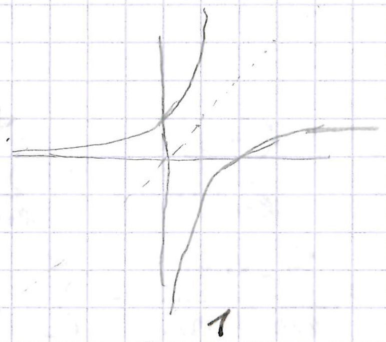
$$y_0 = g(x_0),\quad g'(x_0)\neq 0$$

<u>Bsp.:</u> (I) $\ln: (0,\infty)\to\mathbb{R}$

ist diff-bar in $(0,\infty)$,

da $\exp'(x) = \exp(x)\neq 0$,

mit:



$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}$$

(II) Für $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ und $x\in(0,\infty)$,

gilt $f(x)=\exp(\alpha\cdot\ln(x))$ und somit

$$f'(x) = \exp(\alpha\cdot\ln(x))\cdot\alpha\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{=\exp(-\ln(x))}$$

$$f'(x) = \alpha\cdot\exp((\alpha-1)\cdot\ln(x))$$

$$f'(x) = \alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

(III) Für $f(x)=a^{x}$, $a>0$, $x\in\mathbb{R}$,

gilt $f(x)=\exp(x\cdot\ln(a))$ und somit

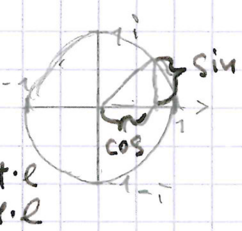
$$f'(x) = \exp(x\cdot\ln(a))\cdot\ln(a)$$

$$= a^{x}\cdot\ln(a)$$

Für $a=e$ ist $f(x)=\exp(x)$ und $\ln(e)=1$.

Um Sinus und Kosinus abzuleiten, verwenden wir, dass

$$\cos(t)=\mathrm{Re}(e^{i\cdot t}),\quad \sin(t)=\mathrm{Im}(e^{i\cdot t})$$



sowie $e^{i\cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\cdot t)^k}{k!}$, Dabei: $i^k = \begin{cases} i, & k=1+4\cdot\ell \\ -1, & k=2+4\cdot\ell \\ -i, & k=3+4\cdot\ell \\ 1, & k=4+4\cdot\ell \end{cases}$ $\quad \ell\in\mathbb{N}$

Folglich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\cdot t)^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(it)^{4\cdot\ell+0}}{(4\cdot\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(it)^{4\cdot\ell+1}}{(4\cdot\ell+1)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(i\cdot t)^{4\cdot\ell+2}}{(4\cdot\ell+2)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(i\cdot t)^{4\cdot\ell+3}}{(4\cdot\ell+3)!}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell}}{(4\ell)!} + i\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+1}}{(4\cdot\ell+1)!} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+2}}{(4\ell+2)!} - i\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+3}}{(4\ell+3)!}$$

Damit

$$Re(e^{i\cdot t}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell}}{(4\ell)!} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+2}}{(4\ell+2)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2\cdot k}}{(2k)!}$$

$$Im(e^{i\cdot t}) = i\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+1}}{(4\ell+1)!} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+3}}{(4\ell+3)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

Es folgt also: (nicht ganz mathematisch korrekt):

$$\cos(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell}}{(4\ell)!} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+2}}{(4\ell+2)!}$$

$$\cos'(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\ell\cdot t^{4\ell-1}}{(4\ell)!} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(4\ell+2)\cdot t^{4\ell+1}}{(4\ell+2)!}$$

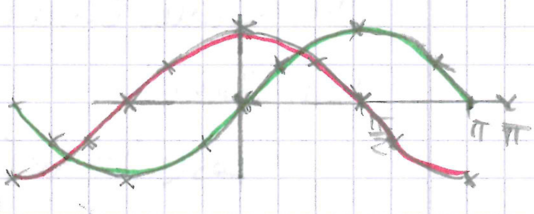
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\cancel{4\ell}\cdot t^{4\ell-1}}{(4\ell-1)!} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+1}}{(4\ell+1)!}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+3}}{(4\ell+3)!} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{4\ell+1}}{(4\ell+1)!}$$

$$= -Im(e^{i\cdot t}) = i^2\cdot\sin(t) = -\sin(t)$$

Mit $\sin(t) = \cos(t-\frac{\pi}{2})$ und $\sin(t-\frac{\pi}{2}) = -\cos(t)$.

$$\sin'(t) = \cos'(t-\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(t-\tfrac{\pi}{2}) = -(-\cos(t)) = \cos(t)$$



2. Mittelwertsatz u. Anwendungen

18.01.20
MI

Wir sagen, dass $f: I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R} I$ ein Minimum besitzt, falls $f(x_0) \leq f(x)$ bzw. $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in I$ gilt

Satz: $\forall f: I \to \mathbb{R}$ mit $I = [a,b]$ und sei f stetig.

Dann $\exists$ $x_{min}, x_{max} \in I$

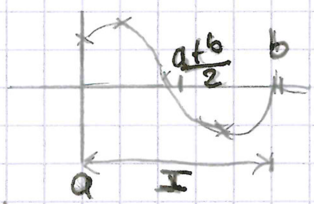
mit $f(x_{min}) = \inf f(x)$ $x \in I$

$f(max) = \sup f(x)$ $x \in I$

d.h. f besitzt ein Minimum und ein Maximum in I, insbesondere ist f beschränkt.

Bew.: Wir argumentieren mit Intervallhalbierung und setzen $\lambda = \inf_I f$. Mit $I_0 = I$ sei I_{n+1} ~~die~~ eine Hälfte von I_n mit

$$\inf_{I_{n+1}} f = \inf_{I_n} f = \lambda$$



Die Intervalle I_k sind geschachtelt, abgeschlossen und ihre Länge konvergiert gegen 0.

$\exists$ $x \in I$: $x \in I_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Gilt $f(x) > \lambda$, so gilt $f(y) > \lambda' > \lambda$ $\forall y$ nahe bei x, d.h. $|x-y| < \delta$ (Stetigkeit von f).

Wählen wir k hinreichend groß, ist I_k in dieser Menge enthalten und es folgt der Widerspruch $\inf_{I_n} f \geq \lambda' > \lambda$.

also gilt $f(x) = \lambda = \inf_I f$.

Die Aussage für das Maximum erfolgt analog.

Q.E.D.

Bem.: Für offene Intervalle gilt die Aussage nicht, wie im Beispiel $f(x) = \frac{-1}{x}$, $x \in (0,1)$ ~~zeigt~~

Liegt das Minimum oder Maximum nicht am Rand, so folgt $f'(x_0) = 0$.

Satz: Besitzt $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ein Extremum in $x_0 \in (a,b)$ und ist f diff-bar in x_0, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Bew.: Ist x_0 Minimalstelle, so gilt für die Sekantensteigung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0, & x > x_0 \\ \leq 0, & x < x_0 \end{cases}$$

Der Grenzwert kann nur dann existieren, wenn dieser Null ist.