02.12.2013 MI

Äquivalent: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}:$ $(n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

$a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

__Beispiel__: (Harmonische Folge)

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0.

__Beweis:__ Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann folgt

$\forall\ n > N: |a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

$\rightarrow \frac{1}{n} < N$

__Beispiel__: (konstante Folge)

Ist $a_n = a$ für $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Dass für $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$. Wir können $N = 0$ wählen.

__Beispiel__: (geometrische Folge):

Sei $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Wir können $q \neq 0$ voraussetzen (siehe Beispiel konstante Folge)

$\Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \rightarrow$ es gibt eine reele Zahl $x > 0$,

Sodass $\frac{1}{|q|} = 1 + x$

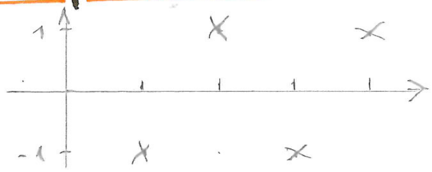
mit Bernoulli-Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

folgt $|q^n - 0| = |q^n| = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+n\cdot x} \leq \frac{1}{n \cdot x}$

$\frac{1}{n\cdot x} < \varepsilon$ gilt für alle $n > \frac{1}{x \cdot \varepsilon}$, wähle

$N = \frac{1}{x\cdot\varepsilon}$ $\square$

Beispiel (Plusminusfolge):



$a_n=(-1)^n$, für $n\in\mathbb{N}$, ist nicht konvergent.

Für jedes $a\in\mathbb{R}$ gilt:

$$2=|a_n-a_{n+1}|=|a_n-a+a-a_{n+1}|$$
$$\le |a_n-a|+|a_{n+1}-a|$$

Die reele Seite müsste für große n beliebig klein werden. Widerspruch.

Bei der Wahl von N kommt es nicht darauf an, dass die Schranke kleinstmöglich ist.

$N=N'$ gilt $|a_n-a|<\varepsilon$ für $n>N'$.

So können wir auch den nächsten Folgenindex $n_0\in(N,N+1]$ wählen.

Definition: (ε-Umgebung)

Die ε-Umgebung von $a\in\mathbb{R}$ ist die Menge

$$M_\varepsilon(a)=\{x\in\mathbb{R} \mid |x-a|<\varepsilon\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \cancel{|x-a|}\ a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$$

Eine Folge konvergiert genau dann gegen $a\in\mathbb{R}$, wenn die Folgeglieder ab einer gewissen Nummer in der ε-Umgebung von a liegen, egal wie klein $\varepsilon>0$ gebildet ist.

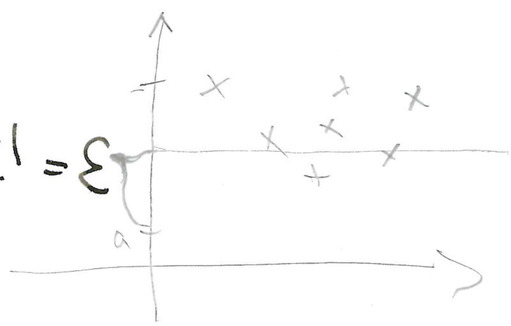
Satz: (Eindeutigkeit des Grenzwerts)

Ist die Folge a_n konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

Beweis: Angenommen die Folge hätte zwei Grenzwerte a, a' mit $a\neq a'$

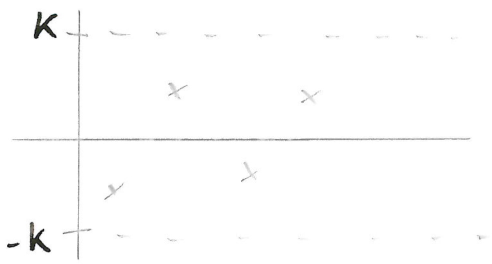
$$\varepsilon=\frac{|a-a'|}{2}$$

$$a_n = M_\varepsilon(a)\cap M_\varepsilon(a')=\emptyset \qquad \frac{|a-a'|}{2}=\varepsilon$$



Definition: Eine reele Folge heißt beschränkt, wenn ein $K \ge 0$ ~~mi~~ existiert mit

$$|a_n| \le K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



a_n ist nach unten beschränkt
$\Leftrightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R}$ mit $a_n \ge K_1 \;\forall n \in \mathbb{N}$

a_n ist nach oben beschränkt
$\Leftrightarrow \exists K_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_n \le K_2 \;\forall n \in \mathbb{N}$

Die Folge a_n ist genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.
Denn aus $|a_n| \le K$ folgt $-K \le a_n \le K$. Umgekehrt folgt aus $K_1 \le a_n \le K_2$, dass $a_n \le K_2 \le |K_2|$ und $-a_n \le K_1 \le |K_1|$
Insgesamt gilt $|a_n| \le \max\{|K_1|, |K_2|\}$.

Beispiel: Da $a_n = n$ $n \in \mathbb{N}$, ist nach unten beschränkt, da $a_n \ge 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$. Aber a_n ist nicht nach oben beschränkt.

Satz (Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit):

Konvergente Folgen sind beschränkt.

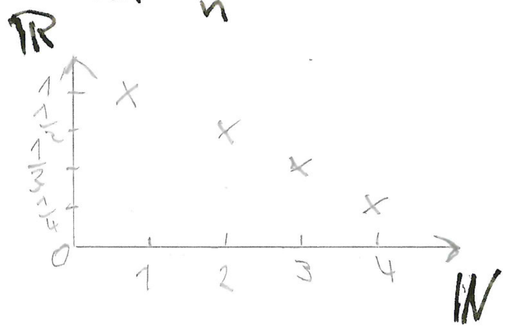
Beweis: $a_n \to a$, $n \to \infty$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| = 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$
Dann folgt $|a+b| \le |a| + |b|$

$$|a_n| = |a| + |a_n - a| \le |a| + 1$$

$\forall n > N$

$$|a_n| \le \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |a|+1\} \;\forall n \in \mathbb{N}$$

$a_n = \frac{1}{n}$



Satz (Rechenregeln für Grenzwerte): $a_n \to a$, $b_n \to b$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \cdot a + \mu \cdot b \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ ~~$\forall n$~~, falls $b \neq 0$

Beweis: Es gibt ein $k > 0$ mit $|a_n| \leq k$ $a \in \mathbb{N}$ und $|b| \leq k$

(b) Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$
$$\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab|$$
$$= |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$$
$$= k \cdot (|a_n - a| + |b_n - b|)$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $N \in \mathbb{R}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot k} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot k}$$

$$|a_n b_n - ab| \leq k \cdot (|a_n - a| + |b_n - b|) \leq k \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2 \cdot k} + \frac{\varepsilon}{2 \cdot k}\right) \leq \varepsilon$$

(a) Für (a) reicht es wegen (b) den Fall $\mu = \lambda = 1$ zu betrachten.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(c) Es gilt $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$

Wir müssen also die Konvergenz von $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ nachweisen.

Betrachte $b = 1$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{R}$ mit

$$|b_n - 1| \leq \frac{1}{2} \cdot \min\{\varepsilon, 1\}, \quad |b_n - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } |b_n - 1| \leq \frac{1}{2}$$

Dann folgt $|b_n| = |1 - (1 - b)| = 1 - |1 - b_n| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

und weiter $\left|\frac{1}{b_n} - 1\right| = \frac{|1 - b_n|}{|b_n|} \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

MI

Für a_n und $b \neq 0$ beliebig mit $b \cdot b_n' = b_n$

$b_n' = \frac{b_n}{b} \to 1$ und damit $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b} \cdot \frac{b}{b_n} = \frac{a_n}{b} \cdot \frac{1}{b_n'} \to \frac{a}{b} \cdot 1$

$= \frac{a}{b}$ □.