



Fondamenti di Automatica

Analisi di Funzioni di Trasferimento: Bode, Luogo delle Radici (con Control Systems toolbox)

Prof. Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

E-mail: marcello.bonfe@unife.it

Matlab: diagrammi di Bode e luogo delle radici

- ➡ Il Control Systems Toolbox include funzioni specifiche per la creazione di tali grafici per una funzione di trasferimento
- ➡ Si consideri come esempio la seguente FdT:

$$G(s) = \frac{1 + \frac{s}{0.1}}{s^2(1 + s) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

```
>> s=tf('s')
```

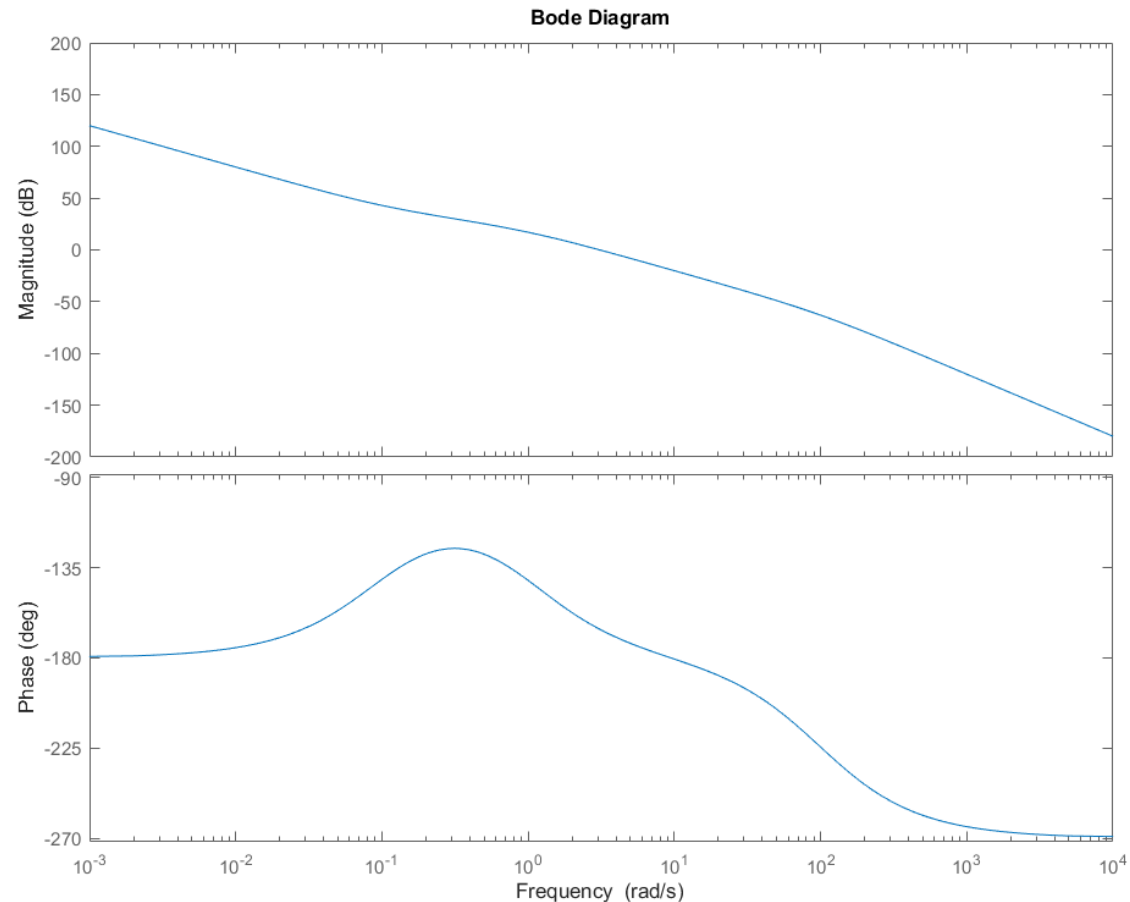
```
>> G=(1+s/0.1)/(s^2*(1+s)*(1+s/100))
```

NOTA: nell'ultimo comando è usata la fattorizzazione alle costanti di tempo e queste ultime sono reciproche delle pulsazioni di “rottura” nel diagramma di Bode approssimato: per lo **zero**, si ha $\tau_z=1/0.1=10$; per i **poli**, oltre a quello nullo con molteplicità 2, si ha $\tau_{p1}=1$, $\tau_{p2}=1/100=0.01$

Matlab: diagrammi di Bode

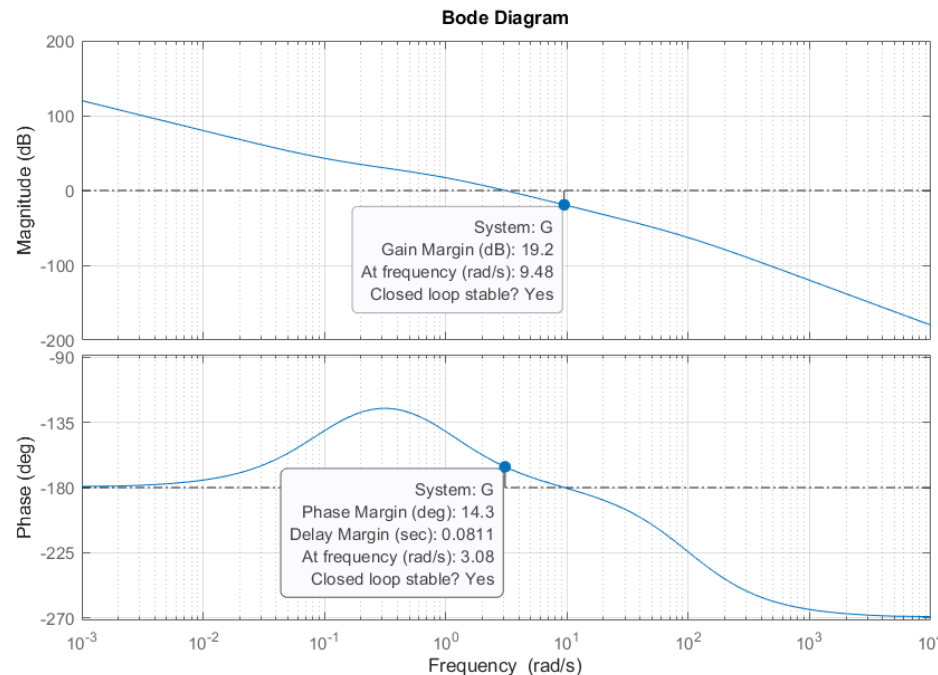
- Una volta definita la FdT, è immediato visualizzare il corrispondente **diagramma di Bode (esatto)**:

```
>> bode (G)
```



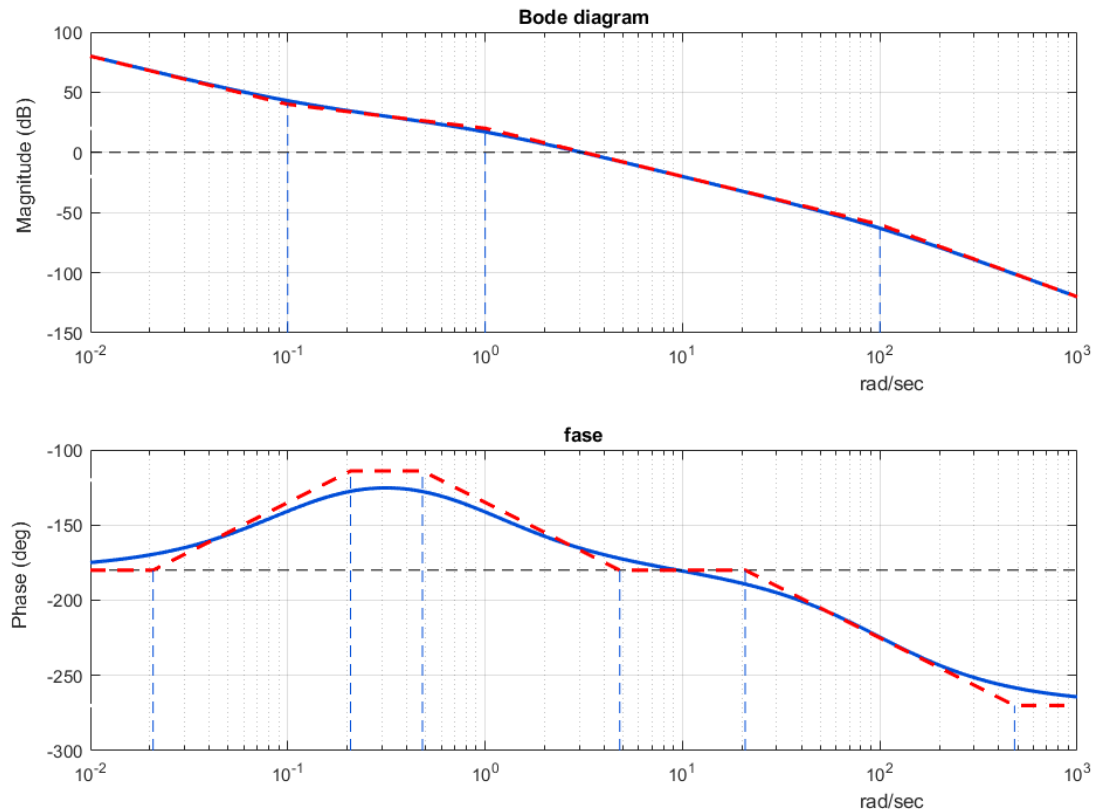
Matlab: diagrammi di Bode

- Opzioni sul grafico del **diagramma di Bode**:
 - `>> grid on` evidenzia la griglia (in scala logaritmica)
 - Con tasto destro del mouse, menu *Characteristics* e opzione All (o minimum) stability margins, vengono evidenziati i **margini di ampiezza (in dB!!)** e fase:



Matlab: diagrammi di Bode

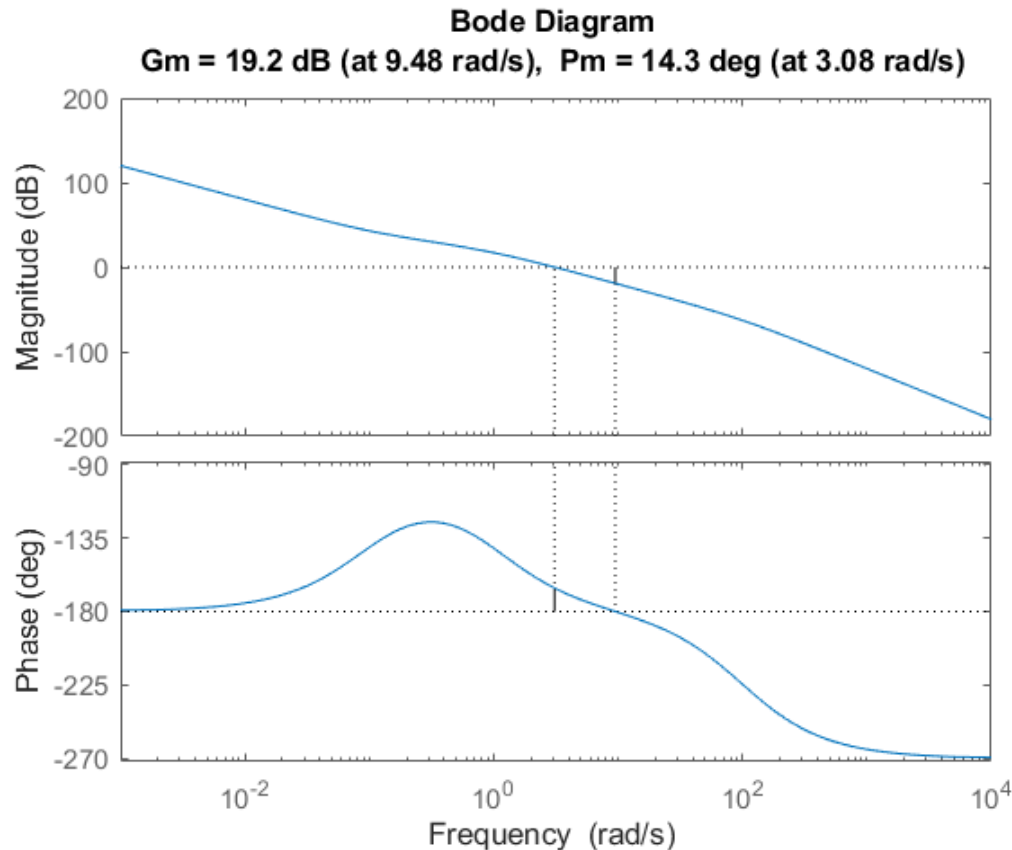
- ➡ **Diagramma di Bode approssimato:** linea spezzata (qui aggiunta manualmente!) che raccorda approssimazioni asintotiche del diagramma esatto, con punti di rottura nel grafico dell'ampiezza a pulsazioni reciproche delle costanti di tempo di poli/zeri reali (o pulsazioni naturali di poli complessi e coniugati)



Matlab: diagrammi di Bode e criterio di Nyquist

► I margini di ampiezza e fase si possono visualizzare direttamente con il comando:

>> margin(G) → crea plot di Bode con margini evidenziati



Matlab: diagrammi di Bode e criterio di Nyquist

► I margini di ampiezza e fase si possono anche memorizzare nel workspace, con comando (che non crea plot):

```
>> [Gm, Pm, Wpi, Wc] = margin(G)
```

Gm =

9.0799 → Margine di ampiezza (**valore assoluto, no dB**)

Pm =

14.3402 → Margine di fase (in gradi)

Wpi =

9.4816 → Pulsazione ω_{π} associata a Gm

Wc =

3.0843 → Pulsazione ω_c associata a Pm

Matlab: diagrammi di Bode e margine di ampiezza

- Il margine di ampiezza corrisponde anche al cosiddetto **guadagno critico**, cioè un fattore moltiplicativo per $G(s)$ che, se questa è posta in retroazione, rende il sistema ad anello chiuso **semplicemente (o “marginalmente”) stabile**
- Si può verificare il comportamento “marginalmente” stabile come segue:

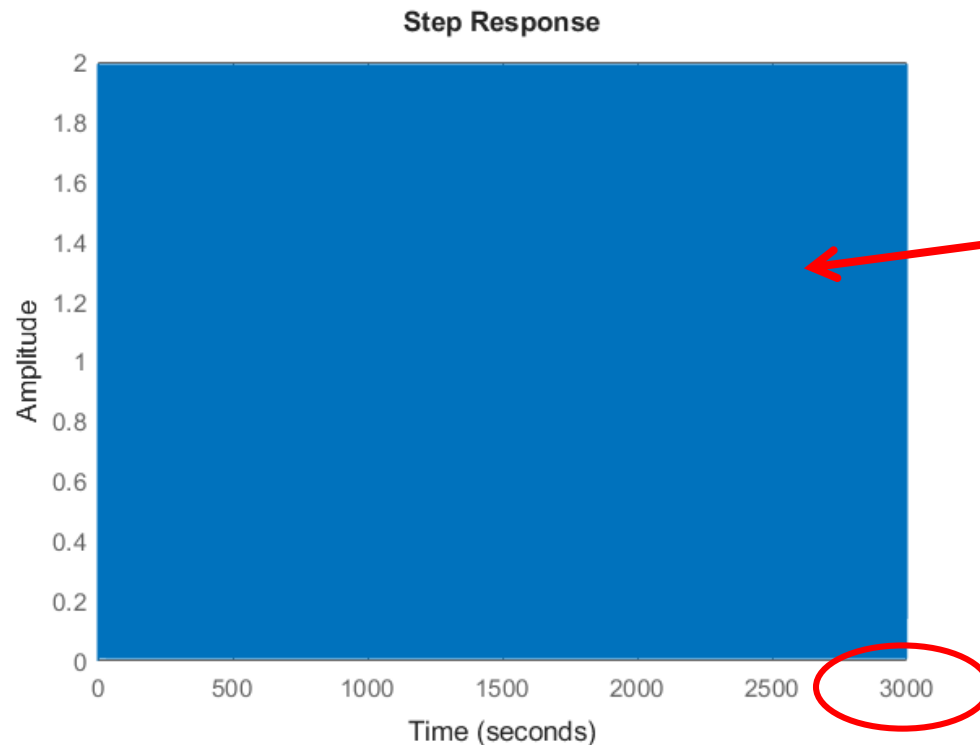
```
>> Kc = margin(G)
>> Gcl = feedback(Kc*G,1)
>> step(Gcl)
```

NOTA: nel caso di retroazione non unitaria, i.e. ramo di retroazione con FdT $H(s)$, le considerazioni sono analoghe considerando la FdT di anello $L(s)=G(s)*H(s)$:

- Margine di ampiezza di $L(s)$;
- $Gcl=feedback(Kc*G,H)$

Matlab: diagrammi di Bode e margine di ampiezza

- ➡ **NOTA:** il grafico ottenuto con il comando `step()` da un sistema *marginamente* stabile potrebbe mostrare di default un periodo di tempo troppo lungo per visualizzare aspetti quantitativi delle oscillazioni (*importanti invece per la taratura dei PID con metodo di Ziegler-Nichols!!*)



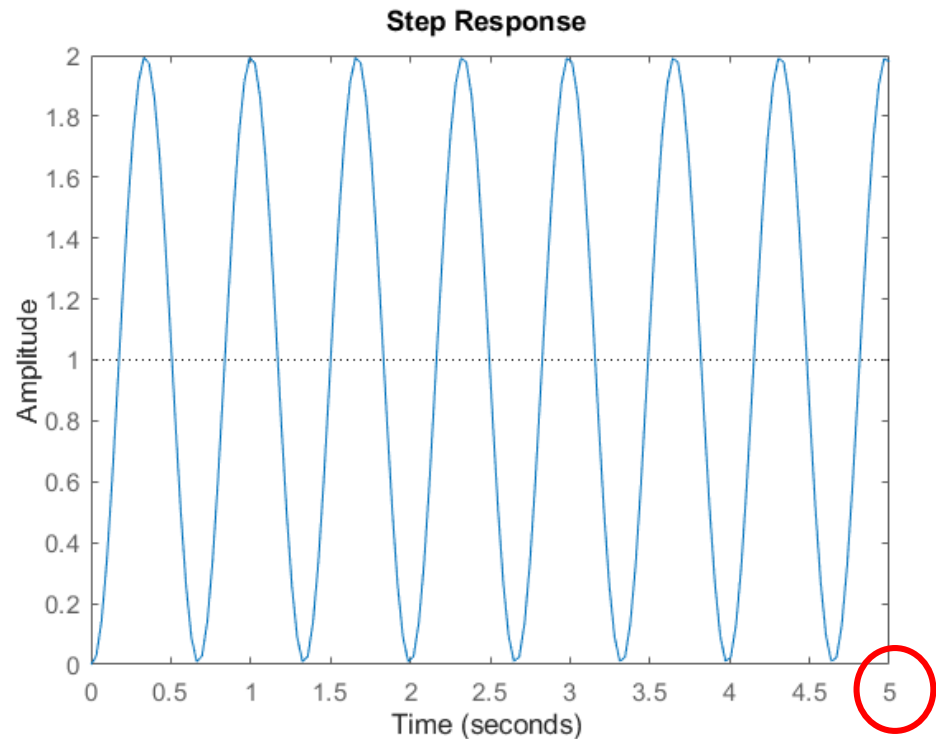
Non si direbbe,
ma è una
sinusoide con
valori massimi
= 2 e minimi = 0

Matlab: diagrammi di Bode e margine di ampiezza

- Per “zoomare” in modo più efficace rispetto all’uso del mouse sul plot, meglio sfruttare il secondo parametro (opzionale) del comando `step()`

```
>> step(Gc1, 5)
```

Tempo finale del
periodo plottato



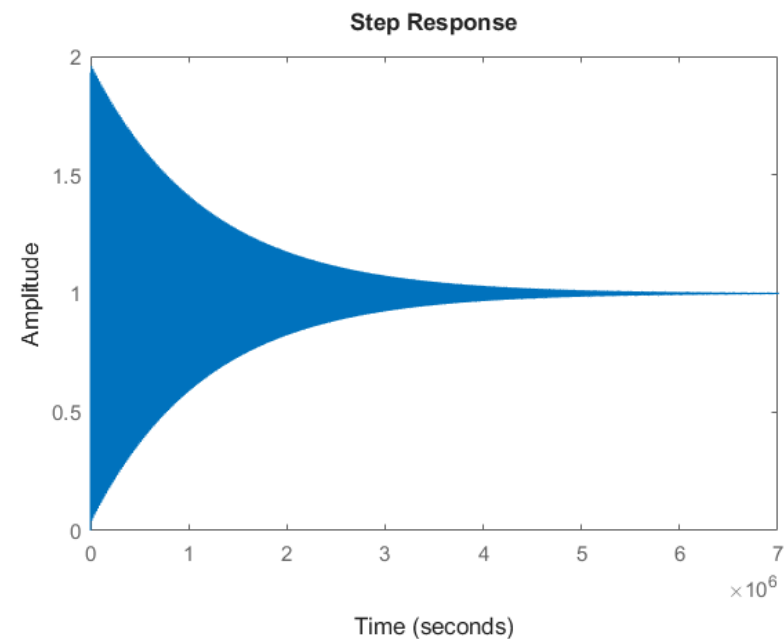
Matlab: diagrammi di Bode e margine di ampiezza

- ➡ **NOTA:** anche se calcolato precisamente dalla funzione `margin()`, il valore di guadagno critico potrebbe **NON** rendere il sistema ad anello chiuso **semplicemente stabile**, ma piuttosto **asintoticamente stabile** (con lentissimo smorzamento delle oscillazioni!) o addirittura **instabile** (con oscillazioni lentamissimamente crescenti!)

➡ Esempio:

```
>> G=(1+s/0.1)  
      /(s^2*(1+s/8)*(1+s/100))
```

SIA nei casi (di poco..) **asintoticamente stabili** **CHE** (di poco..) **instabili**, limitare il grafico ai primi secondi mostrerà oscillazioni pressochè costanti e, pertanto, utili per la **taratura dei regolatori PID con metodo di Ziegler-Nichols**



Matlab: diagrammi di Bode

- Anche i **valori numerici della risposta armonica** si possono memorizzare nel workspace (senza plot), con:

```
>> [mag,phase] = bode(G,omega)
```

omega è un vettore (opzionale) delle pulsazioni richieste

mag è il vettore delle ampiezze assolute, **NON dB***

phase è il vettore delle fasi (in gradi)

***NOTA:** la scala del grafico delle ampiezze di **bode()** è invece in dB!! Per allineare i risultati, sono disponibili le funzioni **db2mag()** e **mag2db()** ..

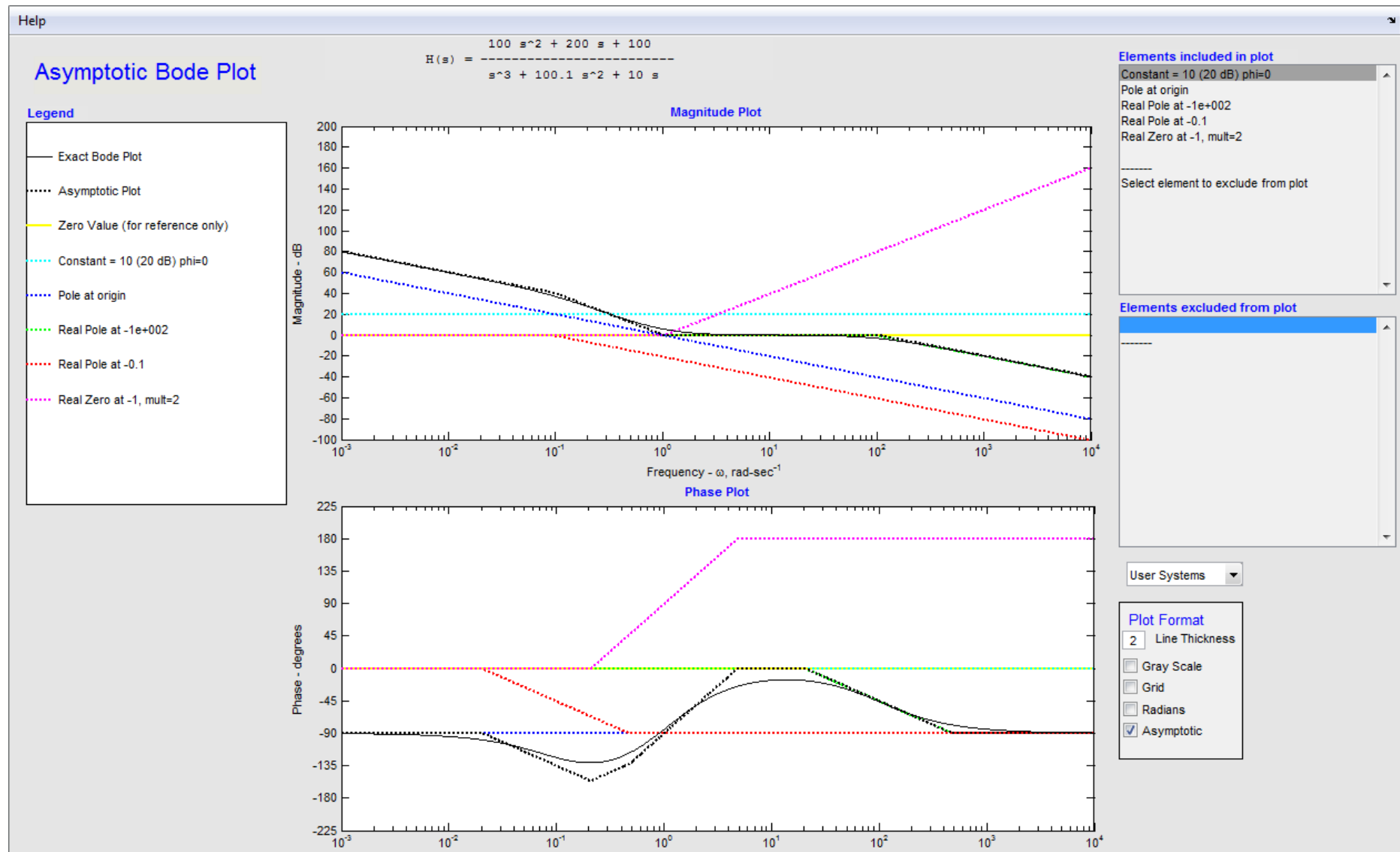
Matlab: diagrammi di Bode approssimati

- ➡ **NOTA:** il Control Systems Toolbox non ha opzioni per visualizzare i diagrammi di Bode asintotici (i.e. approssimati) introdotti comunemente nei corsi di base di Automatica (peraltro proprio per un rapido svolgimento manuale, qualitativo)
- ➡ Molti siti didattici propongono funzioni Matlab per confrontare il diagramma esatto e quello approssimato, quella **pubblicata su Google Classroom per questo corso** è stata adattata da <http://lpsa.swarthmore.edu/Bode/BodePlotGui.html>

>> BodePlotGui (G)

NOTA: la modifica è solo nei punti di rottura per il diagramma delle fasi..

Matlab: diagrammi di Bode



Matlab: luogo delle radici

► Il **luogo delle radici** è mostrato dalla funzione **rlocus()** :

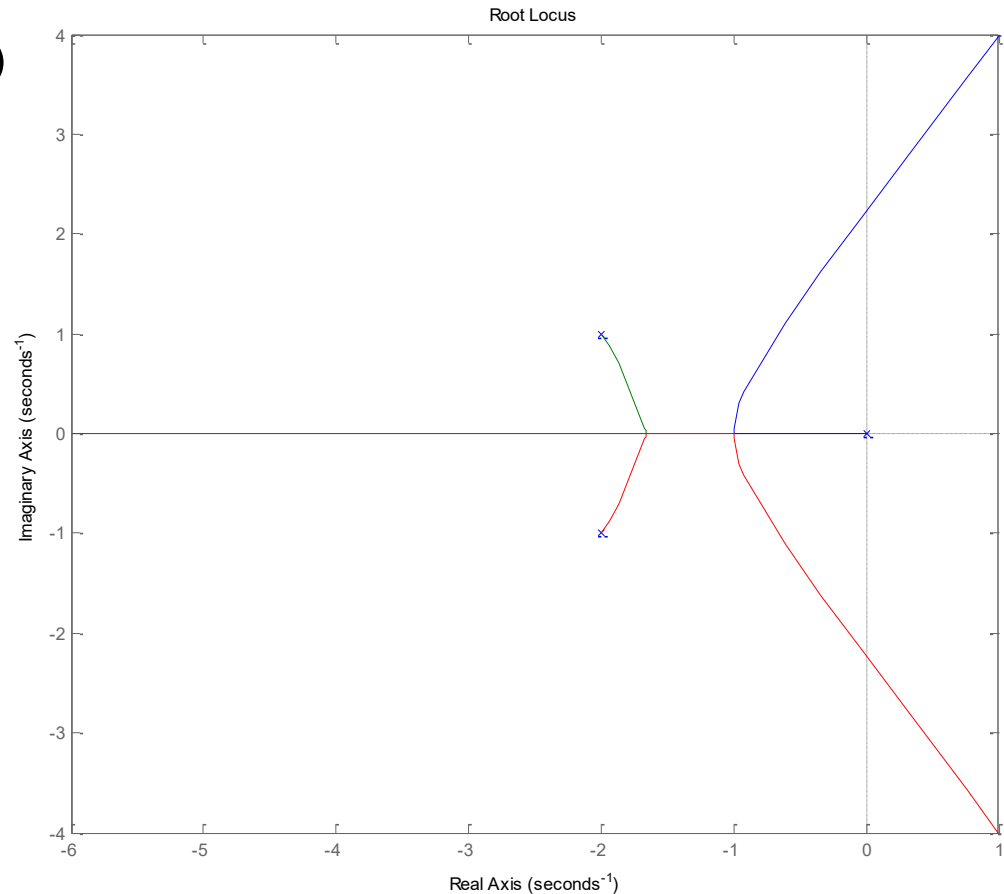
```
>> G=1/(s*(s^2+4*s+5))
```

Transfer function:


1

$s^3 + 4s^2 + 5s$

```
>> rlocus(G)
```

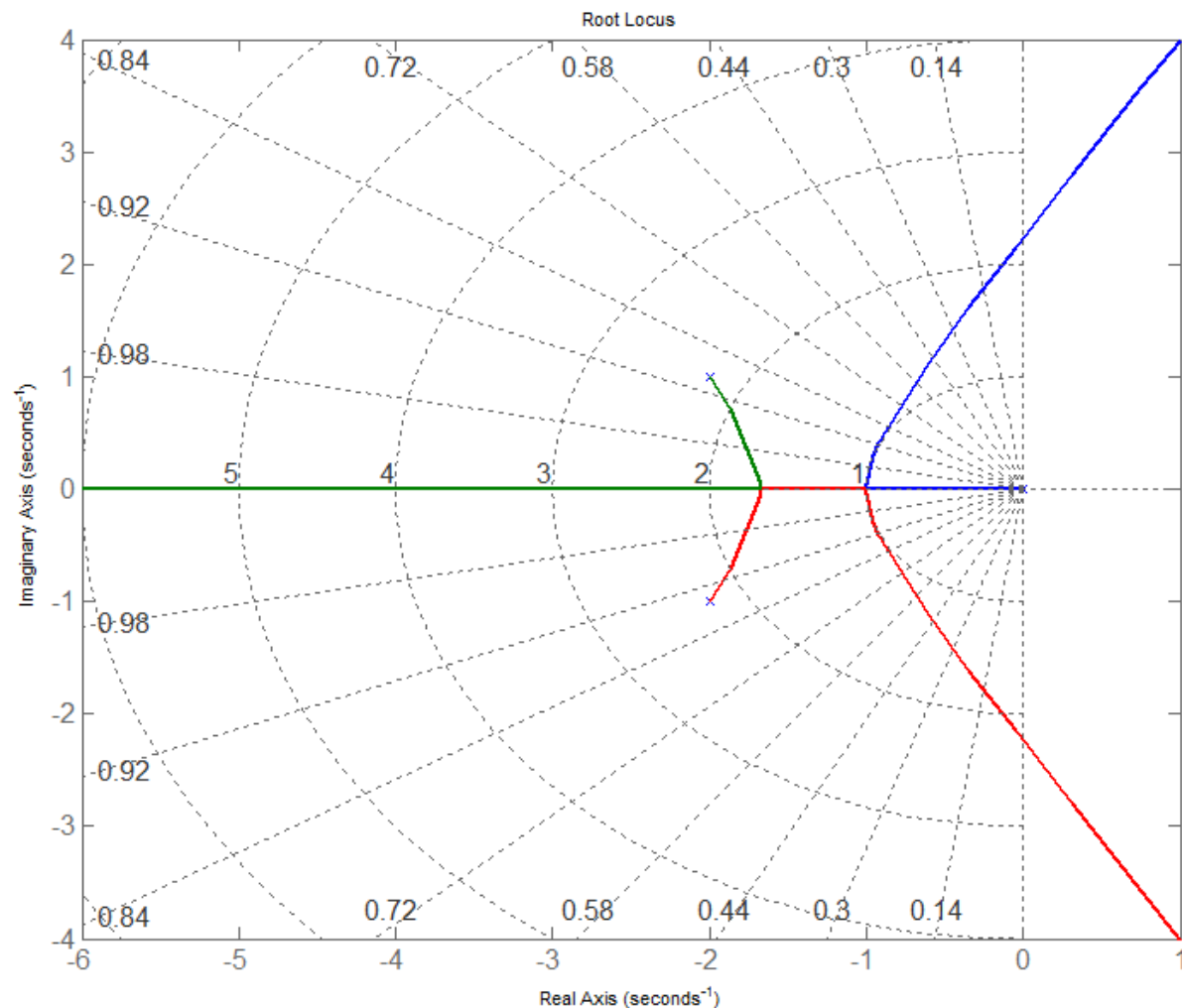


Matlab: luogo delle radici

- 
- ➡ **NOTA:** abilitando la *grid* (tramite menu via tasto destro del mouse o da linea di comando, sempre con **grid on**) vengono visualizzati:
- le **semi-circonferenze** sulle quali giacciono poli complessi coniugati con stessa pulsazione naturale ω_n
 - i **raggi** sui quali giacciono poli complessi coniugati con stesso coefficiente di smorzamento δ

Ovviamente, la griglia compare solo nel semipiano sinistro, perché tale regione corrisponde a quella nella quale devono giacere i poli per funzioni di trasferimento asintoticamente stabili!!

Matlab: luogo delle radici

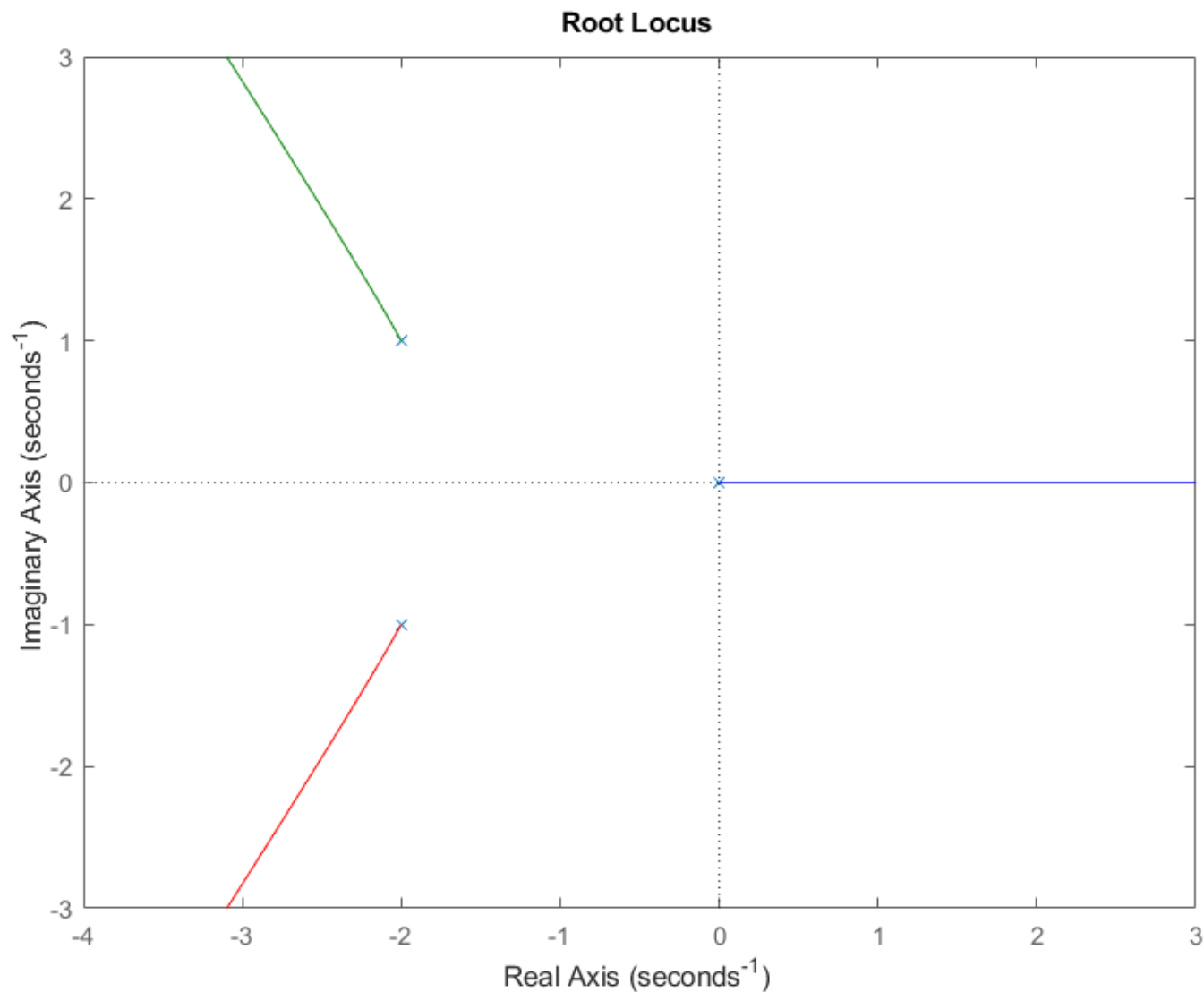


Matlab: luogo delle radici

- ➡ **NOTA:** la funzione `rlocus(G)` considera solo valori di $K > 0$ (i.e. luogo diretto) limitando automaticamente il valore massimo di K per ottimizzare l'aspetto grafico
- ➡ Per ottenere il luogo inverso, è necessario cambiare di segno al parametro passato alla funzione:

```
>> rlocus(-G)
```

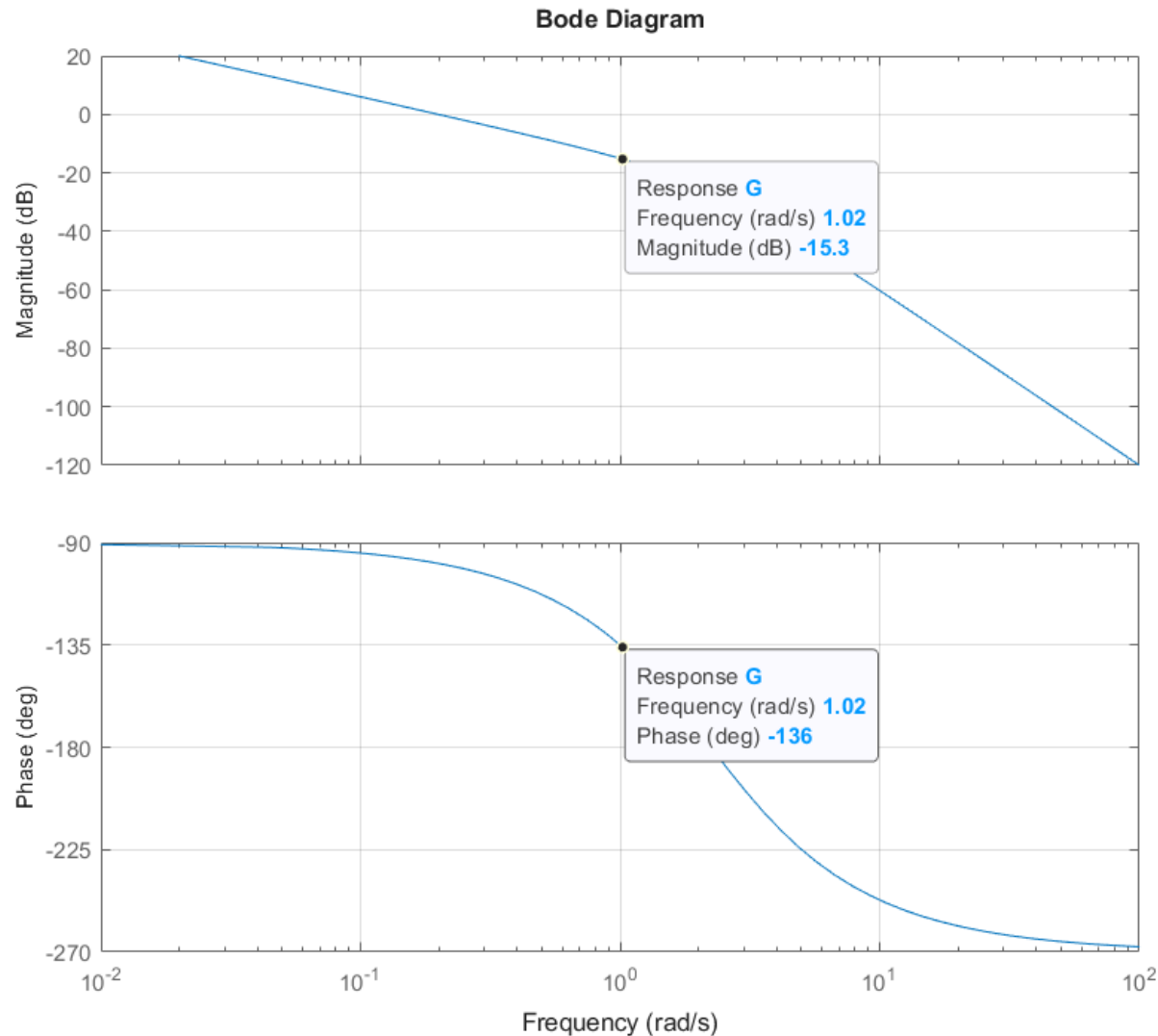
Matlab: luogo delle radici



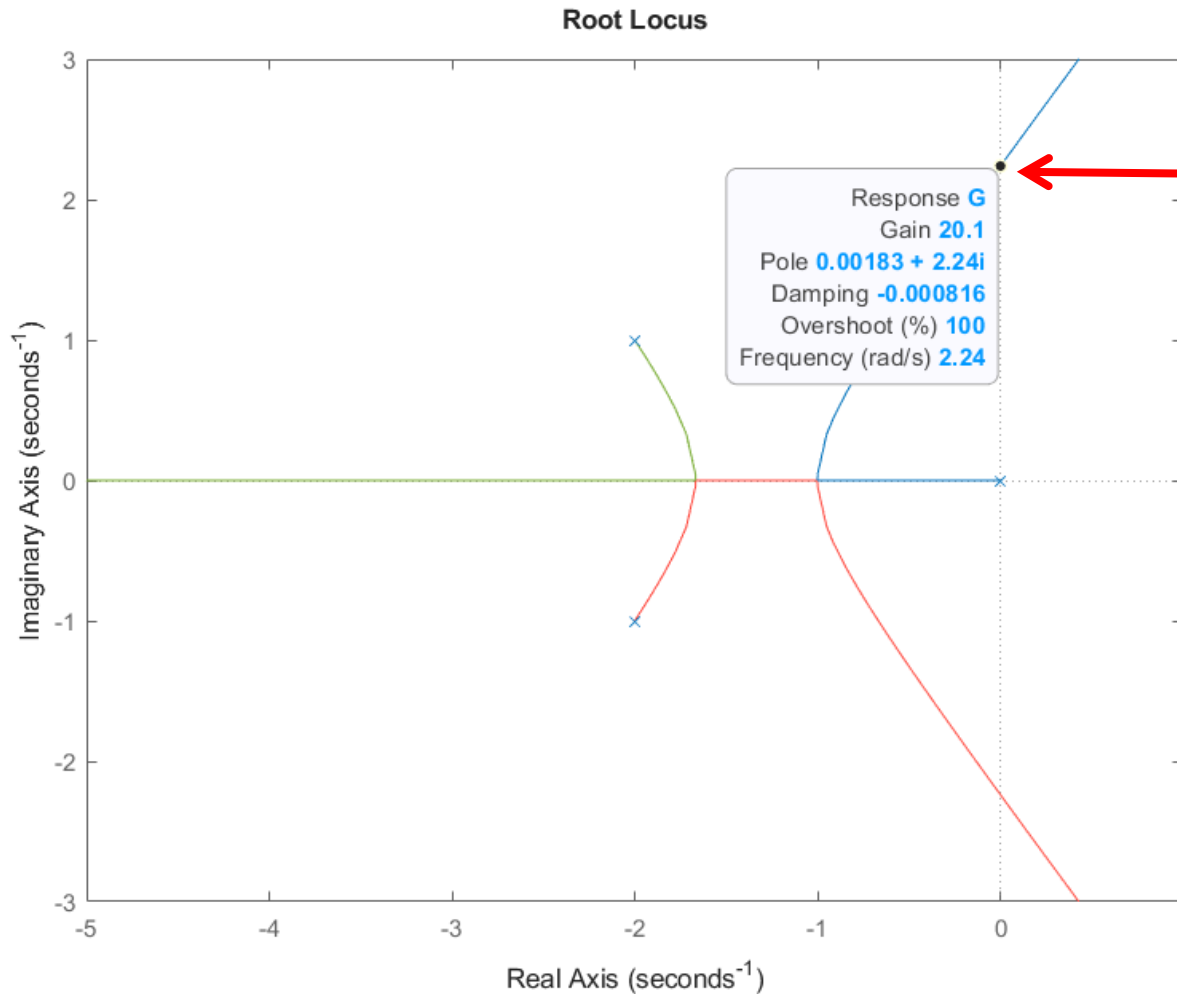
Matlab: diagrammi di Bode e luogo delle radici

- ➡ **NOTA:** cliccando con il tasto sinistro del mouse su una linea di qualunque grafico, ampiezza e fase di `bode()` e uno dei ramo di `rlocus()`, vengono visualizzate molte informazioni caratteristiche del grafico:
- **ampiezza** (in dB) o **fase** (in gradi) e pulsazione corrispondente, sui **diagrammi di Bode**
 - **Valore di K** corrispondente, **valore del polo** (o coppia di poli se complessi), **damping** (δ), **overshoot %** (in risposta al gradino) e **pulsazione naturale** (ω_n) sul **luogo delle radici**

Matlab: diagrammi di Bode e luogo delle radici



Matlab: diagrammi di Bode e luogo delle radici



Punto di passaggio da **stabilità a instabilità** del **sistema ad anello chiuso** avente G come FdT di anello! Di fatto il “Gain” è il **guadagno critico** già descritto come **margin** di ampiezza..

Matlab: funzioni “non ufficiali” per analisi di FdT

- ➡ Il **Criterio di Routh**, utile per verificare l'intervallo di valori di un coefficiente tale per cui il sistema chiuso in retroazione sia asintoticamente stabile (gli estremi dell'intervallo corrispondono alle condizioni di *stabilità semplice o marginale*), **non è ufficialmente supportato** da Matlab.
- ➡ Si possono però trovare alcune funzioni che lo implementano sul sito di interscambio *Matlab Central File Exchange* (contributi di utenti privati), tra le quali si consiglia:

<https://it.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33926-routh-s-array-in-symbolic-way>



ANALISI DI FdT CON DIAGRAMMI DI BODE E LUOGO DELLE RADICI IN MATLAB

FINE