Eigenschaften der Fourier-Transformation

$$\boldsymbol{F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt}$$

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega}$$

Reellwertige Funktion

$$F(\omega) = Re\big(F(\omega)\big) + jIm\big(F(\omega)\big)$$

$$Re\big(F(\omega)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt \qquad gerade\ Funktion\ der\ Kreisfrequenz\ \omega$$

$$Im\big(F(\omega)\big) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt \qquad ungerade\ Funktion\ der\ Kreisfrequenz\ \omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \big[Re\big(F(\omega)\big)\cos(\omega t) - Im\big(F(\omega)\big)\sin(\omega t)\big] d\omega$$

$\boldsymbol{f}$ **ist eine gerade Funktion** $\Rightarrow F(\omega)$ ist reell

$$Im\,\big(F(\omega)\big) = 0$$

$$Re\big(F(\omega)\big) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} Re\big(F(\omega)\big)\cos(\omega t)\, d\omega$$

$\boldsymbol{f}$ **ist eine ungerade Funktion** $\Rightarrow F(\omega)$ ist rein imaginär

$$Re\big(F(\omega)\big) = 0$$

$$Im\big(F(\omega)\big) = -2\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt$$

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} Im\big(F(\omega)\big)\sin(\omega t)\, d\omega$$

Linearitätssatz

$$\mathcal{F}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathcal{F}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{F}\{f_2(t)\}$$

Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Zeitverschiebungssatz

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Frequenzverschiebungssatz (Dämpfungssatz)

$$\mathcal{F}\left\{f(t)e^{j\omega_0 t}\right\} = F(\omega-\omega_0)$$
$$\mathcal{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)$$

Vertauschungssatz

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

Ableitungssatz für die Originalfunktion

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = (j\omega)^n F(\omega)$$

Ableitungssatz für die Bildfunktion

$$\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega) = (-j)^n\mathcal{F}\{t^n f(t)\} = \mathcal{F}\{(-jt)^n f(t)\}$$

Integrationssatz für die Originalfunktion

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(\omega)\delta(\omega)$$

Faltungssatz im Zeitbereich

$$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(\omega)\cdot G(\omega)$$

Faltungssatz im Frequenzbereich

$$\mathcal{F}\{f(t)\cdot g(t)\} = \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$$

Satz von Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

Tabelle spezieller Fourier- Transformationen

Originalfunktion	Bildfunktion
$e^{-at}\varepsilon(t), \;\; mit \;\; a > 0$	$\dfrac{1}{a + j\omega}$
$e^{-a\|t\|} \;\; mit\; a > 0$	$\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at^2} \;\; mit\; a > 0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\dfrac{1}{a^2 + t^2}$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-a\|\omega\|}$
$rect_{2a}(t)$	$2\dfrac{\sin(a\omega)}{\omega} = 2a \cdot \mathrm{sinc}(a\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$\delta(t + t_0)$	$e^{j\omega t_0}$
$\delta(t)$	1
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega + \omega_0)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
A	$2\pi A\delta(\omega)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi\big(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\big)$
$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$
$\dfrac{\sin(at)}{t}$	$\pi rect_{2a}(\omega)$

Sind f und g zwei absolut integrierbare Funktionen, dann ist die **Faltung** von f und g

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(t-x) dx$$