

Die Feldmühle

Simon Skade

10. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	3
1.1 Anwendungsmöglichkeiten	3
2 Dokumentation	3
2.1 Aufbau	3
2.2 Funktionsweise	4
2.3 Theorie/Mathematik	5
2.4 Programmierung	9
2.5 Ergebnisse	9
2.5.1 Test im Plattenkondensator	9
2.5.2 Messungen	11
3 Quellen	11

1 Einführung

Die Feldmühle ist ein Messgerät zur Bestimmung der elektrischen Feldstärke.

1.1 Anwendungsmöglichkeiten

Innerhalb eines Gewitters ist das elektrische Feld sehr viel höher als normalerweise. Daher werden Feldmühlen verwendet, um Risiken von Gewittern und Blitzeinschlägen zu berechnen. Beispielsweise findet diese Technik bei Raketenstarts Anwendung.

Weiterhin wird es zur Bestimmung des elektrischen Feldes in Laboratorien zur Überprüfung der Versuchsbedingungen verwendet.

Es ist außerdem ein interessantes Messgerät.

2 Dokumentation

2.1 Aufbau

Die Feldmühle besteht aus einer Kupferplatine, die vier wesentliche Segmente hat. Diese Segmente sind gleichmäßige Ausschnitte eines Kreises, von denen jedes mit dem gegenüberliegendem Segment verbunden ist. Ca. 4mm über der Kupferplatine ist ein Rotor, der auch aus einer Kupferplatine besteht, angebracht. Dieser ist aus wie zwei gegenüberliegende Segmente geformt. Der Rotor kann sich durch einen Elektromotor drehen.

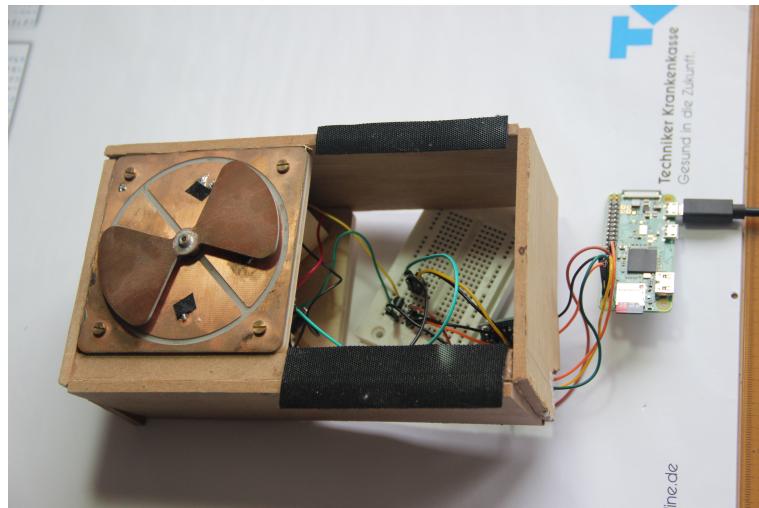


Abbildung 1: Die Feldmühle

Der Elektromotor ist an eine Stromquelle angeschlossen und kann durch einen Transistor eingeschaltet werden.

An zwei nebeneinander liegenden Segmenten ist jeweils ein $1M\Omega$ Widerstand zwischen der Ober- und Unterseite des jeweiligen Platinenausschnitts angeschlossen. Die Unterseite der Platine ist geerdet.



Abbildung 2: Feldmühle Innen

An den jeweiligen Oberseiten der Widerstände (= Platinenoberseite) gehen Kabel an den Analog-Digital-Wandler (ADC) (wir benutzen den ADS1115) und dann an den Raspberry Pi (Zero W). Der Raspberry Pi ist außerdem an den Transistor angeschlossen, über den er die Feldmühle an- oder ausschalten kann.

2.2 Funktionsweise

Die Kupfersegmente gewinnen Ladung durch das elektrische Feld in der Luft. Wenn der Rotor über ein Segment kommt, schirmt er die Ladungen ab, so dass das Segment weniger geladen wird, und umgekehrt, wenn sich der Rotor von einem Segment entfernt. Dieser Prozess ist im folgenden Bild anschaulich und vereinfacht 2 dimensional dargestellt:

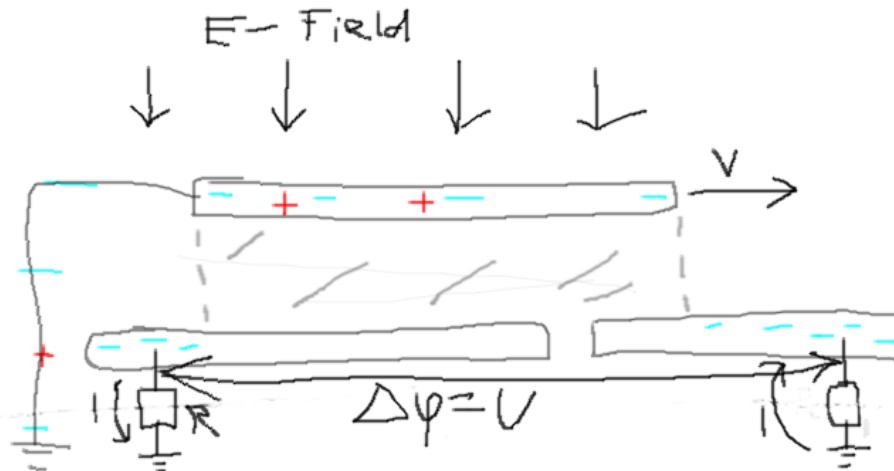


Abbildung 3: Eine Vereinfachte Darstellung der Feldmühle in 2D

Durch die sich stetig verändernde Potentialdifferenz entsteht ein Wechselstrom. Der Strom kann über den $1M\Omega$ Widerstand zur Erde abfließen. An den jeweiligen Oberseiten der $1M\Omega$ Widerständen (= Platinenoberseite) wird die Potentialdifferenz als Spannung durch den ADC gemessen. Man kann die Empfindlichkeit der Feldmühle berechnen, um die tatsächliche elektrische Feldstärke aus unserem Spannungsausgang herauszufinden. Näheres dazu ist im Abschnitt Theorie zu finden.

Die Ausgangsspannung wird durch den ADC in digitale Signale "erlegt", die an den Raspberry Pi gehen, der die Daten auswerten kann. Bei hohen elektrischen Feldstärken speichert der Pi die Daten, so dass wir die Daten im Nachhinein analysieren können.

2.3 Theorie/Mathematik

Die Oberseiten und Unterseiten eines Segmentpaars können als ein (Platten-)Kondensator gesehen werden. Für einen (Platten-)Kondensator gilt:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 44.0755 pF \quad (1)$$

Die Umladungsrelaxationszeit τ lässt sich durch die folgende Formel berechnen:

$$\tau = CR = 44.0755 * 10^{-12} F * 10^6 \Omega = 4.40755 * 10^{-5} s = 0.040755 ms \quad (2)$$

Da die Frequenz f nach den Messergebnissen maximal $f = 40 Hz$ beträgt, ist die Periodendauer mindestens $T = \frac{1}{f} = 0.025 s$. Da die Periodendauer über 550 mal größer als die Umladungsrelaxationszeit ist, und die Umladungsrelaxationszeit nur 2 mal pro Periodendauer relevant ist, wird im Folgenden und in der Programmierung diese kleine Abweichung vernachlässigt. Wir gehen also davon aus, dass die Ladungen zeitlich unmittelbar fließen.

Aus Formel 1 leitet sich auch die Ladung Q ab:

$$Q = CU = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} * \frac{\vec{E}d}{\epsilon_r} = \epsilon_0 A \vec{E} \quad (3)$$

Die offene unabgeschirmte Fläche eines Segmentpaars steigt und sinkt dauerhaft linear zwischen der Fläche $A = 0$ und der maximalen Fläche des Segmentpaars $A = \frac{2}{4}\pi r^2$. Dies kommt durch die Rotation des Rotors über den Segmentpaaren zu Stande, wie man sich gut vorstellen kann.

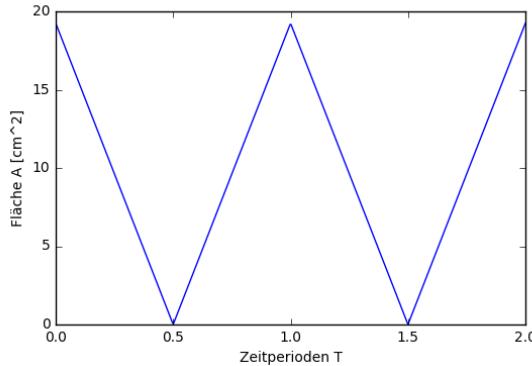


Abbildung 4: Flächenverlauf

Da Q zu A proportional ist und ϵ_0 konstant ist, sieht der Graph bei konstanter elektrischer Feldstärke ebenfalls so aus:

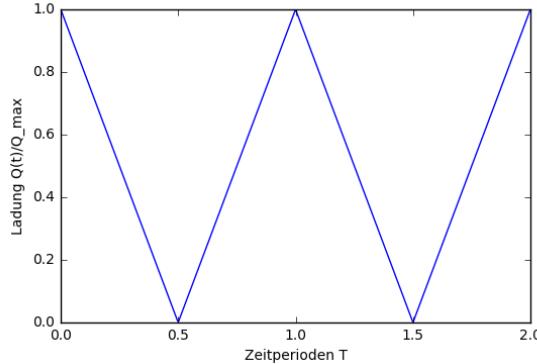


Abbildung 5: Ladungsverlauf

(In Realität ist müsste der Graph Aufgrund der Umladungsrelaxationszeit leicht abgerundet sein.)

Da, wenn die eine Fläche des Segmentpaars aufgedeckt wird, die Fläche des anderen Segmentpaars gleichermaßen abgedeckt wird, sieht der Verlauf der Ladung (und der Fläche) von beiden Segmentpaaren wie folgt aus:

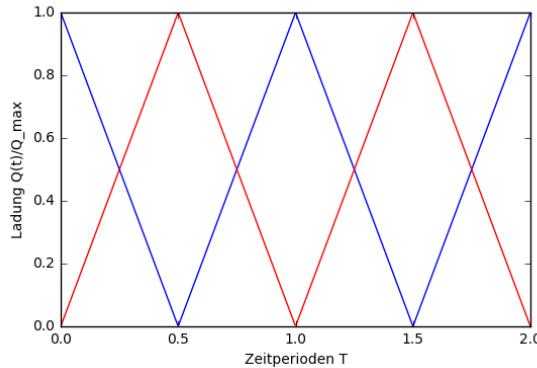


Abbildung 6: Ladungsverlauf beider Segmentpaare

Die Ladung der Segmentpaare verlaufen also entgegengesetzt zueinander.

Der Strom, der durch den Widerstand fließt, kann wie folgt beschrieben werden:

$$I(t) = \frac{\delta Q}{\delta t} = Q'(t) \quad (4)$$

Der Strom $I(t)$ entspricht folglich der Ableitung von $Q(t)$ und sieht folgendermaßen aus:

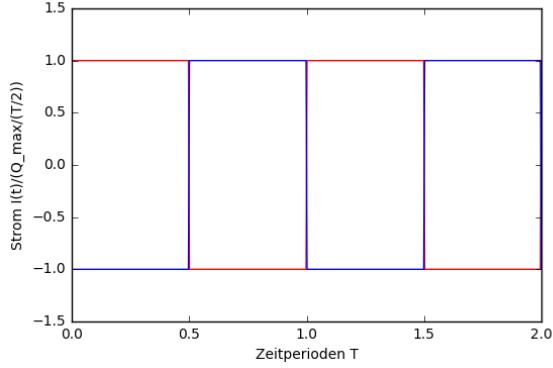


Abbildung 7: Stromflüsse

In der Realität ist der Graph aufgrund der Umladungsrelaxationszeit leicht abgerundet. Es gilt

$$I_{max} = \frac{Q_{max}}{\frac{T}{2}} \quad (5)$$

, da Q_{max} in der Zeit $\frac{T}{2}$ einmal vollständig zu $Q_{min} = 0$ umfließt. Man beachte, dass hier beabsichtigt nicht nach t sondern nach $t/2$ abgeleitet wurde, da die eigentliche Umflusszeit nicht T , sondern $T/2$ ist.

Aus der obigen Formel ergibt sich:

$$I(t) = \frac{Q(t)}{\frac{T}{2}} = \frac{\epsilon_0 A \vec{E}}{\frac{T}{2}} = 2f \epsilon_0 A \vec{E} \quad (6)$$

Für die Spannung gilt das Ohmsche' Gesetz:

$$U(t) = R * I(t) \quad (7)$$

Wie man bei Abbildung 3 sehen kann, fließt der Strom bei beiden Segmentpaaren durch $R = 1M\Omega$, also insgesamt durch $2R = 2M\Omega$.

Aus Abbildung 3 ist ebenfalls herauszulesen, dass der Strom auf beiden Seiten in entgegengesetzte Richtungen fließt. Es gilt $I_1(t) = -I_2(t)$. Daher ergibt sich $U(t)$ aus der Differenz der beiden Ströme multipliziert mit den Widerständen:

$$U(t) = I_1(t)R - I_2(t)R = 2RI_1(t) \quad (8)$$

Graphisch gesehen ist die Spannung also beispielsweise in Abbildung 7 die eine Kurve subtrahiert von der Anderen. Im folgenden Graph die Rote minus die Blaue:

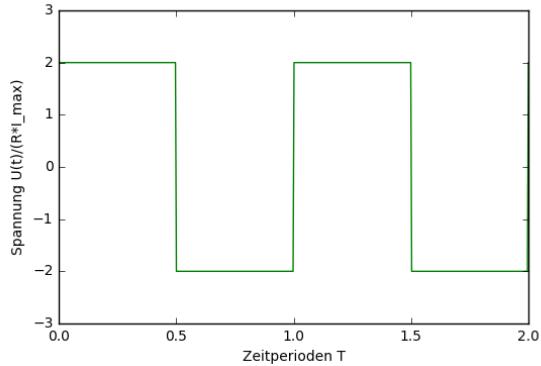


Abbildung 8: Spannungsverlauf

Daraus ergibt sich für das Messignal:

$$U(t) = 2RI(t) = 4R\epsilon_0 f A \vec{E} \quad (9)$$

Nun kann man die Empfindlichkeit der Feldmühle $\frac{\vec{E}}{U}$ berechnen:

$$\frac{\vec{E}}{U} = \frac{1}{4\epsilon_0 R f A} \quad (10)$$

Jetzt muss man nur noch die Spannung des Messsignals mit der konstanten Empfindlichkeit multiplizieren, um die Stärke des elektrischen Feldes zu berechnen.

2.4 Programmierung

Ich werde im Folgenden nur oberflächlich die Programmierung beschreiben und hauptsächlich auf die Funktion des fertigen Programmcodes eingehen, nicht auf die Funktionsweise.

Im Ordner Programmierung sind die Programme, die für das Projekt verwendet wurden zu finden. Alle Programme sind in Python geschrieben:

- graphs.ipynb: Jupyter Notebook, das zur Generierung der in Abschnitt Theorie verwendeten Graphen benutzt wurde.
- fft_test.ipynb: Jupyter Notebook, welches ich für die Programmierung einer theoretischen fft (Fast Fourier Transformation) benutzt habe. Ich habe mir das Programmieren von ffts über dieses Programm beigebracht.
- raspi_feldmühle.py: Das ist das Hauptprogramm, dass auf den Raspberry Pi geladen und ausgeführt wird, um die Feldmühle zu steuern und die Messdaten auszuwerten. Näheres wird im Folgenden beschrieben.

Für die Ausführung von raspi_feldmühle.py auf dem Raspberry Pi werden die importierten Bibliotheken benötigt. Näheres dazu ist auf <https://github.com/SimonSkade/fieldmill>, ein Github Repository, dass ich zu dem Projekt erstellt habe, zu finden.

Das Programm liest die Messdaten durch ansteuern des ADC ein, misst die Dauer, die für das Einlesen benötigt wurde, und berechnet daraus die Spannung, die Amplitude, die Standardabweichung, die Frequenz und schließlich die elektrische Feldstärke.

Die Frequenz wird mit Hilfe einer fft (Fast Fourier Transformation) ausgerechnet.

Die Spannung entspricht

$$U = \frac{\text{Amplitude} * \text{Messbereich}}{\text{Auflösung}} = \frac{\frac{\sum_1^n \max_n - \min_n}{2n} * 12.288V}{2^{16}} \quad (11)$$

,da die Auflösung über den Messbereich verteilt ist.

Sobald die berechnete elektrische Feldstärke einen bestimmten Grenzwert überschreitet, werden die vom Programm ausgerechneten elektrischen Feldstärken mit der jeweiligen Uhrzeit in ein Dokument geschrieben, das mit Datum und Uhrzeit der Grenzwertüberschreibung benannt ist. Die Daten werden solange in das Dokument geschrieben, bis ein weiterer Grenzwert unterschritten wird. Momentan liegt der Startgrenzwert bei $\vec{E}_{start} = 3 \frac{kV}{m}$ und der Endgrenzwert bei $\vec{E}_{end} = 2.8 \frac{kV}{m}$.

2.5 Ergebnisse

2.5.1 Test im Plattenkondensator

Bei dem Test im Plattenkondensator wurden Spannungen von $U = 0.3kV$ bis $U = 4.8kV$ angelegt. Die blaue Gerade spiegelt die tatsächliche Feldstärke pro Spannung, die rote (fast) Gerade spiegelt die von der Feldmühle gemessenen und vom Programm ausgegebenen Werte wieder.

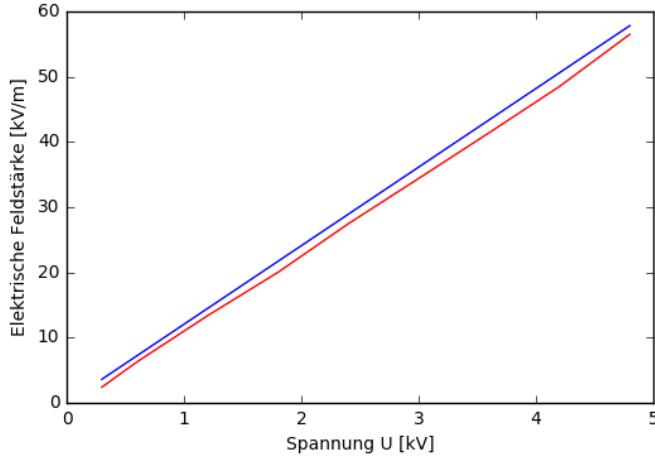


Abbildung 9: Testergebnisse im Kondensator

Verblüffend an diesem Ergebnis ist, dass die Abweichung bei kleinen und großen Werten ähnlich groß ist, obwohl man (zumindest ich) eigentlich eine prozentuale Abweichung erwartet hätte.

Es scheint so, dass wenn man die rote Gerade weiterziehen würde ein Wert unter Null bei Spannungen um die $U = 0V$ herausbekommen würde. Dies ist natürlich nicht der Fall, da das Programm die elektrische Feldstärke durch die Amplitude ausrechnet und somit nicht negativ sein kann. Also muss der rote Graph sich nahe bei Null abrunden.

Leider habe ich mit dem Plattenkondensator keine tieferen Spannungen eingestellt, da das Hochspannungsnetzgerät nicht auf tiefe Spannungen ausgelegt ist. Außerdem funktioniert bei sehr kleinen elektrischen Feldstärken die fft nicht, da der Algorithmus die Frequenz $f = 0\text{Hz}$ ausgibt, sodass es zu keinem Ergebnis kommt. Dafür müsste man aber schon die Feldmühle abschirmen. (Im ausgeschalteten Kondensator hat sie nicht funktioniert)

Meiner Meinung nach gibt es generell eine prozentuale Abweichung, die durch Messungenauigkeiten verursacht werden kann. Hierfür sind mögliche Fehlerquellen die Ungenauigkeiten in der Bestimmung der Fläche, des Abstandes zwischen Kondensatorseite und Platine, der Frequenz durch die fft und die Abweichung des Widerstandswert der Widerstände. Dies dürfte aber aufgrund der ähnlichen absoluten Abweichung ein eher unbedeutender Effekt sein. Ein weiterer kleiner Fehler könnte durch von mir schlecht gemittelte Messwerte kommen. Diese Fehler sind wohl dafür verantwortlich, dass der rote Graph nicht perfekt linear ist.

Der Hauptgrund der Veränderung ist, aufgrund der absoluten Abweichung, höchstwahrscheinlich ein äußerer Einfluss. Wenn beispielsweise das elektrische Feld der Luft in die entgegengesetzte Richtung zeigt, kommt es wegen des Superpositionsprinzips zu einer dauerhaft schwächeren elektrischen Feldstärke. Dies ist meiner Meinung nach die wahrscheinlichste Erklärung der Abweichung.

Alles in allem finde ich jedoch, dass die elektrische Feldstärke durch theoretische Annahmen, die dem, nie zutreffendem Ideal entsprechen verblüffend genau berechnet werden kann.

2.5.2 Messungen

Leider konnte die Feldmühle noch kein einziges mal bei Gewitter getestet werden. Bei normalen Wetterbedingungen lag die ausgegebene Feldstärke zwischen $\vec{E} = 95 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ und $\vec{E} = 180 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

Wenn man einen geladenen Gegenstand über die Feldmühle hält, steigt die Feldstärke sehr stark an:

- Bei meiner Hand bis ca. $\vec{E} = 600 \frac{\text{V}}{\text{m}}$
- Bei meinem Locher, den ich an meinem Shirt aufgeladen habe ging die Feldstärke bis zu $\vec{E} = 27000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

Bei dem nächsten auftretendem Gewitter soll die Feldmühle draußen getestet werden.

3 Quellen

Ich habe alle Quellen, die ich verwendet habe im Ordner sources angegeben. Verständlicherweise habe ich viel des Geschriebenen selbst hergeleitet, bzw. experimentell erschlossen.