

Schwingungen / Wellen

1. Schwingungen

1.1 Ungedämpfte Schwingungen

1.1.0 Definition einer Schwingung, eindimensionale Schwingungsgleichung

Unter einer Schwingung verstehen wir die periodische Zustandsänderung an einem bestimmten Raumpunkt.

oder etwas weniger allgemein und dafür verständlicher:

Schwingungen sind periodische Vorgänge, bei welchen ein System nach einer Periode T wieder im gleichen Bewegungszustand ist.

Schwingungsfähige Systeme nennt man auch Oszillatoren.

In der Beschreibung von Schwingungen hilft uns ein mathematischer Satz:

Jede periodische Funktion kann in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden (= Fourieranalyse):

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(k \omega t) + b_k \sin(k \omega t))$$

1.1.1 Die harmonische, ungedämpfte Schwingung

Der einfachste Fall einer Schwingung ist die ungedämpfte harmonische Schwingung. Sie lässt sich als Projektion der Kreisbewegung auffassen:

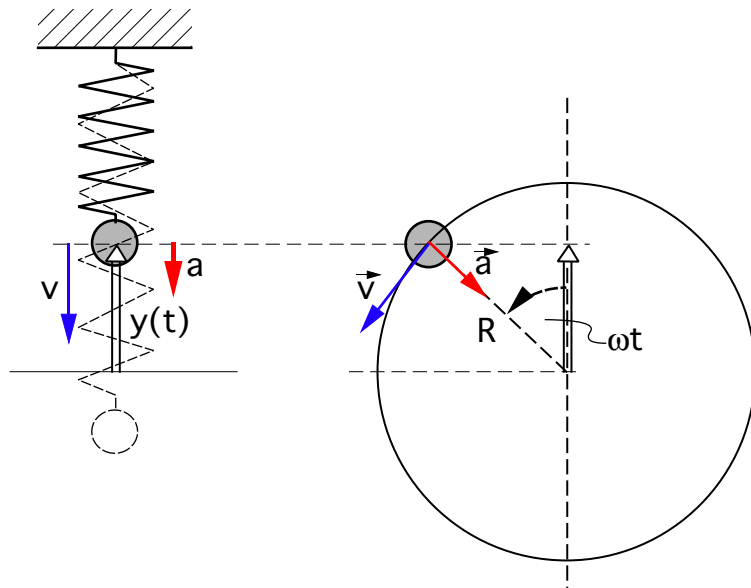
$$y(t) = R \cdot \cos(\omega t)$$

$$\dot{y}(t) = -R \cdot \omega \sin(\omega t)$$

$$\ddot{y}(t) = -R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

R = Amplitude

= max. Auslenkung



$$\ddot{y} = -\omega^2 y$$

oder

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

harmonische Differentialgleichung

In der Sprache der Mathematiker ist dies eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

- linear in der DG kommen nur erste Potenzen von \ddot{y} , \dot{y} , oder y und auch keine Mischprodukte der Form $\dot{y} \cdot \ddot{y}$ vor.
- zweiter Ordnung die zweite Ableitung ist die höchste, auftretende Ableitung.
- homogen es gibt keinen Summanden, der nicht y oder eine Ableitung von y enthält.

Jede Bewegung, welche dieser DGL gehorcht, ist eine harmonische Schwingung.

Die Lösung dieser DGL ist:

$$y(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega t - \delta)$$

Bezeichnungen:

$y(t)$: Elongation

\hat{y} : Amplitude,

Scheitelwert

ω : Kreisfrequenz*

δ : Phasenverschiebung

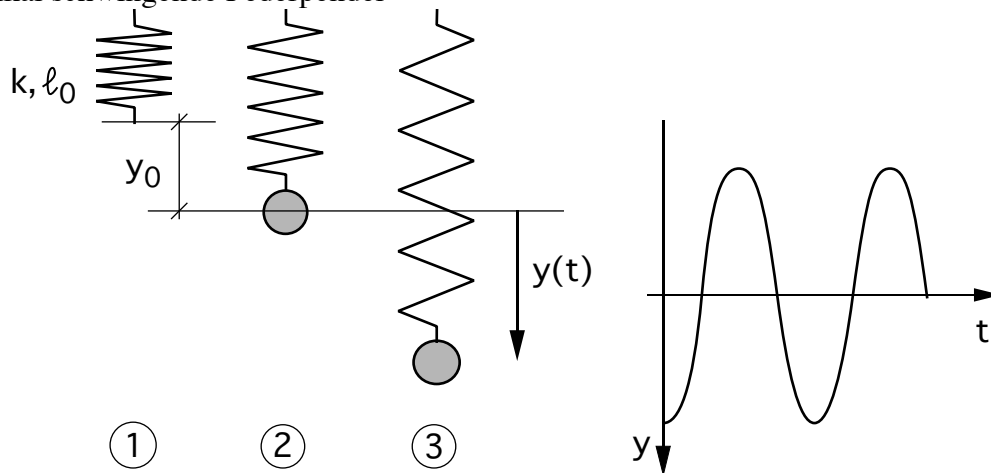
T : $T = 2\pi/\omega$: Periode

* Da die Kreisfrequenz ω eines gedämpften Pendels kleiner ist als jene des ungedämpften, werden wir im folgenden die **Frequenz des ungedämpften Pendels** mit ω_0 bezeichnen.

1.1.2. Dynamik der harmonischen Schwingung

a) Translationsschwingungen:

Das vertikal schwingende Federpendel



1: unbelastete Feder der Länge l_0 und Federkonstante k

2: Gleichgewichtslage: $\sum \vec{F}_i = 0$, d.h. $m g + (-k y_0) = 0$

3: Aufstellen der Schwingungsgleichung = **Aktionsprinzip**

$$m \ddot{y} = \sum F_i = mg - k(y_0 + y(t))$$

$$m \ddot{y} = -k y(t)$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

Damit ist der Lösungstypus der Bewegung bestimmt:

$$y(t) = \hat{y} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t - \delta\right)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Die noch nicht festgelegten Konstanten \hat{y} und δ erhalten wir aus den Anfangsbedingungen:

Aus Startort $y_0 = y(t=0) = \hat{y} \cdot \cos(-\delta)$

und Startgeschwindigkeit $v_0 = v(t=0) = \dot{y}(t=0) = -\hat{y} \cdot \omega \cdot \sin(-\delta)$

berechnen wir:

$$\hat{y} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}; \quad \text{tg} \delta = \frac{v_0}{y_0 \cdot \omega_0}$$

Damit ist die Bewegung des Pendels eindeutig festgelegt und beschrieben.

b) Flüssigkeitspendel (U-Rohr-Schwinger)

Wird die Flüssigkeit im Rohr aus der Gleichgewichtslage

ausgelenkt, so erhalten wir eine rücktreibende Kraft, welche dem Gewicht der in der Figur schraffierten Flüssigkeitsmenge entspricht:

$$F_{\text{rück}} = - \Delta m g = - 2y A \rho g$$

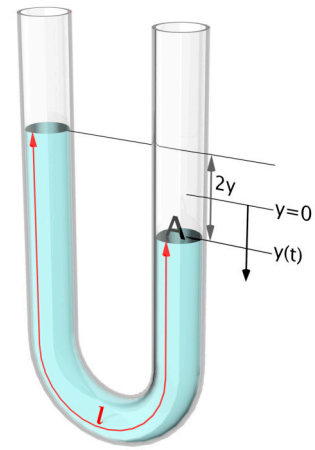
Aus dem Aktionsprinzip

$$m_{\text{tot}} \ddot{y} = (l A \rho) \cdot \ddot{y} = - 2y A \rho g$$

erhalten wir die harmonische DGL

$$\ddot{y} + \frac{2g}{l} y = 0$$

und folglich $\omega_0^2 = 2g/l$; $T = 2\pi \sqrt{l/2g}$



c) Drehschwingung

Bei einer Drehschwingung setzen wir das AP für Rotationsbewegungen an (Drehfederkonstante D):

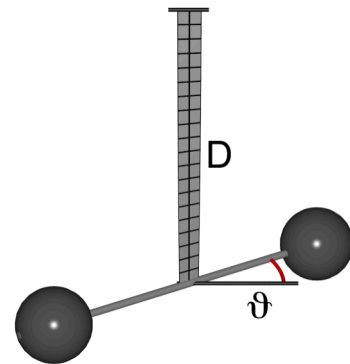
$$I \ddot{\vartheta} = - D \vartheta$$

Umgeformt auf Standardschreibweise erhalten wir

$$\ddot{\vartheta} + \frac{D}{I} \vartheta = 0$$

und damit

$$\omega_0 = \sqrt{D/I} \quad \text{oder} \quad T = 2\pi \sqrt{I/D}$$



d) Berücksichtigung der Federmasse beim linearen Federpendel

Nach der Besprechung einiger einfacher Pendel wollen wir auf das Federpendel a) zurückkommen. Wenn wir uns die Situation genauer überlegen, ist die dort besprochene Herleitung nicht ganz korrekt: Die einzelnen Federwindungen führen auch eine Schwingung aus, d.h. die schwingende Masse ist sicher grösser als die an der Feder befestigte Masse m . Andererseits ist die Schwingungsamplitude der Federwindungen am Verankerungspunkt der Feder praktisch Null. Die im Aktionsprinzip einzusetzende Masse, welche wir **effektive Pendelmasse** m_{eff} nennen wollen, ist damit sicher kleiner als $m + m_F$ oder

$$m < m_{\text{eff}} < m + m_F$$

Zur Herleitung der exakten Formel zur Berechnung der effektiven Pendelmasse benötigen wir die Wellentheorie. Es muss eine Wellengleichung formuliert und gelöst werden, weshalb wir hier nur das Resultat dieser Rechnung angeben wollen.

Die effektive Masse schreiben wir als

$$m_{\text{eff}} = m + z \cdot m_F$$

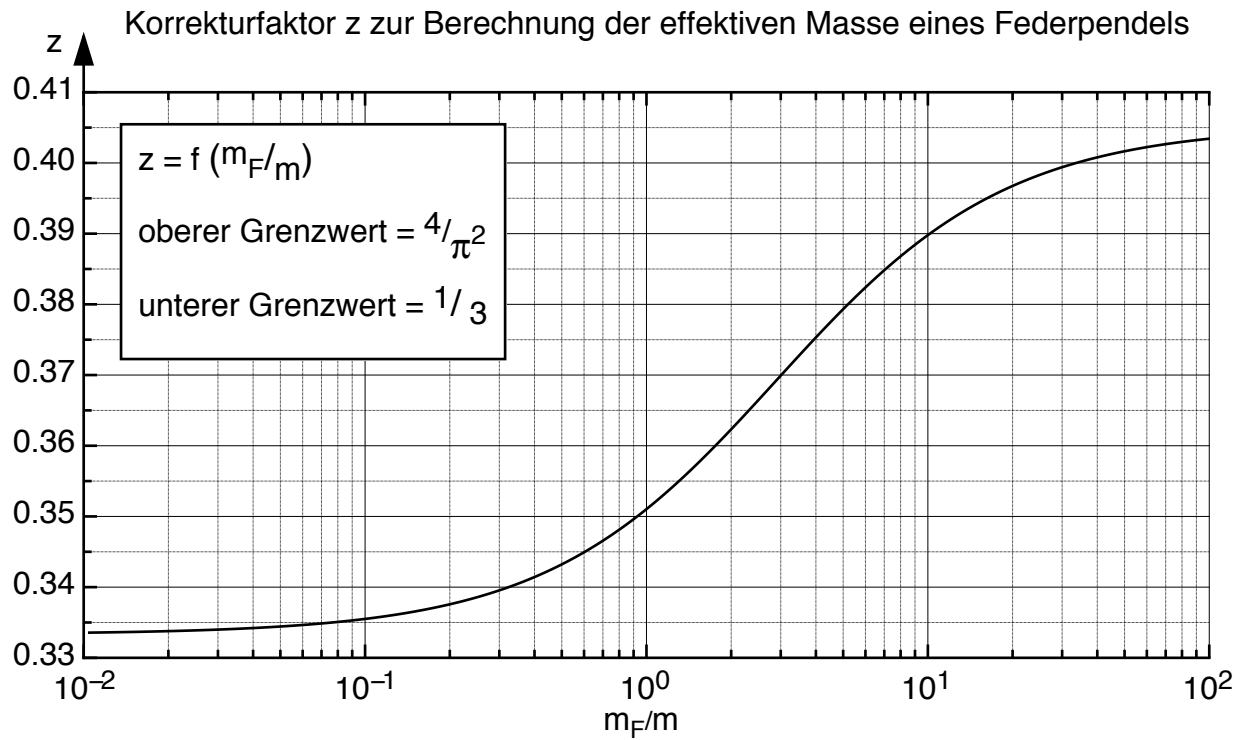
wobei m die an der Feder angehängte Masse und m_F die Masse der Feder (dehnbarer Bereich) bezeichnet. Der Korrekturfaktor z wird numerisch aus folgenden Gleichungen berechnet.

$$\tau \cdot \tan(\tau) = \frac{m_F}{m} \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau \cdot \tan(\tau)}$$

Eine graphische Darstellung von $z(m_F/m)$ befindet sich auf der nächsten Seite.

Will man also die Frequenz oder Schwingungsdauer eines Federpendels sehr genau berechnen oder ist die Federmasse vergleichbar oder grösser als die angehängte Masse m , so muss m in allen Gleichungen von Beispiel a) durch das hier definierte m_{eff} ersetzt werden.

Als Faustregel können wir uns merken: Die effektive Masse ist um etwa $1/3$ Federmasse grösser als die angehängte Pendelmasse. Verändert dies die Schwingungsdauer wesentlich, so sollte man die genaue Korrektur nachschauen.



1.1.3. Quasiharmonische Schwingungen

a) Das mathematische Pendel

Auf die punktförmige Masse m wirken die Schwerkraft $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$ sowie die Fadenkraft \vec{F}_F . Die Pendelmasse führt eine ungleichförmige Rotationsbewegung um den Aufhängepunkt A aus. Deshalb werden wir das AP_{rot} verwenden. Wie man leicht aus der Zeichnung ersieht, bewirkt nur die Tangentialkomponente der Gewichtskraft ein Drehmoment bezüglich A, und zwar ein **rücktreibendes**

$$M_A = - G_t \cdot l = - m \cdot g \cdot \sin \vartheta \cdot l$$

Das AP_{rot} für die ebene Bewegung lautet also:

$$I_A \ddot{\vartheta} = M_A = - m \cdot g \cdot l \cdot \sin \vartheta$$

Verwendet man noch das Massenträgheitsmoment einer Punktmasse

$$I_A = m \cdot l^2$$

so erhält man schlussendlich eine sogenannte **quasiharmonische DGL**:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0$$

Bei kleinen Amplituden gilt $\sin \vartheta \approx \vartheta$ und die nichtlineare DGL wird zu einer linearen, harmonischen DGL:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \vartheta = 0$$

Für kleine Amplituden $\hat{\vartheta}$ erhalten wir also die Näherungslösung

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \hat{\vartheta} \cdot \cos(\omega_0 t - \delta) & \text{mit } \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \dot{\vartheta}(t) &= -\hat{\vartheta} \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t - \delta) \\ \ddot{\vartheta}(t) &= -\hat{\vartheta} \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t - \delta) & \text{oder } T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

(Achtung: Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ des Pendels darf nicht mit der Kreisfrequenz ω der Pendelbewegung verwechselt werden).

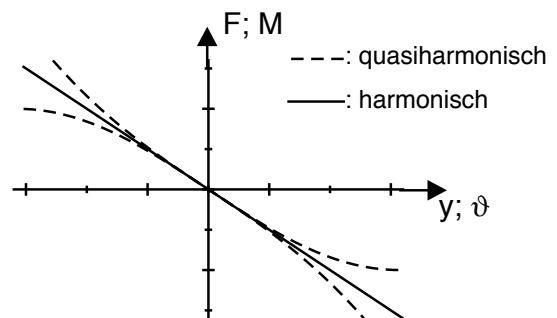
Damit haben wir das schon von Galileo Galilei experimentell beobachtete Resultat erhalten:

Die Schwingungsdauer T eines (mathematischen) Pendels ist bei kleinen Amplituden **unabhängig von der Pendelmasse m und von der Pendelamplitude $\hat{\vartheta}$.**

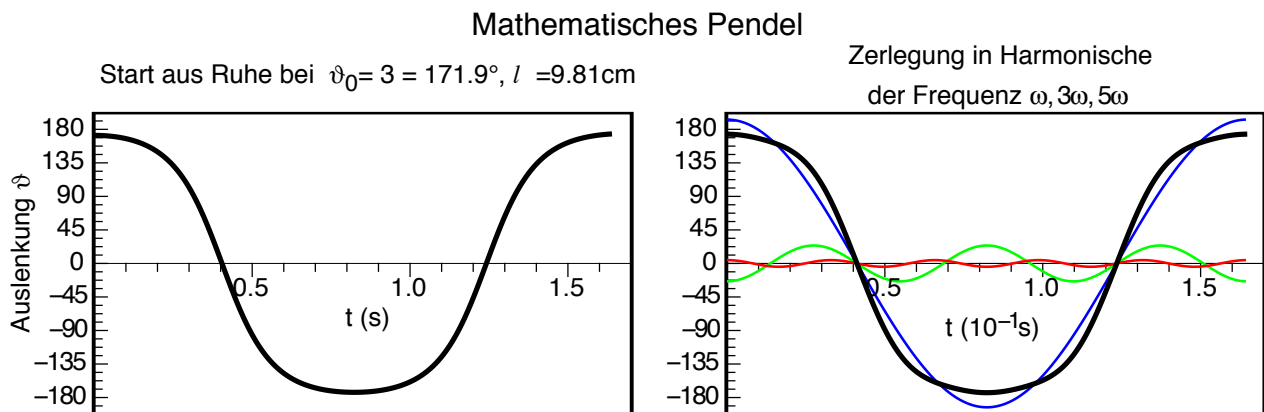
Bei grossen Amplituden wird die "Anharmonizität" der Bewegung beobachtbar:

- Die Schwingungsdauer T ist in Wirklichkeit eine Funktion der Amplitude $T = T(\hat{\vartheta})$
- die Elongation $\vartheta(t)$ ist keine reine Kosinusfunktion.

Verantwortlich dafür ist der "nichtlineare" Zusammenhang zwischen rücktreibendem Moment (Kraft) und Auslenkung (= nichtlineare Kennlinie).



Da aber die Bewegung immer noch periodisch ist, kann die Elongation als Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen mit Frequenzen $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0 \dots$ dargestellt werden (= Fourierreihe). Die untenstehende Figur zeigt $\vartheta(t)$ von einem mathematischen Pendel mit Winkelamplitude $\hat{\vartheta} = 171.2^\circ$. Die zweite Figur zeigt sodann, dass die Bewegung in diesem Falle schon sehr gut durch die Beiträge $a_1 \cdot \cos(\omega_0 t)$, $a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t)$ und $a_5 \cdot \cos(5\omega_0 t)$ beschrieben wird (die fett gezeichnete Kurve ist die Summe der drei Beiträge).



Während $\vartheta(t)$ durch numerische Integration der DGL berechnet werden muss, kann die Schwingungsdauer T für beliebige Amplituden mit Hilfe untenstehender Reihe beliebig genau berechnet werden (ohne Beweis):

$$T(\hat{\vartheta}) = T_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\hat{\vartheta}}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\hat{\vartheta}}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \cdot \sin^6\left(\frac{\hat{\vartheta}}{2}\right) + \dots \right)$$

Dabei bedeutet T_0 die Schwingungsdauer für unendlich kleine Amplitude $\hat{\vartheta}$ ($T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}$). Je nach Winkelamplitude und erforderlicher Genauigkeit müssen bei der Berechnung von T mehr oder weniger Terme mitberücksichtigt werden.

b) Quasiharmonische Schwingungen um beliebigen Gleichgewichtspunkt.

Beim mathematischen Pendel haben wir gesehen, dass in der Näherung $\varphi \ll 1$ eine harmonische Schwingung resultiert. Die dort verwendete Methode der **Linearisierung** ($\sin \varphi \approx \varphi$) soll nun verallgemeinert werden.

In der Mathematik haben Sie gelernt (oder Sie werden es noch lernen), dass eine Funktion in der Nähe eines Stützpunktes durch ein Polynom angenähert werden kann. Je höher die Ordnung des Polynoms desto größer der Bereich, in dem die Funktion durch das Polynom gut angenähert wird (sofern die gegebene Funktion ∞ oft differenzierbar ist). Es gilt allgemein:

$$f(x_0 + x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} \cdot f'(x)|_{x=x_0} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot f''(x)|_{x=x_0} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot f'''(x)|_{x=x_0} \cdot x^3 + \dots$$

wobei die Schreibweise $f'(x)|_{x=x_0}$ bedeutet, dass die Ableitung an der Stelle $x=x_0$ zu berechnen ist.

Beispiel: $f(x) = e^x$:
$$e^{(x_0 + x)} \approx e^{x_0} + e^{x_0} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot e^{x_0} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot e^{x_0} \cdot x^3 + \dots$$

Bricht man diese Reihenentwicklung nach der ersten Ableitung ab, so spricht man vom **Linearisieren** einer Funktion.

Dies verwenden wir nun, um die Frequenz eines modifizierten mathematischen Pendels zu berechnen. Wie unten gezeichnet, sei zusätzlich eine Spiralfeder mit Drehfederkonstante D an der masselosen Pendelstange befestigt. Bei vertikaler Stellung der Stange sei die Feder entspannt.

Das von der Spiralfeder ausgeübte Drehmoment lautet:

$$M_{DF} = D \cdot (\pi - \vartheta)$$

(bei $\vartheta = \pi$ ist das Drehmoment null und M_{DF} ist vortreibend für $\vartheta < \pi$).

Das Aktionsprinzip für Rotationsbewegung schreibt sich damit zu:

$$I_A \cdot \ddot{\vartheta} = -m \cdot g \cdot \sin \vartheta \cdot L + D \cdot (\pi - \vartheta)$$

oder mit $I_A = mL^2$

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{L} \cdot \sin \vartheta + \frac{D}{m \cdot L^2} \cdot \vartheta = \frac{D}{m \cdot L^2} \cdot \pi$$

Die partikuläre Lösung ϑ_0 der DGL finden wir mit dem Ansatz $\ddot{\vartheta} = 0$ aus

$$\frac{g}{L} \cdot \sin \vartheta + \frac{D}{m \cdot L^2} \cdot \vartheta = \frac{D}{m \cdot L^2} \cdot \pi$$

Diese Gleichung muss numerisch gelöst werden; die Lösung ϑ_0 stellt die Gleichgewichtslage unseres Pendels dar.

Wählen wir diese Gleichgewichtslage als neuen Nullpunkt unserer Winkelmessung, d.h. setzen wir $\vartheta = \vartheta_0 + \varphi$ und folglich $\ddot{\vartheta} = \ddot{\varphi}$, so erhalten wir die DGL:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \cdot \sin(\vartheta_0 + \varphi) + \frac{D}{m \cdot L^2} \cdot (\vartheta_0 + \varphi) = \frac{D}{m \cdot L^2} \cdot \pi$$

Jetzt entwickeln wir den in φ nichtlinearen Term

$$\sin(\vartheta_0 + \varphi) = \sin(\vartheta_0) + \frac{1}{1!} \cdot \cos(\vartheta_0) \cdot \varphi + \dots$$

und setzen dies in die DGL ein (konstante Terme noch nach rechts verfrachtet)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \cdot \cos(\vartheta_0) \cdot \varphi + \frac{D}{m \cdot L^2} \cdot \varphi = \frac{D}{m \cdot L^2} \cdot (\pi - \vartheta_0) - \frac{g}{L} \cdot \sin(\vartheta_0)$$

oder

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{L} \cdot \cos(\vartheta_0) + \frac{D}{m \cdot L^2} \right) \cdot \varphi = 0$$

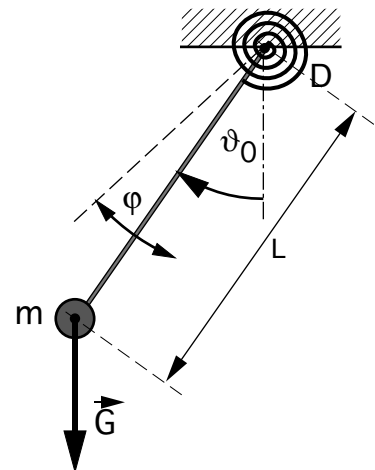
wobei wir verwendet haben, dass ϑ_0 die Gleichgewichtslage bezeichnet. Die Bewegung unseres Pendels ist in erster Näherung harmonisch um die Gleichgewichtslage ϑ_0 mit der Kreisfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \cdot \cos(\vartheta_0) + \frac{D}{m \cdot L^2}$$

masselose Stange +
entspannte Drehfeder



masselose Stange +
Drehfeder +
Punktmasse m



Zusammenfassung/Rezept:

Führt das Aktionsprinzip, die Maschenregel oder andere Gesetze auf eine nichtlineare DGL vom Typus

$$\ddot{x} + f(x) = a$$

so erhält man die harmonische (oder lineare) Näherung in zwei Schritten:

Schritt I): Bestimme die Gleichgewichtslage x_0 , für welche gilt

$$f(x_0) = a$$

Schritt II): Bestimme die Kreisfrequenz aus der Ableitung von f an der Stelle x_0

$$\omega_0^2 = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$

Die Näherungslösung (= Lösung der linearisierten DGL) lautet dann

$$x(t) = x_0 + \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 t - \delta)$$

mit den noch freien Parametern \hat{x} und δ , welche durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Enthält die Ableitung an der Stelle x_0 nicht nur Konstanten sondern auch noch Terme mit \dot{x} etc., so muss überprüft werden, ob diese im aktuellen Falle klein sind und damit vernachlässigt werden können. Sofern dies nicht der Fall ist, muss die DGL im Allgemeinen durch numerische Integration (z.B. Simulink) gelöst werden.

c) Anharmonisches Pendel

Erhält man bei einem nichtlinearen Oszillator in der Linearisierung $\omega_0 = 0$, so spricht man von einem **anharmonischen** Oszillator: In erster Näherung schwingt ein solches System gar nicht. In obigem Beispiel könnten offensichtlich Federkonstante, Pendellänge s und m so gewählt werden, dass $\omega_0 = 0$ resultiert. Ein weiteres, einfaches Beispiel ist ein Puck auf einem Luftkissentisch, befestigt an zwei identischen Federn.

Die rücktreibende Kraft \vec{F}_R ist die Resultierende der beiden Federkräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 .

Bei einer Bewegung des Pucks auf der x -Achse ist sie parallel zur x -Achse. Es gilt

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \quad \text{und} \quad F_{R,x} = -2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot \sin \vartheta.$$

Für $|\vec{F}_1|$ erhalten wir sodann

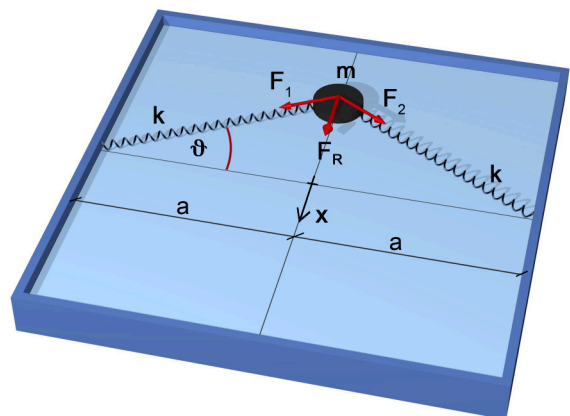
$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = k \left(\frac{a}{\cos \vartheta} - l_0 \right),$$

Dies ergibt in der Linearisierung

$$F_R = -2 \cdot k \cdot (a - l_0) \cdot \vartheta$$

d.h. $F_R = 0$ oder $\omega_0 = 0$ wenn $a = l_0$.

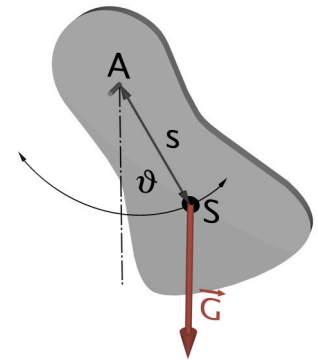
Trotzdem schwingt der Puck hin und her, wenn man ihn auslenkt. Aber: Je kleiner die Auslenkung, desto kleiner die Pendelfrequenz, desto grösser die Schwingungsdauer. Diese **divergiert** für $\hat{x} \rightarrow 0$ im Gegensatz zum quasiharmonischen Fall, wo die Schwingungsdauer gegen einen endlichen Wert **konvergiert**.



d) Das physikalische Pendel

Unter einem physikalischen Pendel versteht man einen beliebigen Körper, welcher unter dem Einfluss der Gewichtskraft schwingt. Wir bemerken:

1. Die Gewichtskraft greift im Schwerpunkt an.
2. Das Massenträgheitsmoment bezüglich einer Achse durch A erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Steiner aus dem "Schwerpunkts-Massenträgheitsmoment".



Das physikalische Pendel wird also charakterisiert durch

- Richtung der Drehachse
- Schwerpunktsabstand der Drehachse $s = \overline{SA}$
- Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse a durch A $I_a = I_S + m s^2 = m (r_I^2 + s^2)$
wobei r_I den **Trägheitsradius** des Körpers bezeichnet: $I_S = m \cdot r_I^2$ (=Definition von r_I)

Hinweis: Der hier eingeführte Begriff des Trägheitsradius wird vor allem von Maschineningenieuren verwendet. Er ist insofern praktisch, als Körper mit gleicher Form den gleichen Trägheitsradius haben, unabhängig von ihrer Dichte (zwei identische Formen aus Holz und aus Stahl haben denselben Trägheitsradius). Ferner skaliert der Trägheitsradius linear mit der Grösse des Körpers. Als Nichtspezialist kann man ihn auch einfach als alternative Möglichkeit zur Angabe des MTM's verstehen. Da das MTM aber auch von der Richtung der Drehachse abhängt, gilt dies auch für den Trägheitsradius.

- Beispiele:
- | | |
|----------------------------------|--|
| Vollzylinder, bez. Zylinderachse | $I_{SP} = \frac{1}{2} \cdot m r^2 \Rightarrow r_I = \dots\dots\dots$ |
| Kugel | $I_{SP} = \frac{2}{5} \cdot m r^2 \Rightarrow r_I = \dots\dots\dots$ |

Wie wir sofort bemerken, führt das Aktionsprinzip für Rotationsbewegung auf eine DGL vom selben Typus wie beim mathematischen Pendel $I_A \ddot{\vartheta} = - m \cdot g \cdot s \cdot \sin \vartheta$ oder:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{m \cdot g \cdot s}{I_A} \cdot \sin \vartheta = \ddot{\vartheta} + \frac{g \cdot s}{r_I^2 + s^2} \cdot \sin \vartheta = 0$$

Wir erhalten also die DGL des physikalischen Pendels, indem wir beim mathematischen Pendel die Pendellänge l durch $I_A/m \cdot s$ ersetzen. Diese Grösse wird deshalb auch **reduzierte Pendellänge** genannt:

$$l_r = I_A / m \cdot s$$

In der Näherung kleiner Auslenkungen erhalten wir eine harmonische Schwingung mit

$$\omega_0^2 = \frac{m \cdot g \cdot s}{I_A}, \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{I_a}{m \cdot g \cdot s}} = 2 \pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

mit $l_r = I_a / m \cdot s = s + r_I^2 / s$

Die exakte Berechnung der Schwingungsdauer T für beliebige Winkelamplituden erfolgt wie beim mathematischen Pendel mit Hilfe der Reihenentwicklung.

Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Schwerpunktsabstand s :

Da $T^2 \sim l_r$ genügt eine Diskussion der Gleichung

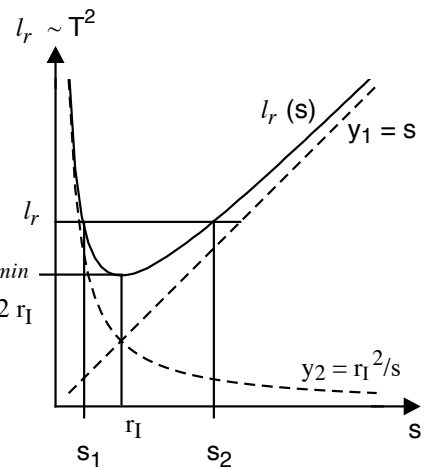
$$l_r = s + \frac{r_1^2}{s} \Rightarrow$$

- Es existiert eine minimale Schwingungsdauer T_{\min} bei einem Abstand Drehachse – Schwerpunkt

$$s = r_1 \text{ und damit } l_{r,\min} = 2 r_1$$

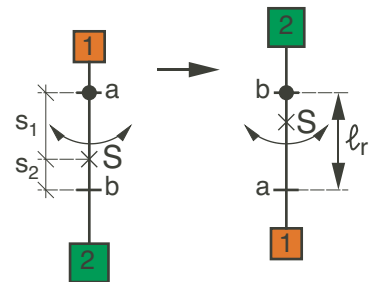
- Für jeden Schwerpunktsabstand $s_1 \neq r_1$ existiert ein zweiter Schwerpunktsabstand s_2 mit derselben Schwingungsdauer T , wobei

$$s_1 + s_2 = l_r$$



Anwendungen:

- Das Ergebnis 2. wird beim Reversionspendel für eine Präzisionsbestimmung der Erdbeschleunigung g ausgenutzt: Ein zweites, verschiebbares Lager (z.B. b) wird auf der Schwerlinie solange verschoben, bis sich für beide Drehpunkte dieselben Schwingungsdauern ergeben. Der Lagerabstand ist dann gerade l_r und dieser kann, im Gegensatz zur Länge eines Fadenpendels, sehr genau gemessen werden. Aus T , l_r und der Korrektur für die quasiharmonische Schwingung kann dann g berechnet werden.
- Bestimmung der Trägheitsmomente von Körpern durch Messung der Schwingungsdauer T für definierte Drehachsen.



Beispiel Schlanker Stab der Länge $l = 1.5\text{m}$:

Aufhängung am Stabende:

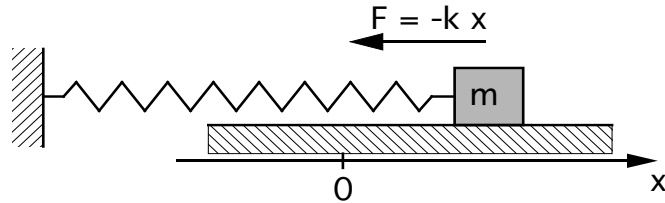
Damit erhalten wir:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = 2.006\text{s}, \quad s_2 = l/6 = 0.25\text{ m}$$

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{2r_1}{g}} = 1.867\text{s} \text{ bei } s = 0.433\text{m}$$

1.2. Die Energie im eindimensionalen ungedämpften Oszillator

Betrachten wir das einfache Beispiel des eindimensionalen, horizontalen Federpendels.



Die kinetische Energie des Pendels mit Masse m berechnen wir zu

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (-\omega_0 \hat{x} \sin(\omega_0 t))^2$$

$$= \frac{m}{2} (\omega_0^2 \hat{x}^2 \sin^2(\omega_0 t)) \quad \text{und mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m} :$$

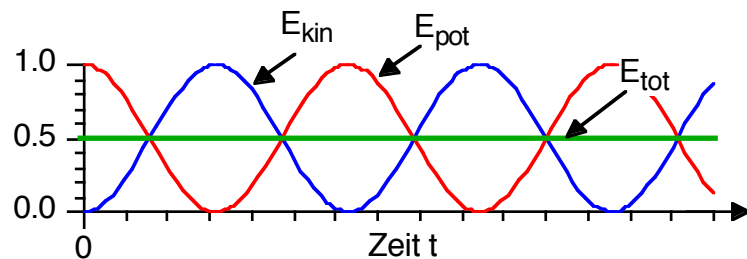
$$E_{\text{kin}} = \frac{k}{2} \hat{x}^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

und die federelastische Energie beträgt

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{Feder}} = \frac{k}{2} x(t)^2 = \frac{k}{2} \hat{x}^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

Wir sehen sofort:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.}$$



1.2.1 Die Energiemethode

Das Aktionsprinzip, welches wir bis anhin verwendeten um die „Bewegungs-DGL“ herzuleiten, kann alternativ auch aus einer Energiebetrachtung gewonnen werden.

Wenn die mechanische Energie eines Systems erhalten ist, d.h. wenn die Summe von potentieller und kinetischer Energie konstant ist, gilt

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konst.} \Rightarrow \frac{d}{dt} (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = 0$$

Wenn z.B. Reibungskräfte wirken, ist die Energie nicht erhalten und wir schreiben

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = P_{\text{Verlust}}$$

wobei P_{Verlust} die am System geleistete Verlustleistung darstellt (z.B. $P_{\text{Verlust}} = \vec{F}_{\text{Reib}} \cdot \vec{v}$). Man beachte, dass die „Verlustleistung“ ein negatives Vorzeichen haben muss, die Energie des Systems nimmt ab! Wie wir sehen werden, kann die Energiemethode auch für nichtmechanische Aufgaben verwendet werden.

a) Das mathematische Pendel

Beim mathematischen Pendel (Masse m , Pendellänge l) handelt es sich um einen schwingenden Massepunkt. Die Bewegung kann auch als reine Translationsbewegung angeschaut werden. Es gilt

$$E_{\text{tot}} = \frac{m}{2} v^2 + mgh = \frac{m}{2} l^2 \dot{\vartheta}^2 + mgl \cdot (1 - \cos(\vartheta))$$

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{tot}}) = \frac{m}{2} (l^2 \cdot 2 \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta}) + mgl \cdot (\dot{\vartheta} \sin(\vartheta)) = 0$$

oder

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin(\vartheta) = 0$$

Wir haben hier gesehen, dass die Aufgabe durch die Anwendung des Energiesatzes wesentlich einfacher wurde.

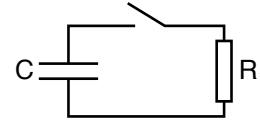
b) Entladen eines Kondensators über einen Widerstand

Es ist Ihnen wohl bekannt, dass die Kondensator-Spannung beim Entladevorgang über einen Widerstand R exponentiell mit der Zeitkonstanten $\tau = R \cdot C$ erfolgt. Hier soll gezeigt werden, dass dieses Resultat auch mit der Energiemethode erhalten werden kann, d.h. dass die Energiemethode auch in anderen Gebieten als der Mechanik oder Schwingungslehre anwendbar ist.

Die Energie im RC-System beträgt
mit der Verlustleistung

$$E = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

$$P_{\text{Verlust}} = - R \cdot I^2 = - \frac{U^2}{R}.$$



Gemäss unserem allgemeinen Rezept
schreiben wir

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C \cdot U^2 \right) = - \frac{U^2}{R}$$

was zur DGL

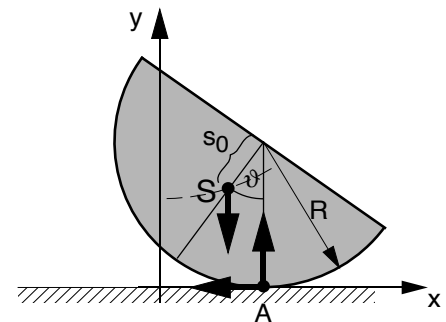
$$C \cdot U \cdot \dot{U} = - \frac{U^2}{R} \quad \text{oder} \quad \dot{U} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot U = 0$$

mit der bekannten Lösung

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-t/RC} \quad \text{führt.}$$

b) "Halbkreiswippe"

Gegeben sei eine "Halbkreis-Scheibe" (Masse m , Radius R), welche nach dem Anstossen eine Schwingung ausführt. Die Schwierigkeit bei dieser Bewegung besteht darin, dass wir keinen festen Drehpunkt haben und dass zusätzlich zur Gewichtskraft noch Haft- und Normalkraft angreifen. Diese beiden Kräfte sind aber nicht direkt gegeben, sondern müssen mit Hilfe eines Gleichungssystems ermittelt werden.



Zur Lösung bieten sich folgende Methoden an:

- AP für Translation des SP und Rotation um den SP ansetzen. Konsequenz durchrechnen. Schlussendlich alles nach dem Winkel ϑ auflösen, Haft- und Normalkraft eliminieren.

- Der Körper macht eine reine Rotationsbewegung um den momentanen Auflagepunkt A. Da dieser aber beschleunigt ist, muss eine Trägheitskraft eingeführt werden. Man beachte auch, dass das MTM in diesem Falle von ϑ abhängt!!!

- Energiemethode:

Die potentielle Energie lässt sich einfach aus der Höhe des SP über dem Tisch berechnen, die kin. Energie hat einen Rotations- und Translationsbeitrag.

Für die Berechnung der Energien benötigen wir die Bahn des Schwerpunkts:

.....

.....

.....

.....

Nun gilt:

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{pot}} + E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}}) = 0$$

Die Energieanteile unseres
Systems betragen:

Die entsprechenden Ausdrücke sind nun als Funktion von ϑ darzustellen und abzuleiten. Dies machen wir am besten mit einem Programm wie Maple und erhalten die DGL

$$[I_{SP} + m(R^2 + s_0^2 - 2 \cdot R \cdot s_0 \cdot \cos(\vartheta))] \cdot \ddot{\vartheta} + m \cdot s_0 \cdot (R \cdot \dot{\vartheta}^2 + g) \sin(\vartheta) = 0$$

oder

$$0 = \ddot{\vartheta} + \frac{m \cdot s_0 \cdot (R \cdot \dot{\vartheta}^2 + g)}{[I_{SP} + m(R^2 + s_0^2 - 2 \cdot R \cdot s_0 \cdot \cos(\vartheta))]} \cdot \sin(\vartheta)$$

$$\approx \ddot{\vartheta} + \frac{8}{9 \cdot \pi - 16} \cdot \frac{g}{R} \vartheta = \ddot{\vartheta} + 0.6518 \cdot \frac{g}{R} \vartheta$$

Die oben angegebene Näherung verwendet

$$\sin(\vartheta) \approx \vartheta, \cos(\vartheta) \approx 1 \text{ und } R \cdot \dot{\vartheta}^2 \ll g$$

Die letzte Näherung überprüft man z.B., indem man die Näherungslösung einsetzt und die Behauptung für kleine Winkel testet:

$$\hat{\vartheta} = \omega \cdot \hat{\vartheta} = \sqrt{0.6518 \cdot \frac{g}{R}} \cdot \hat{\vartheta} \text{ und damit } R \cdot (\hat{\vartheta})^2 = 0.6518 \cdot g \cdot \hat{\vartheta} \ll g$$

was bei kleinen Winkelamplituden $\hat{\vartheta} \leq 10^\circ$ erfüllt ist.

1.3. Komplexe Schreibweise, Zeigerdiagramm

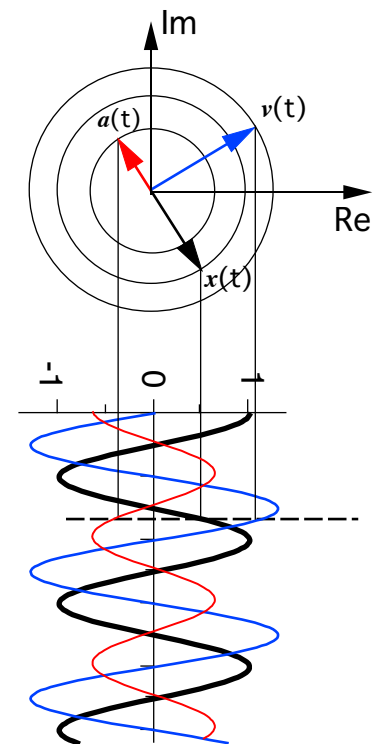
Von der Wechselstromlehre her ist Ihnen die Verwendung von komplexen Größen zur Darstellung sinusförmig variierender Funktionen bekannt. Dort haben Sie auch die Verwendung des Zeigerdiagramms kennengelernt. Bei einer ungedämpften Schwingung schreiben wir

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x} \cdot e^{i(\omega_0 t - \delta)} \\ v(t) &= i \omega_0 \cdot \hat{x} \cdot e^{i(\omega_0 t - \delta)} \\ a(t) &= -\omega_0^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{i(\omega_0 t - \delta)} \end{aligned}$$

und die physikalische Lösung ist der Realteil der komplexen Lösung

$$x(t) = \operatorname{Re}(x(t)) \text{ etc.}$$

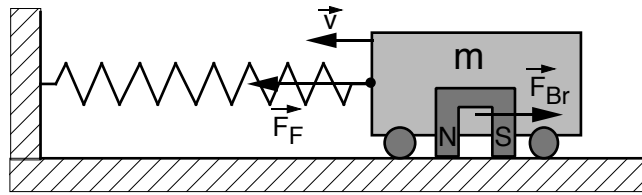
Der Zusammenhang zwischen Zeiger- und Zeitdiagramm ist nebenstehend dargestellt.



1.4 Gedämpfte harmonische Schwingungen

In Wirklichkeit ist eine Bewegung (allgemeiner ein makroskopischer Vorgang) immer mit Reibung verknüpft, d.h. wir müssen in unserer Bewegungsgleichung einen zusätzlichen Dämpfungsterm einführen.

1.4.1. Schwingung mit geschwindigkeitsproportionaler Reibung



Ein Beispiel eines Pendels mit geschwindigkeitsproportionaler Reibung ist oben gezeichnet. Wie Ihnen bekannt ist, produziert eine Wirbelstrombremse oder ein mit Öl gefüllter Stossdämpfer (= viskose Reibung) eine in guter Näherung geschwindigkeitsproportionale Bremskraft

$$\vec{F}_{Br} = -\beta \cdot \vec{v}$$

wobei die spezifischen Daten der Bremse im "Bremskoeffizienten" β stecken. (Das negative Vorzeichen drückt aus, dass die Reibkraft immer antiparallel zum Geschwindigkeitsvektor ist.)

Für ein Federpendel mit Wirbelstrombremse gilt also

$$m \ddot{x} = -k \cdot x - \beta \dot{x}$$

oder

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Diese DGL ist vom Typus

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

wobei $\Gamma = \beta/2m$ und $\omega_0^2 = k/m$. Diese DGL lösen wir mit Hilfe eines Exponentialansatzes

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Setzen wir den Ansatz in die DGL ein, so erhalten wir aus

$$\lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda \cdot t} + \lambda \cdot 2\Gamma \cdot c \cdot e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot c \cdot e^{\lambda t} = 0$$

das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \lambda \cdot 2\Gamma + \omega_0^2 = 0$$

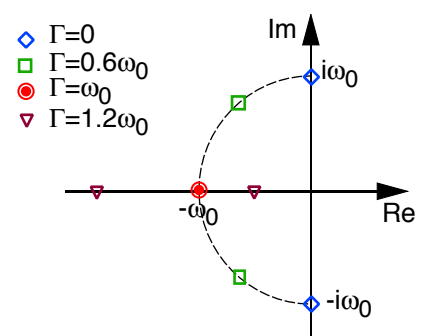
Damit unser Ansatz die DGL erfüllt, muss λ also die obige quadratische Gleichung erfüllen oder

$$\lambda_{1,2} = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}$$

Stellen wir die zwei Lösungen $\lambda_{1,2}$ für fixes ω_0 und variable Abklingkonstante Γ in der komplexen Ebene dar, so erhalten wir das nebenstehend gezeichnete Bild.

Prinzipiell unterscheiden wir drei Fälle:

- $\Gamma < \omega_0$: Die zwei Lösungen $\lambda_{1,2}$ der quadratischen Gleichung sind konjugiert komplex (liegen auf dem Kreis mit Radius ω_0)
- $\Gamma = \omega_0$: Die zwei Lösungen sind reell und fallen zusammen = zweifache Nullstelle
- $\Gamma > \omega_0$: Die beiden Lösungen sind reell und verschieden.



a) unterkritisch gedämpfte Schwingung

Die allgemeine Lösung lautet

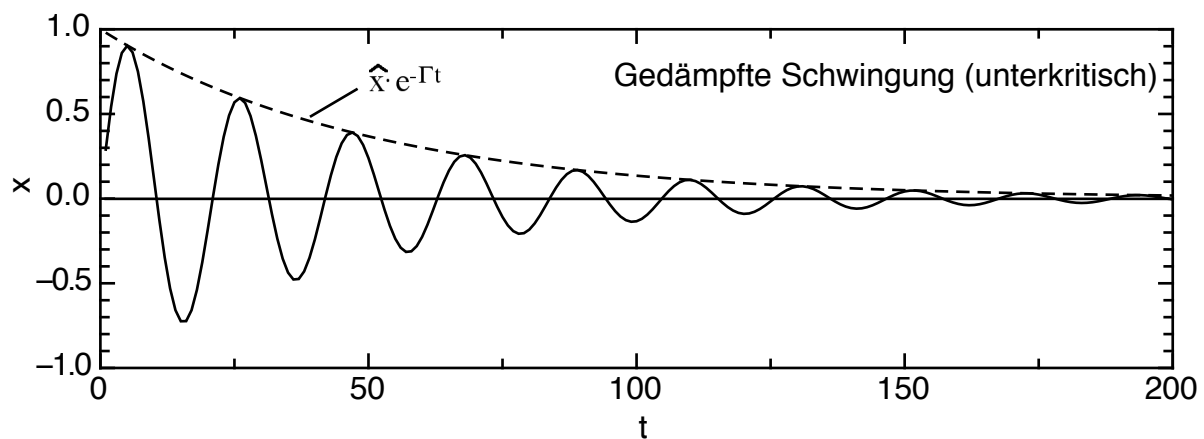
$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Die noch unbestimmten Parameter c_1 und c_2 erhält man aus der Forderung, dass $x(t)$ reell ist und aus den Anfangsbedingungen $x_0 = x(t=0)$ und $v_0 = v(t=0)$. Die entsprechende Rechnung sei dem Mathematikunterricht überlassen. Das Ergebnis lautet:

$$x(t) = \hat{x} \cdot e^{-\Gamma t} \cdot \cos(\omega t - \delta) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} = |\text{Im}(\lambda_{1,2})| \quad \text{und} \quad \hat{x} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \Gamma x_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\cos \delta = \frac{x_0}{\hat{x}}; \quad \text{tg} \delta = \frac{v_0 + \Gamma x_0}{x_0 \cdot \omega}$$

Man beachte: Die **Eigenfrequenz** ω des gedämpften Pendels ist kleiner als die Eigenfrequenz des ungedämpften Pendels ω_0 !!!! (Betrag des Imaginärteils der komplex konjugierten Wurzeln $\lambda_{1,2}$)



b) kritisch gedämpfte Schwingung

Für den Fall, dass die beiden Lösungen $\lambda_{1,2}$ zusammenfallen d.h. $\lambda_{1,2} = -\Gamma$, lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = (c_1 + c_2 \cdot t) e^{-\Gamma t}$$

und mit den Anfangsbedingungen erhält man

$$x(t) = (x_0 + (\Gamma x_0 + v_0) \cdot t) e^{-\Gamma t}$$

Die kritische Dämpfung kann auch als der Grenzfall der unterkritisch gedämpften Schwingung betrachtet werden, bei dem die Eigenfrequenz gerade Null wird.

c) überkritisch gedämpfte Schwingung, "Kriechlösung"

Die Lösung bei überkritischer Dämpfung $\Gamma > \omega_0$ erhalten wir ähnlich wie in a). Sie lautet

$$x(t) = e^{-\Gamma t} \left[x_0 \cdot \cosh(\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t) + \frac{v_0 + \Gamma x_0}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} \cdot \sinh(\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t) \right]$$

Das Auftreten von cosh und sinh in der Lösungsformel kann einfach aus dem Fall der unterkritisch gedämpften Schwingung abgeleitet werden. Wie Ihnen bekannt ist, kann ein Kosinus mit Phasenverschiebung δ auch als Summe von Sinus und Kosinus geschrieben werden

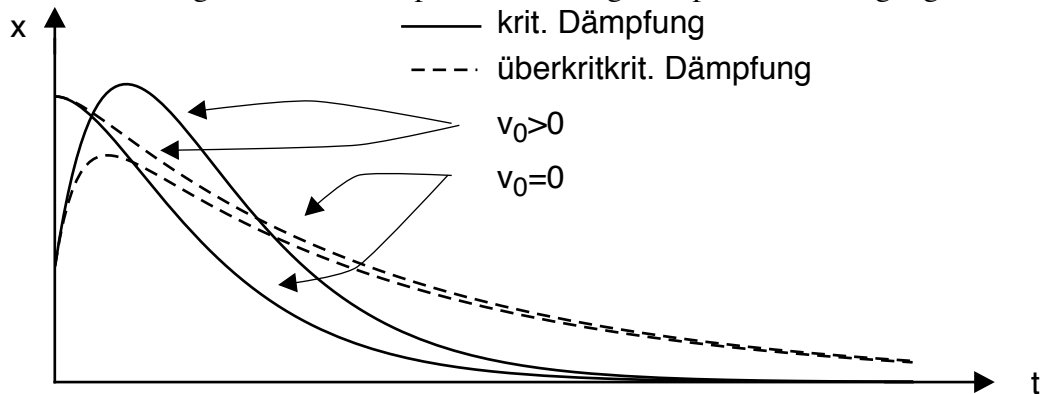
$$\cos(\omega t - \delta) = a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \sin(\omega t)$$

Verwenden wir für das überkritisch gedämpfte Pendel die Lösungsformel der unterkritisch gedämpften Schwingung, so erhalten wir formal eine Schwingung mit imaginärer Frequenz:

$$x(t) = e^{-\Gamma t} \cdot (\hat{x} \cdot a_1 \cdot \cos(\omega t) + \hat{x} \cdot a_2 \cdot \sin(\omega t)) \quad \text{mit} \quad \omega = i \cdot \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}$$

Ein Kosinus resp. ein Sinus mit imaginärer Frequenz ist aber im Wesentlichen ein cosh resp. ein sinh. Damit ist die Lösungsformel für überkritische Dämpfung im Wesentlichen identisch zur Formel bei unterkritischer Dämpfung. Die Vorfaktoren von cosh und sinh erhält man sodann "standardmässig" aus den Anfangsbedingungen.

Graphische Darstellung von kritisch resp. überkritisch gedämpften "Schwingungen":



1.4.2 Schwingung mit trockener Reibung

Bei trockener Reibung (z.B. Gleitreibung) ist der Betrag der Reibkraft konstant und antiparallel zur Geschwindigkeit

$$F_R = -\mu_{gl} \cdot N \cdot \text{sign}(\dot{x})$$

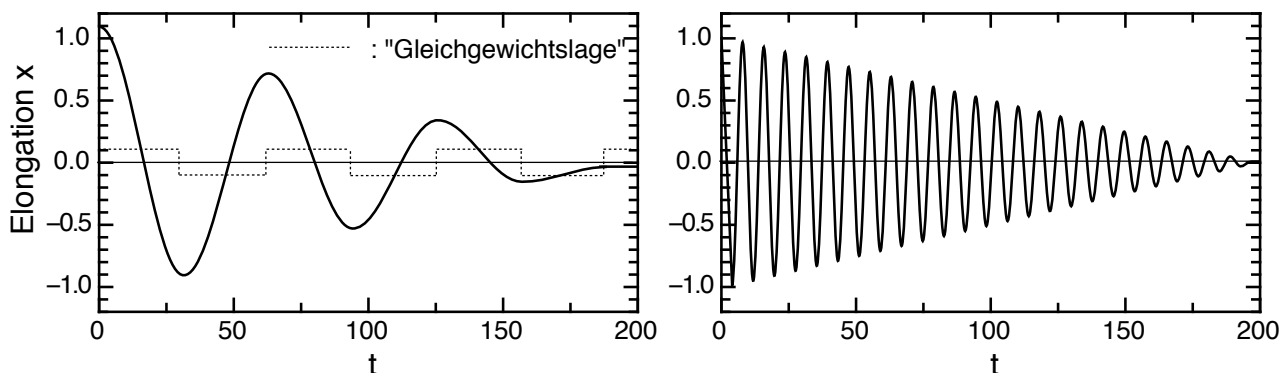
Das Aktionsprinzip

$$m\ddot{x} = -k \cdot x - \mu_{gl} \cdot N \cdot \text{sign}(\dot{x})$$

führt auf die DGL

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = -\frac{\mu_{gl} \cdot N}{m} \cdot \text{sign}(\dot{x})$$

Diese DGL ist für je eine Halbperiode identisch zur inhomogenen DGL eines ungedämpften harmonischen Oszillators der Frequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Im Unterschied zum ungedämpften Oszillator springt aber die Gleichgewichtslage an den Umkehrpunkten von $+\mu_{gl} \cdot N/k$ auf $-\mu_{gl} \cdot N/k$ und zurück. Die DGL muss also für jede Halbperiode separat gelöst werden und der Endzustand der einen Halbperiode wird zum Anfangszustand der nächsten Halbperiode. Dies hat zur Folge, dass die Schwingungsamplitude von Halbperiode zu Halbperiode um $2\mu_{gl} \cdot N/k$ abnimmt (siehe untenstehende Graphen sowie Experiment). Im ersten Graph ist die periodische Verschiebung der Gleichgewichtslage gut sichtbar, im zweiten Graphen kommt die resultierende, lineare Amplitudenabnahme deutlich zum Vorschein.



Die Amplitudenabnahme pro Periode beträgt damit

$$\Delta \hat{x} = 4 \mu_{gl} \cdot N / k$$

Zu erwähnen ist noch, dass das Pendel stillsteht, wenn der Umkehrpunkt in den Bereich

$$-\mu_H \cdot N/k < x < +\mu_H \cdot N/k \quad (\mu_H: \text{Haftkoeffizient})$$

zu liegen kommt und endet im allgemeinen nicht bei $x=0$.

1.4.3 Schwingung mit v^2 -proportionaler Reibung etc.

Für v^2 -proportionale Reibung (z.B. turbulente Strömung) sowie bei irgendwelchen anderen Reibgesetzen existiert im allgemeinen keine analytische Lösung – die resultierende Bewegung muss mittels numerischer Integration berechnet werden.

1.4.4 Herleitung der DGL mit Hilfe der Energiemethode

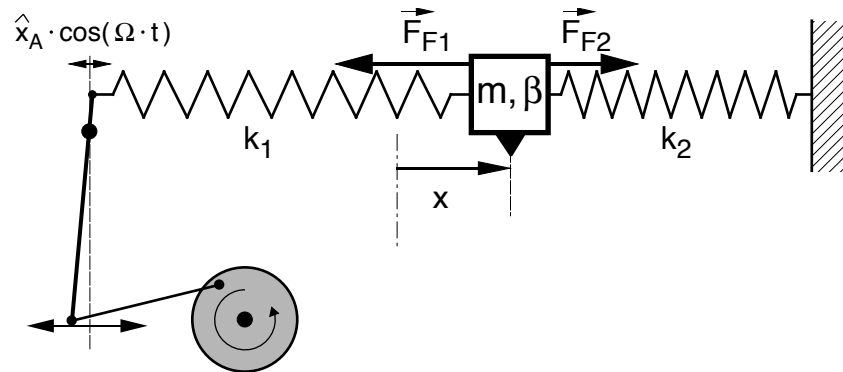
Auch die DGL der gedämpften Schwingung kann mit Hilfe der Energiemethode erhalten werden. Wir müssen nun aber beachten, dass die Gesamtenergie des Systems nicht konstant ist – die Reibkraft leistet negative Arbeit am System (sie entzieht dem System Energie). Die Verlustleistung berechnet sich nach $P_{\text{Verlust}} = \vec{F}_{\text{reib}} \cdot \vec{v}$ und da Reibkraft und Geschwindigkeit antiparallel sind zueinander, erhalten wir z.B. für ein Pendel mit Wirbelstrombremse oder Stossdämpfer (= viskose Reibung)

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = \vec{F}_{\text{reib}} \cdot \vec{v} = -\beta \dot{x}^2$$

Das weitere Vorgehen ist identisch zur Fall der ungedämpften Schwingung.

1.5 Erzwungene Schwingung (Schwingung mit kosinusförmiger Anregung)

Als Beispiel diskutieren wir das untenstehend gezeichnete Federpendel auf der Luftkissenfahrbahn.



Die Anregung erfolgt über ein Gestänge durch Verschiebung des Befestigungspunktes der einen Feder um $x_A(t)$. Am Pendelkörper sind Magneten befestigt, welche eine geschwindigkeitsproportionale Reibung bewirken:

$$F_{\text{Br}} = -\beta \cdot \dot{x}$$

Bezeichnen x_{01} und x_{02} die Federverlängerungen in der Gleichgewichtslage ($x=0$, $x_A = 0$), so berechnen sich die Federkräfte zu

$$\begin{aligned} F_{F1} &= -k_1 \cdot (x_{01} + x(t) - x_A(t)) \\ F_{F2} &= k_2 \cdot (x_{02} - x(t)) \end{aligned}$$

und das AP_{trans} lautet folglich:

$$m \ddot{x} = -k_1 \cdot (x_{01} + x(t) - x_A(t)) + k_2 \cdot (x_{02} - x(t)) - \beta \cdot \dot{x}$$

Da $k_1 \cdot x_{01} = k_2 \cdot x_{02}$ (Gleichgewichtslage), erhalten wir

$$m \ddot{x} + k_1 \cdot x + k_2 \cdot x + \beta \cdot \dot{x} = k_1 \cdot x_A(t) \quad \text{oder}$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m} \cdot x = \frac{k_1 \cdot \hat{x}_A}{m} \cdot \cos(\Omega t) = \frac{\hat{F}_A}{m} \cdot \cos(\Omega t)$$

wobei $\hat{F}_A = k_1 \cdot \hat{x}_A$ die Anregungskraftamplitude bezeichnet. In **Standardform** lautet diese DGL

$$I) \quad \ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\Omega t)$$

Dies ist eine lineare, **inhomogene** DGL zweiter Ordnung, deren homogene Lösung wir schon kennen. Zu bestimmen ist also nur noch die partikuläre Lösung, welche sich im Komplexen einfacher berechnen lässt.

Wir schreiben deshalb ($x = \text{Re}(z)$):

$$\text{II) } \ddot{z} + 2\Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = A e^{i\Omega t}$$

Da $I) = \text{Re}(II)$, gilt auch für die Lösung $x_{\text{part}}(t) = \text{Re}(z_{\text{part}}(t))$. Doch nun zur „Konstruktion“ der partikulären Lösung. Als Ansatz wählen wir die Störfunktion mit komplexer Amplitude \hat{z}_p

$$z_{\text{part}}(t) = \hat{z}_p \cdot e^{i\Omega t}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die DGL II) ein, so erhalten wir:

$$z(t) = \hat{z}_p \cdot e^{i\Omega t} = \frac{A}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\Omega\Gamma)} \cdot e^{i\Omega t}$$

Unsere gesuchte, partikuläre Lösung ist der Realteil dieser komplexen Lösung, d.h.

$$x_p(t) = \frac{1}{2} \cdot (z_p(t) + z_p^*(t))$$

was untenstehendes Resultat liefert

$$x_p(t) = \hat{x}_p \cdot \cos(\Omega t - \delta) \quad \text{mit}$$

$$\hat{x}_p(\Omega) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\Gamma^2}} \quad \text{und} \quad \tan \delta_p = \frac{2\Omega\Gamma}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Für unser Beispiel gilt:

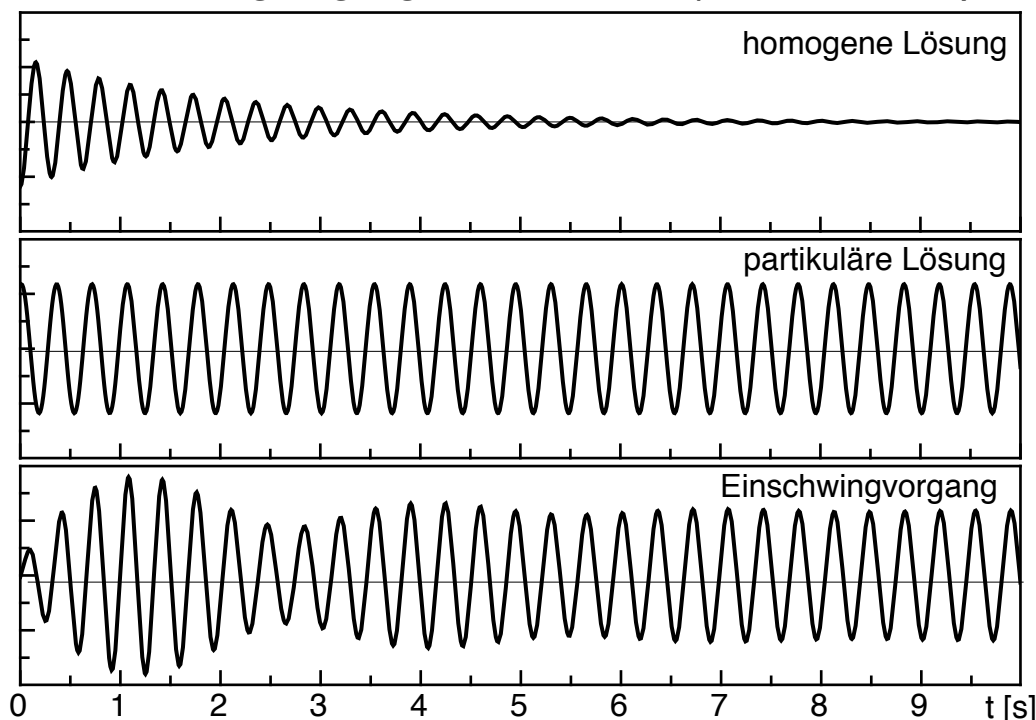
$$A = \frac{\hat{F}_A}{m} = \frac{k_1 \cdot \hat{x}_A}{m}$$

Wie schon erwähnt, ist die allgemeine Lösung eine Superposition von homogener und partikulärer Lösung:

$$x_{\text{allg.}}(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t) = \hat{x}_h \cdot e^{-\Gamma t} \cdot \cos(\omega t - \delta_h) + \hat{x}_p(\Omega) \cdot \cos(\Omega t - \delta_p)$$

Die noch unbestimmten Größen \hat{x}_h und δ_h der homogenen Lösung sind wie üblich durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Da die homogene Lösung exponentiell gedämpft ist, beobachtet man nach genügend langer Zeit ($t \geq 3 \cdot 1/\Gamma$) nur noch die partikuläre Lösung $x_{\text{part}}(t)$. Bei sehr schwacher Dämpfung zeigt sich also der eingeschwungene Zustand erst nach sehr langer Zeit. Ferner gibt jede Erschütterung wieder Anlass zu einer exponentiell abklingenden Eigenschwingung, was die Beobachtung des eingeschwungenen Zustandes ev. verunmöglicht.

Einschwingvorgang eines Pendels ($x(t=0) = v(t=0) = 0$):



Daten:

$$\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$\Gamma = 0.5 \text{ s}^{-1}$$

$$A = 20 \text{ N/kg}$$

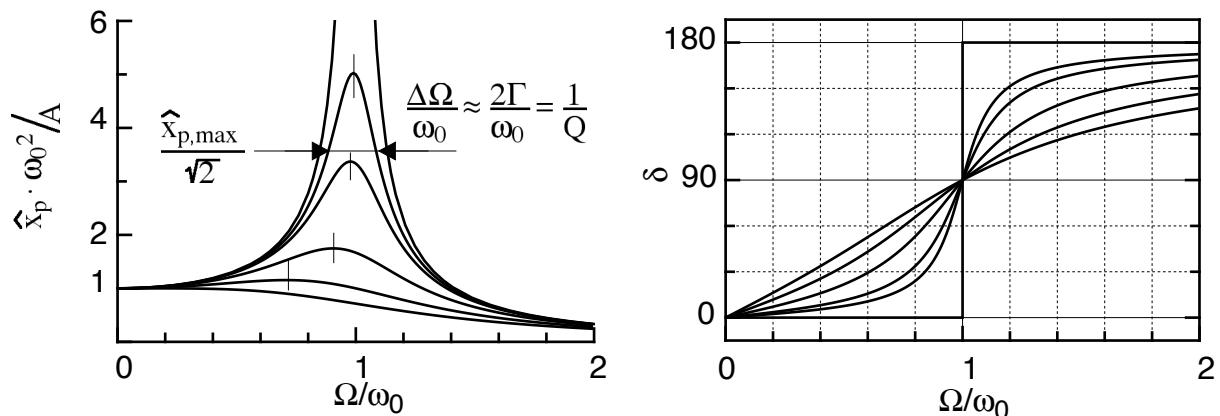
$$\Omega = 17.8 \text{ s}^{-1}$$

1.5.1 Frequenzgang von Pendelamplitude $\hat{x}_p(\Omega)$ und Phase δ_{part}

Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung sind in der folgenden Grafik dargestellt.

Amplitude und Phase bei erzwungener Schwingung

($\Gamma = 0, 0.1\omega_0, 0.15\omega_0, 0.3\omega_0, 0.5\omega_0, 0.7\omega_0$)



Wie man aus dem ersten Graphen ersieht, liegt die Resonanzfrequenz (=Frequenz, bei der die maximale Schwingungsamplitude resultiert) bei nichtverschwindender Dämpfung tiefer als die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Pendels. Wie Sie leicht verifizieren, sind beim mechanischen Pendel also drei Frequenzen zu unterscheiden:

Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators:

$$\omega_0$$

Eigenfrequenz des gedämpften Oszillators

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$$

Resonanzfrequenz:

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}$$

und damit

$$\Omega_{\text{res}} < \omega < \omega_0$$

Anstelle der Abklingkonstanten Γ wird oft die **Güte Q** des Oszillators angegeben. Sie ist definiert als Verhältnis zwischen Resonanz- und "Anregungsamplitude" oder genauer

$$Q = \frac{\hat{x}_p(\Omega_{\text{res}})}{\hat{x}_p(\Omega = 0)}$$

Ein Oszillator mit einem hohen Q ergibt also eine grosse Resonanzüberhöhung (die Kondensator-Spannungsamplitude eines LC-Oszillators mit $Q=20$ ist 20x grösser als die anregende Spannungsamplitude). Die Güte des Oszillators ist auch in direkter Weise ersichtlich aus der Breite der Resonanzkurve. Es gilt

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\Gamma}{\omega_0} \approx \frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \text{rel. Breite bei } \hat{x}_{p,\text{max}}/\sqrt{2}$$

Eine interessante Interpretation ergibt sich, wenn wir die Pendelbewegung als Summe von Kosinus- und Sinusfunktion anstatt als Kosinusfunktion mit Phasenverschiebung schreiben:

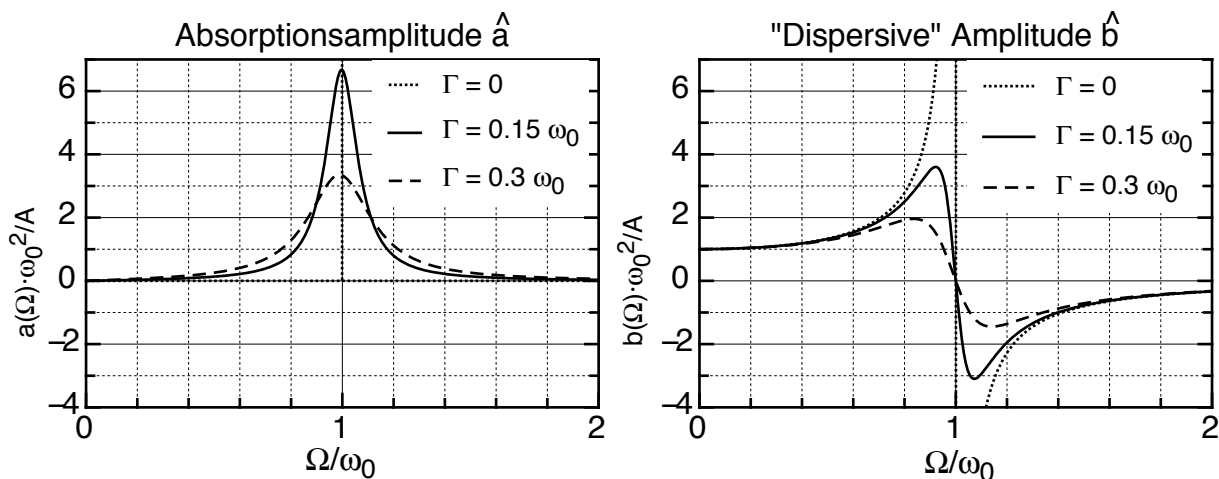
$$x_p(t) = \hat{a}(\Omega) \cdot \sin(\Omega t) + \hat{b}(\Omega) \cdot \cos(\Omega t) = \hat{x}_p \cdot \cos(\Omega t - \delta_p)$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Schreibweisen lautet

$$\hat{x}_p^2 = \hat{a}^2 + \hat{b}^2 \quad \text{und} \quad \text{tg}(\delta_p) = -\hat{a}/\hat{b}$$

Die Formeln resp. Graphen der Amplituden \hat{a} (Absorptionsamplitude) und \hat{b} (dispersive Amplitude) erhalten wir zu

$$\hat{a}(\Omega) = A \cdot \frac{2\Gamma \cdot \Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Gamma^2 \Omega^2} \quad \text{und} \quad \hat{b}(\Omega) = A \cdot \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Gamma^2 \Omega^2}$$



Grund für die Bezeichnungen "**Absorptionsamplitude**" und "**dispersive Amplitude**": Die Leistung ($P=F \cdot v$), welche der Anregungsmechanismus unserem Pendel zuführt, ist

$$\begin{aligned} P(t) &= F_A \cdot \dot{x} = \hat{F}_A \cdot \cos(\Omega t) \cdot (\hat{a} \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t) - \hat{b} \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t)) \\ &= \hat{F}_A \cdot \Omega \cdot (\hat{a} \cdot \cos^2(\Omega t) - \hat{b} \cdot \sin(\Omega t) \cdot \cos(\Omega t)) \end{aligned}$$

Wir beachten, dass der zweite Term in der Klammer im zeitlichen Mittel Null ergibt: In der einen Halbperiode nimmt das Pendel wegen diesem Term Energie auf, welche es in der anderen Halbperiode wieder an den Anregungsmechanismus abgibt (= Blindleistung). Aus den entsprechenden Formeln wie auch aus den entsprechenden Kurven ersehen wir sodann, dass $\hat{b}(\Omega=\omega_0) = 0$ unabhängig von den anderen Parametern. Dies bedeutet, dass die "Blindleistung" bei Anregung mit der Eigenfrequenz des ungedämpften Pendels Null ist.

Der erste Term in der Momentanleistung $P(t)$ ist hingegen immer positiv – er ist verantwortlich für die im zeitlichen Mittel beobachtete Absorption

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \cdot \hat{F}_A \cdot \hat{a}(\Omega) \cdot \Omega$$

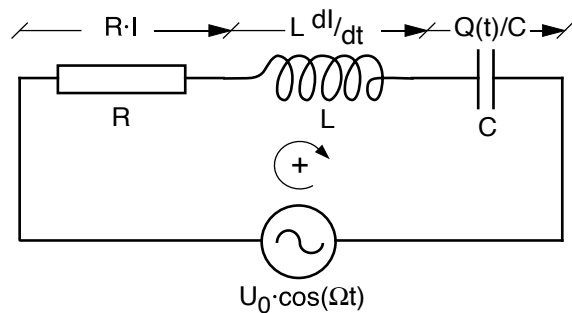
Ergänzend sei noch erwähnt, dass die dispersive Amplitude z.B. in der Optik den Brechungsindex transparenter Materialien bestimmt: Die äussersten Elektronen der Glasatome stellen Oszillatoren mit Resonanzfrequenzen im UV dar. Obwohl die Absorptionsamplitude im Sichtbaren schon sehr klein ist, haben wir noch eine nicht vernachlässigbare, dispersive Amplitude \hat{b} . Die Aufnahme und spätere Wiederabgabe von elektromagnetischer Energie durch die oszillierenden Elektronen führt nun zu einer Verlangsamung des Energietransportes und damit zu einer Reduktion der Lichtgeschwindigkeit. Dieser Effekt ist umso grösser, je stärker die Elektronen mitschwingen d.h. je grösser der Betrag der dispersiven Amplitude \hat{b} . Damit verstehen wir, weshalb der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge sinkt und weshalb Gläser mit hohem Brechungsindex im Blauen absorbieren.

1.5.2 Der Serie-LCR-Schwingkreis

Schaltet man eine Induktivität L , eine Kapazität C und einen Widerstand R in Serie so erhält man einen gedämpften elektrischen Schwingkreis. Zusätzlich sei eine externe Spannungsquelle

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\Omega t)$$

angeschlossen.



a) Spannungsresonanz (Resonanzkurve der Kondensatorspannung)

Mit Hilfe der Maschenregel erhalten wir

$$R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = U_0 \cos(\Omega t)$$

Diese DGL können wir in eine DGL für die Kondensatorspannung $U_C = Q(t)/C$ umschreiben, indem wir $I = C \cdot \dot{U}_C$ einsetzen

$$R \cdot C \cdot \dot{U}_C + L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + U_C = U_0 \cos(\Omega t)$$

und anschliessend noch durch $L \cdot C$ dividieren

$$\ddot{U}_C + \frac{R}{L} \dot{U}_C + \frac{1}{L \cdot C} U_C = \frac{U_0}{L \cdot C} \cos(\Omega t)$$

Diese DGL ist identisch zur DGL des Federpendels und folglich können alle Resultate übernommen werden. Es gelten die Entsprechungen

$$L \leftrightarrow m, \quad 1/C \leftrightarrow k, \quad R \leftrightarrow \beta \quad U_0 \leftrightarrow \hat{x}_A$$

b) Stromresonanz

Ein etwas verschiedenes Resultat erhält man, wenn man nach der Stromstärke I auflöst. Durch Differenzieren der Maschenregel erhalten wir die DGL für die Stromstärke in unserem Kreis

$$L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + \frac{1}{C} I = -\Omega \cdot U_0 \sin(\Omega t)$$

oder

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{1}{LC} I = -\frac{\Omega}{L} U_0 \sin(\Omega t) = \frac{\Omega}{L} U_0 \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Die homogene DGL ist immer noch identisch zur DGL des gedämpften, mechanischen Pendels und folglich gilt

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad \Gamma = \frac{R}{2L}$$

Die Störfunktion weist aber zwei Unterschiede auf

- Die Anregungsamplitude ist proportional zur Anregungsfrequenz Ω
- Die Anregung ist um $-\pi/2$ phasenverschoben (im Vergleich zum mech. Pendel)

Dies hat zur Folge, dass die Stromresonanz genau bei $\Omega = \omega_0$ auftritt und dass die Phasenverschiebung δ_{part} Werte zwischen -90° und $+90^\circ$ annimmt was in den folgenden Graphen leicht ersichtlich ist.

Wie Sie sich leicht überzeugen, gelten die folgenden Formeln

$$I(t) = I_0(\Omega) \cdot \cos(\Omega t - \delta_{\text{part}})$$

mit $I_0(\Omega) = \frac{\Omega U_0}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{R\Omega}{L}\right)^2}}$

und $\text{tg}(\delta_{\text{part}}) = \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{\Omega R/L}$

Resonanzamplitude:

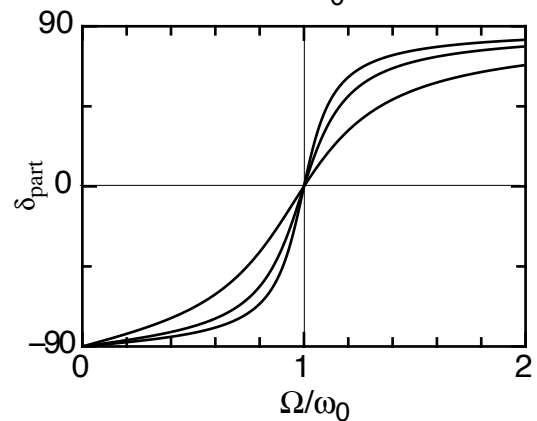
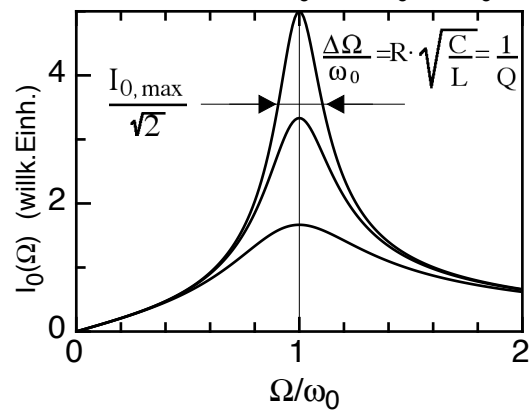
$$I_{0,\text{res}} = \frac{U_0}{R}, \quad \delta_{\text{res}} = 0$$

Relative Breite $\Delta\Omega/\omega_0$ der Resonanzkurve bei $I_0(\Omega) = I_{0,\text{res}}/\sqrt{2}$:

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{2\Gamma}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

LCR-Oszillator

$$\Gamma = 2R/L = 0.1\omega_0, 0.15\omega_0, 0.3\omega_0$$



An die Stelle des Wechselspiels zwischen kinetischer Energie und Feder- resp. Gravitationspotentieller Energie bei mechanischen Pendeln tritt beim elektrischen Schwingkreis das Wechselspiel zwischen elektrischer und magnetischer Feldenergie (Energieaustausch zwischen Spule und Kondensator).

1.6 Überlagerung von Schwingungen

Im allgemeinen ist die erregende Kraft bei einer erzwungenen Schwingung nicht rein kosinusförmig. Wir wollen uns im folgenden auf den Fall beschränken, dass die Anregung eine Summe von zwei Termen verschiedener Frequenzen Ω_1 und Ω_2 ist:

Die Differentialgleichung für das Pendel lautet dann

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A_1 \cos(\Omega_1 t) + A_2 \cos(\Omega_2 t - \delta)$$

und die partikuläre Lösung dieser DGL ist die Summe

$$x_{\text{part}}(t) = x_{1,\text{part}}(t) + x_{2,\text{part}}(t)$$

d.h. die **Überlagerung der Einzelschwingungen** (= **Superpositionsprinzip**). Dies gilt, sofern die Federn nicht über den linearen Bereich hinaus gedehnt werden, d.h. solange die zugehörige DGL linear ist.

1.6.1. Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Raumrichtung.

Die allgemeine Überlagerung zweier Schwingungen kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x}_1 \cos(\Omega_1 t) + \hat{x}_2 \cos(\Omega_2 t - \delta) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) (\cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t - \delta)) + \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) (\cos(\Omega_1 t) - \cos(\Omega_2 t - \delta)) \\ &= (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \cdot \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)}{2} t - \frac{\delta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)}{2} t + \frac{\delta}{2}\right) \\ &\quad - (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \cdot \sin\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)}{2} t - \frac{\delta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)}{2} t + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

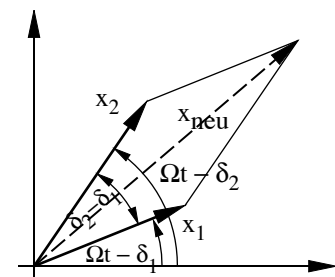
Daraus erhalten wir die Spezialfälle:

a) Beide Schwingungen haben gleiche Frequenz

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \hat{x}_1 \cos(\Omega t - \delta_1) \\ x_2(t) &= \hat{x}_2 \cos(\Omega t - \delta_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_{\text{neu}}(t) &= x_1 + x_2 = \hat{x}_{\text{neu}} \cos(\Omega t - \delta_{\text{neu}}) \\ \text{mit } \hat{x}_{\text{neu}} &= \sqrt{\hat{x}_1^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cdot \cos(\delta_1 - \delta_2) + \hat{x}_2^2} \end{aligned}$$

Das obige Resultat ersieht man einfach aus dem Zeigerdiagramm:

Die zwei Zeiger x_1 und x_2 rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit Ω und folglich auch die Summe $x_{\text{neu}} = x_1 + x_2$ ihrer Zeiger. Die Überlagerung ist also wieder eine harmonische Schwingung mit neuer Amplitude \hat{x}_{neu} und neuer Phase δ_{neu} .



Die Amplitude \hat{x}_{neu} wird

I) **maximal**, wenn die Phasendifferenz $\Delta = \delta_2 - \delta_1$ Null oder ein geradzahliges Vielfaches von π ist:

(Bei Wellen nennt man dies konstruktive Interferenz)

$$\begin{aligned} \Delta &= n \cdot \pi \quad \text{mit } n = \dots -2, 0, 2, \dots \\ \Rightarrow \hat{x}_{\text{neu}} &= \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \end{aligned}$$

II) **minimal**, wenn die Phasendifferenz ein ungeradzahliges Vielfaches von π ist:

$$\begin{aligned} \Delta &= n \cdot \pi \quad \text{mit } n = \dots -3, -1, 1, 3, \dots \\ \Rightarrow \hat{x}_{\text{neu}} &= |\hat{x}_1 - \hat{x}_2| \end{aligned}$$

Im Falle II) erhalten wir **Auslöschung** der Schwingung bei

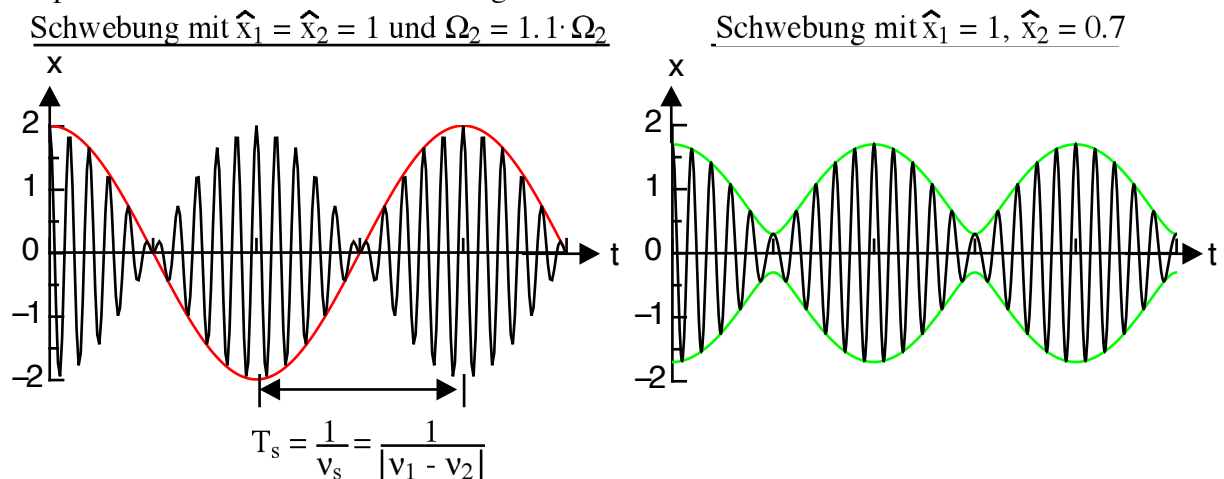
$$\hat{x}_{\text{neu}} = 0 \quad \text{wenn } \hat{x}_1 = \hat{x}_2.$$

b) Die zwei Schwingungen haben gleiche Amplitude

Mit Hilfe der Additionstheoreme berechnet man:

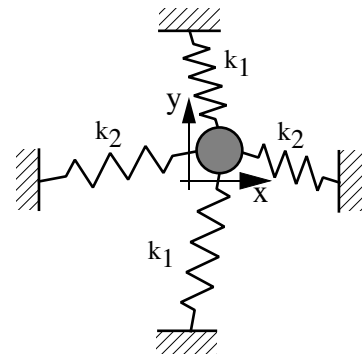
$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \hat{x} \cos(\Omega_1 t) \\ x_2(t) &= \hat{x} \cos(\Omega_2 t) \end{aligned} \right\} x_{\text{neu}}(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2\hat{x} \cos\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} t\right)$$

Unterscheiden sich die Frequenzen der zwei Schwingungen nur wenig ($|\Omega_2 - \Omega_1| \ll \Omega_1, \Omega_2$), so kann man die resultierende Bewegung als amplitudenmodulierte Schwingung der Frequenz $(\Omega_1 + \Omega_2)/2$ interpretieren = **Schwebung**. Bei einer akustischen Schwebung hört man ein An- und Abschwellen des Tones. Wie die untenstehende Zeichnung zeigt, erhält man bei ungleichen Amplituden eine "unreine" Schwebung.



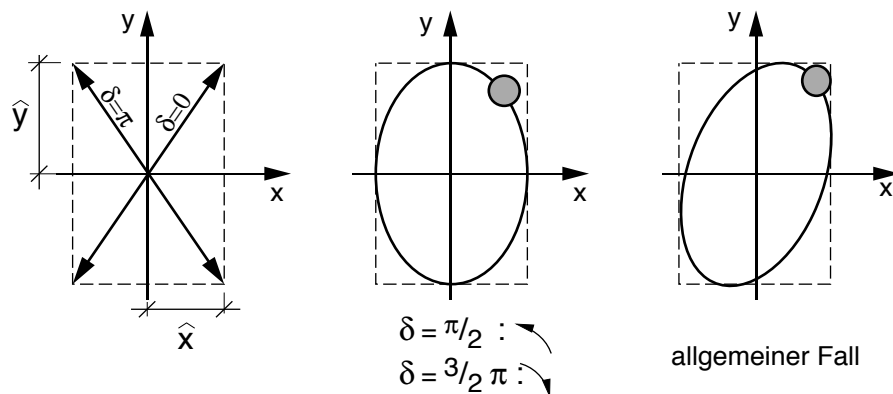
1.6.2 Überlagerung harm. Schwingungen mit senkrecht zueinander stehenden Auslenkungen:

Bei einem 2-dimensionalen Pendel führt die Überlagerung der Schwingungen in beiden Raumrichtungen im allgemeinen zu komplizierten Bewegungsmustern. Bei ganzzahligen Frequenzverhältnissen entstehen sogenannte Lissajous-Figuren.



a) Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz.

Die Überlagerung ergibt im allg. eine elliptische Bahn, deren Orientierung und Umlaufsinn von der Phasendifferenz δ der beiden Schwingungen abhängt ($x(t) = \hat{x} \cos(\omega t)$, $y(t) = \hat{y} \cos(\omega t - \delta)$)



Wie in der Figur dargestellt, ergeben sich zwei Spezialfälle:

I) $\delta=0$ oder π : Lineare Bewegung oder linear polarisierte Schwingung

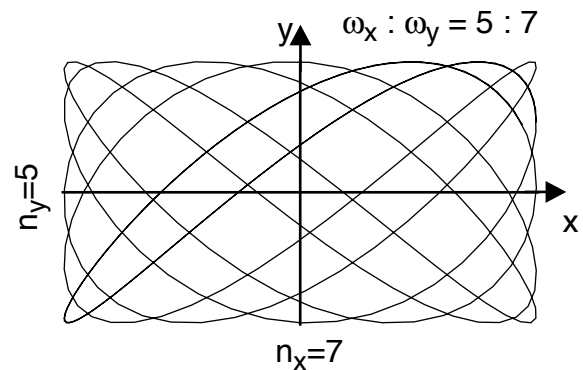
II) $\delta=\pi/2, 3/2\pi$: Ellipsenförmige Bewegung (= elliptisch polarisiert) mit den Hauptachsen parallel zur x- und y-Achse.

Bei gleichen Amplituden $\hat{x} = \hat{y}$ resultiert ein Kreis (= zirkular polarisiert)

b) Überlagerung bei ungleichen Frequenzen

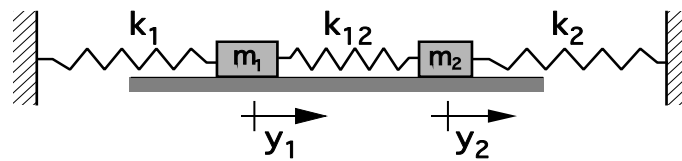
Bei rationalen Frequenzverhältnissen erhält man ein periodisch wiederkehrendes Bewegungsmuster (siehe Experiment) = Lissajous-Figuren. Das Frequenzverhältnis der zwei Schwingungen entspricht dem Verhältnis der Anzahl Maxima auf der waagerechten (n_x) und auf der senkrechten Achse (n_y):

$$\omega_x : \omega_y = n_y : n_x$$



2. Gekoppelte Schwingungen

2.1. Gekoppelte Schwingung zweier mechanischer Pendel



Die Positionen der zwei Massen werden durch 2 Koordinaten y_1 und y_2 beschrieben, deren Nullpunkte die Gleichgewichtslagen bezeichnen.

Lenken wir die Massen aus den Nullpunktslagen aus, so wirken die Kräfte:

Auf m_1 : $F_{\text{tot},1} = -k_1 y_1 + k_{12} (y_2 - y_1)$

Auf m_2 : $F_{\text{tot},2} = -k_2 y_2 + k_{12} (y_1 - y_2)$

d.h. die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + k_{12} (y_1 - y_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 - k_{12} (y_1 - y_2) &= 0 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \ddot{y}_1 + \frac{k_1}{m_1} y_1 + \frac{k_{12}}{m_1} (y_1 - y_2) &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \frac{k_2}{m_2} y_2 - \frac{k_{12}}{m_2} (y_1 - y_2) &= 0 \end{aligned}$$

= Differentialgleichungssystem.

Bei gleichen Pendelmassen ($m_1=m_2$) und gleichen Federkonstanten $k_1=k_2$ kann das Gleichungssystem durch Addition und Subtraktion der zwei Gleichungen in ein System ungekoppelter DGL's umgeschrieben werden

$$(y_1 + y_2)'' + \frac{k}{m} (y_1 + y_2) = 0$$

$$(y_1 - y_2)'' + \frac{k + 2 k_{12}}{m} (y_1 - y_2) = 0$$

Durch die Variablentransformation

$$\mathbf{z}_1 = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \quad \text{und} \quad \mathbf{z}_2 = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$$

erhalten wir schliesslich ein System von zwei voneinander unabhängigen, harmonischen DGL's:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + \frac{k}{m} z_1 &= 0 \\ \ddot{z}_2 + \frac{k + 2k_{12}}{m} z_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Durch Umformung (= Transformation) wurden die zwei Differentialgleichungen **entkoppelt**.
- Die neuen Grössen z_1 und z_2 nennt man die **Normalkoordinaten** des Systems.
- Das System verhält sich wie zwei einzelne Pendel, wenn man anstelle der Auslenkungen y_1 resp. y_2 die Grössen $(y_1 - y_2)$ und $(y_1 + y_2)$ betrachtet.

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems lautet:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \hat{z}_1 \cdot \cos(\omega_1 t - \delta_1) & \text{mit } \omega_1^2 &= \frac{k}{m} \\ z_2(t) &= \hat{z}_2 \cdot \cos(\omega_2 t - \delta_2) & \text{und } \omega_2^2 &= \frac{k + 2k_{12}}{m} \end{aligned}$$

und die Rücktransformation $y_1 = (z_1 + z_2)/2$ resp. $y_2 = (z_1 - z_2)/2$ liefert

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2} (\hat{z}_1 \cdot \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \hat{z}_2 \cdot \cos(\omega_2 t - \delta_2)) \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} (\hat{z}_1 \cdot \cos(\omega_1 t - \delta_1) - \hat{z}_2 \cdot \cos(\omega_2 t - \delta_2)) \end{aligned}$$

Wie gewohnt sind die Amplituden \hat{z}_1 und \hat{z}_2 sowie die Phasen δ_1 und δ_2 durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

a) Gleichsinnige Anregung der beiden Pendel ($y_1(t=0) = y_2(t=0)$, $v_1(t=0) = v_2(t=0)$)

Für z_2 berechnen wir:

$$\begin{aligned} z_2(t=0) &= y_1(0) - y_2(0) = 0 \\ \dot{z}_2(t=0) &= \frac{d}{dt}(y_1 - y_2) = v_1(0) - v_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Und somit:

$$\begin{aligned} z_2(t) &= 0 \quad \text{oder} \quad y_1 = y_2 \\ \text{und} \quad z_1(t) &= y_1 + y_2 = 2y_1 = 2\hat{y}_1 \cdot \cos(k/m \cdot t - \delta) \end{aligned}$$

Bei gleichsinniger Anregung beobachtet man die erste Fundamentalfrequenz ω_1 .

b) Gegensinnige Anregung ($y_1(0) = -y_2(0)$, $v_1(t=0) = -v_2(t=0)$):

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + y_2 = 0 \\ \dot{z}_1 &= \frac{d}{dt}(y_1 + y_2) = 0 \end{aligned}$$

d.h. $z_1(t) = 0$ und es ergibt sich eine reine harmonische Schwingung in z_2 mit

$$\omega_2^2 = (k + 2k_{12})/m$$

Bei gegensinniger Anregung beobachtet man die zweite Fundamentalfrequenz ω_2

2.2. Allgemeine Lösungsmethode für beliebig viele, gekoppelte Pendel

Im Allgemeinen benötigen wir zur Lösung des gekoppelten DGL-Systems eine etwas raffiniertere, mathematische Lösungsmethode. Diese soll wiederum am Beispiel der zwei gekoppelten Pendel demonstriert werden.

Die Verallgemeinerung ergibt, dass ein
 lineares Schwingungssystem mit **N Freiheitsgraden**
 insgesamt **N Normalschwingungen**
 mit **N Eigenfrequenzen**

aufweist.

Eine Normalschwingung ist dabei definiert als Schwingungszustand, bei dem alle Schwingkörper des Systems mit derselben, einzig beobachtbaren Frequenz oszillieren. Schwingungsamplitude und Phase der einzelnen Schwingkörper sind dabei im allgemeinen verschieden. Bei allgemeiner Anregung wird eine Überlagerung der verschiedenen Normalfrequenzen beobachtet.

Doch nun zur allgemeinen Lösungsmethode:

Ausgangspunkt der Berechnung ist das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\text{I) } m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_{12}) y_1 - k_{12} y_2 = 0$$

$$\text{II) } m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_{12}) y_2 - k_{12} y_1 = 0$$

Dieses schreibt man bequemer in Matrixform

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \ddot{\vec{y}} + \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \vec{0}$$

$$\text{mit } \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Da es sich um ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten handelt, verwenden wir einen Exponentialansatz

$$\vec{y}(t) = \hat{\vec{y}} \cdot e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t}$$

Eingesetzt in das DGL-System erhalten wir

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot (-\omega^2) \cdot \hat{\vec{y}} \cdot e^{i\omega t} + \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{pmatrix} \cdot \hat{\vec{y}} \cdot e^{i\omega t} = \vec{0}$$

oder

$$-\omega^2 \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \hat{\vec{y}} + \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{pmatrix} \cdot \hat{\vec{y}} = \vec{0}$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu

$$\begin{pmatrix} (k_1 + k_{12}) - m_1 \cdot \omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & (k_2 + k_{12}) - m_2 \cdot \omega^2 \end{pmatrix} \cdot \hat{\vec{y}} = \vec{0}$$

Der Exponentialansatz führt also auf eine Matrixgleichung vom Typus

$$\vec{\vec{A}} \cdot \hat{\vec{y}} = \vec{0}$$

Eine nichttriviale Lösung existiert dann, wenn die Determinante der Matrix Null ist

$$\det \begin{pmatrix} \vec{\vec{A}} \end{pmatrix} = 0$$

Diese Bedingung liefert in unserm Falle zwei Lösungen für ω^2 und damit vier Lösungen $\omega_I \dots \omega_{IV}$, wobei $\omega_I = -\omega_{III}$ und $\omega_{II} = -\omega_{IV}$. Die symmetrischen Lösungen werden benötigt, um aus den komplex angesetzten Lösungen reelle Lösungen mit einer Phase zu „konstruieren“.

Um bei der weiteren Berechnung Schreibarbeit zu sparen, wollen wir die Situation vereinfachen: Die drei Federn seien alle identisch ($k_1 = k_2 = k_{12} = k$).

Die Matrix A lautet nun

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2k - m_1 \cdot \omega^2 & -k \\ -k & 2k - m_2 \cdot \omega^2 \end{pmatrix}$$

und $\det(\vec{A}) = 0$ liefert

$$4k^2 - 2k \cdot (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 + m_1 m_2 \cdot \omega^4 - k^2 = 0$$

oder

$$m_1 m_2 \cdot \omega^4 - 2k \cdot (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 + 3k^2 = 0$$

Die Lösungen dieses Polynoms in ω^2 lauten

(= (Quadrat der) **Eigenfrequenzen**)

$$\omega^2 = k \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \pm \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2}}{m_1 \cdot m_2} \right)$$

Nun spezialisieren wir nochmals

$$m_1 = 2 \quad m_2 = 2 \quad m$$

und erhalten die **Eigenfrequenzen** des Systems ($k_1=k_2=k_3=k$ und $m_1 = 2m_2 = 2m$) zu

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{k}{2m} \cdot (3 \pm \sqrt{3})$$

Setzt man diese Werte in die Matrix A ein, so erhält man ein Gleichungssystem für die Schwingungsamplituden.

$$\vec{A}(\omega_{I,II}) \cdot \vec{\hat{y}} = 0$$

Die daraus berechneten Vektoren $\vec{\hat{y}}$ heissen **Eigenvektoren** der Matrix A. Sie sind bis auf einen frei wählbaren Faktor a resp. b bestimmt:

$$\vec{\hat{y}}_I = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \vec{\hat{y}}_{II} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Damit haben wir die Aufgabe im Wesentlichen gelöst, die allgemeine Bewegung des Systems lautet

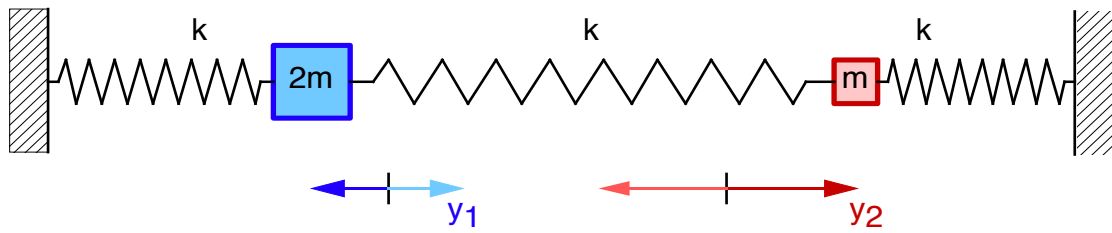
$$y_1(t) = a \cdot \cos(\omega_I t - \delta_I) + b \cdot \cos(\omega_{II} t - \delta_{II})$$

$$y_2(t) = (-1 - \sqrt{3}) \cdot a \cdot \cos(\omega_I t - \delta_I) + (-1 + \sqrt{3}) \cdot b \cdot \cos(\omega_{II} t - \delta_{II})$$

Diese Formeln enthalten noch vier unbestimmte Grössen a, b, δ_I , und δ_{II} , welche aus den vier Anfangsbedingungen (Startposition und -geschwindigkeit der zwei Pendelmassen) bestimmt werden müssen. Die beiden Normalschwingungen ($b=0$ resp. $a=0$) des hier durchgerechneten Beispiels sind auf der nächsten Seite dargestellt.

Die obige Herleitung zeigt sodann, dass ein System von N Pendeln auf eine NxN-Matrix führt. Das zugehörige charakteristische Polynom in ω^2 hat im allgemeinen N Nullstellen und damit ergeben sich im allgemeinen N Normalfrequenzen. Selbstverständlich können auch mehrfache Nullstellen auftreten, wodurch die Anzahl der verschiedenen Normalfrequenzen reduziert wird.

Normalschwingung I, Frequenz $\omega_I = \frac{k}{2m} \cdot (3 + \sqrt{3})$:



Normalschwingung II, Frequenz $\omega_{II} = \frac{k}{2m} \cdot (3 - \sqrt{3})$:

