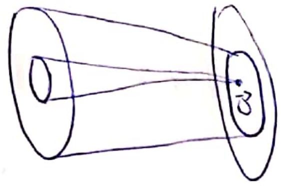
Simona Mikovčiková

$V \xrightarrow{f} U$



① a.) $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie

Jadro : $\ker(f): \{ \vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{0} \}$

Obraz : $\operatorname{Im}(f): \{ \vec{y} \in U : f(\vec{x}) = \vec{y}$ pre $\vec{x} \in V \}$

b.) $B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$

$x_1 + x_2 + x_3 = \vec{0}$

$x_1 - x_2 = \vec{0}$

$-x_1 + x_2 = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s$

$-2x_2 - s = 0$

$x_2 = -\frac{s}{2}$

$x_1 - \frac{s}{2} + s = 0$

$x_1 = -\frac{s}{2}$

$\ker(B) = \{ (-\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}, s)\ s \in \mathbb{R} \}$

$x_1 + x_2 + x_3 = a$

$x_1 - x_2 = b$

$-x_1 + x_3 = c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & b-a \\ 0 & 2 & 1 & c+a \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & -2 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 2 & a+c \end{array}\right] \cdot \frac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & -2 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c+b \end{array}\right]$$

$-c = b$

$\dim(\ker(B)) = 1$

$\dim(\operatorname{Im}(B)) = 2$

Simona Mikovčíková

(2.) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad A_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Charakteristický polynóm

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda+1)(\alpha-\lambda)(-\lambda+1) + 2\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot(\alpha-\lambda)\cdot 1$$

$$-2\cdot 0\cdot(-\lambda+1) - (-\lambda+1)\cdot 0\cdot 2 = -\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2\alpha\lambda$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \alpha$$

$\ker(M - \lambda_1 I)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\ker(M - \lambda_1 I) = \{(s, 0, s) : s \in \mathbb{R}\}$

$x_3 = s$

$x_2 = 0$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$x_1 = s$

$\ker(M - \lambda_2 I)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = t$

$x_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$x_1 = -t$

$\ker(M - \lambda_2 I) = \{(-t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$

$\ker(M - \lambda_3 I)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\alpha & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha & -\alpha^2+2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = k$

$x_2 = \frac{(-2+\alpha)}{2} k$

$x_1 = k$

$\ker(M - \lambda_3 I) = \{(k, \frac{(-2+\alpha)}{2} k, k) ; k \in \mathbb{R}\}$

Simona Rikovčíková

$X = \left((1, 0, 1), (-1, 0, 1), \left(1, \frac{-2+2}{2}, 1\right) \right)$

diagonálna matica existuje pozostáva z nenulových vlastných vektorov

X je lineárne nezávislá tica

$$[A]_{XX} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(3.) $T^2 = 2T$ dokážte : $\lambda \in \{0, 2\}$

Pre lineárnu transformáciu platí

$T \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$ ← vlastný vektor

vlastná hodnota

$T^2 \cdot v = \lambda \vec{v}$

$\underline{2Tv = \lambda v}$

$T^2 = 2T / \cdot v$

$T^2 v = 2Tv$

$\lambda^2 v = 2 \lambda v$

$\frac{\lambda^2}{\lambda} = 2$

$\lambda = \underline{\underline{2}}$

Simona Heikovučiká

4. $S: V \to V$ injektívna lineárna transformácia

$$\langle x,y\rangle_s = \langle Sx, Sy\rangle$$

Platí symetria

$s1 = \langle Sx, Sy\rangle$ $s2 = \langle Sy, Sx\rangle$, $s3 = \langle y, x\rangle_s$ symetria pôvodného skalárneho súčinu

Pre skalárny súčin platí:

$\langle x+y, z\rangle_s$: $t = \langle x, z\rangle_s + \langle x, y\rangle_s$ definícia Platí linearita

$s1 = \langle S(x+y), Sz\rangle$ definícia $s2 = \langle Sx + Sy, Sz\rangle$ linearita zobrazenia $s3 = \langle Sx, Sz\rangle + \langle Sx, Sy\rangle$ linearita skal. súč

...

$\langle ax, y\rangle_s$ násobenie skalárom

$s1 = \langle aSx, Sy\rangle$ linearita zobrazenia $s2 = a\langle Sx, Sy\rangle$ linearita pôvodného sk. s. $s_3 = \langle S(ax), Sy\rangle$ definícia nového skalárneho súčinu

$t = a\langle x, y\rangle_s$

$\langle x, x\rangle_s \geq 0$ nezápornosť

$$\langle x, x\rangle_s = \langle Sx, Sx\rangle \geq 0$$

$\langle x, x\rangle_s = 0$ platí len vtedy, ak $x=0$ $\langle Sx, Sx\rangle = 0$ platí len vtedy, ak $x=0$

$\implies$ je to skalárny súčin

5. a.) $A: V \to V$ je lineárna transformácia

ak $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ pričom $\vec{x} \neq 0$, potom λ je vlastná hodnota

$\vec{x}$ je k nej prislúchajúci vlastný vektor

λ môžem určiť ako prvky jadra lineárnej transformácii.