

PyDRUM:**Análisis Del Modo De Vibración Del Parche Del Bombo De Una Batería**S. Suárez¹ and D. López¹*Estudiantes del pregrado en Ingeniería Física**Asistentes del curso Métodos Numéricos Para Ingeniería - DF0316**Departamento de Ciencias Físicas - Escuela de Ciencias - Universidad EAFIT*

(Dated: 23 de mayo de 2018)

Las membranas poseen varias aplicaciones en múltiples campos como la bio-ingeniería en dónde muchos tejidos son considerados como membranas, por ejemplo para el diseño de dispositivos de ayuda en la escucha es importante entender las características de vibración del tímpano; de igual forma en la acústica y en la música, las membranas constituyen uno de los componentes principales en muchos instrumentos musicales o de dispositivos de amplificación del sonido como los micrófonos o parlantes¹. De esta forma, propusimos *PyDrum* para el trabajo final del curso Métodos Numéricos Para Ingeniería, donde decidimos realizar un análisis de los modos de vibración de una membrana utilizando la características físicas del parche del bombo de una batería, a partir del modelado físico y matemático como una de las herramientas clave en la materia, a través del uso de la herramienta computacional Python; de allí el nombre que le hemos puesto es "PyDrum" pues hace referencia a Python como lenguaje de programación integrador para el proyecto, y Drum (tambor) como el sistema físico que seleccionamos modelar y analizar.

Keywords: Membranas; vibraciones de sistemas continuos; métodos numéricos; modelado de sistemas físicos; música y acústica; parche de un bombo; python

I. INTRODUCCIÓN

En el presente informe correspondiente al trabajo final de la materia *Métodos Numéricos Para Ingeniería - DF0316*, intentamos dar conclusión exponiendo el progreso, resultados y aprendizajes logrados al respecto. Se presenta a continuación el planteamiento del problema y su justificación, y los antecedentes principales que consideramos a lo largo de la consecución del trabajo. De igual forma, en cuanto a la descripción del desarrollo, presentamos la metodología empleada para abordar el problema que nos propusimos a inicio de semestre a través de un anteproyecto, así como también los algoritmos planteados para alcanzar una solución. Finalmente, se muestra un breve análisis de los resultados que alcanzamos obtener para terminar con las conclusiones del trabajo que se desarrolló y comentarios finales.

A. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema o sistema físico que proponemos resolver es: analizar el comportamiento dinámico, de un instrumento de percusión del tipo tambor, es decir, perteneciente a la familia de los "membráfonos", instrumento musical cuya vibración se produce en una membrana tensa (también llamada parche), para el cual se plantea particularmente una membrana propiamente constituida del material conocido como Mylar. Donde esta reacciona a un estímulo el cual se obtiene al golpear el instrumento en el parche con la mano o con baquetas.

Una vez se aplica el estímulo, la membrana comienza a vibrar, este comportamiento se le conoce como modo de vibración, las membranas pueden tener distintos modos de vibración dependiente a la frecuencia a la que se es sometida. El bombo es un instrumento usualmente uti-

lizado para marcar y mantener el pulso según el género musical que se desee tocar, dado que este al ser sometido al golpe, produce un sonido grave. Este sonido posee un gran espectro dinámico a causa de la gran variedad de matices y efectos que se pueden generar según la afinación (dada por la tensión del parche) del instrumento, el material que constituye el parche, el tipo de baquetas (o mazas o si es golpeado con un pedal) y sobre todo la técnica del baterista (entre otros parámetros).

El sistema físico planteado, se hizo con respecto al comportamiento dinámico del bombo de pedal, este método de estímulo mediante un pedal no permite ninguna variación en la sensación auditiva (entonación; grave o agudo), por lo cual se puede asumir que tiene una frecuencia estable. El modo de vibración usual asociado a este método de golpeo es el primer modo de vibración, sobre el cual se hablará más adelante.

Específicamente, el objetivo fue caracterizar, modelar y simular una membrana con la característica de un parche, y aplicar sobre ella la ecuación de onda apropiada, la cual nos permitió analizar la distribución de energía en forma de vibraciones a lo largo de la membrana. Para esto, se utilizó Python como herramienta computacional, para el desarrollo de la simulación. Y de este modo analizar el comportamiento vibracional del dominio de la membrana.

B. ANTECEDENTES

Los principales antecedentes que se consideraron durante el proyecto sobre trabajos desarrollados que hayan explorado y aportado al estado del arte en cuanto al análisis de vibraciones de cuerpos/sistemas como membranas fueron:

- En cuanto a teoría y también desarrollos compu-

tacionales similares, ponemos en primer lugar el trabajo del profesor Dan Russell del departamento de acústica de la universidad PennState en EE.UU. El profesor Russell, posee un canal en YouTube (éste lleva su mismo nombre) y una página web² totalmente dedicada a entender los fenómenos físico involucrados en la acústica, música y medios en general sometidos a vibraciones. Para solucionar y simular estos problemas, el profesor Russell hace uso, por ejemplo, de la herramienta computacional *Mathematica* de *Wolfram*. En particular, la referencia más directa de su trabajo con el proyecto que nos propusimos fue la sección de su página web.

- Para guiarnos en el desarrollo del código en Python, seguimos el Blog *The Beginner Programmer*³, en donde se pueden encontrar modelos computacionales sencillos de la ecuación de onda y la ecuación de calor, ambas en dos dimensiones.
- Uno de los libros de principal consulta, recomendado por el profesor del curso, fue *Vibrations of Continous Systems* de A. Leissa y M. Qatu¹. Este texto fue fuente para entender el modelado físico y principalmente matemático de los diferentes sistemas y geometrías básicas disponibles para abordar el análisis de las vibraciones varios dominios y dimensiones. El capítulo 5 *Membrane Vibrations* fue de especial ayuda.

II. METODOLOGÍA

La metodología para abordar la solución del problema sigue el siguiente flujo:

1. Tomar el sistema real y llevarlo a una idealización, es decir, hacer un modelado del sistema físico, en donde no sólo se debe determinar un dominio, sino también llevar a cabo asunciones en donde se extraiga la información fundamental que describa el sistema real.
2. Modelar matemáticamente el modelo físico. En este paso, se debe tener en consideración -tal y cómo vimos durante los primeros tópicos del curso- por ejemplo qué tipos de ecuaciones se acomodan al problema, ya sean funciones simples o ecuaciones diferenciales expresadas en términos de leyes de conservación y relaciones constitutivas.
3. Una vez se tienen las ecuaciones que determinan los estados del sistema (ya sea transitorio o estacionario, esto dependerá del problema) podemos proceder a implementar la solución computacional. En nuestro caso, a través de Python.

A. MODELADO FÍSICO DEL SISTEMA

El problema que se tiene busca analizar el comportamiento dinámico de una membrana con las características de un parche hecho en el material Mylar, y la tensión a

que esta es usualmente sometida. Entonces al tener este problema puntual, para facilitar el análisis, se hizo uso de una membrana cuadrada⁹ con una tensión uniforme en sus bordes. Para un instrumento de percusión, se maneja una tensión global la cual repercute en la afinación del instrumento, se planteo una tensión específica de $45 \frac{N}{m^2}$ en los bordes, la cual corresponde a un parche tensado para marcar los pulsos de una canción de genero rock, como se presento en el informe del anteproyecto. El tamaño de los lados de esta membrana de de 100 X 100cm, para hacer una analogía con un parche de bombo de dimensión de 40" (100cm de diámetro) 1.

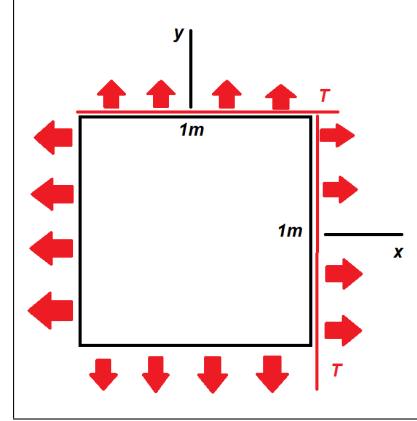


Figura 1. Vista Gráfica del dominio geométrico del modelo.

B. MODELADO MATEMÁTICO DEL SISTEMA

Se conoce que las vibraciones en una membrana pueden ser descritas con la ecuación clásica de onda en dos dimensiones (Ec.):

$$T \Delta^2 w = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde,

T es la tensión = $45 \frac{N}{m^2}$

ρ es la densidad = $1390 \frac{Kg}{m^3}$ y

h es el grosor (el cual lo tomamos como 1, para que la ecuación no se alterara, dado que para la solución en nuestro de nuestro problema el grosor no es importante). La función w de movimiento para vibraciones libres de membranas cuadradas con una tensión uniforme y que vibran con una frecuencia natural se observa en la Ec.2.

$$w(x, y, t) = \left(\sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) (\sin \omega t + \cos \omega t) \quad (2)$$

donde, m y n, son los modos de vibración y ω es la frecuencia angular 3.

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{T}{\rho h} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (3)$$

cabe resaltar que los valores b y a fueron tomados como 1.

Inicialmente además de tomar las características del mylar, se quería asemejar la estructura a la de una membrana circular, por lo cual también se hizo el planteamiento análogo para una membrana circular.

La ecuación de movimiento para vibraciones libres de membranas con una tensión uniforme se observa en la Ec. 4.

$$\nabla^2 W + k^2 W = 0 \quad (4)$$

donde k^2 esta definido por

$$k^2 = \frac{\rho h \omega^2}{T} \quad (5)$$

Donde: ρ es la densidad, h el grosor y T la tensión a la que se encuentra sometido el parche, y ω es la frecuencia natural. Tanto ρ , h y T son constantes que se pueden tomar directamente del sistema. Y para conocer la frecuencia natural ω , como se trata de un bombo, el pulso o fuerza es usualmente aplicada en el centro y como base de las posibles frecuencias utilizadas se puede partir del modo de frecuencia (modo de vibración) mas bajo, expresado a través de la siguiente ecuación⁵:

$$\omega_1 = 0,765 \frac{\sqrt{\left[\frac{T}{\rho}\right]}}{(diámetro)} \quad (6)$$

Y su geometría a implementar en el código es:

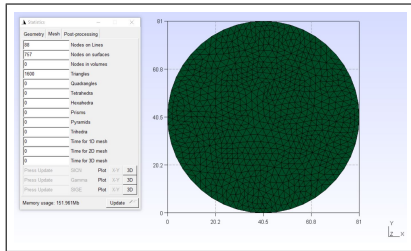


Figura 2. Vista Gráfica del dominio geométrico del modelo.

Se buscaba primero resolver el primer modo de vibración para una membrana rectangular (por la facilidad en las coordenadas) y después mediante la conversión de coordenadas cartesianas a cilíndricas, generar la gráfica para una membrana cuadrada. Se logro resolver el problema solo para una membrana cuadrada, dados los inconvenientes para hacer la conversión a coordenadas cilíndricas. Entonces, se logro el objetivo principal el cual era el análisis del modo de vibración de una membrana con las características del Mylar y una tensión específica, también se planteo a nivel matemático y de funciones el planteamiento para la resolución de las vibraciones cuando la membrana es circular.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

EL resultado obtenido para el problema: es el modo de vibración de una membrana cuadrada con las características de un parche de material mylar, que se comporta como un bombo de pedal, esta presenta el primer

modo de vibración con una frecuencia de 1Hz, lo cual es correcto al observar que se esta dando un pulso por tiempo (como una corchea) y el epicentro del golpe es en el centro de la membrana, se presenta a continuación la gráficas obtenidas mediante la programación de los modelos matemáticos en python.

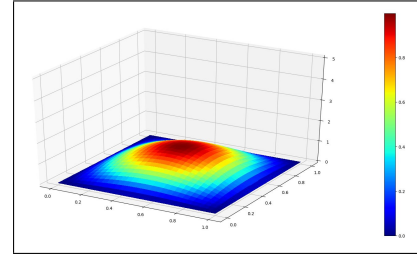


Figura 3. Comportamiento de la membrana de un bombo al ser sometido a un golpe.

Lo cual es un resultado acerado, para el primer modo de vibración, dado que su esquema se ilustra en la Figura 4.

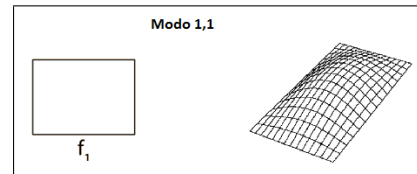


Figura 4. Esquema del comportamiento de la membrana de un bombo al ser sometido a un golpe.

También fue posible explorar las diferentes posibilidades de vibraciones al aumentar la frecuencia, cabe resaltar que un bombo no vibrara de esta manera dado que la forma en la que se toca solo permite el primer modo de vibración.

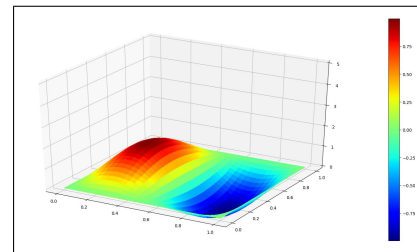


Figura 5. Comportamiento de una membrana al ser sometía a una frecuencia de 1.754 Hz.Modo 1,2

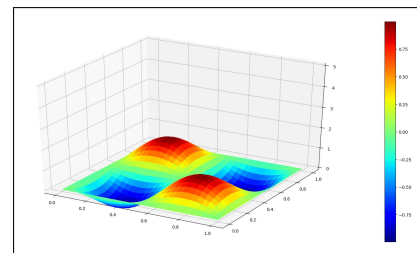


Figura 6. Comportamiento de una membrana al ser sometía a una frecuencia de 1.999 Hz.Modo 2,2

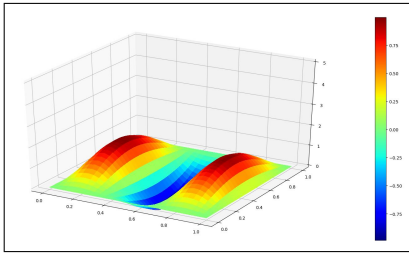


Figura 7. Comportamiento de una membrana al ser sometida a una frecuencia de 2.557 Hz. Modo 1,3

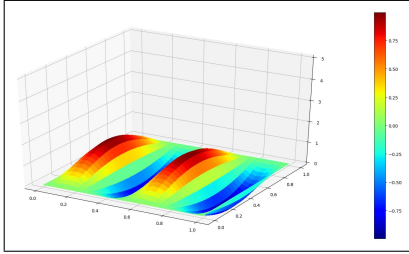


Figura 8. Comportamiento de una membrana al ser sometida a una frecuencia de 2.370 Hz. Modo 4,1

IV. CONCLUSIONES

En cuanto a las conclusiones de todo el trabajo, logramos investigar y ahondar en el estado del arte sobre modelos de sistemas acústicos, modelos fisicomatemáticos de instrumentos musicales, simulaciones de sistemas dinámicos y las teorías de ondas y vibraciones en instrumentos de percusión. En particular, el proyecto fue fructífero en el sentido en que logramos aprender en relación a la teoría de vibraciones y sus aplicaciones directas a problemas de la realidad, lo cual fue en principio, uno de los objetivos planteados, tomar el proyecto como un pretexto para abordar el aprendizaje de estos tópicos.

La frecuencia a la que se somete una membrana repercute en su comportamiento. Según la experimentación que se hizo a nivel computacional, se llega a la conclusión

que se puede asociar la gráfica de movimiento a la tonalidad de un instrumento, como en el informe se hizo la asociación de la tonalidad baja de un parche, con el primer modo de vibración de una membrana. Si se hiciera una asociación a un sonido, se obtendría el sonido seco del golpe del bombo con un pedal.

Apéndice A: Repositorio en GitHub

Cumpliendo con uno de los requisitos definidos al inicio del semestre en relación con la conclusión de este proyecto, creamos un repositorio libre en la plataforma para el desarrollo de software *GitHub*. Allí publicamos todos los contenidos y los desarrollos logrados en relación al proyecto de materia. Se puede acceder a través de la siguiente dirección web: <https://github.com/SimonX314/PyDrum>.

REFERENCIAS

- ¹Leissa, A. W., & Qatu, M. S. (2011). *Vibrations of Continuous Systems*. McGraw-Hill.
- ²Dan Russel, "Dan Russell's Acoustics and Vibration Animations," accessed February 16, 2018, <http://www.acs.psu.edu/drussell/demos.html>.
- ³The Beginner Programmer. Shared thoughts, experiments, simulations and simple ideas with Python, R and other languages. <http://firsttimeprogrammer.blogspot.com.co/?m=1>
- ⁴C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79(11), pp. 1309-1331, 2009.
- ⁵Bass Drum frequency. [URL: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Music/bdrum.html#c1>, consultado el 23/02/2018].
- ⁶Yamaha. [URL: https://usa.yamaha.com/products/musical_instruments/percussion/bass_drums/cb-9000/lineup.html#product-tabs, consultado el 23/02/2018].
- ⁷TAMA. [URL: <http://www.tama.com/usa/products/accessories/TW100.html>, consultado el 23/02/2018].
- ⁸Membrana modo de frecuencia bajo. [URL: <https://percuscience.wordpress.com/tag/membrana/>, consultado el 23/02/2018].
- ⁹A inicios del proyecto,