

W 6a Mech. Resonanz mit PASCO-Apparatur

1. Physikalische Grundlagen

In diesem Versuch wird ein Federpendel mit geschwindigkeitsproportionaler Reibung und harmonischer Anregung untersucht. Die

$$\text{geschwindigkeitsproportionale Reibkraft } F_{reib} = -\beta \cdot v$$

wird dabei mittels Wirbelstrombremseffekt realisiert, die

$$\text{harmonische Anregung } F_{anr.}(t) = \hat{F}_e \cdot \cos(\Omega t)$$

durch kosinusförmiges Heben und Senken des Befestigungspunktes der Feder.

Der Bremskoeffizient β ist dabei bestimmt durch die Stärke der zwei Permanentmagneten, deren Abstand vom Aluminium-Stab sowie der elektrischen Leitfähigkeit des Alu-Stücks. Für eine fixe Einstellung der Magneten ist β damit eine Konstante.

Für die Kraftamplitude \hat{F}_e der harmonischen Anregung mit Erregerkreisfrequenz Ω gilt

$$\hat{F}_e = \hat{y}_e \cdot k$$

mit der Erregeramplitude \hat{y}_e (= Amplitude der "Hin- und Herbewegung") und der Federkonstante k der entsprechenden Feder.

Im weiteren werden die wichtigsten Formeln, die Sie zur Auswertung des Versuches benötigen, zusammengestellt. Deren Herleitung finden Sie im Skriptum "Schwingungen und Wellen". Studieren Sie dort die Abschnitte **gedämpfte freie Schwingung** und **erzwungene Schwingung**.

1.1 Gedämpfte Schwingung.

Ein freies, geschwindigkeitsproportional gedämpftes Federpendel bewegt sich gemäss

$$y(t) = \hat{y} \cdot e^{-\Gamma t} \cdot \cos(\omega t - \delta)$$

$$\text{mit } \Gamma = \frac{\beta}{2m} \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (1)$$

Dabei bezeichnet Γ die **Abklingkonstante** ($\Gamma=1/\tau$), β den Bremskoeffizienten, ω die Kreisfrequenz des **gedämpften** und ω_0 jene des **ungedämpften** Pendels mit Federkonstante k und Masse m .

1.2 Erzwungene Schwingung

Die Formeln für Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung mit Erregerkreisfrequenz Ω (Erregerfrequenz $f_e = \Omega/2\pi$) und Erregeramplitude \hat{y}_e lauten

$$\hat{y}(\Omega) = \hat{y}_e \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\Gamma^2}} \quad (3)$$

$$\tan \delta = \frac{2 \Omega \Gamma}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \text{oder} \quad \cos \delta = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 \Gamma^2 \Omega^2}} \quad (4)$$

In der Literatur werden oft normierte Grössen verwendet:

$$\text{Frequenzverhältnis} \quad \gamma = \Omega/\omega_0 = f_e / f_0$$

$$\text{Dämpfungsgrad} \quad \alpha = \Gamma/\omega_0 = \Gamma/2\pi f_0$$

Damit erhalten wir aus obigen Formeln die normierten Auswerteformeln:

$$\hat{y}_N = \hat{y}_0 \cdot e^{-2\pi\alpha N} \quad (2a)$$

$$\hat{y}(\gamma) = \hat{y}_e \cdot \frac{1}{\sqrt{\left((1 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2\right)}} \quad (3a)$$

$$\tan \delta = \frac{2 \gamma \alpha}{1 - \gamma^2} \quad (4a)$$

2. Durchführung des Experimentes

2.1 Apparatives

Die PASCO-Apparatur ist auf Seite 3 dargestellt, links der ganze Versuchsaufbau von vorne, rechts die Frontplatte des Bedienungsgerätes und der Antrieb auf der Geräterückseite. Die Apparatur besteht aus einem vertikal schwingenden Federpendel, welches über einen Faden durch eine Exzenter-scheibe angeregt werden kann. Der obere Teil des Pendelkörpers, ein rechteckiger Plexiglasstab mit aufgebrachten Markierungen läuft in einer rechteckigen Führung. Am unteren Ende bewegt sich ein Aluminiumstab zwischen den Polen eines Permanentmagneten. Die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung wird durch Variieren des Luftspaltes eingestellt. Zur Veränderung der Eigenfrequenz können Zusatzmassen aufgesetzt werden. In die rechteckige Führung, welche sich in der Ruhelage befindet, sind 2 Lichtschranken eingebaut. Die eine signalisiert den Nulldurchgang, welcher noch durch Aufleuchten einer LED angezeigt wird, die andere dient zum Messen der Amplitude.

Gerätefrontplatte und Bedienungselemente:

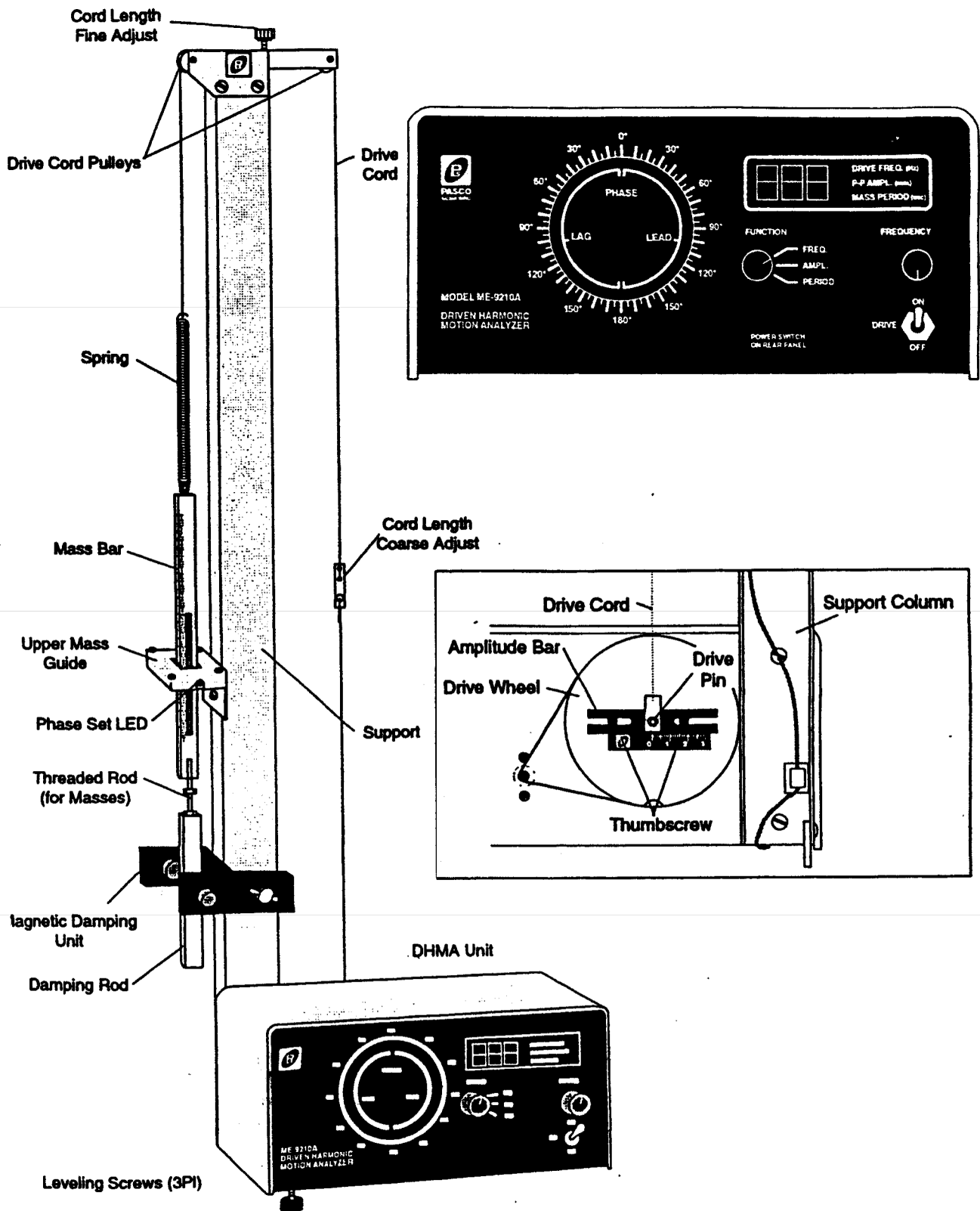
Die **Digitalanzeige** kann zwischen den Funktionen **FREQ.** (der Erregung in Hz), **AMPL.** (Schwingungsamplitude des Pendels in mm **peak to peak**) und **PERIOD** umgeschaltet werden. Die Amplitude wird jede Periode gemessen, die Messung beginnt jeweils beim Durchgang des Pendels durch die Ruhelage von oben.

Die **Erregung** wird mit dem Schalter **DRIVE** eingeschaltet, ihre Frequenz mit dem darüberliegenden Drehknopf gewählt. Die Erreger-Amplitude wird durch Verschieben des Exzenters auf dem Treibrad auf der Rückseite eingestellt. Es hat sich herausgestellt, dass der Nullpunkt des dort angebrachten mm-Massstabes ziemlich ungenau ist. Ermitteln Sie ihn genauer, indem Sie den Exzenterbalken solange verschieben, bis das Pendel praktisch nicht mehr angeregt wird.

Der Netzschalter befindet sich auf der Geräterückseite.

Der **Phasenindikator** funktioniert wie folgt: Auf gleicher Achse mit der Exzenter-scheibe befindet sich im Innern des Gehäuses eine zweite Scheibe, welche eine LED trägt. Diese wird durch den Nulldurchgang des Pendels ausgelöst. Ihre Position beim Aufleuchten entspricht damit der Phasendifferenz, welche so direkt abgelesen werden kann.

Da die Zeitauflösung der Anzeige an der Apparatur relativ schlecht ist, verwenden wir für die Messung von Pendelperiode und Erreger-Frequenz einen externen Counter-Timer. Die Pulsfrequenz am Ausgang "Drive" ist das 100-fache der Erregerfrequenz, da intern eine Lochscheibe mit 100 Löchern zur Drehzahlmessung verwendet wird. Am andern Anschluss erscheint jeweils bei Periodenbeginn (Periodenbeginn) ein Impuls.



2.2 Vorgehen beim Messen

Damit die Dämpfung vernünftig eingestellt werden kann, ist es ratsam, jeweils mit der **erzwungenen** Schwingung zu beginnen und anschliessend bei gleicher Magneteinstellung die Abklingkurve zu messen. Für das etwas heikle Anstossen des Pendels zur Eigenschwingung benützt man am besten den Schlitten eines vertikalen Stahlmassstabes.

Justierung und Einstellungen:

- Apparatur auf eine **feste Unterlage** stellen, der Tisch darf nicht wackeln, besser ist ein Korpus oder ein Wägetisch.
- Mit den beiden Justierschrauben auf der Geräteunterseite das Pendel vertikal stellen, bei verdrehtem Plexistab mit der Federöse am oberen Ende korrigieren.
- Pendel mit grosser Amplitude anstossen, **es darf an der Führung nicht reiben**. Eventuell nachjustieren. Da eine Verdrehung des Pendelkörpers unvermeidbar ist, kann es vorkommen, dass er bei grösseren Amplituden hin und wieder touchiert. Dies beeinträchtigt die Messungen nicht wesentlich.
- Erregeramplitude, minimal 1 mm, durch Verschieben des Exzentrers auf dem Treibrades wählen. Vorgängig den Nullpunkt bestimmen (siehe oben).
- Antriebsscheibe auf der Geräterückseite von Hand so drehen, dass die halbkreisförmige Ausfräsung nach oben zeigt. Pendel anstossen, und die Antriebsscheibe nachdrehen, bis die blinkende LED exakt auf 0° zu stehen kommt. Diese Justierung bestimmt den Nullpunkt für die Phasenmessung.
- Pendel ruhig stellen und mit der Schraube am oberen Ende der Trägersäule genau auf die Ruhelage justieren. Dazu die LED beobachten, sie soll "halb" leuchten bzw. flackern. Die letzten beiden Einstellungen sind entscheidend für zuverlässige Messresultate!
- Nun messen Sie die Schwingungsdauer.
- **Justierung von Zeit zu Zeit überprüfen!**

Aufnahmen von Resonanzkurven:

- Erregung einschalten, Erregerfrequenz etwa auf die Eigenfrequenz stellen. Dann unter ständiger Beobachtung der Phase die Resonanzstelle suchen.
- **Dämpfung** durch Variieren des Polschuhabstandes auf den gewünschten Wert einstellen. Selbstverständlich darf das Pendel in der Resonanz nicht anschlagen.
- Nun messen Sie in kleinen Frequenzschritten (insbesondere in den Flanken der Resonanzkurve!) die Amplitude \hat{y} (angezeigt wird peak to peak!) und Phasendifferenz δ . Der Einschwingvorgang kann am besten am Verlauf der Phase verfolgt werden. Erst ablesen, wenn diese Anzeige stationär geworden ist. Damit die Messpunkte schlussendlich schön verteilt sind, erstellen Sie während der Messung eine entsprechende Grafik, z.B. mit Excel (Werte **sowohl von Hand in Messprotokoll** eintragen als auch in Excel-Tabelle eingeben). Achten Sie darauf, dass Sie in den Flanken der Resonanzkurven genügend Messpunkte haben.
- Die Erregerfrequenz f_e wird, wie erwähnt, mit dem externen Counter-Timer bestimmt.
- In grösserem Abstand von der Resonanz wird die Phasenanzeige schwankend, eine zuverlässige Messung ist dann nicht mehr möglich.

Aufnahmen von Abklingkurven, Schwingungsdauer:

- Antrieb ausschalten, Antriebsscheibe auf 0° stellen (Ausfräsung nach oben) und Justierung der Ruhelage überprüfen.
- Funktionsschalter auf AMPL. stellen.
- Mit dem Messfinger des Massstabes das Pendel sorgfältig zur Ruhe bringen, dann auf die maximal mögliche Amplitude anheben und durch rasches Absenken des Schlittens starten.
- "Amplitudenwerte" (die angezeigten Werte sind **peak to peak!**) notieren resp. mit Handy einen Film aufnehmen.
- Messung mit gleicher Anfangsamplitude 3x wiederholen und Mittelwerte bilden.
- Um die Schwingungsdauer mit Unsicherheit zu erhalten, werden 5 Messewerte notiert (mittlere Amplitude).

3. Aufgaben und Auswertung

Für das Federpendel der PASCO-Apparatur messen Sie Eigenfrequenz und Abklingkurve der **freien Schwingung** sowie die Resonanzkurve (Amplitude und Phase) der **erzwungenen Schwingung** für 3 zweckmässig abgestufte Dämpfungen resp. fixe Dämpfung und drei verschiedene Pendelmassen. Feder und Masse mit dem Dozenten vereinbaren.

Werten Sie die Messungen wie folgt aus:

(Ob Sie in der Auswertung die normierte oder unnormierte Darstellung verwenden und ob Sie mit Kreisfrequenzen oder "normalen" Frequenzen rechnen, ist Ihnen freigestellt. Achten Sie aber darauf, dass Sie nicht mischen, dies führt sicher zu Fehlern!)

3.1 Gedämpfte Schwingung: Schwingungsdauer/Eigenfrequenz

Der Mittelwert von T ist mit Fehlergrenzen zu berechnen.

Mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 3.2 berechne man die Schwingungsdauer T_0 resp. die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems. Man beurteile, ob der Unterschied zwischen T und T_0 (oder ω und ω_0) überhaupt feststellbar ist mit der vorliegenden Messeinrichtung.

3.2 Gedämpfte Schwingung: Amplitudenverlauf

Die Messwerte \hat{y}_n (Mittelwert aus den 3 Runs) werden in Funktion der Schwingungszahl n dargestellt und mit der Funktion $\hat{y}_n = \hat{y}_0 \cdot e^{-\Gamma \cdot n \cdot T}$ gefittet. Für T setzen wir den in 3.1 erhaltenen Mittelwert ein.

3.3 Erzwungene Schwingung

Amplitudenresonanz:

Die Messerwerte $\hat{y}(\Omega)$ werden mit der theoretischen Funktion gefittet, was uns die Grössen ω_0 , Γ und \hat{y}_e liefert. Präsentieren Sie alle drei Messungen mit Fit in einem einzigen Diagramm.

Phasenresonanz:

Die Messwerte $\delta(\Omega)$ der drei Messungen werden mit der Phasenresonanzfunktion gefittet (wiederum alle drei Messungen in einem einzigen Diagramm darstellen).

Hinweis: Da der Tangens bei 90° einen Pol hat, benimmt sich das Fit-Programm in den meisten Fällen gutmütiger, wenn wir die Formel mit der Kosinusfunktion verwenden, welche identisch ist zur Formel mit dem Tangens ($0 < x < 180$: $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x) = +\sqrt{1 - \cos^2(x)}/\cos(x)$).

Ferner ist zu beachten, dass die Phasenmessung bei tiefen/hohen Frequenzen, wegen der kleinen Schwingungsamplitude, sehr empfindlich ist auf Erschütterungen/Fehljustierungen. Aus diesem Grunde müssen diese Punkte ev. beim Phasenfit als Ausreisser behandelt werden (= darstellen aber nicht fitten).

3.4 Federkonstante

Bestimmen Sie die Federkonstante k der verwendeten Feder statisch aus der Verlängerung für mehrere Gewichte (linearer Fit!).

3.5 Resultatzusammenstellung

Präsentieren und vergleichen Sie die erhaltenen Oszillatorwerte ω_0 , Γ und \hat{y}_e tabellarisch und graphisch mit Fehlergrenzen.

Beachten Sie:

- Die Eigenfrequenz ω_0 soll auch theoretisch aus k und m (mit Fehler) berechnet und im entsprechenden Diagramm dargestellt werden.
- Sofern die Einstellung der Wirbelstrombremse bei allen Versuchen identisch war, sollten die Bremskoeffizienten β aller Messungen innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen. Verifizieren und zeigen Sie dies.