



**Kauno technologijos universitetas**

Informatikos fakultetas

## **1 laboratorinis darbas**

Skaitiniai metodai ir algoritmai (P170B115)

---

**Simona Ragauskaitė IFF-0/3 gr.**

Studentė

**Doc. Andrius Kriščiūnas**  
**Prof. Rimantas Barauskas**

Dėstytojai

---

**Kaunas, 2022**

## Turinys

<b>1. Darbo užduotis.....</b>	<b>3</b>
1.1. Išspręsti netiesines lygtis: a) daugianaris $f(x) = 0$ , b) transcendentinė funkcija $g(x) = 0$ ;	3
1.2. Pagal pateiktą uždavinio sąlygą sudaryti netiesinę lygtį su pasirinktu skaitiniu metodu ją išspręsti. ....	3
<b>2. Užduoties sprendimas .....</b>	<b>4</b>
2.1. Daugianario „grubaus“ ir „tiksliesnio“ šaknų intervalų nustatymas .....	4
2.2. Daugianario ir transcendentinės funkcijų grafikai .....	5
2.3. Skenavimo nekintančiu žingsniu algoritmo pritaikymas .....	6
2.4. Netiesinių lygčių sprendimo metodai .....	7
2.5. Rezultatų patikrinimas naudojant išorinius išteklius .....	9
2.6. Tekstinio uždavinio sprendimas .....	10
<b>3. Išvados .....</b>	<b>11</b>

## 1. Darbo užduotis

2 variantas

1.1. Išspręsti netiesines lygtis: a) daugianaris  $f(x) = 0$ , b) transcendentinė funkcija  $g(x) = 0$ ;

Varianto Nr.	Daugianariai $f(x)$	Funkcijos $g(x)$	Metodai <sup>1</sup>
2	$-1.35x^4 - 0.93x^3 + 26.46x^2 + 16.20x - 76.19$	$\frac{\ln(x)}{\sin(2x) + 1,5} - \frac{x}{7}; 1 \leq x \leq 10$	1, 3, 5

1.2. Pagal pateiktą uždavinio sąlygą sudaryti netiesinę lygtį su pasirinktu skaitiniu metodu ją išspręsti.

### Uždavinys variantams 1-5

Vertikaliai į viršų iššauto objekto greitis užrašomas dėsnio  $v(t) = v_0 e^{-\frac{ct}{m}} + \frac{mg}{c} \left( e^{-\frac{ct}{m}} - 1 \right)$ , čia  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , pasipriešinimo koeficientas  $c$ , pradinis greitis  $v_0$ . Kokia objekto masė, jeigu žinoma, kad laiko momentu  $t_1$  objekto greitis buvo lygus  $v_1$ ?

Varianto Nr.	$v_0, \text{m/s}$	$c, \text{kg/s}$	$t_1, \text{s}$	$v_1, \text{m/s}$
2	80	0,1	4	21

Metodo Nr.	Metodo pavadinimas
1	Stygų
2	Paprastųjų iteracijų
3	Niutono (liestinių)
4	Kvazi-Niutono (kirstinių)
5	Skenavimo su mažėjančiu žingsniu

## 2. Užduoties sprendimas

### 2.1. Daugianario „grubaus“ ir „tikslėsio“ šaknų intervalų nustatymas

#### Daugianario „grubus“ šaknų įvertis

Daugianaris:  $f(x) = -1.35x^4 - 0.93x^3 + 26.46x^2 + 16.20x - 76.19$

„Grubaus“ įverčio formulė:  $R = 1 + \frac{\max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|}{a_n} > |x|$

Kai:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  ir  $a_n > 0$ .

Norėdama pritaikyti šią formulę turiu pasidauginti iš  $(-1)$ , kadangi  $a_n < 0$ .

$$f(x) = 1.35x^4 + 0.93x^3 - 26.46x^2 - 16.20x + 76.19$$

Intervalų skaičiavimui naudojami koeficientai:

$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
1.35	0.93	-26.46	-16.20	76.19

Įsistačius koeficientus gaunu:  $R = 1 + \frac{76.19}{1.35} \approx 57.44$

Gaunu tokį grubios šaknies įvertį:  $-57.44 < x < 57.44$ .

#### Daugianario „tikslėsio“ šaknų įvertis

„Tikslėsio“ įverčio formules:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ kai } a_n > 0$$

$$R_{teig} = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}}$$

$$B = \max_{0 \leq i \leq n-1} (|a_i|, a_i < 0)$$

$$k = n - \max_{0 \leq i \leq n-1} (i, a_i < 0)$$

$$-\min(R, R_{neig}) \leq x \leq \min(R, R_{teig})$$

Skaičiuoju tikslesnę teigiamo įverčio reikšmę:

$$f(x) = 1.35x^4 + 0.93x^3 - 26.46x^2 - 16.20x + 76.19$$

Intervalų skaičiavimui naudojami koeficientai:

$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
1.35	0.93	-26.46	-16.20	76.19

$$k = 4 - 2 = 2$$

$$B = 26.46$$

$$R_{teig} = 1 + \sqrt[2]{\frac{26.46}{1.35}} = 1 + \sqrt{19.6} = 5.43$$

Skaičiuoju tikslesnę neigiamo įverčio reikšmę:

$$f(-x) = 1.35x^4 - 0.93x^3 - 26.46x^2 + 16.20x + 76.19$$

Intervalų skaičiavimui naudojami koeficientai:

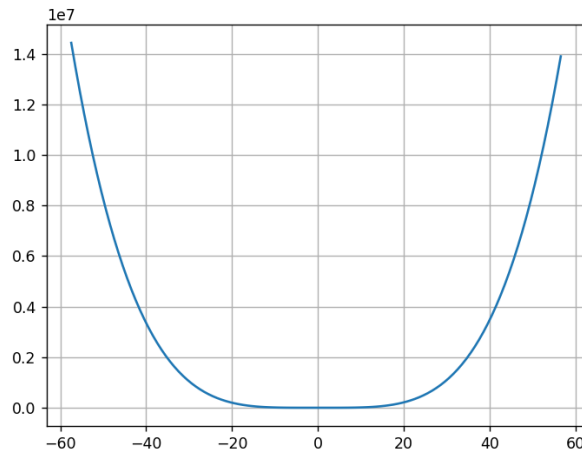
$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
1.35	-0.93	-26.46	16.20	76.19

$$k = 4 - 3 = 1$$

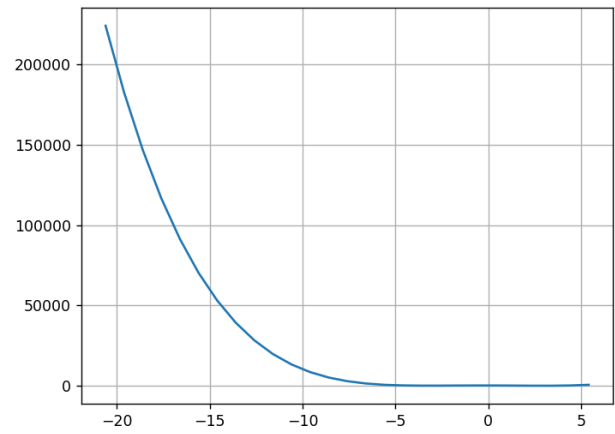
$$B = 26.46$$

$$R_{neig} = 1 + \sqrt[1]{\frac{26.46}{1.35}} = 1 + 19.6 = 20.6$$

$$-20.6 \leq x \leq 5.43$$



„Grubaus“ intervalo grafikas



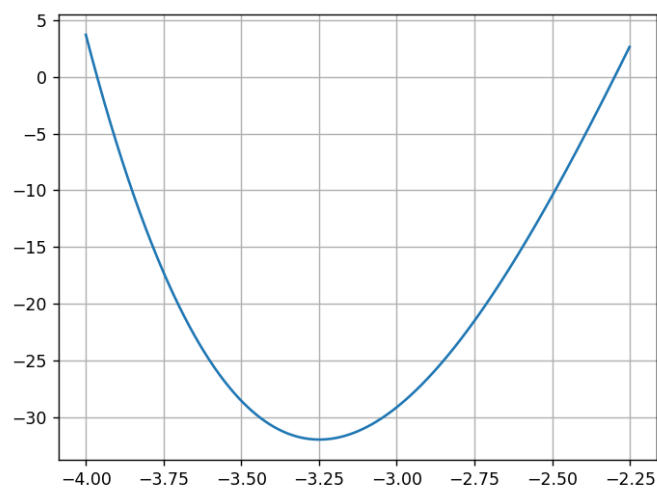
„Tikslesnio“ intervalo grafikas

## 2.2. Daugianario ir transcendentinės funkcijų grafikai

Daugianaris:  $f(x) = -1.35x^4 - 0.93x^3 + 26.46x^2 + 16.20x - 76.19 \mid : (-1)$

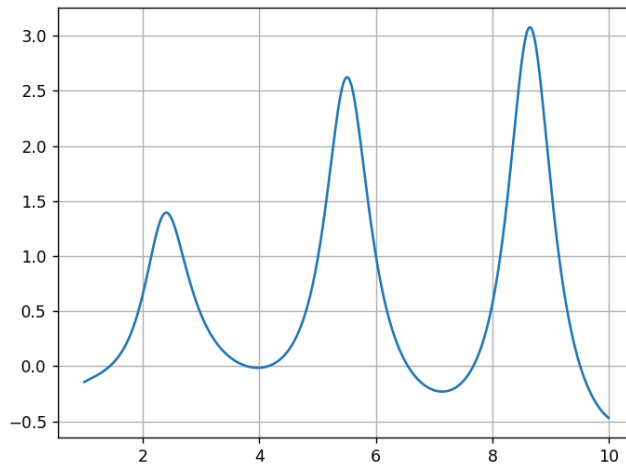
$$f(x) = 1.35x^4 + 0.93x^3 - 26.46x^2 - 16.20x + 76.19$$

Grafiko šiek tiek pakeičiau ašis, intervale  $-4 < x < -2.25$ , grafike aiškiai yra matyti daugianario šaknys.



Funkcijos  $f(x)$  grafikas,  $-4 < x < -2.25$  intervale

Transcendentinė funkcija:  $g(x) = \frac{\ln(x)}{\sin(2x)+1.5} - \frac{x}{7}; 1 \leq x \leq 10$



Funkcijos  $g(x)$  grafikas pagal duotąjį intervalą

### 2.3. Skenavimo nekintančiu žingsniu algoritmo pritaikymas

Šaknų intervalams surasti naudosiu skenavimo nekintančių žingsnių metodą. Žingsnį gausiu padalinus visą „tikslesnį“ intervalą iš 100. Tada eisiu per visą intervalą ir tikrinsiu ar dabartinio  $x$  ženklas nesutampa su  $x + \text{žingsnio ženklu}$ . Jei nesutampa, tuomet reiškia, kad intervale yra šaknis.

```
def getInterval(start, end):
    step = (end - start) / 100
    x = start
    intervals = []

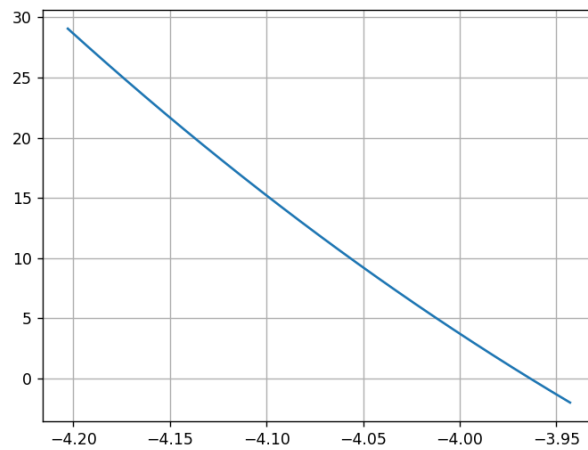
    while x < end:
        x_next = x + step
        if (f(x) > 0 > f(x_next)) or (f(x_next) > 0 > f(x)):
            intervals.append([x, x_next])
        x = x_next

    return intervals
```

Daugianario funkcijos gautieji intervalai:

Daugianario gautieji intervalai, kuriuose yra funkcijos šaknis				
Intervalo pradžia	-4.2029	-2.3801	1.5231	3.8656
Intervalo pabaiga	-3.9426	-2.1207	1.7834	4.1258

Pasiimu pirmą daugianario intervalą:  $-4.2029 \leq x \leq -3.9426$ , jame yra ryškiai matoma ieškomoji šaknis.

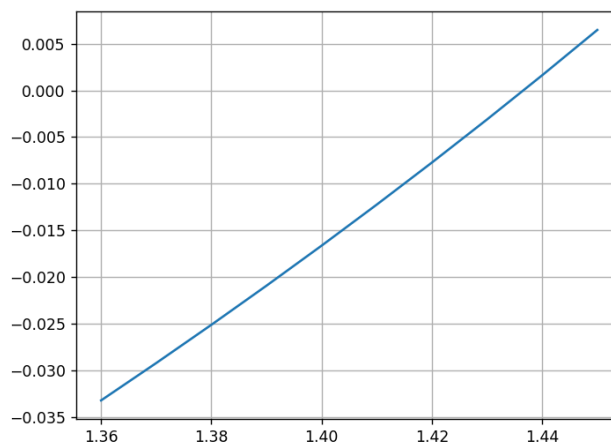


Tą patį metodą pritaikau transcendentinei funkcijai.

Transcendentinės funkcijos gautieji intervalai:

Daugianario gautieji intervalai, kuriuose yra funkcijos šaknis						
Intervalo pradžia	1.36	3.69	4.15	6.49	7.66	9.46
Intervalo pabaiga	1.45	3.79	4.24	6.58	7.75	9.55

Pasiimu pirmą transcendentinės funkcijos intervalą:  $1.36 \leq x \leq 1.45$  intervalą, jame yra ryškiai matoma ieškomoji šaknis.



## 2.4. Netiesinių lygčių sprendimo metodai

Skenavimo nekintančiu žingsniu metodo dėka atsiskyrė daugianario ir funkcijos šaknis. Jas tikslinsiu trimis metodais: 1 – stygų, 3 – Niutono(liestinių) ir 5 – skenavimo su mažėjančiu žingsniu.

Metodų kodai:

1 – Stygų

```
def sign(number):
    if (number > 0):
        return 1

    if (number < 0):
        return -1

    return 0
def f_derivative(x):
```

```

return -27*x**3 / 5 - 279*x**2 / 100 + 1323*x / 25 + 81/5

def absolute_terminate(function, x_mid, epsilon=1e-6):
    return abs(function(x_mid)) < epsilon
def ChordMethod(x_n, x_n1, iteration=1):
    if (x_n > x_n1):
        raise Exception("Incorrect function usage")

    k = abs(funkcija.f(x_n) / funkcija.f(x_n1))
    x_mid = (x_n + k * x_n1) / (1 + k)

    if (funkcija.f(x_mid) == 0 or absolute_terminate(funkcija.f, x_mid)):
        return x_mid, iteration

    if (sign(funkcija.f(x_mid)) == sign(funkcija.f(x_n))):
        return ChordMethod(x_mid, x_n1, iteration + 1)

    return ChordMethod(x_n, x_mid, iteration + 1)

```

### 3 – Niutono (liestinių)

```

def NewtonsMethod(f, x1, x2):
    count = 0
    x = (x1 + x2) / 2
    while (abs(f(x))) > 1e-10:
        fx = f(x)
        fdx = derivative(f, x, dx=1e-6)
        x = x - (fx / fdx)
        count += 1
    return x, count

```

### 5 – Skenavimo su mažėjančiu žingsniu

```

def scanDecreasing(x1, x2):
    zingsnis = (x2 - x1) / 100
    while np.abs(funkcija.f(x1)) > 0.001 and x1 + zingsnis <= x2:
        if np.sign(funkcija.f(x1)) != np.sign(funkcija.f(x1 + zingsnis)):
            zingsnis /= 2
            continue
        x1 += zingsnis
    return x1

```

### Daugianarės funkcijos rezultatai pritaikius metodus:

1 - Stygu metodo rezultatai:

Intervalas	Gautoji saknis	Funkcijos reikšmė saknyje	Tikslumas	Iteracijų skaičius
[-4.202871103731489, -3.942599216489132]	-3.9636869405199913	-5.747102846953567e-07	-5.8121183421633305e-09	9
[-2.3809678930349882, -2.120696005792631]	-2.2988975773137166	-5.2078718226766796e-08	9.538996259550458e-10	5
[1.523110415600371, 1.7833823028427283]	1.5326982807593994	1.4648719570686808e-08	2.0540191769669036e-10	3
[3.8655574007815865, 4.125829288023944]	4.040997347237052	-9.625379107092158e-07	5.601166641611144e-09	6

3 - Niutono (liestinių) metodo rezultatai:

Intervalas	Gautoji saknis	Funkcijos reikšmė saknyje	Tikslumas	Iteracijų skaičius
[-4.202871103731489, -3.942599216489132]	-3.9636869463321096	-9.947598300641403e-14	0.0	4
[-2.3809678930349882, -2.120696005792631]	-2.2988975763598107	0.0	-6.21724893790877e-15	3
[1.523110415600371, 1.7833823028427283]	1.5326982809648133	0.0	-1.199040866595169e-14	3
[3.8655574007815865, 4.125829288023944]	4.040997352838219	7.105427357601002e-14	0.0	4



5 - Skenavimo su mazejanciu zingsniu metodo rezultatai:

Intervalas	Gautoji saknis	Funkcijos reiksme saknyje	Tikslumas	Iteraciju skaicius
[ -4.202871103731489 , -3.942599216489132 ]	-3.963695472974616	0.000843132538435043	8.526642506279103e-06	106
[ -2.3809678930349882 , -2.120696005792631 ]	-2.298900913588889	-0.00018219672801933484	3.3372290721978004e-06	40
[ 1.523110415600371 , 1.7833823028427283 ]	1.5326876077012421	0.0007611442551223035	1.067326355919107e-05	17
[ 3.8655574007815865 , 4.125829288023944 ]	4.040996919775874	-7.441999727575421e-05	4.330623450954363e-07	77

## Transcendentinės funkcijos rezultatai pritaikius metodus:

1 - Stygu metodo rezultatai:

Intervalas	Gautoji saknis	Funkcijos reiksme saknyje	Tikslumas	Iteraciju skaicius
[ 1.3600000000000003 , 1.4500000000000004 ]	1.436583630240603	-1.7593726106546193e-07	3.698647856875681e-07	3
[ 3.6999999999999984 , 3.7899999999999983 ]	3.7873668858763323	-5.167156151841823e-07	-3.296116121820347e-06	4
[ 4.149999999999998 , 4.2399999999999975 ]	4.152512754492797	-2.5518002877422674e-07	1.4752528985084723e-06	5
[ 6.489999999999994 , 6.579999999999994 ]	6.549961802631097	-7.480572701279442e-07	-8.607751258438157e-07	4
[ 7.659999999999992 , 7.749999999999992 ]	7.6702095157680095	-2.3141121396896835e-07	2.252854658379988e-07	5
[ 9.459999999999999 , 9.549999999999999 ]	9.504326920205138	-6.718177942843795e-07	-3.9608525881362766e-07	4

3 - Niutono (liestiniu) metodo rezultatai:

Intervalas	Gautoji saknis	Funkcijos reiksme saknyje	Tikslumas	Iteraciju skaicius
[ 1.3600000000000003 , 1.4500000000000004 ]	1.4365840001103989	2.375266650034291e-12	-5.0102144655284064e-12	3
[ 3.6999999999999984 , 3.7899999999999983 ]	3.787363589760206	0.0	4.44089209850626e-15	4
[ 4.149999999999998 , 4.2399999999999975 ]	4.152514229745713	0.0	-1.7763568394002505e-14	4
[ 6.489999999999994 , 6.579999999999994 ]	6.549960941855686	9.880984919163893e-15	2.851052727237402e-13	3
[ 7.659999999999992 , 7.749999999999992 ]	7.670209741091504	3.90329990516633e-11	-3.802913539630026e-11	3
[ 9.459999999999999 , 9.549999999999999 ]	9.504326524119056	6.66577903984944e-13	8.22453216642316e-13	2

5 - Skenavimo su mazejanciu zingsniu metodo rezultatai:

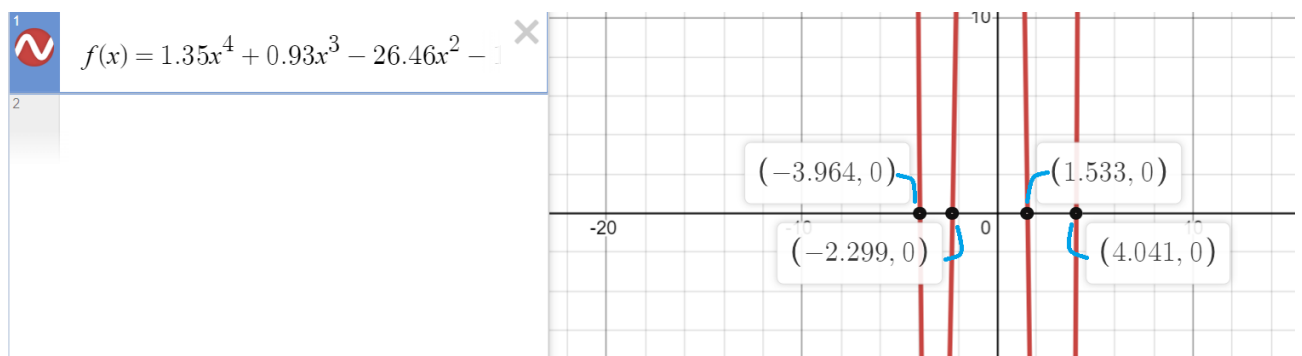
Intervalas	Gautoji saknis	Funkcijos reiksme saknyje	Tikslumas	Iteraciju skaicius
[ 1.3600000000000003 , 1.4500000000000004 ]	1.4346999999999992	-0.0008940563563116233	0.0018840001053965771	85
[ 3.6999999999999984 , 3.7899999999999983 ]	3.7819000000000006	0.0008687962620822498	0.005463589760200893	93
[ 4.149999999999998 , 4.2399999999999975 ]	4.149999999999998	-0.0004314411465033974	0.0025142297456977047	2
[ 6.489999999999994 , 6.579999999999994 ]	6.549399999999973	0.00048783062459500925	0.0005609418559986423	68
[ 7.659999999999992 , 7.749999999999992 ]	7.669899999999989	-0.00031801047066992716	0.00030974105348668957	13
[ 9.459999999999999 , 9.549999999999999 ]	9.504099999999974	0.00038432545539190954	0.00022652411990442545	51

Mažiausią iteracijų skaičių turi Niutono (liestinių) metodas, tačiau tiksliausias metodas gavosi stygu.

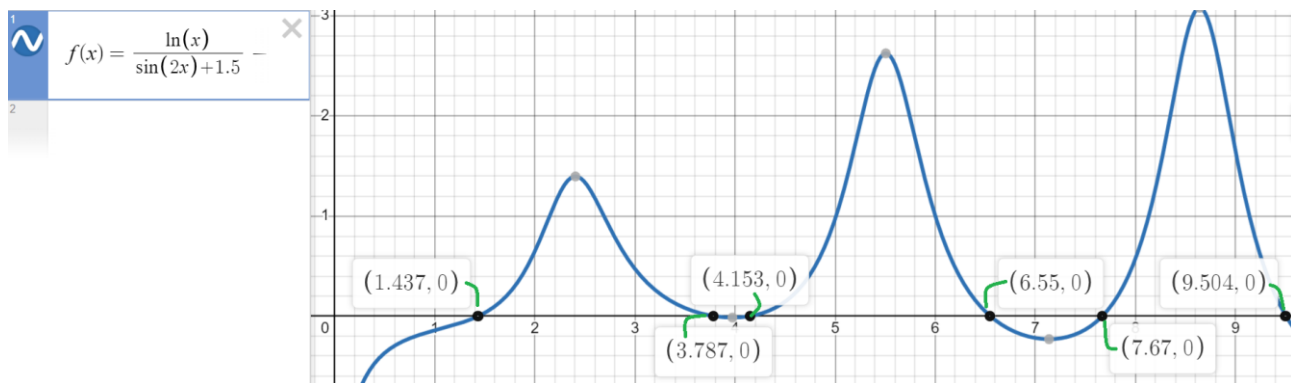
## 2.5. Rezultatų patikrinimas naudojant išorinius išteklius

Šaknų reikšmes tikrinu <https://www.desmos.com/calculator> tinklapyje, nes rekomenduotame tinklapyje wolframalpha.com transcendentinės funkcijos šaknų nepateikia.

Daugianarės funkcijos rezultatai:



Transcendentinės funkcijos rezultatai:



## 2.6. Tekstinio uždavinio sprendimas

Vertikaliai į viršų iššauto objekto greitis užrašomas dėsnio:  $v(t) = v_0 e^{-\frac{ct}{m}} + \frac{mg}{c} (e^{-\frac{ct}{m}} - 1)$ , čia  $g = 9.5 \text{ m/s}^2$ , pasipriešinimo koeficientas  $c$ , pradinis greitis  $v_0$ . Kokia objekto masė, jeigu žinoma, kad laiko momentu  $t_1$  objekto greitis buvo lygus  $v_1$ ?

$$v_0 = 80 \text{ m/s}$$

$$c = 0.1 \text{ kg/s}$$

$$t_1 = 4 \text{ s}$$

$$v_1 = 21 \text{ m/s}$$

Susidarau netiesinę lygtį:  $f(m) = 80 e^{-\frac{0.1 \times 4}{m}} + \frac{9.8 \times m}{0.1} (e^{-\frac{0.1 \times 4}{m}} - 1) - 21$ . Ją spręsiu skenavimo su mažėjančiu žingsniu metodu (nes nereikia išvestinės ir nėra didelis metodas).

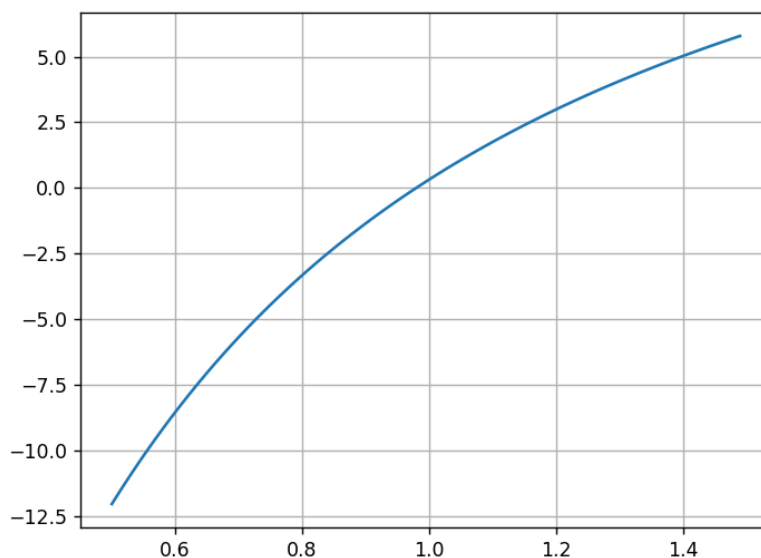
Metodo žingsnis – 0,01

Intervalo pradžia – 0,5

Intervalo pabaiga – 1,5

Surasta šaknis – 0,9797265625000003

Surastos šaknies tikslumas – 3,638442079401116e-05



Tekstinio uždavinio funkcijos grafikas

### 3. Išvados

Pagal gautus šaknų rezultatus, galiu teigti:

- Iš visų trijų metodų Niutono (liestinės) metodas yra greičiausias, nes mažiausias iteracijų skaičius. Tačiau yra trūkumas, nes reikia turėti funkcijos išvestinę.
- Tiksliausias rezultatus davė stygų metodas. Ir iteracijų skaičiumi nebuvo labai nutolęs nuo Niutono (liestinės) metodo.
- Skenavimas su mažėjančiu skaičiumi turėjo didžiausius iteracijų skaičius bei nebuvo.

Metodai buvo apskaičiuoti pagal skirtingas iteracijos sąlygas, todėl nustatyti, kuris greičiausias yra negaliu.