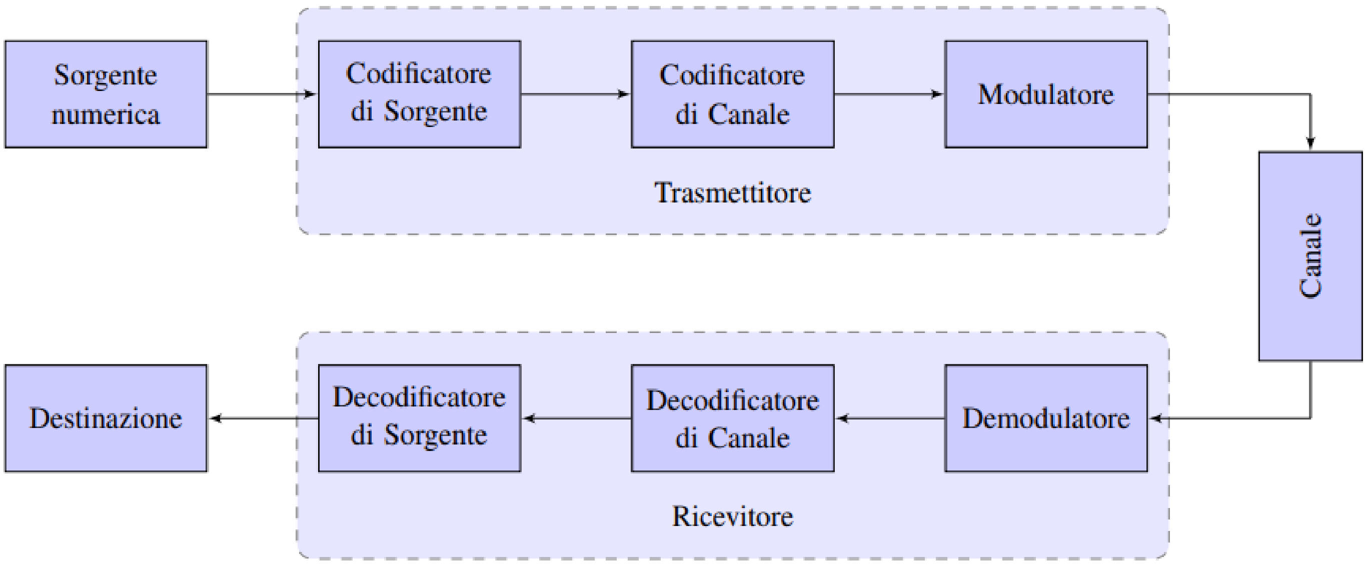
Fondamenti di Telecomunicazioni – TLC

Banda di un Segnale

Per "Banda" di un Segnale in Frequenza s'intende il "range" di occupazione delle Frequenze del Segnale.

Sistemi di Telecomunicazioni

I Sistemi di Telecomunicazioni possono essere così schematizzati:



Da Analogico a Digitale

In generale, l'informazione può essere di varie tipologie e qualsiasi tipologia d'informazione può essere rappresentata ed espressa in bit. Prendiamo in esame il caso di informazioni caratterizzate da un segnale analogico che è rappresentabile graficamente attraverso una funzione continua (che quindi evolve in maniera continua nel tempo).

In tal caso, per effettuare una conversione "Analogico – Digitale" è necessario dapprima effettuare una conversione "Analogico – Numerica", cioè effettuare una "Doppia Discretizzazione":

- Campionamento:
  È il processo di Discretizzazione relativo all'asse delle ascisse (x) e consiste nel rilevare il valore delle ampiezze del Segnale Analogico in corrispondenza di un definito insieme "discreto" di tempi.
  In parole povere consiste nel passaggio dal tempo continuo al tempo discreto.

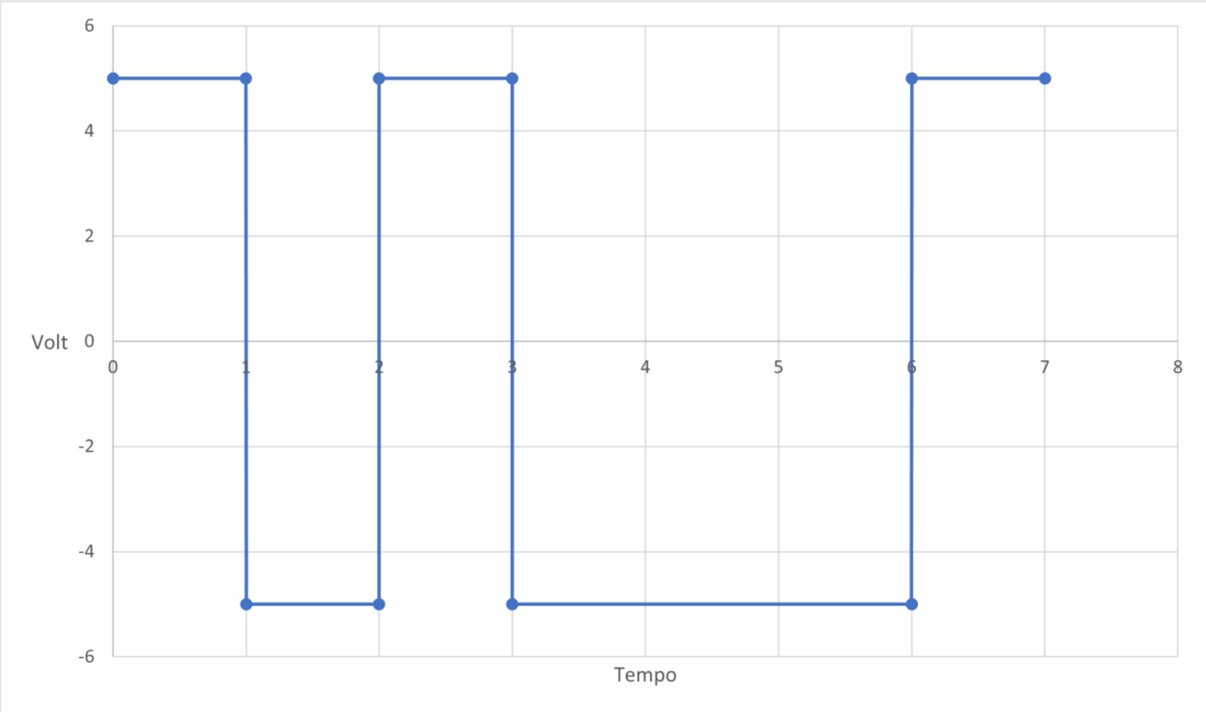
- Quantizzazione:
  È il processo di Discretizzazione relativo all'asse delle ordinate (y) e consiste nel suddividere l'intervallo di ampiezze del Segnale Analogico in più "Intervalli di Quantizzazione".

Assegnando agli Intervalli di Quantizzazione dei “Numeri Binari” completeremo il processo di conversione “Analogico – Numerico”.

A questo punto, ad ogni campione sarà assegnato un determinato Numero Binario che può essere espresso e trasmesso sotto forma di “Sequenza di Bit”, per farlo si scelgono due valori di tensione (ad esempio $+5V$ e $-5V$) uno rappresentante il bit “1” e l’altro il bit “0”.

Quindi si procede alla costruzione di forme d’onda sulla base delle sequenze di bit da trasmettere.

Esempio → 1° Campione corrispondente alla sequenza di bit: 1010001



Teorema del Campionamento – Teorema di Nyquist

Il Campionamento deve essere effettuato con criterio, altrimenti si potrebbe incorrere in problemi (come quello di Aliasing) che non permetterebbero la ricostruzione del Segnale Originale a partire dai campioni.

A tal proposito è importante considerare il “Teorema di Nyquist” o “Teorema del Campionamento”, il quale afferma che: *“Per Campionare correttamente un Segnale Analogico Continuo a Banda Limitata, la Frequenza di Campionamento deve essere pari o superiore al doppio della massima Frequenza del Segnale”*.

Rumore

La trasmissione di un Segnale comporta spesso una “Corruzione del Segnale” causata dal “Rumore”.

Il Rumore è introdotto in parte dall’Emettitore ed in parte dal Canale di Trasmissione.

È possibile calcolare il rapporto tra Segnale e Rumore:

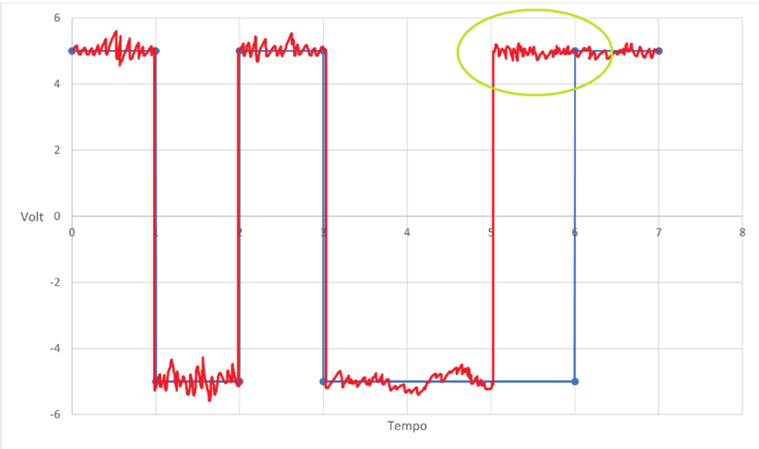
$$\frac{Ampiezza\ Segnale}{Ampiezza\ Rumore}$$

Il cui valore è naturalmente proporzionale all'Ampiezza del Segnale, quindi più l'Ampiezza del Segnale è bassa e più sarà basso il valore di tale rapporto e quindi più alto sarà il grado con il quale il Rumore influenza il Segnale.

Quindi l'ideale sarebbe trasmettere un Segnale ad Ampiezza elevata, ma per ottenerlo potrebbe essere necessario un maggiore dispendio di energia.

In casi in cui l'ampiezza del Rumore è molto elevata, è possibile che il ricevente riceva informazioni errate, cioè che a causa del Rumore, il Segnale che dovrebbe assumere un valore di $5\,Volt$ e quindi rappresentare il bit 1, assuma un valore pari a $-5\,Volt$ e quindi vada a rappresentare erroneamente il bit 0.

Esempio → Sulla base dell'esempio precedente, cioè della sequenza di bit "1010001" supponiamo che nella trasmissione del 5° bit, che dovrebbe essere pari a "0", il Rumore sia caratterizzato da un'Ampiezza talmente importante da "falsare" la trasmissione di un bit:



Teorema di Shannon

Altro Teorema fondamentale per i Sistemi di Telecomunicazioni è il "Teorema di Shannon", il quale stabilisce il limite della compressione dell'informazione, rappresentato dall'Entropia della Sorgente.

In particolare, afferma che: *"Non è possibile comprimere le informazioni in un messaggio (cioè sequenze di bit) più corto (cioè composto da un numero di bit minore) dell'Entropia della Sorgente senza che si abbia perdita d'informazione".*

Entropia della Sorgente

Per "Sorgente" s'intende la sorgente dalla quale proviene l'informazione.

L'Entropia della Sorgente è un concetto legato alla "Predicibilità" dell'informazione, infatti quanto più l'informazione che proviene dalla Sorgente e che deve essere trasmessa è predicibile, tanto più l'Entropia è bassa e viceversa.

L'Entropia di una Sorgente si ottiene calcolando il valore negativo della sommatoria, su tutti gli $\boldsymbol{n}$ simboli che possono essere trasmessi, della probabilità dell'i – esimo simbolo $\boldsymbol{p(s_i)}$, moltiplicata per il logaritmo in base due della probabilità che l'i – esimo simbolo $\boldsymbol{log_2[p(s_i)]}$ sia trasmesso:

$$Entropia\ della\ Sorgente = -\sum_{i=1}^{n}\{p(s_i)\cdot log_2[p(s_i)]\} = [bit]$$

Esempio 1 → Supponiamo di dover trasmettere il numero che viene fuori dal lancio di un normale dado (non truccato), quindi che i numeri 1, 2, 3, 4, 5 e 6 siano equiprobabili, cioè che abbiano la stessa probabilità di essere trasmessi (pari ad $\frac{1}{6}$), allora:

$$Entropia\ della\ Sorgente =$$

$$= -\left\{\frac{1}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right] + \frac{1}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right] + \frac{1}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right] + \frac{1}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right] + \frac{1}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right] + \frac{1}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right]\right\}$$

$$= -\left\{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right]\right\}$$

$$= -\{1\cdot[log_2(1) - log_2(6)]\}$$

$$= -\{1\cdot[0 - 2{,}58]\}$$

$$= 2{,}58\ bit = 3\ bit$$

Quindi, l'Entropia di questa Sorgente è pari a 3 bit.

In questo esempio, il valore di $\frac{1}{6}$, corrisponde alla "Massima Impredicibilità della Sorgente".
Naturalmente, se ho più probabilità che venga trasmesso un simbolo piuttosto che l'altro, avrei una maggiore Predicibilità della Sorgente.

Naturalmente, essendo i valori tutti equiprobabili, possiamo giungere allo stesso risultato anche semplicemente attraverso la classica domanda "Quanti bit sono necessari per esprimere 6 informazioni differenti?" → Almeno 3, perché $2^{3\ bit} = 8$ informazioni (con 2 bit non ce la farei: $2^{2\ bit} = 4$).

Esempio 2 → Supponiamo di dover trasmettere il numero che viene fuori dal lancio di dado truccato nel quale ho tre facce con il numero 1, una faccia con il 2, una con il 3 ed una con il 4. Quindi, ad ogni lancio, il numero 1 ha probabilità di occorrere pari a $\frac{3}{6}$, ed i numeri 2, 3, e 4 hanno probabilità di occorrere pari ad $\frac{1}{6}$, allora l'Entropia della Sorgente sarà pari a:

$$Entropia\ della\ Sorgente =$$

$$= -\left\{\frac{3}{6}\cdot log_2\left[\frac{3}{6}\right] + \frac{1}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right] + \frac{1}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right] + \frac{1}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right]\right\}$$

$$= -\left\{\frac{3}{6}\cdot log_2\left[\frac{3}{6}\right] + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right]\right\}$$

$$= -\left\{\frac{3}{6}\cdot log_2\left[\frac{3}{6}\right] + \frac{3}{6}\cdot log_2\left[\frac{1}{6}\right]\right\}$$

$$= 1{,}79\ bit = 2\ bit$$

Esempio 3 → Una Sorgente che può trasmettere 1 bit e per la quale:

- Il simbolo 0 ha probabilità di essere trasmesso pari ad 1 (ossia 100%);
- Il simbolo 1 ha probabilità di essere trasmesso pari a 0 (ossia 0%);

È una Sorgente "Massimamente Predicibile", cioè ha Entropia $= 0$.

Il Teorema di Shannon afferma quindi che, nell'esempio 1, non posso comprimere il messaggio ad una dimensione minore di 3 bit, altrimenti per forza di cose perdo informazioni, cioè non riesco a comunicare il numero risultato dal lancio del dado. Lo stesso vale per l'esempio 2, nel quale devo utilizzare, per ogni messaggio inviato, ALMENO 2 bit.

Codificatore di Sorgente

Per trasmettere (o salvare su un supporto di memorizzazione) un Segnale Digitale, si effettua una "Codifica ed una Compressione" del Segnale (generalmente questo processo è di competenza di un programma software detto "codec") in modo tale da sfruttare nel miglior modo possibile il "$BitRate\ [bit/s]$", ossia il numero di bit che trasmetto ogni secondo.

Il Codificatore di Sorgente effettua una Codifica ed una Compressione delle informazioni con l'obiettivo di rimuovere la ridondanza delle informazioni provenienti dalla Sorgente (nell'esempio successivo associamo alla coppia ridondante "00" il bit "0" così da rimuovere la ridondanza e da inviare messaggi che mediamente hanno un numero di bit più basso).

Tipi di Codifica e Compressione

Un esempio di Codifica è la Codifica di tipo "LossLess" ossia "Senza Perdita d'Informazione", al contrario, una Codifica di tipo "Lossy" è una Codifica con Perdita d'Informazione che permette una maggiore compressione delle informazioni rispetto alla Codifica LossLess e viene utilizzata soprattutto per Sorgenti Video e/o Audio dato che in questi casi il Ricevitore può accettare un certo livello di "degrado" dell'informazione.

Esempio Codifica LossLess → Ipotizziamo di dover trasmettere la seguente sequenza di bit: "01000110" in 4 messaggi composti da 2 bit l'uno, cioè in 4 sequenze di "Coppie di bit", quindi due bit alla volta.

Ipotizziamo inoltre, che le Coppie di bit abbiano probabilità diverse di occorrere:

- 00 ha probabilità pari ad $^1/_2$;
- 01 ha probabilità pari ad $^1/_4$;
- 10 ha probabilità pari ad $^1/_8$;
- 11 ha probabilità pari ad $^1/_8$;

La Somma delle Probabilità deve essere pari ad 1:

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/8 = 1$$

Se trasmetto le Coppie di bit esattamente così come sono, la lunghezza media dei messaggi (ossia delle sequenze di 2 bit l'una) che invio, sarà pari a:

$$\sum_{i=1}^{4} numero\ di\ bit\ del\ messaggio_i \cdot probabilità\ di\ occorrere\ del\ messaggio_i$$

$$= 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/8 + 2 \cdot 1/8$$

$$= 2\ bit$$

Ma se associo messaggi più corti alle sequenze di bit più probabili e messaggi più lunghi alle sequenze di bit meno probabili avrò:

- 00 ha probabilità pari ad $1/_2$ → $0;$
- 01 ha probabilità pari ad $1/_4$ → $10;$
- 10 ha probabilità pari ad $1/_8$ → $110;$
- 11 ha probabilità pari ad $1/_8$ → $111.$

Mediamente trasmetterò un messaggio caratterizzato da un numero di bit pari a:

$$1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/8 + 3 \cdot 1/8$$
$$= 7/4$$
$$= 1{,}75\ bit$$

Quindi trasmetto mediamente meno bit a messaggio!

Il limite alla codifica e compressione delle informazioni è rappresentato dall'Entropia della Sorgente, cioè, come affermato anche dal Teorema di Shannon: "Non è possibile comprimere i messaggi ad una dimensione $<$ dell'Entropia della Sorgente perché altrimenti c'è per forza una perdita d'informazioni".

Codificatore di Canale

Il Codificatore di Canale ha il compito di Codificare le informazioni provenienti dal Codificatore di Sorgente andando ad aggiungere una "ridondanza strutturata e nota" al Ricevitore. Anche se può sembrare controintuitivo rimuovere la ridondanza tramite la Codifica di Sorgente e poi aggiungerla tramite la Codifica di Canale, questo processo permette al Ricevitore di rilevare eventuali errori che si sono verificati nella trasmissione delle informazioni ed eventualmente anche di correggerli.
Più precisamente, questa codifica consiste nell'aggiunta di bit di parità alle sequenze di bit trasmesse (il bit di parità viene aggiunto alla sequenza di bit da inviare, cioè si pone tale bit uguale a 1 se il numero di bit 1 nella sequenza di bit è dispari, facendo diventare il numero totale di "1", incluso il bit di parità, pari).

Turbo Codici

I Turbo Codici sono strutture di codice capaci di codificare e decodificare efficientemente lunghe sequenze di bit. Infatti, quando è necessario codificare/decodificare delle lunghe sequenze di bit, il numero di configurazioni possibili è molto alto e quindi entrano in gioco i Turbo Codici che riescono a codificarle/decodificarle velocemente.

Modulatore

Il Modulatore è un dispositivo che, data una sequenza di "$\boldsymbol{k}$" simboli binari, quindi caratterizzata da un numero di configurazioni possibili "$\boldsymbol{M}$" che è pari a $M = 2^k$

Associa, tramite una "funzione biunivoca", ad ogni configurazione possibile (della sequenza dei "k" simboli binari) una tra le possibili "M" forme d'onda di durata "$\boldsymbol{T}$".

Quindi, il Modulatore ha il compito di generare M forme d'onda differenti, una per ogni configurazione possibile ed è detto "Binario" se $M = 2$, altrimenti, se M è pari ad una qualsiasi altra potenza di 2, è detto "M – ario".

Esempio → $M = 4 \rightarrow$ Modulatore Quadratico che quindi ha "4" Forme d'Onda, cioè è caratterizzato dal seguente insieme di Forme d'Onda: $S = \{s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)\}$

Dato che $M = 2^k \rightarrow log_2 M = k \rightarrow log_2 4 = k \rightarrow 2 = k$.

Essendo $k = 2$, ne consegue che le 4 Forme d'Onda sono: $S = \{00, 01, 10, 11\}$

Supponiamo che il Modulatore riceva in Input dal Codificatore di Canale questa sequenza di bit "011100", allora il Modulatore trasmetterà un Segnale composto dalle seguenti Forme d'Onda:

$$s_2(t) + s_4(t-T) + s_1(t-2T)$$

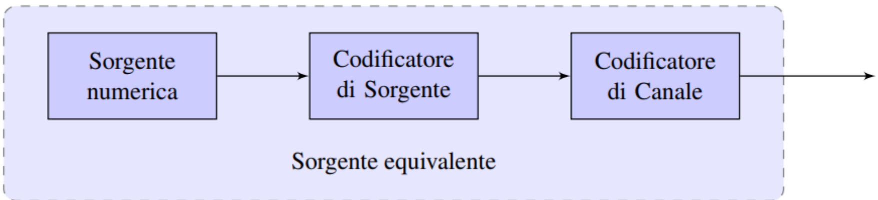
Oltre alla durata di ogni singola forma d'onda "T" ed alla cardinalità "M", il Modulatore ha altri parametri caratteristici:

- $\boldsymbol{T_s}$ → Intervallo di Simbolo;
- $\boldsymbol{R_s}$ → Frequenza di Simbolo, ossia il numero di simboli emessi nell'unità di tempo;
- $\boldsymbol{R_b}$ → Bit – Rate, ossia il numero di bit al secondo provenienti ed emessi dalla Sorgente;
- $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ → L'energia associata alla forma d'onda i – esima "$\boldsymbol{s_i(t)}$" del Modulatore, che è uguale a:

$$\varepsilon_i = \int_0^T {s_i}^2(t)\, dt$$

L'insieme delle "M" possibili forme d'onda deve essere noto anche al Demodulatore che viene progettato assieme al Modulatore.

Dal punto di vista del Modulatore, a monte di sé stesso, c'è un unico blocco detto "Sorgente Equivalente" che è così costituito:



Perché utilizzare il Modulatore?

Il processo di "Modulazione" consiste nell'associare il Segnale contenente l'informazione, detto "Segnale Modulante", ad un secondo Segnale, detto "Segnale Portante", avente le caratteristiche adatte alla trasmissione.

Questo è necessario perché:

1. Per irradiare Segnali in modo efficiente è necessario che le Antenne abbiano dimensioni confrontabili con la Lunghezza d'Onda della Radiazione da Trasmettere ed in determinati casi questo indicherebbe la necessità di utilizzare Antenne dalle dimensioni spropositate e non fisicamente realizzabili!

Esempio → Devo trasmettere un Segnale la cui frequenza è pari a $f = 1000\ Hz$ (non è un caso raro, infatti la stessa voce umana è caratterizzata da una frequenza variabile tra gli $80\ Hz$ ed i $1500\ Hz$) attraverso un'antenna parabolica.

Essendo $f = \frac{c}{\lambda}$, questo Segnale ha una Lunghezza d'Onda pari a $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{300000000}{1000} = 300000$ m.

Dato che il Guadagno di un'antenna parabolica (come vedremo più avanti) si calcola attraverso la seguente formula:

$$G = \eta \left(\frac{\pi \cdot D}{\lambda}\right)^2$$

Volendo fare in modo che il Guadagno dell'Antenna sia almeno $G = 1$ e supponendo che $\eta = 0{,}7$, allora il Diametro "D" della nostra Antenna dovrà essere pari a:

$$1 = 0{,}7 \left(\frac{\pi \cdot D}{300000}\right)^2 \rightarrow D = \left(\frac{1}{0{,}7}\right)^2 \cdot \frac{300000}{\pi} = 194883\ m = 194\ Km$$

Che è una dimensione non fisicamente realizzabile!

Grazie alla Modulazione, però, lo Spettro del Segnale da Trasmettere (cioè lo Spettro del Segnale Modulante) viene "traslato" intorno ad una frequenza detta "Frequenza Portante" (sarebbe la Frequenza del Segnale Portante) e quindi è possibile trasmettere il Segnale in modo efficiente e con Antenne fisicamente realizzabili;

2. La Banda Passante dei dispositivi utilizzati in un sistema di comunicazione (amplificatori, filtri, canale di comunicazione, ecc...), deve contenere la Banda del Segnale, la quale deve essere molto più piccola della Frequenza Portante.

Tipi di Modulazione

Tra i vari tipi di Modulazione abbiamo:

- Modulazione "PAM/ASK – Pulse Amplitude Modulation / Amplitude Shift Keying" (Modulazione ad Ampiezza di Impulsi / Modulazione a Spostamento di Ampiezza):
  In tal caso, ognuna delle possibili "M" forme d'onda avrà una differente Ampiezza:

  $$A = A_0(2M - 1 - i) \quad con \quad i \in [0, M]$$

  Con "i" che indica il parametro che varia di forma d'onda in forma d'onda e che fa in modo che ad ognuna di queste corrisponda una differente "A" (Ampiezza).

- Modulazione "FSK – Frequency Shift Keying" (Modulazione a Spostamento di Frequenza):
  In tal caso, ognuna delle possibili "M" forme d'onda avrà una differente Frequenza.

- Modulazione PSK – Phase Shift Keying" (Modulazione a Spostamento di Fase):
  In tal caso, ognuna delle possibili "M" forme d'onda avrà una differente Fase.

Canale di Trasmissione

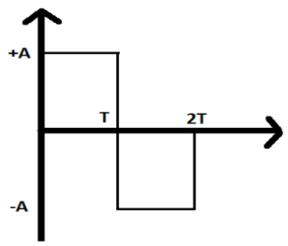
Per “Canale di Trasmissione” si intende il Mezzo Fisico che realizza il collegamento tra Sorgente e Destinazione.
Un parametro caratteristico del Canale di Trasmissione è la “Capacità di Canale”. Questa indica la velocità con la quale il Canale di Trasmissione permette di trasmettere dati. Finché si trasmettono informazioni ad una velocità minore della Capacità del Canale, l’errore tende a zero.
Se si trasmettono informazioni ad una velocità maggiore della Capacità del Canale, l’errore tende ad 1 (il massimo) e quindi questo porterebbe al verificarsi di errori che si accumulerebbero.
Quindi:

$$Velocità\ di\ Trasmissione \propto Probabilità\ di\ Errore$$

Tipi di Canali di Trasmissione

È importante distinguere due tipi di canali:

- Wired (Cablato) → Canale di comunicazione che sfrutta dei cavi per trasmettere informazioni.
  In questo caso uno svantaggio è quello relativo al “bit – rate”, cioè se devo trasmettere informazioni con una certa velocità e considerando una comunicazione bit a bit, le forme d’onda che trasmetterò saranno caratterizzate da una certa ampiezza “A” (che sarà positiva “$+A$” per il bit “1” e negativa “$-A$” per il bit “0”):

  In questo caso, quindi, il bit – rate dipende da “T”, ossia dalla durata di ogni singola forma d’onda.
  Più precisamente dipende in maniera inversamente proporzionale da “T”.
  Quindi al diminuire di T, aumenta il bit – rate, ma per trasmettere forme d’onda in tempi molto brevi, cioè per avere un “T” molto piccolo, ho bisogno di cavi di buona qualità.
  (Es. Cavi Coassiali).

- Wireless (Senza Fili) → Canale di Comunicazione che non sfrutta mezzi fisici, ma onde elettromagnetiche che si propagano nello spazio libero. Questi Canali, per trasmettere informazioni, sfruttano una gamma di frequenze limitata.

  Questi si basano sul concetto che ogni segnale, anche se non periodico, può essere visto come composto da molteplici sinusoidi, cioè può essere rappresentato (attraverso più integrali) come una sovrapposizione di più sinusoidi con differenti ampiezze, frequenze e fasi.

  Dato che le varie sinusoidi che compongono il Segnale hanno frequenze diverse, si avrà una determinata “Banda del Segnale” ed infatti esistono più Canali Wireless ed ognuno di questi interessa una certa banda, nel senso che trasmette segnali su una certa banda.

  Quindi a seconda del Segnale che devo Trasmettere ed a seconda della sua Banda (che comprende le Frequenze delle varie sinusoidi che lo compongono) utilizzerò un diverso Canale Wireless.

  La Frequenza “$\boldsymbol{f}$” e la Lunghezza d’Onda “$\boldsymbol{\lambda}$” di una radiazione elettromagnetica che si propaga nello spazio libero, sono legate tra loro dal seguente rapporto:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Con “$\boldsymbol{c}$” che indica la Velocità della Luce nello spazio libero.

Antenna

L'Antenna è un esempio di "Canale di Trasmissione Wireless" e fa da "interfaccia" tra il Segnale Elettrico (che l'antenna riceve) e lo Spazio Libero nel quale deve trasmettere questo Segnale sfruttando radiazioni elettromagnetiche.

Antenna Isotropa

L'Antenna Isotropa è un'Antenna ideale che irradia in tutte le direzioni in egual maniera e che nella realtà esiste.

Quando una Radiazione viene irradiata in modo isotropico nello spazio libero (cioè si ha una "propagazione sferica", in tutte le direzioni), la Densità di Potenza "P_R" (Potenza Ricevuta) di una radiazione ad una certa distanza "R" dal punto in cui viene irradiata la potenza "P_T" (Potenza Trasmessa), è pari alla potenza P_T fratto la superficie della sfera con raggio uguale proprio ad R:

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi R^2}\ [W/m^2]$$

Come già detto, nella realtà l'Antenna Isotropa non esiste ed essendo ideale viene utilizzata solo come "metro di paragone" per le altre Antenne reali.

In particolar modo, quando si dice di un'Antenna reale che ha "$Guadagno = N\ db$" è perché ha $N\ db$ di guadagno rispetto all'Antenna Isotropa (cioè ideale).

Antenna Direttiva

Le Antenne reali sono Antenne Direttive, vale a dire che non irradiano in modo isotropico: in tutte le direzioni in egual modo.

I Parametri più importanti di un'Antenna sono:

- Guadagno dell'Antenna:
  Lo indichiamo con la lettera "G" ed il suo valore si ottiene dalla seguente formula:

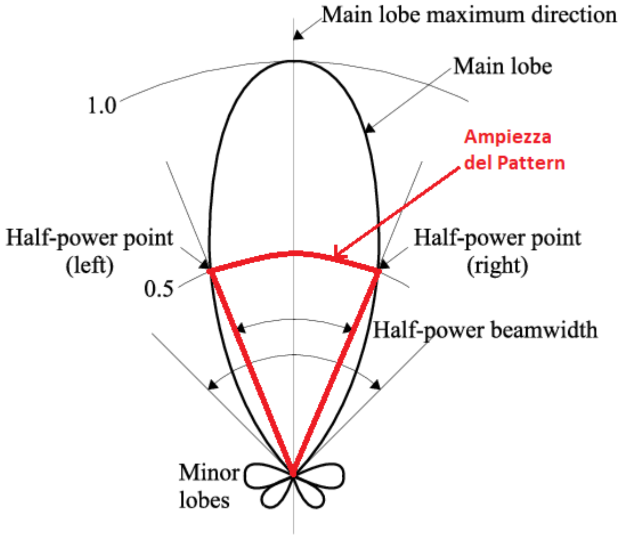
$$G = \frac{Potenza\ irradiata\ per\ unità\ di\ angolo\ solido}{Potenza\ in\ ingresso\ per\ unità\ di\ angolo\ solido} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A_c(\theta, \varphi)$$

Con $\boldsymbol{A_c}$ che indica l'area efficace dell'antenna, la quale è funzione delle coordinate polari Theta $\boldsymbol{\theta}$ e Phi $\boldsymbol{\varphi}$ e rappresenta l'area dell'antenna esposta alla densità di potenza incidente, vale a dire quanto l'Antenna è efficace nel ricevere la potenza di una radiazione elettromagnetica (ossia la capacità e l'attitudine dell'antenna di "raccogliere" la potenza dell'onda che la investe che, idealmente, dovrebbe essere proprio pari all'area dell'antenna).
Ovviamente, nota la formula di sopra, possiamo dire che:

$$A_c = G \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Area Efficace ed Area Geometrica di un'Antenna sono in relazione attraverso un parametro di efficienza generalmente indicato attraverso la lettera "eta": $A_c = \eta \cdot A_g$

- Ampiezza del Pattern dell'Antenna:
  Preso in considerazione il Mainlobe dell'Antenna, questa indica l'ampiezza angolare del Mainlobe calcolata tra i due punti simmetrici in cui la Potenza Irradiata è pari al 50% di quella nella direzione di massima radiazione.
  Rappresentazione Grafica:



- EIRP (Equivalent Isotropic Radiated Power):
  È definito come prodotto tra il Guadagno dell'Antenna trasmittente nella direzione di Massima Radiazione "G_T" e la Potenza Trasmessa "P_T":

$$EIRP = P_T G_T$$

La Densità di Potenza Ricevuta ad una certa distanza "R", in caso di Antenne reali (quindi direttive), viene calcolata attraverso una formula diversa rispetto alle Antenne ideali (che sono isotrope):

$$P_R = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2} \cdot A_c = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2} \cdot G_R \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} = \frac{P_T G_T G_R}{4\pi^2 R^2} \cdot \lambda^2 = \frac{P_T G_T G_R}{\frac{4\pi^2 R^2}{\lambda^2}} = \frac{P_T G_T G_R}{\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)^2} \ [W/m^2]$$

Antenna a Parabola

Le Antenne a Parabola appartengono alla categoria di Antenne Direttive e sono caratterizzate da un Guadagno "G" pari a:

$$G = \eta \left(\frac{\pi \cdot D}{\lambda}\right)^2$$

Con $\boldsymbol{\eta}$ che dipende dall'Antenna, $\boldsymbol{D}$ che indica il diametro della parabola e $\boldsymbol{\lambda}$ che rappresenta la lunghezza dell'onda trasmessa.

Proprio sulla base di tale formula è possibile osservare come, per trasmettere nello spazio libero, sia vantaggioso nonché necessario trasmettere radiazioni a frequenze alte (cioè con lunghezze d'onda basse).

Esempio → Ho una Parabola con diametro $D = 1m$ ed $\eta = 0{,}7$ e trasmetto:

1. Un Segnale con Frequenza $f = 10\ KHz$:

$$f = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^4 = 30\ Km$$

$$G = 0{,}7\left(\frac{\pi \cdot 1}{3 \cdot 10^4}\right)^2 \cong 0{,}7 \cdot 10^{-8}$$

Quindi se in ingresso a quest'antenna ho un Segnale con potenza pari a $10^8\ Watt$, ossia $100\ MegaWatt$, dato che il guadagno è approssimativamente pari a $0{,}7 \cdot 10^{-8}$, avrò in uscita un Segnale con potenza pari a $0{,}7\ Watt$: non è vantaggioso.

2. Un Segnale con Frequenza $f = 10\ GHz$:

$$f = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{-2} = 3\ cm$$

$$G = 0{,}7\left(\frac{\pi \cdot 1}{3 \cdot 10^{-2}}\right)^2 \cong 0{,}7 \cdot 10^4$$

Quindi l'Antenna funziona sempre meglio all'aumentare della Frequenza.

Tipi di Banda

Le Bande possono essere classificabili in base alle Frequenze che interessano, in particolar modo questa è la classificazione redatta dalla IEEE:

- Banda "L" → Va da 1 a 2 GHz e l'atmosfera non crea alcun tipo di disturbo a queste radiazioni elettromagnetiche e quindi a questi Segnali. (Es. → GPS);
- Banda "S" → Va dai 2 ai 4 GHz ed è utilizzata dalla NASA ed altre agenzie spaziali per la comunicazione con l'ISS (Stazione Spaziale Internazionale);
- Banda "C" → Va dai 4 agli 8 GHz ed è utilizzata per trasmissioni radio;
- Banda "X" → Va dagli 8 ai 12 GHz e viene utilizzata in campo meteorologico, per comunicazioni satellitari e radar;
- Banda "K" → Va dai 12 ai 40 GHz e viene utilizzata per le trasmissioni dei satelliti televisivi. In tal caso, però, l'atmosfera e le condizioni meteorologiche possono disturbare questi segnali.

Rumore Termico – Thermal Noise

Il "Rumore Termico" è una componente del Rumore, in particolar modo la componente più importante del Rumore che si presenta al Ricevitore durante la fase di "ricezione" ed è detto anche "Rumore Johnson", poiché fu misurato sperimentalmente per la prima volta da John Bertrand Johnson.

Il Rumore Termico è causato e generato dai movimenti casuali e quindi dall'agitazione termica dei portatori di carica (es. elettroni) nei semiconduttori, infatti la Tensione del Rumore Termico è il risultato della somma di un numero molto elevato di Tensioni "microscopiche", ognuna generata dal singolo portatore di carica. Il Rumore Termico è presente in qualsiasi sistema elettrico che si trovi ad una temperatura diversa dallo zero assoluto.

Il modo più appropriato per rappresentare il Rumore Termico è attraverso una funzione aleatoria ed è rappresentabile attraverso una funzione di densità di probabilità di tipo gaussiano, questo deriva dal fatto che esiste un teorema: “Teorema Centrale del Limite”, il quale afferma che se si ottiene un valore come somma di un numero molto elevato (tendente ad infinito) di variabili casuali, allora la distribuzione di probabilità di tale valore coincide con la distribuzione di tipo gaussiana.

Legge di Radiazione – Legge di Plank

Johnson misurò sperimentalmente il Rumore Termico, ma (prima di lui) fu Max Plank a ricavarne la “Densità Spettrale di Potenza” e lo fece attraverso la “Legge di Radiazione”. Tale legge afferma che “L’energia associata alla radiazione elettromagnetica è trasmessa in unità discrete’ o ‘quanti’”, più precisamente Plank assunse che le Sorgenti Radianti sono atomi in stato di oscillazione e che l’energia di ogni oscillatore può assumere una serie di valori discreti (e quindi non può variare in maniera continua). Cioè ci sono degli stati quantizzati di energia ($E1, E2, E3, \ldots, EN$) e l’oscillatore può passare soltanto da uno di questi stati ad un altro, non a valori intermedi tra questi.

Inoltre, nel passare da uno stato quantizzato di energia ‘$E1$’ ad uno stato di energia minore ‘$E2$’, l’oscillatore emette una quantità di energia $\Delta E = E1 - E2$ sotto forma di fotone e tale energia è uguale al prodotto:

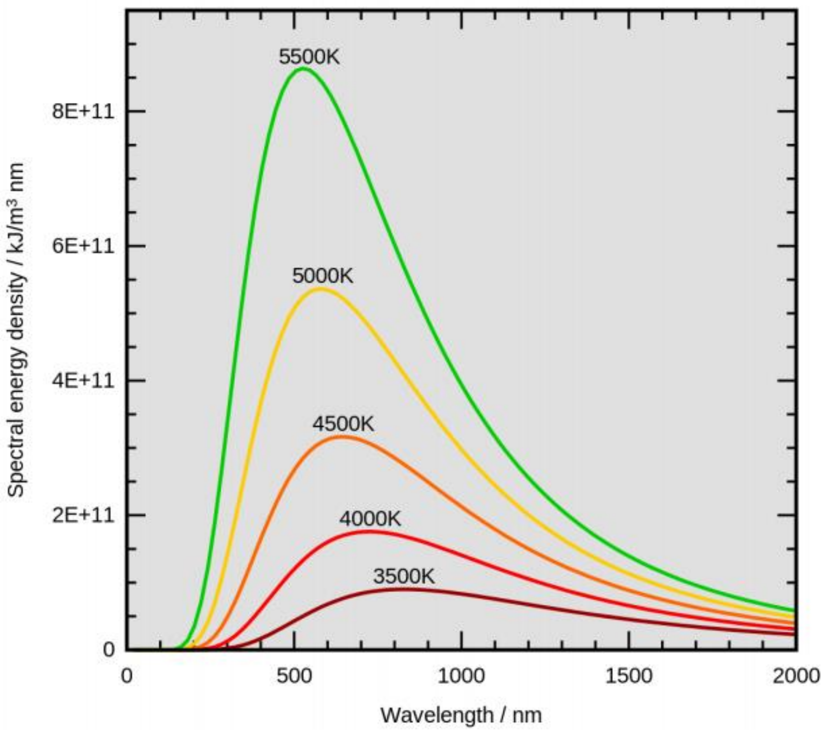
$$\Delta E = \hbar \cdot v$$

Con “ħ” che indica la “Costante di Planck” e “v” che rappresenta la Frequenza della Radiazione.

Plank, attraverso questa legge, introduce anche il concetto di “Quantizzazione”.

Densità Spettrale di Potenza di una Radiazione

La Densità Spettrale di Potenza delle Radiazioni varia in base alla temperatura della Sorgente Radiante ed alla lunghezza d’onda (quindi anche in base alla frequenza) delle Radiazioni stesse.



In particolar modo, all’aumentare della temperatura di un corpo, la Densità Spettrale di Potenza delle Radiazioni può raggiungere un picco sempre più alto ad una lunghezza d’onda sempre minore, cioè ad una frequenza maggiore.

Questo spiega anche il motivo per il quale non siamo in grado di vedere le radiazioni irradiate da corpi a temperatura ambiente, infatti un corpo molto caldo irradia con molta potenza ed ad una lunghezza d’onda bassa, che l’occhio umano può percepire. Invece, un corpo a temperatura ambiente irradia con poca potenza ed ad una lunghezza d’onda più alta, che potrebbe essere oltre il campo del visibile dell’occhio umano.

Esempio → Un corpo umano, generalmente, ha una temperatura di 300 °Kelvin, quindi nel momento in cui è in una stanza buia non possiamo vederlo poiché le sue radiazioni hanno una potenza minore e sono caratterizzate da una lunghezza d'onda che si aggira intorno a quella degli infrarossi, la quale si trova oltre il campo del visibile. Magari posso vederlo utilizzando una macchina ad infrarossi.

Esempio → Una lastra di ferro riscaldata a temperature molto elevate la vedremo di un rosso incandescente poiché sarà caratterizzata da una temperatura molto elevata, tale da irradiare radiazioni a lunghezze d'onda basse, tali da rientrare nel nostro campo del visibile.

Densità Spettrale di Potenza del Rumore Termico

Nel caso in cui siano verificate le condizioni di adattamento per il massimo trasferimento di potenza (cioè se l'impedenza di uscita è uguale a quella del carico), la Densità Spettrale di Potenza del Rumore Termico, indicata come "$S_x(f)$" (poiché in funzione della Frequenza della radiazione), è calcolabile attraverso la seguente formula:

$$S_x(f) = \frac{\hbar \cdot f}{2\left(e^{\frac{\hbar \cdot f}{K \cdot T}} - 1\right)}$$

Con:

- $\hbar = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ [Joules \cdot secondi]$ e che indica la "Costante di Plank";
- f indica la Frequenza della radiazione;
- $K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \left[\frac{Joules}{Kelvin}\right]$ e che indica la "Costante di Boltzmann";
- T indica la Temperatura assoluta in gradi Kelvin;

Quindi la Densità Spettrale di Potenza varia in base alla Frequenza ed alla Temperatura (il resto dei valori nella formula sono costanti).

In condizioni in cui $T = 300\ °Kelvin$, quindi a temperatura ambiente, se l'esponente $\frac{\hbar \cdot f}{K \cdot T} \ll 1$, ossia:

$$\frac{\hbar \cdot f}{K \cdot T} \ll 1 \ \rightarrow\ f \ll \frac{K \cdot T}{\hbar} \ \rightarrow\ f \ll \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{6{,}6 \cdot 10^{-34}} \ \rightarrow\ f \ll 6{,}26 \cdot 10^{12}$$

Cioè per Frequenze minori del "Terahertz" (10^{12}), allora $e^{\frac{\hbar \cdot f}{K \cdot T}} - 1 \cong \frac{\hbar \cdot f}{K \cdot T}$ e quindi la Densità Spettrale di Potenza del Rumore Termico non dipenderà più dalla Frequenza e potrà essere approssimata alla costante calcolabile come:

$$S_x(f) \cong \frac{\cancel{\hbar \cdot f}}{2\left(\frac{\cancel{\hbar \cdot f}}{K \cdot T}\right)} \cong \frac{K \cdot T}{2} \cong \frac{N_0}{2} \cong 2{,}07 \cdot 10^{-21}$$

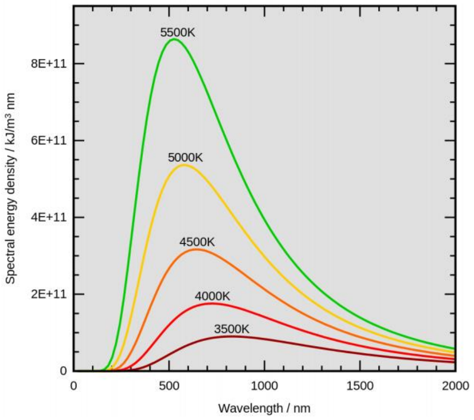
Questa approssimazione è valida per gran parte delle comunicazioni radio, le quali avvengono a frequenze dell'ordine di un centinaio di Gigahertz.

Catastrofe dell'Ultravioletto

Prima della Legge di Plank e della formula matematica che descrive la Densità Spettrale di Potenza del Rumore Termico in funzione della Frequenza della radiazione:

$$S_x(f) = \frac{\hbar \cdot f}{2\left(e^{\frac{\hbar \cdot f}{K \cdot T}} - 1\right)}$$

La quale permette di descrivere le seguenti funzioni di Densità Spettrale di Potenza:



Si era convinti che per lunghezze d'onda molto piccole, la Potenza di una Radiazione aumentasse, tendendo ad infinito, invece che diminuire e tendere a zero.

Sperimentalmente però, si verificò che così non era e questo evento fu battezzato con il nome di "Catastrofe dell'Ultravioletto" (poiché l'Ultravioletto è caratterizzato da una lunghezza d'onda di valore molto basso).

Rapporto Segnale Rumore (SNR – Signal to Noise Ratio)

Un valore fondamentale nei Sistemi di Telecomunicazioni è quello dell'SNR, ossia il Rapporto Segnale/Rumore.

L'SNR è definito come rapporto fra il valore quadratico medio del segnale e quello del rumore:

$$SNR = \frac{E[s(t)^2]}{E[n(t)^2]}$$

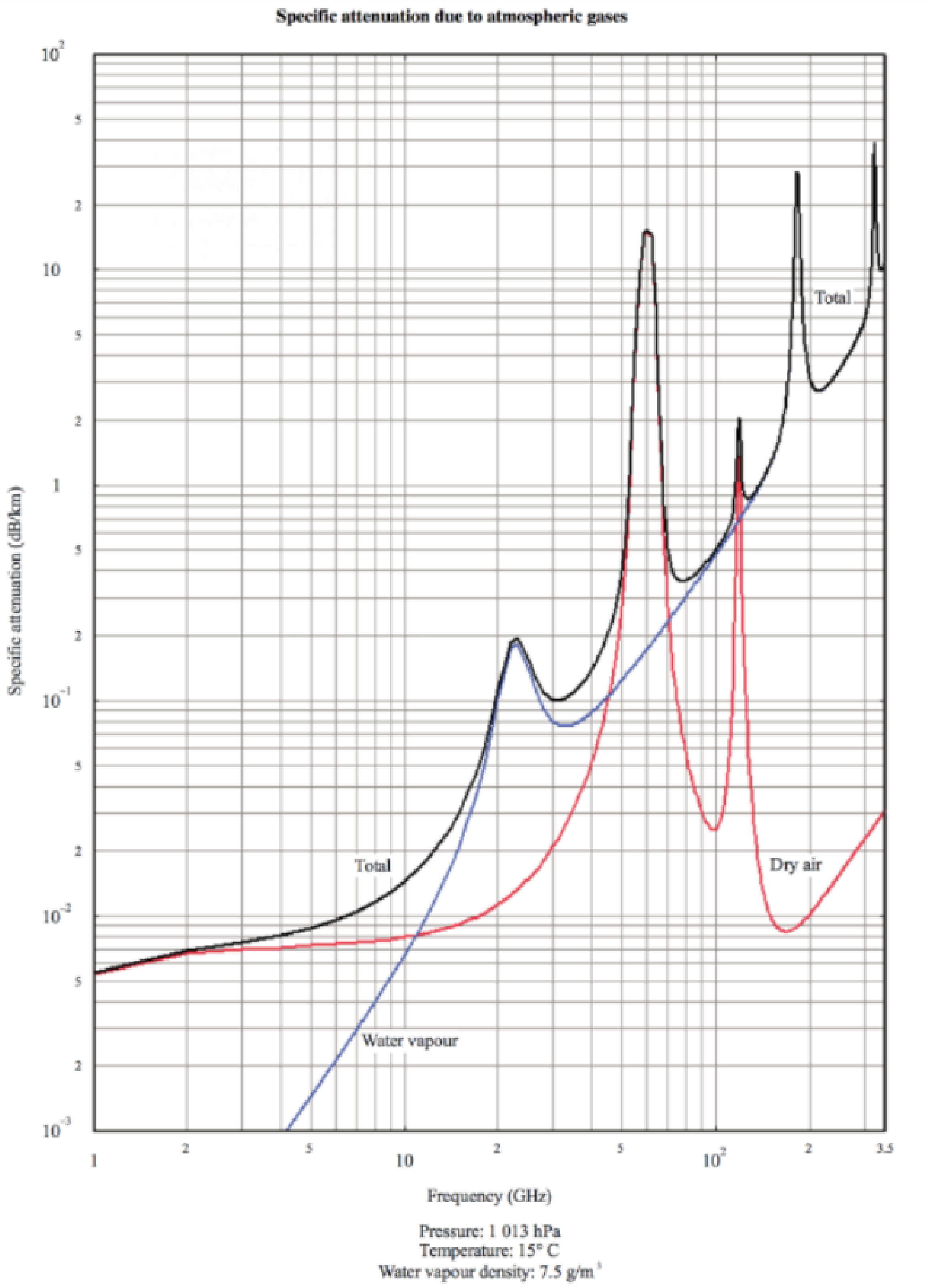
Dato che abbiamo visto che la Densità Spettrale di Potenza del Rumore Termico, per frequenze minori del "Terahertz" (10^{12}), è pari a:

$$S_x(f) \cong \frac{N_0}{2}$$

Allora possiamo calcolare l'SNR come:

$$SNR = \frac{E[s(t)^2]}{\frac{N_0}{2}} = \frac{2 \cdot E[s(t)^2]}{N_0}$$

Attenuazione Atmosferica e Frequenza



Osservando l'Attenuazione Atmosferica Totale, possiamo vedere come per frequenze basse si ha una leggera attenuazione che però aumenta all'aumentare della frequenza stessa.

Link Budget – Bilancio di Collegamento

Per “Link Budget” di un Sistema di Telecomunicazione s’intende il bilancio tra la Potenza Ricevuta dal Ricevitore e quella Emessa dal Trasmittente.

Esempio → Esempio di Link Budget di un Sistema GPS considerando i seguenti dati:

- $EIRP = P_T G_T$ → $26.8\ dBW$

  Per dBW s’intende che trasmetto $26.8\ dB$ rispetto ad $1\ Watt$, vale a dire che a partire da un certo valore espresso in “$Watt$”, è stato calcolato il valore in “dBW” attraverso l’equazione:

  $$EIRP_{dBW} = 10 \cdot log_{10}(EIRP_W)$$

  Il vantaggio di esprimere valori di grandezze in dB sta nel fatto che anche valori lineari molto molto grandi possono essere espressi in dB e quindi attraverso valori più piccoli e più maneggevoli.
  Ad esempio, un guadagno pari a $50\ dB$ equivale ad un valore lineare di guadagno pari a $100'000$.

  Per individuare il valore della Potenza espresso in $Watt$ a partire dal quale è stato calcolato il valore della Potenza espresso in dBW risolviamo la seguente equazione:

  $$26.8_{dBW} = 10 \cdot log_{10}(X_W) \ \rightarrow \ \frac{26.8}{10} = \frac{\cancel{10} \cdot log_{10}(X)}{\cancel{10}} \ \rightarrow \ 2.68 = log_{10}(X) \ \rightarrow$$

  $$\rightarrow \ 10^{2.68} = 10^{log_{10}(X)} \ \rightarrow \ 10^{2.68} = X \ \rightarrow \ 478.63 = X$$

  Quindi il valore lineare dell’$EIRP$ è pari a $478.63\ W$.

- Guadagno Antenna Trasmittente → $18.95\ dB$

  L’Antenna Trasmittente è quella posizionata sul satellite;

- Guadagno Antenna Ricevente → $3\ dB$

  L’Antenna Ricevente è quella a terra. Abbiamo supposto che l’Antenna Ricevente fosse un’antenna “Isotropica Emisferica”, cioè rispetto all’antenna “Isotropica” (sferica) con $Guadagno = 1$, in tal caso abbiamo un’Antenna “emisferica”, che copre soltanto metà della sfera e quindi ha un Guadagno doppio rispetto a quella Isotropica, ossia un $Guadagno = 2$. Infatti:

  $$3\ dB = 10 \cdot log_{10} X \ \rightarrow \ \frac{3}{10} = \frac{\cancel{10} \cdot log_{10} X}{\cancel{10}} \ \rightarrow \ 0.3 = log_{10} X \ \rightarrow \ 10^{0.3} = X \ \rightarrow \ 2 = X$$

- R → $20200\ Km$

  Distanza Media tra il satellite GPS (dove si trova l’Antenna Trasmittente) ed un utente a terra;

- λ → $0.1905\ m$

  Lunghezza d'Onda;

- Attenuazione Atmosferica → $0.5\ dB$;

- Larghezza di Banda del Ricevitore → $2.5\ MHz$.

A questo punto procediamo al calcolo dell'Attenuazione in Spazio Libero:

$$Attenuazione\ nello\ Spazio\ Libero = \left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)^2$$

$$Attenuazione\ nello\ Spazio\ Libero_{dB} = 10 \cdot log_{10}\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)^2$$

$$Attenuazione\ nello\ Spazio\ Libero_{dB} = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right) = 182.5\ dB$$

E quindi, ora, possiamo calcolare anche la "Potenza Ricevuta" sulla base della formula vista in precedenza:

$$Potenza\ Ricevuta = \frac{P_T G_T G_R}{\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)^2} = \frac{EIRP \cdot G_R}{\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)^2}$$

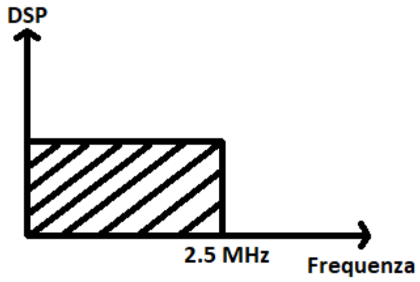
$$Potenza\ Ricevuta_{dBW} = 10 \cdot log_{10}(EIRP) + 10 \cdot log_{10}(G_R) - 20 \cdot log_{10}\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)$$

$$Potenza\ Ricevuta_{dBW} = 26.8 + 3 - 182.5 - 0.5 = -153.2\ dBW$$

Quindi, ai morsetti dell'Antenna Ricevente riceverò una Potenza di $-153.2\ dBW$.

Ora procediamo con il calcolo della Potenza del Rumore.

Nel nostro caso il Sistema ha una Larghezza di Banda pari a $2.5\ MHz$ il che significa che volendo rappresentare graficamente la Densità Spettrale di Potenza del Rumore del nostro Sistema avrò:



Teoricamente, per calcolare la Potenza del Rumore è necessario integrare la Densità Spettrale di Potenza del Rumore nel lasso di tempo in cui ricevo il Segnale, ma in questo caso, dato che il segnale è costante, mi basta moltiplicare la Densità Spettrale di Potenza per l'intervallo d'integrazione, che corrisponde proprio alla Larghezza di Banda del Sistema:

$$Potenza\ Rumore = \frac{K \cdot T}{2} \cdot (Larghezza\ di\ Banda \cdot 2)$$

La Larghezza di Banda va moltiplicata per due poiché devo considerarla "bilatera", cioè la larghezza di banda si estende sia a frequenze positive che negative (da -2500000 a $+2500000$).

$$Potenza\ Rumore = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 2500000 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 1.035 \cdot 10^{-14}\ W = -139.85\ dBW$$

$$Potenza\ del\ Rumore_{dBW} = -139.85\ dBW$$

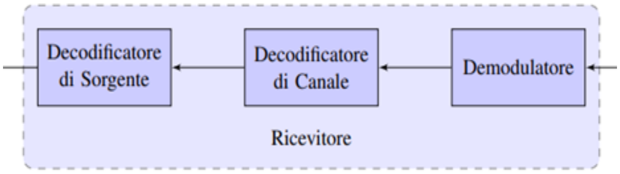
Ora calcolo l'SNR:

$$SNR_{dB} = -153.2 - (-139.85) = -13.35\ dB$$

Essendo l'SNR_{dB} negativo, questo Sistema non ha un buon rapporto Segnale/Rumore.

Blocco Ricevitore

Torniamo a considerare la rappresentazione di un Sistema di Telecomunicazione attraverso un Diagramma a Blocchi e dei dispositivi che seguono al Canale di Trasmissione:



- Demodulatore:
  È un dispositivo che riceve il Segnale (compreso il rumore) trasmesso attraverso il Canale di Trasmissione ed ha il compito di interpretarlo e determinare, in ogni intervallo di simbolo, qual è il simbolo che è stato trasmesso.
  Il Demodulatore ha a disposizione e conosce l'insieme delle "M" possibili forme d'onda che il Modulatore può trasmettere, quindi per ogni intervallo di simbolo, determina quale tra le M possibili forme d'onda è stata trasmessa ed ha ricevuto.
  Naturalmente, data la presenza del Rumore, il Demodulatore potrebbe "mal interpretare" il segnale ricevuto e quindi potrebbe sbagliare nel determinare quale tra le M forme d'onda è stata trasmessa dal Modulatore;

- Decodificatore di Canale:
  Se è progettato in maniera opportuna, questo ha le capacità di ovviare e correggere gli errori commessi dal Demodulatore (che potrebbe aver mal interpretato la forma d'onda ricevuta) basandosi sulla ridondanza introdotta dal Codificatore di Canale.
  Questo dispositivo, a seconda di com'è stato progettato, può correggere un certo numero massimo di errori in una sequenza di simboli, quindi se la sequenza di simboli che il Decodificatore di Canale riceve è affetta da un certo numero di errori, questo produrrà una nuova sequenza di simboli caratterizzata da un numero minore di errori;

Esempio → Il Modulatore può inviare "M" possibili forme d'onda, ma il Decodificatore di Canale ne riceve una che non fa parte delle possibili "M" forme d'onda (perché è stata distorta dal rumore).
Il Decodificatore di Canale, a questo punto, individua quale forma d'onda, tra le "M" forme d'onda a disposizione del Modulatore, si avvicina di più a quella ricevuta ed ipotizza che corrisponda a questa. Successivamente possono verificarsi due eventi:

1. Il numero di errori da correggere è minore o uguale al numero massimo di errori che il Decodificatore di Canale può correggere → Correzione avvenuta con successo;
2. Il numero di errori da correggere è maggiore del numero massimo di errori che il Decodificatore di Canale può correggere → Il Decodificatore di Canale comunica al Decodificatore di Sorgente che la sequenza in questione è caratterizzata da errori che non è in grado di correggere → Ulteriori due possibilità:
   i. La Sequenza non viene interpretata, viene scartata;
   ii. La Sequenza viene scartata e si effettua richiesta per la ritrasmissione.

- Decodificatore di Sorgente:
  Sulla base della Codifica e della Compressione dei messaggi realizzata dal Codificatore di Sorgente che elimina la ridondanza, questo ha il compito di "reintrodurre la ridondanza" al fine di renderli fruibili al destinatario.

Teoria della Probabilità

Lo scopo della teoria della probabilità è quello di fornire modelli matematici per trattare situazioni non predicibili in maniera puntuale.

I primi studi sulla teoria della probabilità risalgono al 1650 ad opera del Cavalier De Mèrè e degli amici Blaise Pascal e Pierre De Fermat. De Mèrè, infatti, era un giocatore d'azzardo ed aveva ipotizzato che le probabilità di lanciare 4 volte un dado non truccato ed ottenere un 6 fossero le stesse di lanciare 24 volte due dati non truccati ed ottenere un doppio 6. De Mèrè fece questo ragionamento:

- Se il dado non è truccato, possiamo dire che le possibilità di avere un 6 sono 1 su 6;
- Se lanciamo 4 volte il dado, queste possibilità dovrebbero essere 4*1/6 = 2/3;
- Se lanciamo due dadi possiamo avere 36 risultati possibili, cioè tutti gli accoppiamenti tra i valori di una faccia di un dado (che sono 6) e i valori della faccia dell'altro dado (che sono sempre 6), quindi la possibilità di avere un doppio 6 ad ogni lancio la possiamo porre uguale a 1/36;
- Se effettuiamo 24 lanci, la possibilità diventa 24*1/36 = 24/36 = 2/3.

Ma nella realtà, De Mèrè, perse molto denaro scommettendo sulla base di questo ragionamento e quindi chiese aiuto all'amico Pierre De Fermat per capire dov'è che avesse sbagliato...

De Mèrè, in effetti, non aveva considerato che, secondo il suo ragionamento, se lanciamo 6 volte il dado, la probabilità di avere un 6 dovrebbe essere pari a $6 \cdot 1/6 = 1$, in altre parole, secondo il suo ragionamento, è praticamente certo che lanciando il dado 6 volte esca la faccia con il numero 6, ma questo non è detto!

Esperimento Aleatorio

Un Esperimento Aleatorio è caratterizzato dalla terna $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ con:

- Ω che indica lo "Spazio dei Campioni", cioè l'insieme di tutti i possibili risultati sperimentali (cioè tutte le possibili uscite sperimentali);
- $\mathcal{E}$ che indica la $\sigma - Algebra$ degli Eventi / Famiglia degli Eventi;
- P che indica la Legge di Probabilità definita attraverso gli Assiomi di Kolmogorov.
  Proprio relativamente alla definizione della Legge di Probabilità in un Esperimento Aleatorio, ricordiamo sempre che, come già detto, gli "Eventi Elementari" sono Mutuamente Esclusivi ed ogni Evento può essere composto dall'Unione di più Eventi Elementari e quindi, per l'Assioma A3a di Kolmogorov, è possibile scrivere la Probabilità di un qualsiasi Evento (composto dall'Unione di più Eventi Elementari) come somma delle Probabilità degli Eventi Elementari che lo compongono.

Di seguito, analizziamo più in dettaglio i singoli elementi.

Spazio dei Campioni

Prima di definire il concetto di “Spazio dei Campioni” definiamo due ulteriori concetti:

1. Prova → La singola esecuzione di un esperimento si chiama “prova”;
2. Risultato → Ad ogni prova corrisponde un “risultato” che indichiamo con la lettera “ω” (omega minuscola);

Per “Spazio dei Campioni” (o “Spazio delle Prove”) s’intende l’insieme di tutti i possibili risultati sperimentali di un esperimento ed è indicato dalla lettera “Ω” (omega maiuscola);

A seconda dell’Esperimento, lo Spazio dei Campioni può essere:

- Finito → Costituito da un numero finito di valori.
  Esempio: facce di un dado;
- Infinito Numerabile → Costituito da un numero infinito di valori che possono essere indicizzati attraverso l’insieme dei numeri naturali (cioè che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali).
  Esempio: insieme dei numeri interi positivi;
- Continuo → Se non Discreto, cioè se costituito da valori contigui tra loro e tra i quali non ci sono “spazi vuoti”.

Esempio:
Esperimento → Lancio del Dado;
Prova → Lancio del Dado (intaso come “l’azione” di lanciare il dado);
Risultato → $\omega =$ Faccia del Dado;
Spazio dei Campioni → $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

Evento

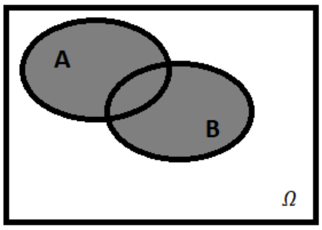
Legato al concetto di “Spazio dei Campioni” è il concetto di “Evento”.

Un Evento è un sottoinsieme “E” dello Spazio dei Campioni Ω e si verifica durante una “prova” dell’Esperimento Aleatorio nel caso in cui il “risultato” di questa “prova” sia contenuto in E, cioè se $\omega \in E$.
Gli Eventi possono essere:

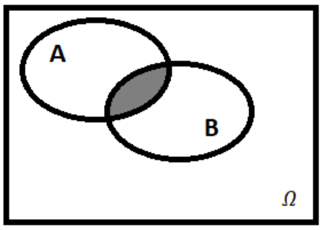
- Elementari → Sono Eventi costituiti dai singoli “risultati”, cioè gli eventi del tipo $\{\omega\}$ sono detti “Eventi Elementari” e sono Mutuamente Esclusivi;
- Certi → Anche lo Spazio dei Campioni Ω è a tutti gli effetti un “Evento”, in particolar modo è un evento “certo”;
- Impossibili →L’insieme vuoto “$\emptyset$” indica l’Evento Impossibile.

Tra Eventi si opera così come si opera sugli Insiemi, quindi le Operazioni che è possibile effettuare tra due Eventi “A” e “B” sono:

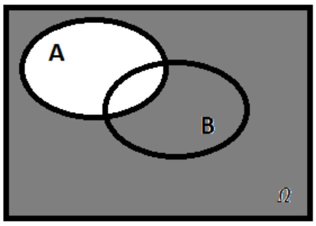
1. Disgiunzione → $A \cup B$ → Caso in cui si verifica almeno uno tra i due eventi. Quest’operazione coincide con l’unione dei sottoinsiemi A e B;



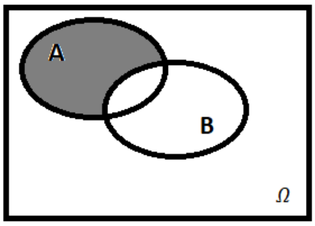
2. Congiunzione → $A \cap B$ → Caso in cui si verificano entrambi gli eventi. Quest’operazione coincide con l’intersezione dei sottoinsiemi A e B;



3. Negazione → $\bar{A}$ → Caso in cui non si verifica A. Quest’operazione coincide con il complemento di A, cioè con il sottoinsieme di Ω costituito da tutti i risultati che non appartengono ad A.



4. Differenza → $A - B$ → Caso in cui si verifica A ma non si verifica B. Quest’operazione coincide con l’intersezione tra A ed il complemento di B, cioè $A \cap \bar{B}$.



Esempio: “Emissione di 3 simboli binari”.

Consideriamo, quindi, un pacchetto di 3 bit.

Nell’emissione di 3 simboli binari, lo Spazio dei Campioni è il seguente:

$$\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

Analizziamo 3 eventi differenti:

- $A_1 = il\, numero\, di\, "uno"\, nel\, pacchetto$ è $pari\ oppure\ nullo.$

  Quindi abbiamo che:

  $$A_1 = \{000, 011, 101, 110, \}$$

- $A_2 = il\, numero\, di\, "uno"$ è $minore\, di\, due.$

  Quindi abbiamo che:

  $$A_2 = \{000, 001, 010, 100\}$$

- $A_3 = il\, numero\, di\, "uno"$ è $uguale\, a\, due.$

  Quindi abbiamo che:

  $$A_3 = \{011, 101, 110\}$$

Si vuole calcolare:

1. La disgiunzione $A_1 \cup A_2 = \{000, 011, 101, 110, 010, 001, 100\}$;
2. La congiunzione $A_1 \cap A_2 = \{000\}$;
3. La differenza $A_1 - A_2 = \{011, 110, 101\}$;
4. Il complemento di $A_1 \rightarrow \overline{A_1} = \{010, 001, 100, 111\}$.

Esempio: “Coppie di arrivi in $[0, T]$”.

Analizziamo 3 Eventi differenti:

- $E_1 = il\, viaggiatore\, ed\, il\, treno\, arrivano\, contemporaneamente.$

  Quindi abbiamo che:

  $$E_1 = \{(t_v, t_t) \in \Omega : t_v = t_t\}$$

- $E_2 = il\, viaggiatore\, arriva\, prima\, del\, treno.$

  Quindi abbiamo che:

  $$E_2 = \{(t_v, t_t) \in \Omega : t_v < t_t\}$$

- $E_3 = il\, viaggiatore\, arriva\, tra\, 0.2T\, e\, 0.4T.$

  Quindi abbiamo che:

  $$E_3 = \{(t_v, t_t) \in \Omega : 0.2T \leq t_v \leq 0.4T\}$$

Algebra degli Eventi

Negli esempi precedenti abbiamo visto che è bene considerare "Eventi" solo quei sottoinsiemi dello Spazio dei Campioni che sono di nostro interesse!

Nel momento in cui consideriamo più Sottoinsiemi dello Spazio dei Campioni, cioè una "famiglia" non vuota "$\mathcal{E}$" di Sottoinsiemi, questa è "un'Algebra di Eventi" solo se è chiusa rispetto alle operazioni di Unione e Complementazione eseguite su un numero finito di eventi, cioè se sono verificate le seguenti due condizioni:

> C_1. Ho un insieme A, tale che $A \in \mathcal{E}$ ed anche il suo complemento deve $\bar{A} \in \mathcal{E}$;
>
> C_2. Ho due insiemi A e B, tali che $A, B \in \mathcal{E}$ ed anche la loro unione deve $A \cup B \in \mathcal{E}$;

In alcuni casi, potrebbe essere necessario prendere in considerazione successioni non finite di eventi, cioè infinite. Questo significa che $\mathcal{E}$ deve essere un'Algebra di Eventi chiusa rispetto alle operazioni di Unione e Complementazione eseguite su di un numero "finito" o "infinito numerabile" di Eventi, ossia una "$\sigma - Algebra$".

Inoltre, se le condizioni C_1 e C_2 sono verificate, ne consegue che:

1. $\Omega \in \mathcal{E}$ → Lo Spazio dei Campioni stesso è un Evento, infatti $\Omega = A \cup \bar{A}$;
2. $\emptyset \in \mathcal{E}$ → Cioè se $\Omega \in \mathcal{E}$, anche il complemento di Ω (che corrisponde proprio all'insieme vuoto) è un Evento;
3. Se $A, B \in \mathcal{E}$ ed $A \cup B \in \mathcal{E}$ allora anche $\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{E}$ ed anche $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B \in \mathcal{E}$;
4. Se $A, B \in \mathcal{E}$ allora $A \cap \bar{B} = A - B \in \mathcal{E}$.

Assiomi della Probabilità

La quantità che "Misura la Probabilità di un Evento" è detta "Misura di Probabilità", cioè ad ogni evento A si associa una misura $P(A)$ che ne descrive la probabilità.

Tale Misura di Probabilità è definita e deve sempre soddisfare i quattro "Assiomi della Probabilità" definiti da Kolmogorov:

> A1. Non Negatività → $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{E}$ → La Probabilità non può essere Negativa;
>
> A2. Normalizzazione → $P(\Omega) = 1$ → La Probabilità dello Spazio dei Campioni deve essere sempre pari ad 1;
>
> A3a. Finita Additività → $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \forall A, B : A \cap B = \emptyset$ → Quindi se ho due Eventi (A e B) la cui intersezione è nulla (cioè sono due Eventi disgiunti tra loro, due insiemi che non si intersecano) allora la Probabilità della loro Unione è pari alla somma delle loro Probabilità;
>
> A3b. Numerabile Additività → $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \forall n, m \in \mathbb{N} : n \neq m \; ed \; A_n \cap A_m = \emptyset$ → Cioè così come vale per un numero finito di Eventi disgiunti tra loro, l'Assioma di Finita Additività deve valere anche su un numero infinito di Eventi Numerabili.

Dagli Assiomi di Kolmogorov derivano le seguenti Proprietà:

1. $P(\emptyset) = 0$;
   Questa proprietà è dimostrabile partendo dall'ovvio presupposto che $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, questo comporta che, poiché Ω ed $\emptyset$ sono disgiunti tra loro, cioè non c'è intersezione tra loro, per l'Assioma A3a di Kolmogorov:
   $$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$
   E, dato che: $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, allora:
   $$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$
   Dato che il secondo Assioma di Kolmogorov afferma che $P(\Omega) = 1$, posso scrivere:
   $$1 + P(\emptyset) = 1 \rightarrow P(\emptyset) = 1 - 1 = 0;$$

2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}$;
   Questa proprietà è dimostrabile prendendo in considerazione un Evento "A" tale che $\Omega = A \cup \bar{A}$, allora $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A})$. Naturalmente A ed $\bar{A}$ sono due Eventi disgiunti tra loro e quindi $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ e quindi posso scrivere la precedente equazione $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A})$ come $1 = P(A) + P(\bar{A})$ e quindi $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$;
   Questa proprietà è dimostrabile partendo dall'ovvio fatto che $(A - B) \cup (A \cap B) = A$. Ora, dato che l'insieme $(A - B)$ e l'insieme $(A \cap B)$ sono disgiunti tra loro, posso affermare che, per l'Assioma di Probabilità A3a: $P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ e quindi $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ (*subadditività*);
   Questa proprietà è dimostrabile partendo dal fatto che $A \cup B = (A - B) \cup B$ e dato che $(A - B)$ e B sono due Eventi disgiunti, per l'Assioma A3a possiamo scrivere che: $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$. Dalla precedente proprietà abbiamo determinato che $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ e quindi avremo che $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$ che quindi è per forza $\leq P(A) + P(B)$.

5. Se $A \subseteq B$ allora $P(A) \leq P(B)$ (*monotonicità*);
   Questa proprietà è dimostrabile partendo dal fatto che se $A \subseteq B$ allora $B = (B - A) \cup A$ e quindi, essendo $(B - A)$ ed A Eventi disgiunti tra loro, per l'Assioma A3a posso scrivere che $P(B) = P(B - A) + P(A)$ e quindi per forza di cose, dato che $P(B - A) \geq 0$, $P(A) \leq P(B)$.

Esempio di un Esperimento Aleatorio: "Lancio di una Moneta".

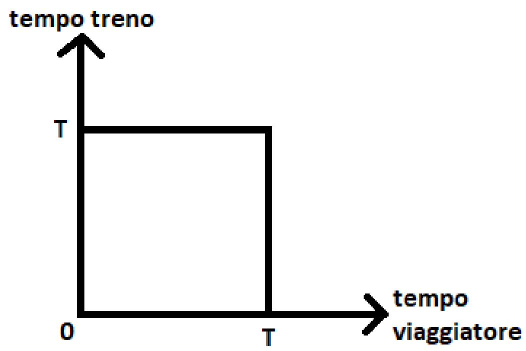
- $\Omega \rightarrow$ Spazio dei Campioni $\rightarrow \Omega = \{Testa, Croce\}$.

- $\mathcal{E} \rightarrow$ L'Algebra degli Eventi / Famiglia degli Eventi $\rightarrow \mathcal{E} = \{\Omega, \emptyset, Croce, Testa\}$;
  Questo perché nell'Algebra degli Eventi devo includere l'Evento Croce e l'Evento Testa, ma anche i relativi complementi (ma dato che $\overline{Croce} = Testa$ e che $\overline{Testa} = Croce$ non serve aggiungerli), anche l'unione tra gli Eventi $Testa$ e $Croce$, cioè proprio Ω ed anche il complemento di Ω, ossia $\emptyset$.

- $P \rightarrow$ La Legge di Probabilità $\rightarrow$ Pongo la Probabilità dell'Evento Elementare "$Testa$" pari ad un certo valore 'p', il quale deve essere per forza di cose $0 \leq p \leq 1$:
  $$P(Testa) = p$$
  E quindi, automaticamente, la Probabilità dell'Evento Elementare $Croce$ sarà pari a:
  $$P(Croce) = 1 - p = q$$

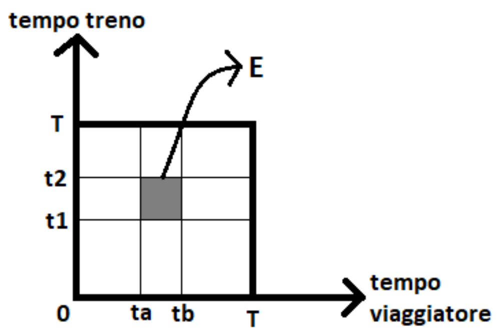
Esempio di un Esperimento Aleatorio: “Coppia di Arrivi in $[0, T]$”

Rappresentando Graficamente questo esempio, sfruttando due assi temporali (quello del Viaggiatore e quello del Treno):



Appare chiaro come:

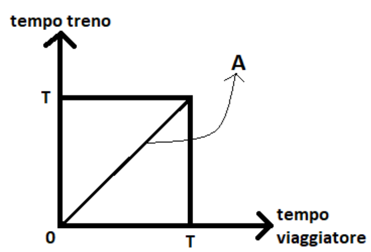
- Ω → Spazio dei Campioni → $\Omega = [0, T]^2$ ed è continuo;
- $\mathcal{E}$ → L’Algebra degli Eventi / Famiglia degli Eventi → Nel caso di Spazi dei Campioni Continui, l’Algebra degli Eventi comprende i singoli intervalli (sottorettangoli del quadrato);
- P → La Legge di Probabilità → Ipotizzando che gli arrivi siano casuali, la Probabilità di un certo evento E sarà proporzionale alla sua area, cioè:



$$P(E) = \frac{Area\,(E)}{Area(\Omega)}$$

Ora consideriamo tre Eventi differenti e calcoliamone le probabilità:

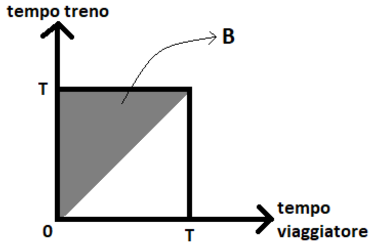
A. Viaggiatore e Treno arrivano contemporaneamente → $P(A) = \frac{Area(A)}{Area(\Omega)} = 0$
   Infatti, l’Evento A è rappresentato da un segmento, ossia dalla seguente diagonale:



   E l’area di un segmento è pari a 0, quindi la probabilità di questo Evento è pari a 0, pur non essendo l’evento impossibile.

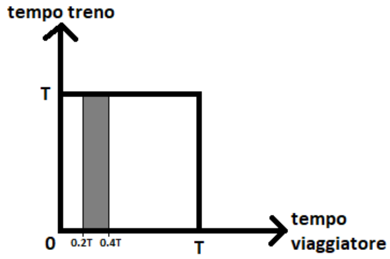
B. Viaggiatore arriva prima del Treno → $P(B) = \frac{Area(B)}{Area(\Omega)} = \frac{\frac{T^2}{2}}{T^2} = \frac{1}{2}$

Infatti, l'Evento B è così rappresentato:



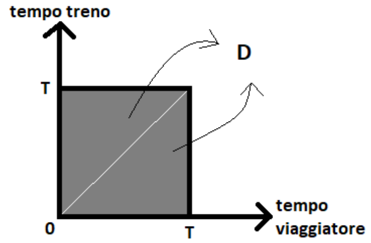
C. Viaggiatore arriva tra $0.2T$ e $0.4T$ → $P(C) = \frac{Area(C)}{Area(\Omega)} = \frac{(0.4T-0.2T)\cdot T}{T^2} = \frac{0.2\cdot T^2}{T^2} = 0.2$

Infatti, l'Evento C è così rappresentato:



D. Viaggiatore e Treno non arrivano contemporaneamente → $P(D) = \frac{Area(D)}{Area(\Omega)} = \frac{T^2}{T^2} = 1$

Infatti, l'Evento D è così rappresentato:



Cioè l'Area dell'Evento D corrisponde a tutta l'area di Ω meno la diagonale che rappresenta l'Evento A. Il punto è che l'Evento A ha area pari a 0, come abbiamo visto prima, quindi l'Area dell'Evento D corrisponde proprio a tutta l'Area di Ω e quindi la probabilità dell'Evento è pari ad 1, pur non essendo questo evento certo.

Eventi Equiprobabili

Nel momento in cui non vi è alcuna ragione per cui alcuni Risultati di una Prova dovrebbero verificarsi preferenzialmente rispetto agli altri, gli Eventi Elementari possono essere assunti "equiprobabili", vale a dire che la Probabilità di ognuno di questi può essere definita come:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Con $|x|$ che indica la "Cardinalità dell'insieme x.

Esempio: "Lancio di un Dado non truccato".

- Ω → Spazio dei Campioni → $\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.
- P → Legge di Probabilità → $P(f_i) = \frac{|f_i|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$
  Infatti, il Dado non è truccato e gli Eventi Elementari sono Equiprobabili.

Ora consideriamo tre Eventi differenti e calcoliamone le probabilità:

E. Faccia Dispari → $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

F. Faccia minore di 4 → $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

G. Faccia maggiore o uguale a 6 → $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$

Definizioni Alternative di Probabilità

- *Definizione Classica* → Prima degli Assiomi di Kolmogorov, la Probabilità di un Evento E era definita come il rapporto tra il numero di Eventi Elementari costituenti E ed il numero di casi possibili, ossia il numero degli Eventi Elementari costituenti Ω:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

  Ma questa era una definizione di Probabilità applicabile solo ad esperimenti il cui Spazio dei Campioni è finito e nei quali gli Eventi Elementari sono Equiprobabili;

- *Definizione Frequentistica* → La Probabilità è definita attraverso Frequenza di un Evento E in N Prove, tale Frequenza è definita come il rapporto tra il numero di volte in cui si verifica l'Evento E ed il numero complessivo delle Prove:

$$F_E(N) = \frac{N(E)}{N}$$

  La Probabilità dell'Evento E è definita dal limite, con N che tende ad infinito, dello stesso rapporto:

$$P(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(E)}{N}$$

  Questa definizione è corretta ed è applicabile sempre, ma chiaramente è impossibile effettuare un numero infinito di Prove nella realtà, quindi al massimo posso effettuarne molte ed effettuare una "stima" della probabilità. Tale stima sarà più accurata quanto più sarà alto il numero di Prove.

Indipendenza

$Indipendenza$ → Due Eventi sono indipendenti se non si influenzano, nella Teoria della Probabilità il concetto viene formalizzato con la seguente definizione:

$$Due\ eventi\ A\ e\ B\ si\ dicono\ indipendenti\ se:$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Gli Eventi possono anche essere Correlati, ossia dipendenti.

N.B. → $Indipendenza \neq Muta\ Esclusività$, infatti:

$$Indipendenza \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$Mutua\ Esclusività \rightarrow P(A \cap B) = 0$$

È possibile che due Eventi Indipendenti siano anche Mutuamente Esclusivi: infatti se almeno uno dei due ha probabilità nulla, il prodotto $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ avrà come risultato 0.

Probabilità Condizionata

$Probabilità\ Condizionata$ → In tal caso ho bisogno di una conoscenza a priori del risultato di un esperimento, infatti la Probabilità Condizionata $P(A|B)$ (si legge "di un Evento A dato B") è definita come:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \rightarrow \quad P(B) \neq 0$$

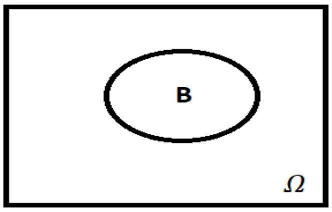
La Probabilità Condizionata soddisfa gli Assiomi di Kolmogorov:

A1. Non Negatività → $P(A|B) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{E}$ → La Probabilità non può essere Negativa;
Infatti, è data dal rapporto tra due grandezze ≥ 0, infatti $\frac{P(A \cap B) \geq 0}{P(B) \geq 0}$;

A2. Normalizzazione → $P(\Omega|B) = 1$ → La Probabilità dello Spazio dei Campioni dato B, deve essere sempre pari ad 1;
Infatti:

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

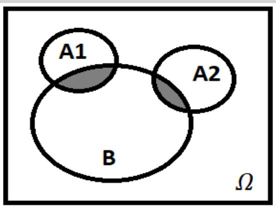
E l'intersezione tra Ω e B equivale a B stesso:



A3. Finita Additività → $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{E} : A_1 \cap A_2 = \emptyset$
La Probabilità dell'Unione di due Eventi disgiunti tra loro (due insiemi che non si intersecano) deve essere apri alla somma delle loro Probabilità;
Infatti:

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{\boxed{P((A_1 \cup A_2) \cap B))}}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B) \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{E} : \boxed{A_1 \cap A_2 = \emptyset}$$



Inoltre, a partire dalla definizione di Probabilità Condizionata e degli Assiomi di Kolmogorov, derivano le seguenti Proprietà:

1. $P(A|B) = 1 \quad \forall A \supseteq B$
   Questa proprietà è dimostrabile partendo dalla Definizione di Probabilità Condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad \forall A \supseteq B$$

   Infatti, l'intersezione tra un insieme A ed un insieme B incluso in A, equivale a B stesso;

2. $P(A|B) \geq P(A) \quad \forall A \subseteq B$
   Questa proprietà è dimostrabile partendo dalla Definizione di Probabilità Condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A) \quad \forall A \subseteq B$$

   Infatti, l'intersezione tra un insieme A ed un insieme B, con A incluso in B, equivale ad A stesso.

   Inoltre, $\frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$ poiché $0 < P(B) \leq 1$;

3. $P(A|B) = 0 \quad \forall A, B : A \cap B = \emptyset$
   Questa proprietà è dimostrabile partendo dalla Definizione di Probabilità Condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0 \quad \forall A, B : A \cap B = \emptyset$$

   Infatti, se A e B non si intersecano ho 0 al numeratore.

4. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ e $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ nel caso in cui A e B sono statisticamente indipendenti ed a probabilità non nulla.

Definizione Frequentistica della Probabilità Condizionata

Da un punto di vista Frequentistico, ricordando che la Probabilità che un Evento A si verifichi è definita come:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Allora è possibile interpretare la Probabilità Condizionata in questo modo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \approx \frac{\frac{N(AB)}{\cancel{N}}}{\frac{N(B)}{\cancel{N}}} = \frac{N(AB)}{N(B)}$$

Con $N(AB)$ ed $N(B)$ che rispettivamente indicano il numero di volte che si verificano gli eventi $A \cap B$ e B in N prove.

Quindi la Probabilità Condizionata da un punto di vista Frequentistico $P(A|B) = \frac{N(AB)}{N(B)}$ indica il numero di volte che si verifica l'Evento A non più in tutte le Prove "N", ma solo nelle Prove in cui si verifica B: '$N(B)$'.

Quindi le Prove in cui B non si verifica, vengono escluse e quindi non vengono prese in considerazione.

Probabilità Condizionata: Eventi Correlati

- Se $P(A|B) > P(A) \rightarrow A$ è Positivamente Correlato a B;
- Se $P(A|B) < P(A) \rightarrow A$ è Negativamente Correlato a B;
- Se $P(A|B) = P(A) \rightarrow A$ e B sono indipendenti, poiché: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

Leggi Fondamentali

- $Legge\ della\ Probabilià\ Composta$:

  Dalla definizione di Probabilità Condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

  Inoltre:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

  E quindi si arriva alla Legge della Probabilità Composta:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

- $Legge\ di\ Bayes$:

  Dalla Legge della Probabilità Composta:

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

  Si arriva alla Legge di Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A)$$

  Tale Legge ci consente di calcolare la Probabilità dell'Evento A dato B, in termini della Probabilità dell'Evento B dato A e quindi di scambiare i ruoli di Evento Condizionato e Condizionante.

- $Legge\ della\ Probabilità\ Totale$:

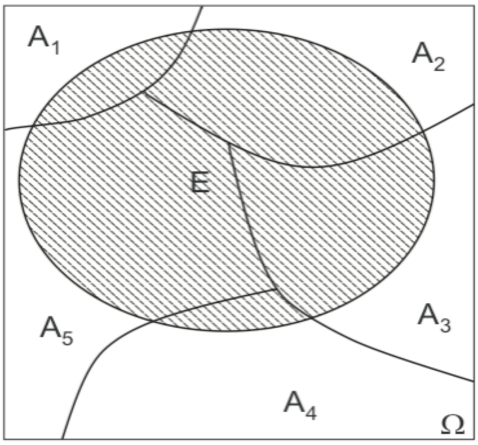
  Consideriamo uno Spazio dei Campioni Ω ed un Evento E. Prendiamo in considerazione "N" Partizioni dello Spazio dei Campioni $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$ costituite da Eventi a Probabilità non nulla ed in modo tale che:

$$\bigcup_n A_n = \Omega$$

  E che:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i,j : i \neq j$$

Quindi lo Spazio dei Campioni è partizionato in questo modo:



Volendo calcolare la Probabilità dell'Evento E avrò che:

$$P(E) = P(E \cap \Omega)$$

Infatti, essendo E incluso in Ω, la loro intersezione ha come risultato E stesso. Inoltre, sapendo che

$$\bigcup_n A_n = \Omega$$

Possiamo scrivere:

$$P(E) = P(E \cap \Omega) = P\left(E \cap \left(\bigcup_n A_n\right)\right) = P\left(\bigcup_n P(E \cap A_n)\right) = \sum_n P(E \cap A_n)$$

E quindi, per la Legge della Probabilità Composta, arriviamo a determinare la Legge della Probabilità Totale:

$$P(E) = \sum_{n \in I} P(E \cap A_n) = \sum_{n \in I} P(A_n) \cdot P(E|A_n)$$

- $Legge\ di\ Bayes\ (seconda\ formulazione)$:

Sulla base della Legge della Probabilità Totale:

$$P(E) = \sum_{n \in I} P(A_n) \cdot P(E|A_n)$$

E della Legge di Bayes (prima formulazione):

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A)$$

Possiamo affermare che:

$$P(A_n|E) = \frac{P(A_n)}{\sum_{n \in I} P(A_n) \cdot P(E|A_n)} \cdot P(E|A_n)$$

Esempio: "Estrazione di due Carte da un Mazzo di Carte Napoletane".

Eventi:

- $A = \{$ *Le due carte sono dello stesso seme* $\}$;
- $B = \{$ *La prima carta è di spade* $\}$.

Calcoliamo:

- $P(A)$ Probabilità che si verifichi l'Evento A:

  Per la Legge della Probabilità Totale sappiamo che:

  $$P(E) = \sum_{n \in I} P(A_n) \cdot P(E|A_n)$$

  Quindi, nel nostro caso:

  $$P(A) = P(d) \cdot P(d|d) + P(s) \cdot P(s|s) + P(c) \cdot P(c|c) + P(b) \cdot P(b|b)$$

  Con: "d" che indica il seme "$denari$", "s" che indica il seme "$spade$", "c" che indica il seme "$coppe$" e "b" che indica il seme "$bastoni$".

  Ora considerando che la Probabilità $P(d)$, ossia che il seme della prima carta sia di $denari$ è pari a:

  $$P(d) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

  Se tale evento si verifica, allora avremo 39 carte in totale (e non più 40) ed avremo 9 carte a denari (e non più 10).

  Quindi, la Probabilità che anche la seconda carta estratta sia di seme $denari$ è pari a:

  $$P(d|d) = \frac{9}{39}$$

  E quindi, la Probabilità che le prime due carte siano di denari $P(D)$ è pari a:

  $$P(D) = P(d) \cdot P(d|d) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} = 0.057$$

  Ora possiamo procedere al calcolo di $P(A)$, quindi la Probabilità che le prime due carte siano dello stesso seme è pari a:

  $$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39}\right) = \frac{9}{39}$$

- $P(A - B)$ Probabilità che si verifichi l'Evento A ma non l'Evento B:

  La Probabilità che si verifichi l'Evento A, ma non l'Evento B è pari a:

  $$P(A - B) = P(d) \cdot P(d|d) + P(c) \cdot P(c|c) + P(b) \cdot P(b|b) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{39}$$

- $P(B|A)$ Probabilità che si verifichi l'Evento B dato l'Evento A:

  Per la Legge di Bayes, sappiamo che:

  $$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B)$$

Sappiamo che:

$$P(B) = \frac{1}{4} \text{ e che } P(A) = \frac{9}{39}$$

Quindi procediamo al calcolo di $P(A|B)$, ossia della Probabilità che le prime due carte siano dello stesso seme data la prima carta di seme uguale a "spade", cioè la Probabilità che la seconda carta sia di spade:

$$P(A|B) = \frac{9}{39}$$

Ecco che ora possiamo procedere al calcolo di $P(B|A)$:

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B) = \frac{1/4}{9/39} \cdot \frac{9}{39} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cancel{39}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{39}} = \frac{1}{4}$$

Si può notare come

$$P(B|A) = P(B) \ \textit{e che} \ P(A|B) = P(A)$$

Esempio: "Seleziono una Carta da un mazzo di 52 carte e la metto in un secondo mazzo di 52 carte. Successivamente una Carta viene selezionata dal secondo mazzo di carte".

Eventi:

- $A = \{$ *La seconda carta estratta è un asso* $\}$;
- $B = \{$ *La carta selezionata dal primo mazzo e messa nel secondo è un asso* $\}$.

Calcoliamo:

- $P(A)$ Probabilità che si verifichi l'Evento A:

  Sappiamo che nel secondo mazzo di carte, quello dal quale estraiamo questa seconda carta, ci sono 53 carte.

  Per la Legge della Probabilità Totale sappiamo che:

$$P(E) = \sum\nolimits_{n \in I} P(A_n) \cdot P(E|A_n)$$

  Nel nostro caso, la Probabilità che si verifichi l'Evento A è pari a:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$$

  Cioè attraverso la Legge della Probabilità Totale, scriviamo la Probabilità che la seconda carta estratta sia un asso "$P(A)$", come la somma delle Probabilità che la seconda carta estratta sia un asso ed anche la prima lo fosse "$P(B) \cdot P(A|B)$" e che la seconda carta estratta sia un asso e la prima non lo fosse "$P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$".

  In effetti è proprio così ed il vantaggio sta nel fatto che ora posso calcolare facilmente $P(B) \cdot P(A|B)$ e $P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$:

$$P(B) = \frac{4}{52} \rightarrow P(\bar{B}) = \frac{48}{52} \ , \qquad P(A|B) = \frac{5}{53} \ , \qquad P(A|\bar{B}) = \frac{4}{53}$$

  E quindi:

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

- $P(B|A)$ Probabilità che si verifichi l'Evento B dato l'Evento A:

  Per la Legge di Bayes, sappiamo che:

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B) = \frac{\frac{4}{52}}{\frac{4}{52}} \cdot \frac{5}{53} = \frac{5}{53}$$

- Verifichiamo se A e B sono Eventi Indipendenti:

  Ricordando la Definizione di Indipendenza

$$Due\ eventi\ A\ e\ B\ si\ dicono\ indipendenti\ se:$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

  Inoltre, per la Legge della Probabilità Composta:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

  Quindi A e B sono Eventi indipendenti se è vera questa equazione:

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B) \quad \rightarrow \quad P(A|B) = P(A)$$

  Ma

$$\frac{5}{53} \neq \frac{4}{52} \quad \rightarrow \quad P(A|B) \neq P(A)$$

Esempio: "Lancio di due Dadi non truccati".

Eventi:

- A = { *Il punteggio del primo dado è maggiore del secondo* };

Calcoliamo:

- $P(A)$ Probabilità che si verifichi l'Evento A:

  Organizzo i possibili risultati in una matrice:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

  Quindi:

$$P(A) = \frac{15}{36}$$

Esempio: “Lancio di due Dadi non truccati”.

Eventi:

- A = { *La somma dei risultati è un numero primo* };
- B = { *Il prodotto dei risultati è pari alla somma* };
- C = { *I risultati sono uguali e la loro somma è pari a 6* }.

Calcoliamo:

- $P(A)$ Probabilità che si verifichi l’Evento A:

  Cioè io devo calcolare la Probabilità che:

  $$P(A) = P[((D_1 + D_2) = 2) \cup ((D_1 + D_2) = 3) \cup ((D_1 + D_2) = 5) \cup ((D_1 + D_2) = 7) \cup ((D_1 + D_2) = 11)]$$

  Ossia:

  $$P(A) = P((D_1 + D_2) = 2) + P((D_1 + D_2) = 3) + P((D_1 + D_2) = 5) + P((D_1 + D_2) = 7) + P((D_1 + D_2) = 11)$$

  I numeri primi che possono risultare come somma dei risultati sono:

  - 2 → 1,1 ;
  - 3 → 1,2 ; 2,1 ;
  - 5 → 1,4 ; 4,1 ; 2,3 ; 3,2 ;
  - 7 → 1,6 ; 6,1 ; 2,5 ; 5,2 ; 3,4 ; 4,3 ;
  - 11 → 5,6 ; 6,5 .

  Ora sappiamo quanto valgono le singole probabilità:

  - $P((D_1 + D_2) = 2) = \frac{1}{36}$
  - $P((D_1 + D_2) = 2) = \frac{2}{36}$
  - $P((D_1 + D_2) = 2) = \frac{4}{36}$
  - $P((D_1 + D_2) = 2) = \frac{6}{36}$
  - $P((D_1 + D_2) = 2) = \frac{2}{36}$

  E quindi:

  $$P(A) = \frac{15}{36}$$

- $P(B)$ Probabilità che si verifichi l’Evento B:

  Organizzo i possibili risultati in una matrice:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Ora calcolo la matrice dei prodotti:

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	32
6	12	18	24	30	36

E poi quella delle somme:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

E quindi:

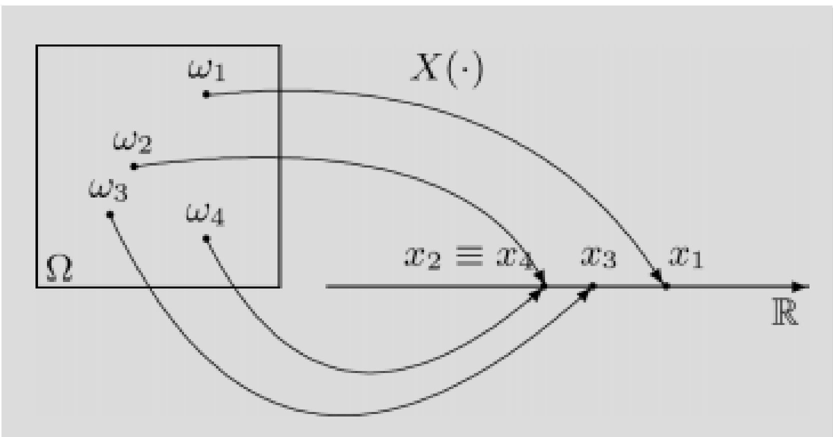
$$P(B) = \frac{1}{36}$$

Variabili Aleatorie

Una variabile aleatoria associa un valore numerico ai risultati di un esperimento.

Consideriamo lo Spazio dei Campioni Ω di un esperimento, possiamo esprimere una Variabile Aleatoria "X" come una funzione reale definita su Ω:

$$X : \omega \in \Omega \ \rightarrow \ x = X(\omega) \in \mathbb{R}$$



Il Codominio della Variabile Aleatoria X è "l'insieme di valori x che la Variabile Aleatoria X può assumere al variare della variabile indipendente ω" ed è detto "Alfabeto di X".

Una Variabile Aleatoria X è detta "*continua*" se il suo alfabeto è *continuo*, "*discreta*" se il suo alfabeto è *discreto*, "*mista*" se *insiemi continui di punti si accumulano in punti discreti*.

Esempio: "Lancio di due monete".

- $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$;

Sulla base dello Spazio dei Campioni definiamo una Variabile Aleatoria:

- $X(\{TT\}) = 1$
- $X(\{TC\}) = 2$
- $X(\{CT\}) = 3$
- $X(\{CC\}) = 4$

Dato che le uscite sono equiprobabili, avrò:

- $P(X = 1) = \frac{1}{4} = 0.25$
- $P(X = 2) = \frac{1}{4} = 0.25$
- $P(X = 3) = \frac{1}{4} = 0.25$
- $P(X = 4) = \frac{1}{4} = 0.25$

Esempio: "Indicatore di un Evento".

Utilizzo una Variabile Aleatoria I_E come Indicatore di un Evento E. In tal caso, la Variabile Aleatoria I_E è così definita:

$$I_E : \ \omega \in \Omega \ \rightarrow \begin{cases} 1 \ \ se \ \ \omega \in \Omega \\ 0 \ \ se \ \ \omega \notin \Omega \end{cases}$$

Cioè semplicemente se l'Evento E si verifica $I_E = 1$, altrimenti $I_E = 0$. Quindi $P(I_E = 1) = P(E)$.

L'alfabeto di I_E è dato dai valori 0 e 1, cioè è l'insieme discreto $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$.

L'Importanza delle Variabili Aleatorie sta nel fatto che queste permettono di definire tre Funzioni molto importanti:

- ## Funzione di Distribuzione Cumulativa – CDF

  La *Funzione di Distribuzione Cumulativa* (*CDF*) è relativa ad una Variabile Aleatoria X e pertanto indicata come F_X e dipende dalla Variabile Indipendente x. Tale funzione è definita sull'insieme dei Numeri Reali:

  $$F_X : x \in \mathbb{R}$$

  Cioè x, la variabile indipendente, appartiene all'Insieme dei Numeri Reali ed il suo valore si calcola come:

  $$F_X(x) = P(X \leq x)$$

  Cioè si calcola valutando la probabilità dell'evento $\{X \ \leq \ x\}$ e per forza di cose $0 \leq F_X(x) \leq 1$ poiché si calcola come una Probabilità e la Probabilità è sempre compresa tra 0 ed 1.

  Consideriamo:

- Una Variabile Aleatoria Bernoulliana $X \sim B(1,p)$.

Ossia una Variabile Aleatoria X con alfabeto $A_x = \{0,1\}$ e parametro $p = P(X=1)$.

Dal fatto che $p = P(X=1)$ possiamo dedurre che $1-p = P(X=0)$.

Calcoliamo il valore che $F_X(x)$ può assumere:

- Se $x < 0$ → Esempio: $x = -1/2$:

$$F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = P\left(X \leq -\frac{1}{2}\right) = P(\emptyset) = 0$$

Perché la Variabile Aleatoria Bernoulliana X può assumere solo i valori 0 ed 1 e quindi la Probabilità che $X \leq -\frac{1}{2}$ è pari a 0 e l'Evento $X \leq -\frac{1}{2}$ corrisponde proprio all'insieme vuoto $\emptyset$.
In generale proprio per $x < 0$ l'Evento $\{X \leq x\} = \emptyset$;

- Se $x = 0$:

$$F_X(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0)$$

Perché abbiamo detto che X può assumere solo i valori 0 ed 1, cioè X non può essere ≤ 0 ma può solo essere $= 0$ e quindi, sapendo che $1-p = P(X=0)$ abbiamo che:

$$F_X(0) = P(X = 0) = 1 - p$$

- Se $x < 1$ → Esempio: $x = 0.7$:

$$F_X(0.7) = P(X \leq 0.7) = P(X = 0)$$

Anche in tal caso vale il discorso precedente: X può assumere solo i valori 0 ed 1, cioè X non può essere ≤ 0.7 ma può solo essere $= 0$ e quindi:

$$F_X(0.7) = P(X = 0) = 1 - p = q$$

- Se $x = 1$:

$$F_X(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1-p) + p = 1$$

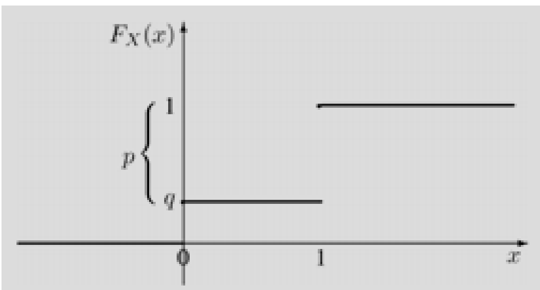
- Se $x \geq 1$ → Esempio: $x = 1.7$:

$$F_X(1.7) = P(X \leq 1.7) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1 - p + p = 1$$

Quindi, sapendo che:

$$\text{L'Evento } \{X \leq x\} = \begin{cases} \emptyset \;\; se \;\; x < 0 \\ \{1\} \;\; se \;\; 0 \leq x < 1 \\ \Omega \;\; se \;\; x \geq 1 \end{cases} \rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 \;\; se \;\; x < 0 \\ q \;\; se \;\; 0 \leq x < 1 \\ 1 \;\; se \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

Possiamo rappresentare graficamente La *Funzione di Distribuzione Cumulativa*:



Il Vantaggio di utilizzare la *Funzione di Distribuzione Cumulativa* (*CDF*) sta nel fatto che questa ci fornisce un modello matematico dell'esperimento.

- Una Variabile Aleatoria Uniforme:

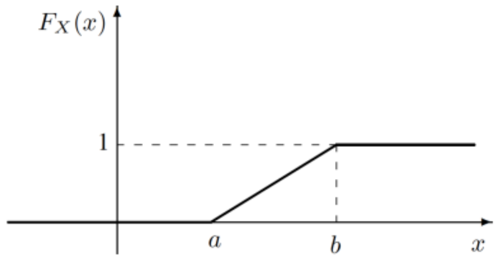
  Una Variabile Aleatoria è detta Uniforme se i valori che può assumere sono equiprobabili.

  Questa può essere:

  - Una Variabile Aleatoria Uniforme Continua $X \sim U(a, b)$.

    L'espressione sintetica $X \sim U(a, b)$ indica una Variabile Aleatoria X "Uniforme" nell'Intervallo $[a, b]$ e quindi, ad esempio, con la seguente CDF:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \ \ se \ \ a \leq x \leq b \\ 1 \ \ se \ \ x \geq b \end{cases} \rightarrow$$



  - Una Variabile Aleatoria Uniforme Discreta $X \sim U(1, N)$.

    In tal caso l'Alfabeto di X è composto da un numero finito di valori:

$$A_x = \{1, 2, 3, \dots, N\}$$

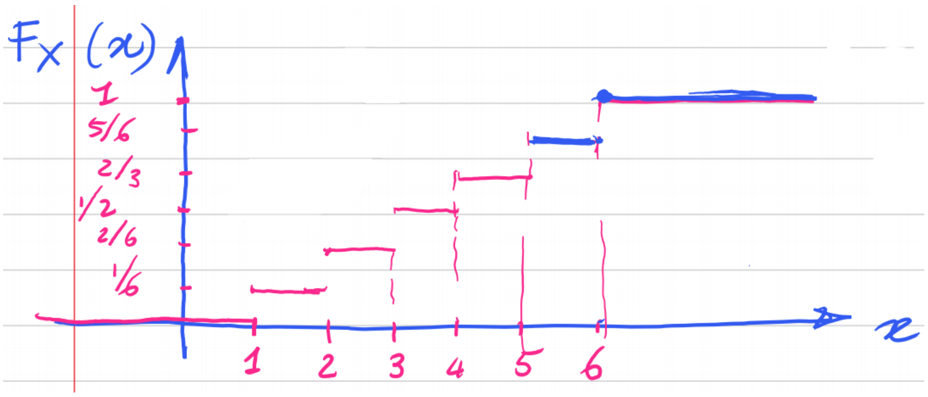
Ad esempio, nel caso di $X \sim U(1, 6)$:

$$A_x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

La Probabilità associata ai vari valori che X può assumere sarebbe identica per tutti questi valori e si calcolerebbe come:

$$P(X = i) = \frac{i}{N} \ \ con \ \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Quindi, graficamente, potremmo rappresentare la *CDF* così:



Quindi, graficamente, sia una Variabile Aleatoria Uniforme Continua che Discreta hanno una *CDF* costante, ma ciò che le distingue è che una Variabile Aleatoria Uniforme Discreta ha una *CDF* costante a tratti.

- # Funzione di Distribuzione Cumulativa Empirica – ECDF

La *Funzione di Distribuzione Cumulativa Empirica* (*ECDF*) è detta "Empirica" poiché definita sulla base dei dati empirici, in particolar modo si considerano gli N possibili risultati sperimentali di un determinato esperimento aleatorio ed a questi possibili risultati si associano N osservazioni della Variabile Aleatoria X, ossia gli N possibili valori che X può assumere:

$$x_1, x_2, \ldots x_N$$

Esempio: "Lancio di un dado".

Considero 6 osservazioni della Variabile Aleatoria X:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$$

Anche tale Funzione è relativa ad una Variabile Aleatoria X e pertanto indicata come $\hat{F}_X$ ed anch'essa dipende dalla Variabile Indipendente x. Tale funzione è definita sull'insieme dei Numeri Reali:

$$\hat{F}_X : x \in \mathbb{R}$$

Cioè x, la variabile indipendente, appartiene all'Insieme dei Numeri Reali ed il valore di tale Funzione si calcola come:

$$\hat{F}_X(x) = \frac{(N(x_i)) \leq x)}{N} \in [0, 1]$$

Cioè si calcola valutando il rapporto tra il numero di osservazioni x_i della Variabile Aleatoria X (con $i = 1, 2, \ldots, N$) che sono minori o uguali ad x ed il numero totale di prove "N".

Cioè la definizione di *Funzione di Distribuzione Cumulativa Empirica* equivale alla definizione della *Funzione di Distribuzione Cumulativa* ma da un punto di vista e con un approccio Frequentistico, infatti mentre la *Funzione di Distribuzione Cumulativa* viene calcolata come la Probabilità dell'Evento $\{X \leq x\}$, in tal caso la calcoliamo come il rapporto tra il numero di osservazioni x_i della Variabile Aleatoria X che sono $\leq x$ ed il numero totale di prove.

Per calcolare efficientemente la *ECDF* è bene ordinare le osservazioni in modo crescente:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N$$

E poi si costruisce l'*ECDF* in questo modo:

- Se $x < x_1$, dato che al numeratore ho il numero di osservazioni minori o uguali ad x:

  $$N(x_i)) \leq x$$

  Osserverò 0 uscite sperimentali! Cioè $N(x_i)) \leq x$ sarà pari a 0 perché $x < x_1$, quindi non ci sono osservazioni $x_i \leq x$;

- Se $x_k \leq x < x_{k+1}$, allora avrò $\frac{k}{N}$;

- Se $x \geq x_N$, allora osserverò proprio N uscite sperimentali! Cioè $N(x_i)) \leq x = N$ e quindi $\hat{F}_X(x) = \frac{N}{N} = 1$.

Quindi:

$$\hat{F}_X(x) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ x < x_1 \\ \dfrac{k}{N} \ \ se \ \ x_k \leq x < x_{k+1} \\ 1 \ \ se \ \ x \geq x_N \end{cases}$$

Proprietà della CDF

Una CDF è caratterizzata dalle seguenti Proprietà Principali:

1. Valori Estremi:

$$F_X(-\infty) = 0 \qquad F_X(+\infty) = 1$$

   Infatti, ricordando che il valore della *CDF* si calcola in questo modo:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

   Ossia valutando la probabilità dell'Evento $\{X \leq x\}$, allora:

   - $F_X(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0$

     Cioè la Variabile Aleatoria X non può assumere un valore $\leq -\infty$;

   - $F_X(+\infty) = P(X \leq +\infty) = 1$

     Cioè è praticamente "certo" che la Variabile Aleatoria assuma valori $\leq +\infty$.

2. Monotonicità: "La CDF non è Decrescente":

   Infatti, se ho due valori della variabile indipendente x, che chiamo "x_1" ed "x_2", allora:

$$x_1 \leq x_2 \;\; \rightarrow \;\; F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

   Perché $F_X(x) = P(X \leq x)$, quindi se $x_1 \leq x_2$, per forza di cose $P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2)$.

   Volendo arrivarci per Proprietà degli Eventi e non attraverso la logica, considerando che $x_1 \leq x_2$ e quindi che:

   L'Evento $\{X \leq x_1\}$ (che corrisponde all'intervallo di valori $(-\infty, x_1]$) è incluso nell'Evento $\{X \leq x_2\}$ (che invece corrisponde all'intervallo di valori $(-\infty, x_2]$), quindi $\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\}$ e noi sappiamo che la Probabilità che si verifichi un Evento contenuto e incluso in un altro, è minore o uguale alla Probabilità che si verifichi l'Evento che lo contiene e che lo include.

3. Continuità da destra:

$$\lim_{h \to 0+} F_X(x + h) = F_X(x)$$

Queste Proprietà sono dette "costitutive", in quanto una qualsiasi Funzione che sia caratterizzata da tali proprietà e che quindi soddisfi tali proprietà, è a tutti gli effetti una *CDF*.

Esiste anche un'altra proprietà caratteristica della *CDF*:

4. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ → Tale proprietà è utile quando ho bisogno di calcolare le Probabilità che la Variabile Aleatoria assuma valori compresi in un certo intervallo.

   Questa proprietà possiamo dimostrarla in questo modo:

Consideriamo l'Evento $\{-\infty < X \leq a\}$ e l'Evento $\{a < X \leq b\}$. Possiamo scrivere che l'unione di questi due eventi:

$$\{-\infty < X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\} = \{-\infty < X \leq b\}$$

Ora calcoliamo le Probabilità:

$$P\big((-\infty < X \leq a) \cup (a < X \leq b)\big) = P(-\infty < X \leq b)$$

Possiamo affermare che, essendo gli eventi $\{-\infty < X \leq a\}$ ed $\{a < X \leq b\}$ indipendenti:

$$P(-\infty < X \leq a) + P(a < X \leq b) = P(-\infty < X \leq b)$$

E quindi:

$$P(a < X \leq b) = P(-\infty < X \leq b) - P(-\infty < X \leq a) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

- ## Funzione di Distribuzione di Probabilità – PMF

La *Funzione di Distribuzione di Probabilità* (*PMF*), è anche detta *Funzione di Massa di Probabilità* e si applica solo a Variabili Aleatorie Discrete.

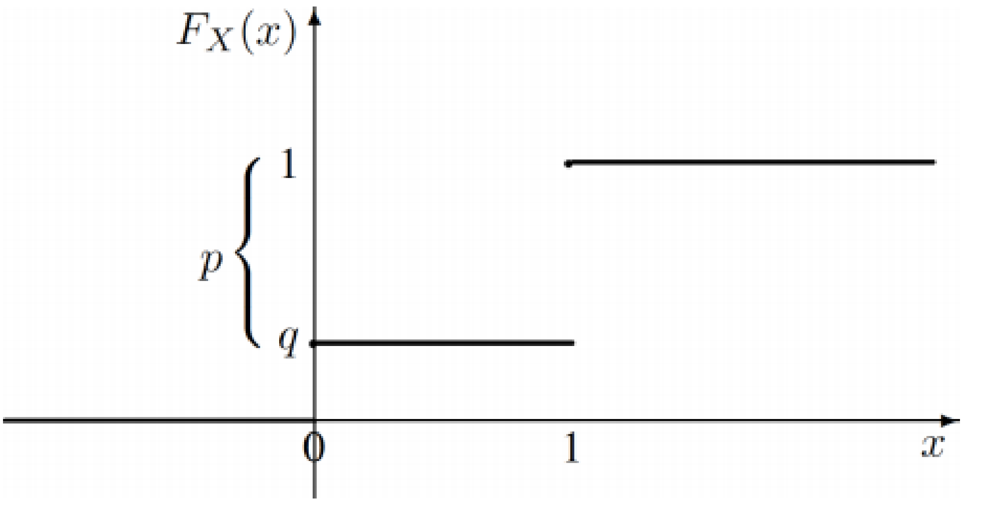
Questa si indica come $P_X(x)$ ed il suo valore viene valutato come la Probabilità dell'Evento $\{X = x\}$:

$$P_X(x) = P(X = x)$$

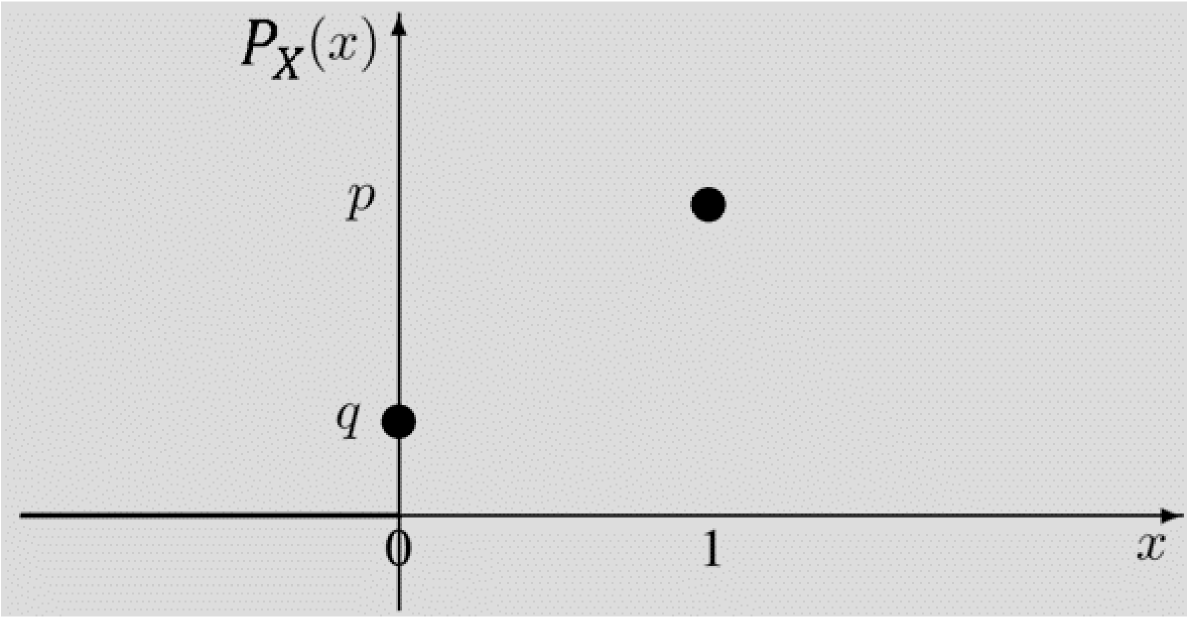
Prendendo in considerazione una Variabile Aleatoria Bernoulliana $X \sim B(1,p)$, ossia con alfabeto $A_x = \{0,1\}$ e:

- $P(X = 1) = p$;
- $P(X = 0) = 1 - p = q$.

Al contrario della *CDF*:



La *PMF* assume i seguenti valori:



Quindi in tal caso ho una Funzione "puntiforme", che non è costituita da "tratti" al contrario della *CDF*.

Proprietà della PMF

Una *PMF* è caratterizzata dalle seguenti Proprietà Principali, nonché "costitutive":

1. Non Negatività:

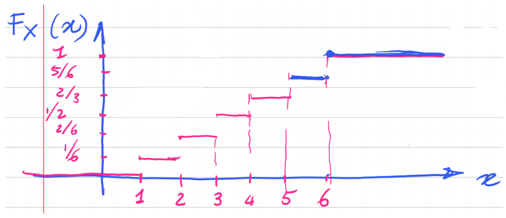
$$P_X(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in A_x$$

   Infatti, $P_X(x) = P(X = x)$ e la Probabilità può assumere sempre e solo valori compresi tra 0 ed 1.

2. Normalizzazione:

$$\sum\nolimits_{x \in A_x} P_X(x) = 1$$

   Questa proprietà caratterizza anche la *CDF* (come vedemmo nell'esempio:



In effetti, se io ho una Variabile Aleatoria X il cui alfabeto è $A_x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$, nel momento in cui effettuo la somma, per tutti i valori di x che appartengono all'Alfabeto A_x, di tutti i valori della *PMF*, otterrò proprio il massimo valore di P_X, ossia il suo estremo superiore: $P_X(x_1) + P_X(x_2) + P_X(x_3) + \ldots + P_X(x_N) = 1$.

Distribuzione di Poisson

La Distribuzione di Poisson è un "Modello di Arrivi ad una Coda" ed è definito dalla *PMF*. È detta "Modello di Arrivi ad una Coda" poiché questa distribuzione modella la probabilità di avere k elementi in una coda nella quale gli arrivi sono aleatori, ad un certo istante di tempo "t":

$$P_X(k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots$$

La *PMF* di Poisson è dipendente anche da un parametro "λ".

N.B. Per "coda nella quale gli arrivi sono aleatori" s'intende una coda nella quale gli arrivi degli elementi che la vanno a comporre sono aleatori, quindi nel caso di una coda di persone s'intende che gli arrivi delle persone stesse sono aleatori, o nel caso di una coda di pacchetti inviati tramite la rete s'intende che gli arrivi di questi stessi pacchetti sono aleatori, ecc...).

Naturalmente, essendo la *PMF* di Poisson una *PMF*, anche per questa valgono le proprietà costitutive, infatti:

1. Non Negatività: Perché nella formula ho:
   a. Un esponenziale → Che, quindi, è sempre ≥ 0 ;
   b. "$k!$" → Che è positivo, infatti il "fattoriale" per definizione si calcola solo su numeri Interi Positivi;
   c. $(\lambda t)^k$ → Con t che è il tempo ed è sempre ≥ 0 e λ che è ≥ 0.
2. Normalizzazione: Per verificare questa proprietà devo calcolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Ossia la sommatoria per k : "il numero di elementi che compongono la coda", che va da 0 ad $infinito$ (dato che il numero di elementi che la compongono non può essere negativo) del valore della *PMF* di Poisson. E quindi l'esponenziale posso portarlo fuori dalla sommatoria:

$$e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

La Sommatoria in questione equivale proprio allo Sviluppo in Serie di Taylor di un esponenziale:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

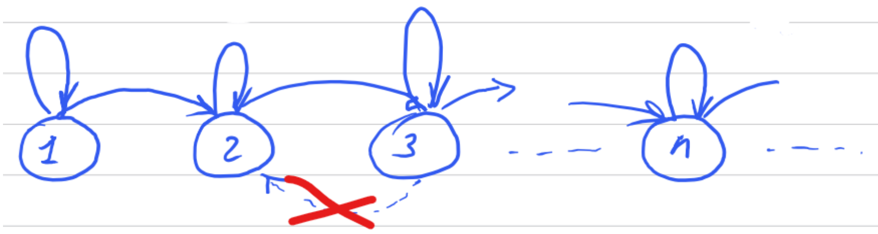
E quindi posso scrivere che:

$$e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = 1$$

La Distribuzione di Poisson viene utilizzata per i Modelli di Crescita delle Popolazioni, in particolar modo, la *PMF* di Poisson permette di modellare il "Modello di Pura Nascita", ossia l'incremento di popolazione che si ha nel tempo nel caso in cui ci siano solo nascite.

Equazione Differenziale Stocastica di Pura Nascita

Per introdurre tale equazione, si può utilizzare un Processo che rappresentiamo attraverso il seguente Modello a Stati:



In questo Modello a Stati, i vari Stati del Processo rappresentano il numero di elementi in un certo istante di tempo e naturalmente, essendo questo un Modello di Pura Nascita, si può esclusivamente o passare da uno Stato al Successivo o rimanere allo Stato Corrente, cioè non avviene mai un "decremento", ossia non si passa mai da uno Stato al precedente.

I Processi di Poisson sono tutti processi di questo tipo: non ammettono decrementi.

Se ragioniamo per intervalli di tempo sempre più piccoli è possibile giungere all'importante equazione:

L'Equazione Differenziale Stocastica di Pura Nascita

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda[P_{n-1}(t) - P_n(t)]$$

Questa equazione lega piccole variazioni di P_n nel tempo: $\frac{dP_n(t)}{dt}$ al valore di P_n nei tempi corrispondenti agli stati n ed $n-1$, inoltre ammette come soluzione proprio la *PMF* di Poisson.

Tale equazione ha come condizioni:

1. $P_0(0) = 1$ → Cioè la Probabilità di avere 0 elementi al tempo 0 è pari ad 1;
2. $\sum P_n(t) = 1 \quad \forall\, t$ → Per ogni t, la soluzione rappresenta una *PMF*, cioè la P_n a cui si fa riferimento nell'Equazione è sempre (per ogni t) una *PMF*.

Una cosa che è possibile notare è che quest'equazione è caratterizzata da una variabile continua "t" ed una discreta "n".

PMF Binomiale – Distribuzione Binomiale

Consideriamo l'esperimento che consiste in N prove, il cui risultato è di tipo *successo* oppure *insuccesso*.

In tal caso, possiamo associare N Variabili Aleatorie Bernoulliane "$X_i \sim B(1,p)$" con Alfabeto $A_x = \{0, 1\}$ ai risultati delle N prove e queste Variabili Aleatorie assumeranno valore "1" nel caso di *successo* e "0" nel caso di *insuccesso*, rispettivamente con Probabilità "p" e "$q = (1-p)$".

In questo modo, il conteggio dei *successi* può essere visto come "la somma delle N Variabili Aleatorie Bernoulliane":

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Là dove "X" sta ad indicare una Variabile Aleatoria che descrive il conteggio dei successi e che è caratterizzata dall'Alfabeto $A_x = \{0, 1, \ldots, N\}$.

Esempio:

Risultato	Xi
Successo	1
Successo	1
Insuccesso	0
Successo	1
Insuccesso	0
Insuccesso	0
Insuccesso	0

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i = 3$$

Questa Variabile Aleatoria "X" è detta "Binomiale dei parametri N e p".
La sua *PMF* è indicata sinteticamente come:

$$X \sim B(N, p)$$

Ed è così definita:

$$P_X(k) = P(\{X = k\}) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot q^{N-k} \ , \qquad k = 0, 1, \ldots N$$

Cioè è definita come la Probabilità che X (il conteggio dei *successi* ottenuti dalle N prove) sia pari a "k".

Cioè come il prodotto tra:

- La Probabilità di ottenere "k" *successi* in N prove ed $N - k$ *insuccessi* in N prove:

$$p^k \cdot q^{N-k}$$

Esempio:

La Probabilità che le X_i assumano precisamente i seguenti valori:

$$X_1 = 1, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 1, \quad X_4 = 1, \quad X_5 = 1, \quad X_6 = 0, \quad X_7 = 0$$

Essendo tali eventi indipendenti tra loro e ricordando la Definizione di Indipendenza:

$$Due\ eventi\ A\ e\ B\ si\ dicono\ indipendenti\ se:$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si calcola come:

$$P\big((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 1) \cap (X_4 = 1) \cap (X_5 = 1) \cap (X_6 = 0) \cap (X_7 = 0)\big) =$$

$$= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1) \cdot P(X_4 = 1) \cdot P(X_5 = 1) \cdot P(X_6 = 0) \cdot P(X_7 = 0) =$$

$$= p^k \cdot q^{N-k} = p^4 \cdot q^3$$

Quindi la Probabilità di ottenere la sequenza di valori:

$$1011100$$

È pari a:

$$p \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q = p^4 \cdot q^3$$

- Il Coefficiente Binomiale:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!}$$

Che permette di prendere in considerazione tutte le possibili configurazioni attraverso le quali si possono ottenere "k" *successi* in N prove ed $N - k$ *insuccessi* in N prove.

Esempio:

Nell'esempio precedente abbiamo calcolato la Probabilità che le X_i assumessero precisamente i seguenti valori:

$$X_1 = 1, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 1, \quad X_4 = 1, \quad X_5 = 1, \quad X_6 = 0, \quad X_7 = 0$$

Ma questa Probabilità non corrisponde alla Probabilità di ottenere 4 successi e 3 insuccessi in 7 prove! Poiché questo può verificarsi in vari modi, cioè ci sono più configurazioni attraverso le quali possiamo ottenere 4 "1", 3 "0" in 7 prove.

Nell'esempio precedente quindi abbiamo considerato la sequenza di risultati 1011100, ma anche la configurazione 0111100 rientra nella Probabilità di ottenere 4 successi e 3 insuccessi in 7 prove, così come molte altre.

Quindi abbiamo bisogno anche del Coefficiente Binomiale $\binom{N}{k}$ per calcolare l'esatta Probabilità di ottenere "k" *successi* in N prove ed $N - k$ *insuccessi* in N prove, poiché esistono varie configurazioni attraverso le quali questo evento può verificarsi.

Esempio:

$$X \sim B\left(3, {}^{1}/_{4}\right)$$

Quindi:

$$N = 3 \qquad p = {}^{1}/_{4} \qquad q = {}^{3}/_{4}$$

Abbiamo 3 prove a disposizione, quindi è possibile che otterremo 0, 1, 2 o 3 successi:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot p^0 \cdot q^3 = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} \cdot p^0 \cdot q^3 = \frac{3!}{0! \cdot (3-0)!} \cdot p^0 \cdot q^3 = q^3 = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot q^2 = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} \cdot p^1 \cdot q^2 = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot p \cdot q^2 = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot q^1 = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} \cdot p^2 \cdot q^1 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \cdot p^2 \cdot q^1 = 3 \cdot p^2 \cdot q = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot p^3 \cdot q^0 = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} \cdot p^3 \cdot q^0 = \frac{3!}{3! \cdot (3-3)!} \cdot p^3 \cdot q^0 = p^3 = \frac{1}{64}$$

E naturalmente, la somma di tutte queste Probabilità è pari a:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} + \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = 1$$

- ## Funzione di Densità di Probabilità – PDF

Oltre alla *CDF*, un'altra caratterizzazione probabilistica per Variabili Aleatorie Continue è quella fornita dalla Funzione di Densità di Probabilità.

La *PDF* di una Variabile Aleatoria Continua è definita come la Derivata della *CDF*:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

E quindi, di conseguenza, la *CDF* e ricavabile integrando la *PDF*:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

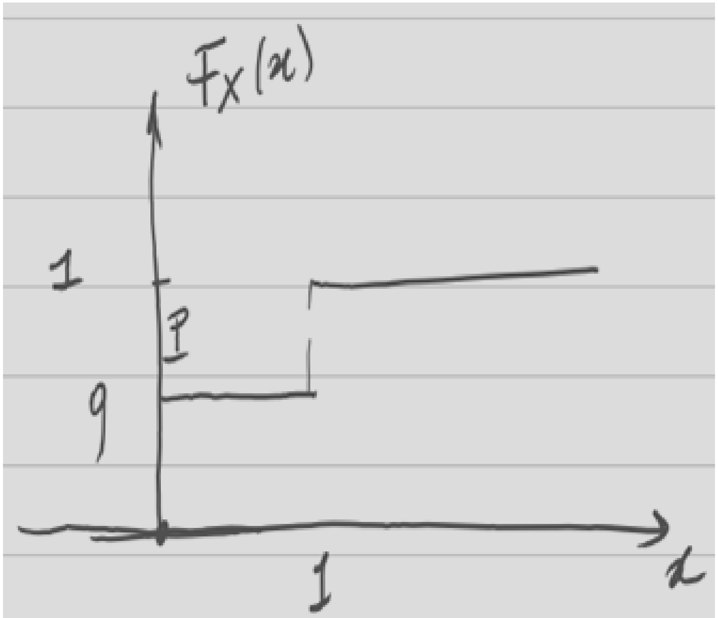
Infatti:

$$\int_{-\infty}^{u} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{u} \frac{dF_X(x)}{\cancel{dx}} \cdot \cancel{dx} = [F_X(x)]_{-\infty}^{u} = F_X(u) - F_X(-\infty) = F_X(u) - 0 = F_X(u)$$

Poiché, ricordando la Proprietà dei "Valori Estremi" di una *CDF*, sappiamo che $F_X(-\infty) = 0$.

Un'importante caratteristica della *PDF* che la differenzia dalla *CDF* e la *PMF* sta nel fatto che la *PDF* non è "una Probabilità", cioè il suo integrale ha come risultato una Probabilità, ma il suo normale valore, non lo è, quindi non è detto che sia compresa tra 0 ed 1.

N.B. La CDF è relativa sia a Variabili Aleatorie Continue che a Variabili Aleatorie Discrete, invece, per quanto riguarda la *PDF* e la *PMF*, rispettivamente queste sono relative esclusivamente a Variabili Aleatorie Continue ed a Variabili Aleatorie Discrete.



La ragione per la quale la *PDF* è relativa solo a Variabili Aleatorie Continue, risiede nel fatto che questa si calcola come la derivata della *CDF*! Quindi se prendiamo un esempio di *CDF* di una Variabile Aleatoria Discreta:
Volendo calcolare la PDF dovrei calcolare la derivata di tale funzione, la quale è:

- Pari a 0 quando la funzione è costante (quasi sempre);
- Non calcolabile quando la funzione è troppo discontinua (per $x = 1$).

Quindi che senso avrebbe?

Proprietà della PDF

Una *PDF* è caratterizzata dalle seguenti Proprietà Principali Costitutive:

1. Non Negatività:

$$f_X(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Infatti, la PDF è la derivata della CDF e quest'ultima non è mai una funzione decrescente! Quindi la PDF è sempre ≥ 0.

2. Normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_X(x)}{\cancel{dx}} \cdot \cancel{dx} = [F_X(x)]_{-\infty}^{+\infty} = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = F_X(+\infty) = 1$$

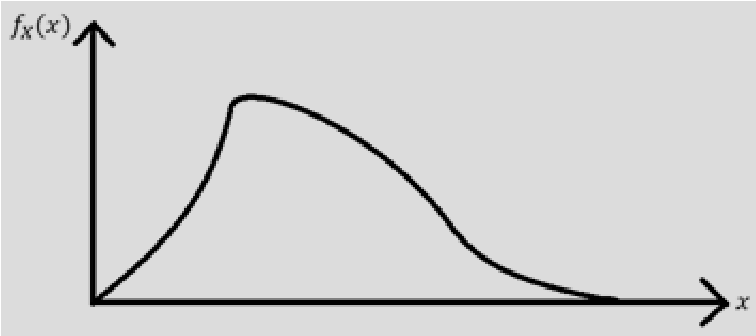
Poiché, ricordando la Proprietà dei "Valori Estremi" di una *CDF*, sappiamo che la *CDF* di $+\infty$ è pari ad 1.

Un'altra Proprietà, che però non è costitutiva, è la seguente:

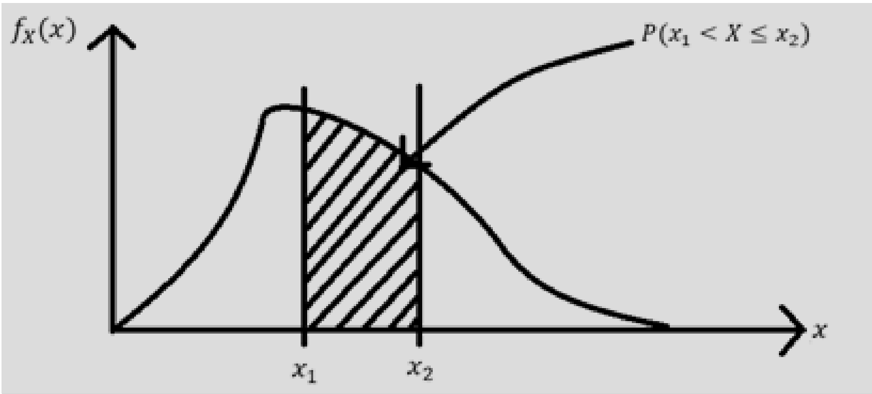
3. Calcolo di Probabilità in Intervalli:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\, dx$$

Ed in effetti, avendo una $f_X(x)$ di questo tipo:



E considerando un intervallo:



L'area sottesa dalla PDF in quell'intervallo, che si calcola attraverso l'integrale $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\, dx$, ci permetterà di calcolare la Probabilità dell'Evento $\{x_1 < X \leq x_2\}$.

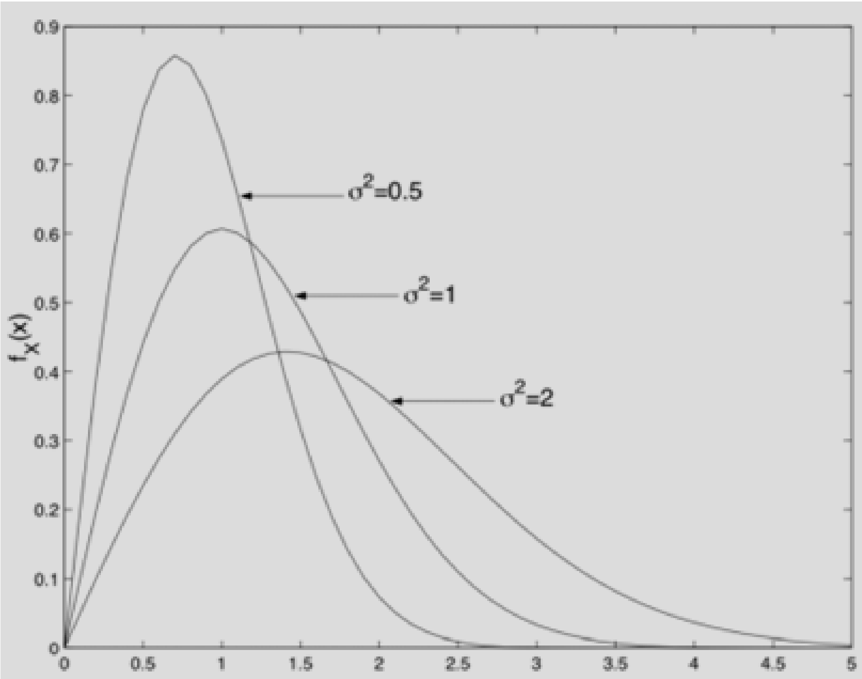
PDF di Variabili Aleatorie

Vediamo le *PDF* di vari tipi di Variabili Aleatorie:

- ## Variabile Aleatoria di tipo Rayleigh

La *PDF* di una Variabile Aleatoria di tipo Rayleigh di parametro σ^2 è così definita:

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-x^2/2\sigma^2} \cdot u(x)$$



Quindi all'aumentare di σ^2, la funzione decresce più lentamente ma ha anche un massimo valore più basso.

Nella formula moltiplico la *PDF* per la Funzione a Gradino Unitario "$u(x)$" poiché questa vale 0 per $x < 0$ ed 1 per $x \geq 0$, in questo modo anche la $f_X(x)$ stessa varrà 0 per $x < 0$.

Volendo calcolare la *CDF* di una Variabile Aleatoria di tipo Rayleigh di parametro σ^2 avremo:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du = \int_{-\infty}^{x} \frac{u}{\sigma^2} \cdot e^{-u^2/2\sigma^2} \cdot u(u)\, du$$

Però ricordiamoci che $u(u)$ è pari a 0 per $x < 0$ e quindi che la *PDF* stessa $f_X(u)$ è pari a 0 per $x < 0$ → Quindi, questo integrale dobbiamo calcolarlo da 0 ad x, e non da $-\infty$ ad x:

$$F_X(x) = \int_{0}^{x} \frac{u}{\sigma^2} \cdot e^{-u^2/2\sigma^2} \cdot u(u)\, du = \int_{0}^{x} \frac{u}{\sigma^2} \cdot e^{-u^2/2\sigma^2}\, du$$

Non consideriamo la $u(u)$ dato che è sempre pari ad 1 per $x \geq 0$.

Ora risolviamo l'integrale per sostituzione:

$$y = \frac{-u^2}{2\sigma^2} \quad \rightarrow \quad dy = -\frac{u}{\sigma^2} du$$

Quindi possiamo scrivere l'integrale come:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{u}{\sigma^2} \cdot e^{-u^2/2\sigma^2}\, du = -\int_0^x -\frac{u}{\sigma^2} \cdot e^{-u^2/2\sigma^2}\, du =$$

$$= -\int_0^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} e^y\, dy = -[e^y]_0^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} = -\left(e^{-x^2/2\sigma^2} - e^0\right)$$

$$= -\left(e^{-x^2/2\sigma^2} - 1\right)$$

Quindi:

$$F_X(x) = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}$$

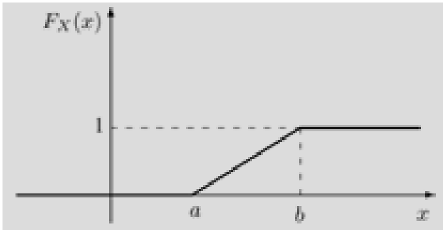
E capiamo che la $F_X(x)$ di una Variabile Aleatoria di tipo Rayleigh è pari a:

- $F_X(x) = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2} \quad se \quad x > 0$
- $F_X(x) = 0 \quad se \quad x < 0$

Variabile Aleatoria Uniforme

Consideriamo la generica Variabile Aleatoria Uniforme $X \sim U(a,b)$, ossia "Uniforme" nell'Intervallo $[a,b]$ e quindi, con la seguente CDF:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \;\; se \;\; x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \;\; se \;\; a \le x \le b \\ 1 \;\; se \;\; x \ge b \end{cases} \quad \rightarrow$$



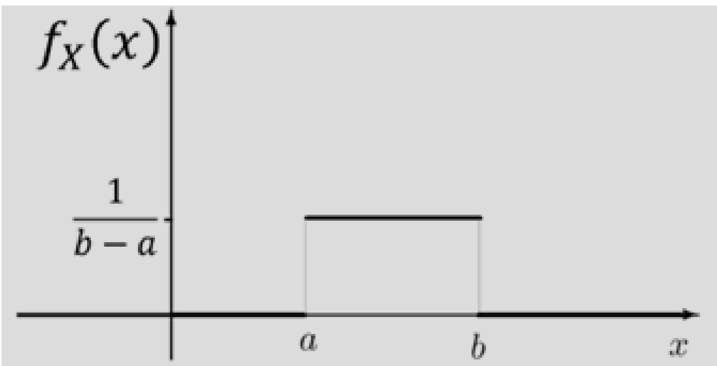
Ora, sapendo che la *PDF* è uguale alla derivata della *CDF*, calcoliamola:

La pendenza della $F_X(x)$ per $x < a$ è pari a 0, quindi la derivata è uguale a 0.

Lo stesso vale per la $F_X(x)$ con $x \ge b$.

Per conoscere la pendenza e quindi la derivata del tratto di $F_X(x)$ con $a \le x \le b$, sapendo che la pendenza di una retta può essere calcolata attraverso il rapporto fra lo spostamento verticale e orizzontale della retta stessa, avrò:

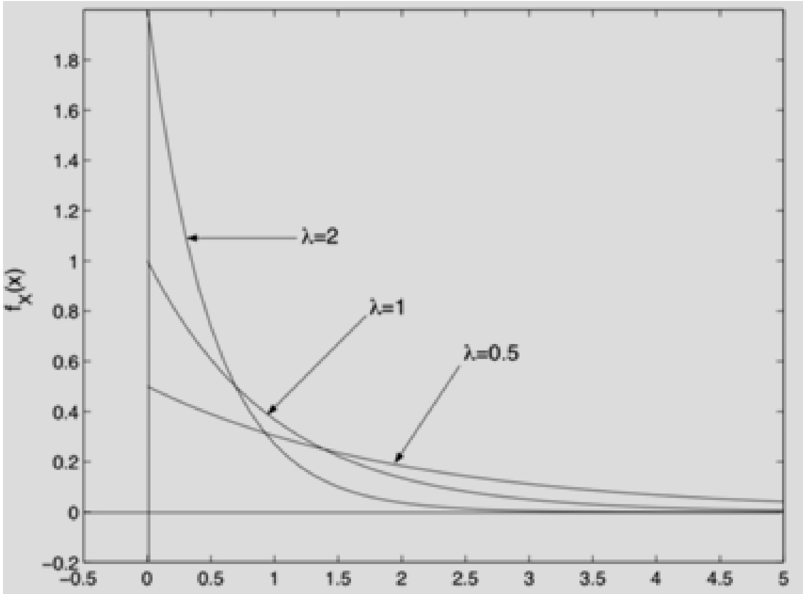
$$PDF = f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \;\; se \;\; a \le x \le b \;\; e \; quindi \; x \in (a,b) \\ 0 \;\; se \;\; x \notin (a,b) \end{cases}$$



• Variabile Aleatoria Esponenziale

Consideriamo la Variabile Aleatoria Esponenziale $X \sim \mathcal{E}x(\lambda)$ di parametro λ la cui *PDF* è così definita:

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x) \quad \lambda > 0$$

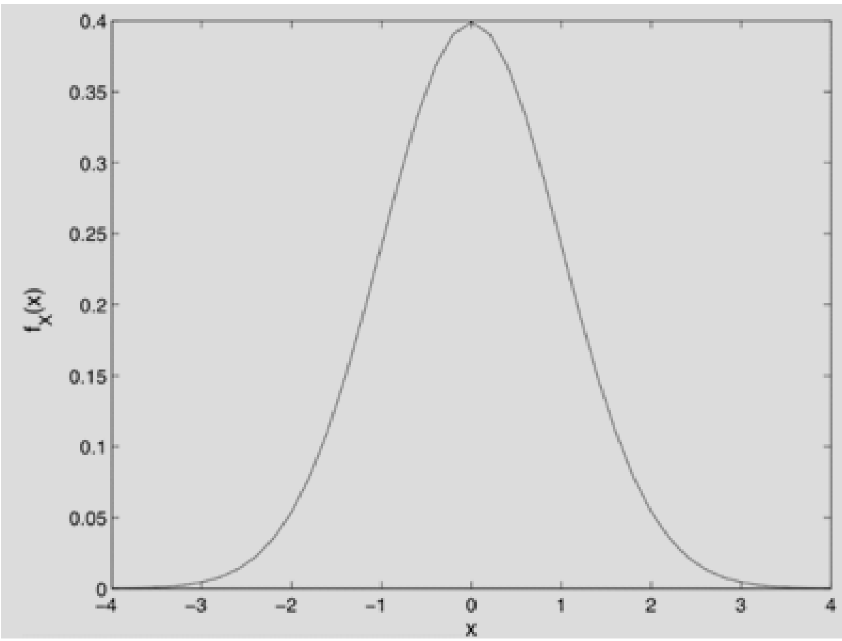


• Variabile Aleatoria Gaussiana (o Normale) Standard

Consideriamo una Variabile Aleatoria "Gaussiana Standard" che sinteticamente indichiamo in questo modo: "$X_0 \sim N(0,1)$".

La sua *PDF* è così definita:

$$f_{X_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



Notiamo come la *PDF* di una Variabile Aleatorie Gaussiana, al contrario della *PDF* di Variabili Aleatorie Esponenziali, Uniformi e di tipo Rayleigh, assume valori $\neq 0$ anche per $x < 0$.

La *CDF* di una Variabile Aleatoria Gaussiana Standard è la seguente:

$$F_{X_0}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du$$

Il problema di questa CDF è che non è esprimibile in "forma chiusa", cioè questo integrale non è uguale ad un valore "finito", infatti il suo estremo inferiore è "$-\infty$".

La soluzione a questo problema è introdurre una nuova Funzione:

$$Q(x) = 1 - F_{X_0}(x)$$

E dato che, la Proprietà di Normalizzazione della *PDF* afferma che l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ di una *PDF* è pari ad 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du = 1$$

Naturalmente posso spezzare questo integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du = \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du}}_{F_{X_0}(x)} + \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du = 1$$

Sapendo che $Q(x) = 1 - F_{X_0}(x)$ so che questa corrisponde proprio a:

$$Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du$$

Teorema del Limite Centrale

Supponiamo di avere "N" Variabili Aleatorie Indipendenti:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$$

Caratterizzate dalla medesima distribuzione (tutte a Distribuzione Uniforme, oppure tutte Esponenziali, ecc...), allora, questo Teorema afferma che per "N" che tende ad Infinito, la Densità di Probabilità (*PDF*) del rapporto tra la Somma di queste "N" Variabili Aleatorie e la radice di N tende ad una Distribuzione di tipo Gaussiana a prescindere ed indipendentemente dalla Distribuzione delle Variabili Aleatorie (che quindi non devono essere per forza Gaussiane, ma possono essere di qualsiasi altro tipo):

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{\sqrt{N}} \quad \rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} \left(f_X(x)\right) = Distribuzione\ Gaussiana$$

- **Variabile Aleatoria Gaussiana (o Normale) Non Standard**

Le Variabili Aleatorie Gaussiane possono essere sia Standard che Non Standard.
In Generale una Variabile Aleatoria Gaussiana si indica attraverso la notazione:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Cioè è caratterizzata dai parametri μ (detto "Parametro di Locazione") e σ^2 (detto "Parametro di Scala"). "N" sta ad indicare proprio la Distribuzione Gaussiana o 'N'ormale.

Una Variabile Aleatoria Gaussiana Standard si indica come:

$$X_0 \sim N(0,1)$$

Cioè nel caso della Standard, i parametri μ e σ^2 equivalgono rispettivamente a "0" ed "1".

Le Variabili Aleatorie Gaussiane Non Standard sono costruite a partire dalle Variabili Gaussiane Standard attraverso la relazione:

$$X = \sigma \cdot X_0 + \mu \quad con \quad \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

Da questo deriva che:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\sigma \cdot X_0 + \mu \leq x)$$

E dato che:

$$\sigma \cdot X_0 + \mu \leq x \quad \rightarrow \quad \sigma \cdot X_0 \leq x - \mu \quad \rightarrow \quad X_0 \leq \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Posso scrivere:

$$F_X(x) = P\left(X_0 \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Ora, ricordando ciò che abbiamo scritto inizialmente:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Notiamo che $P\left(X_0 \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ non è nient'altro che la *CDF* relativa alla Variabile Aleatoria Gaussiana Standard X_0 (perché al posto di "X" abbiamo "X_0") con variabile indipendente uguale a "$\frac{x-\mu}{\sigma}$" (perché al posto di "x" ho "$\frac{x-\mu}{\sigma}$").

Quindi possiamo scrivere la *CDF* di X in funzione della *CDF* di X_0:

$$F_X(x) = F_{X_0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Invece la *PDF* di una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard è data da:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d\left(1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)}{dx} = \frac{d(1)}{dx} - \frac{d\left(Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)}{dx} = 0 - \frac{d\left(Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)}{dx}$$

Sapendo che:

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du \quad \rightarrow \quad Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

Quindi dobbiamo calcolare la seguente derivata:

$$-\frac{d\left(Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\int_{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du\right)$$

Per definizione, sappiamo che la Derivata di una Funzione è definita come il limite (per h che tende a zero) del rapporto incrementale di tale Funzione:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

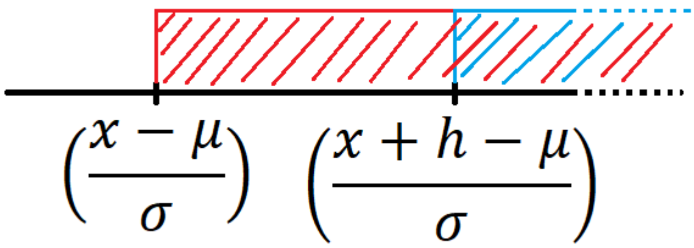
Quindi:

$$-\frac{d}{dx}\left(\int_{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}-\frac{\left[\int_{\left(\frac{x+h-\mu}{\sigma}\right)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du-\int_{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\int_{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du-\int_{\left(\frac{x+h-\mu}{\sigma}\right)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du\right]}{h}=$$

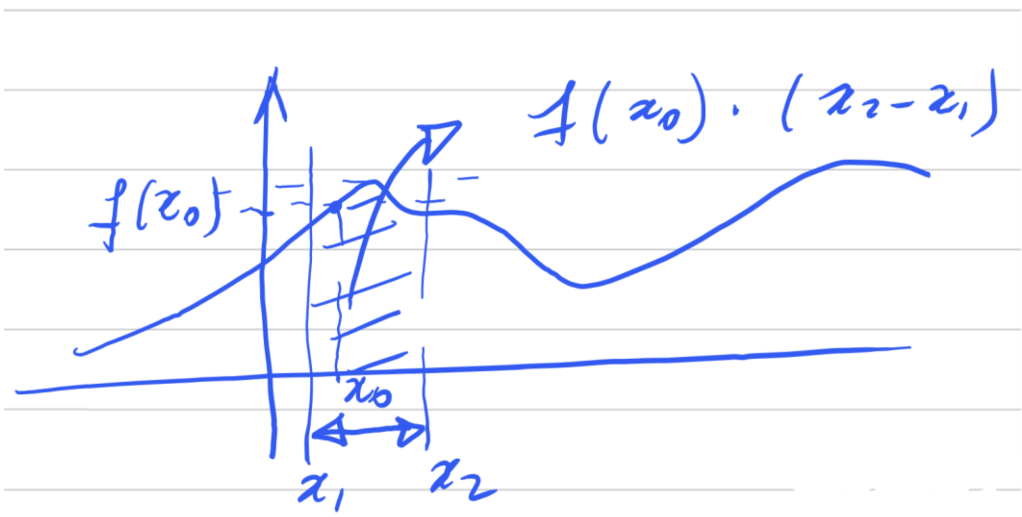
E dato che noi, con questa sottrazione tra questi due integrali stiamo praticamente calcolando l'area rossa – l'area blu:



Possiamo scrivere un unico integrale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[\int_{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}^{\left(\frac{x+h-\mu}{\sigma}\right)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du\right]}{h}$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale: "Se si ha l'integrale di una funzione calcolato in un dominio limitato, questo è uguale al valore della funzione in un punto interno a questo dominio, moltiplicato per la dimensione di questo dominio":



E dato che:

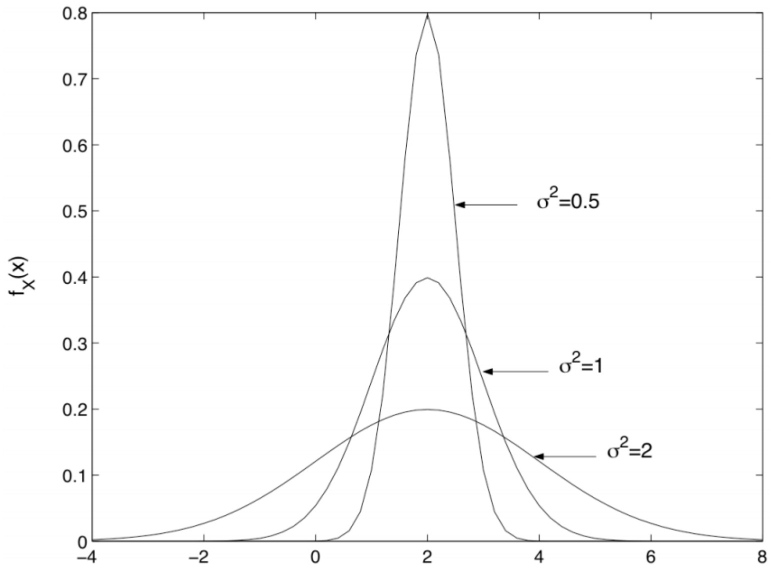
$$\frac{x+h-\mu}{\sigma}-\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{h}{\sigma}$$

Avremo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}{u_0}^2}\cdot\frac{\cancel{h}}{\sigma}\right]}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}{u_0}^2}\right]\quad con\quad u_0\in\left(\frac{x-\mu}{\sigma},\frac{x+h-\mu}{\sigma}\right)$$

Quindi u_0 deve appartenere all'intervallo $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}, \frac{x+h-\mu}{\sigma}\right)$, ma quando $h \to 0$, u_0 non può che essere pari a $\frac{x-\mu}{\sigma}$ e quindi, la *PDF* di una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard è data da:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Notiamo che è centrata in 2, non in 0.

• Variabile Aleatoria di tipo Mixture

Consideriamo due Variabili Aleatorie X_1 ed X_2 aventi rispettivamente *PDF* $f_{X_1}(x)$ ed $f_{X_2}(x)$ e definiamo una nuova *PDF* $f_X(x)$ come combinazione lineare delle due:

$$f_X(x) = c \cdot f_{X_1}(x) + (1-c) \cdot f_{X_2}(x) \quad con \quad c \in [0,1]$$

La Variabile Aleatoria X avente tale *PDF* viene chiamata "Mixture delle Variabili Aleatorie X_1 ed X_2".

La *PDF* "$f_X(x)$" non è uguale alla semplice somma tra le due $f_{X_1}(x)$ e $f_{X_2}(x)$, infatti una *PDF* gode della Proprietà di Normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

E se $f_X(x)$ fosse pari a $f_{X_1}(x) + f_{X_2}(x)$, l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 2$, perché sarebbe la somma di due *PDF*, entrambe con un'area sottesa pari ad 1.

Ecco perché $f_X(x) = c \cdot f_{X_1}(x) + (1-c) \cdot f_{X_2}(x)\ con\ c \in [0,1]$, in questo modo, ad esempio con $c = 0.6$, avremo:

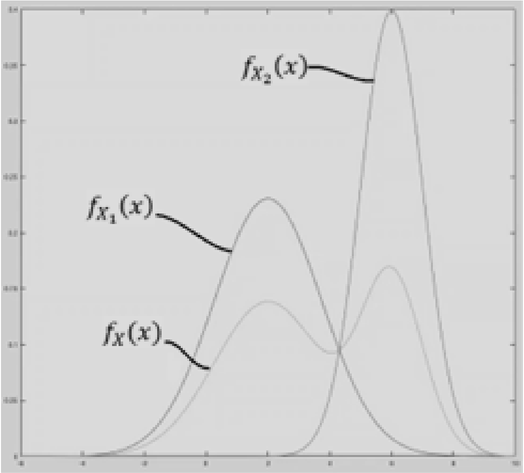
$$f_X(x) = 0.6 \cdot f_{X_1}(x) + 0.4 \cdot f_{X_2}(x) = 1$$

$$f_{X_2}(x)$$

La *PDF* di una Variabile Aleatoria di tipo Mixture, generalmente, è "bimodale".

N.B. Per Moda s'intende il valore che più volte si presenta (cioè il più frequente) in un campione di valori.

Questo, graficamente, è visibile poiché la funzione presenta "due picchi", quindi sono due i valori più frequentemente assunti dalla variabile indipendente "x".



Esempio con $c = 0.6$:

$$\boldsymbol{f_X(x)} = 0.6 \cdot \boldsymbol{f_{X_1}(x)} + 0.4 \cdot \boldsymbol{f_{X_2}(x)}$$

- ## Funzione $\boldsymbol{Q}(\cdot)$

La Funzione $Q(\cdot)$ è la *CDF* complementare di una Variabile Aleatoria Gaussiana Standard $X_0 \sim N(0,1)$ ed è definita come:

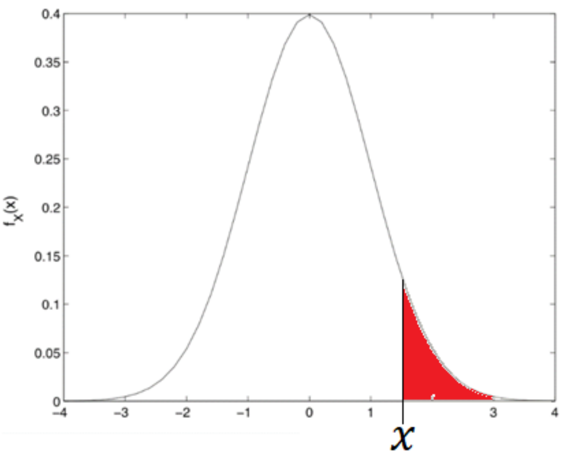
$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = P\{X_0 > x\}$$

Infatti, è pari a:

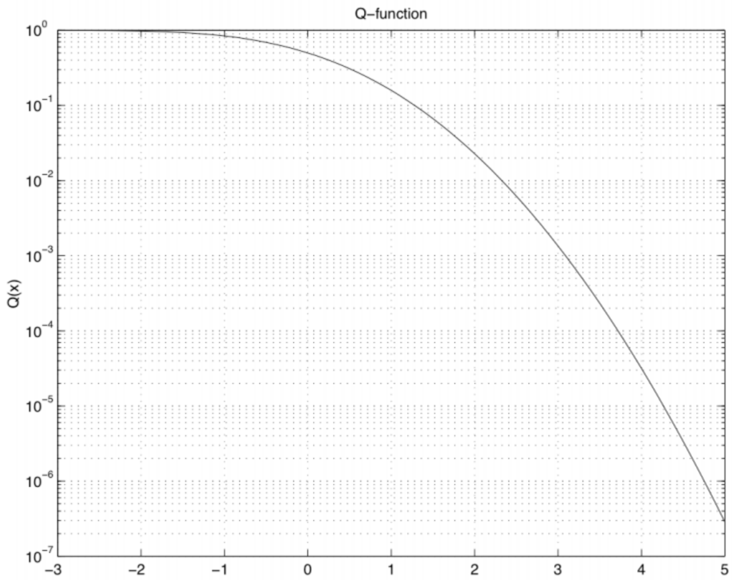
$$Q(x) = 1 - F_{X_0}(x)$$

Con $F_{X_0}(x)$ che indica la Probabilità $P\{X_0 \leq x\}$.

Quindi la Funzione $Q(\cdot)$ permette di calcolare la Probabilità che la Variabile Aleatoria Gaussiana Standard X_0 assuma valori $\geq x$:



In scala Logaritmica la Funzione $Q(\cdot)$ è così definita:



Sull'asse delle ordinate abbiamo il valore assunto dalla Funzione $Q(x)$, mentre sull'asse delle ascisse la variabile indipendente "x".
Si può notare che:

Per "$x \to -\infty$", "$Q(x) \to +\infty$";

E per "$x \to +\infty$", "$Q(x) \to -\infty$".

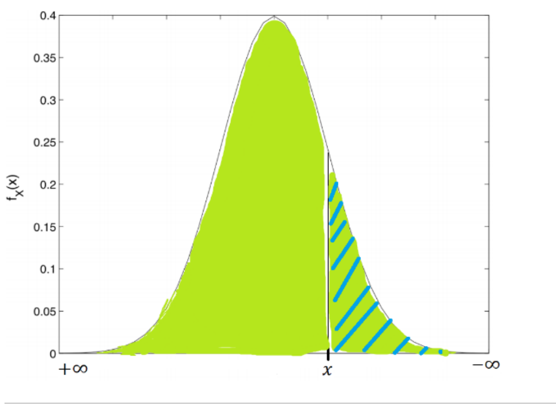
Infatti, come si vede anche dal grafico precedente, minore è il valore di "x" e maggiore sarà l'area occupata dalla Funzione $Q(x)$.

Proprietà della Funzione $Q(\cdot)$

Una Funzione $Q(\cdot)$ è caratterizzata dalle seguenti Proprietà Principali:

1. $Q(+\infty) = 0 \leq \boldsymbol{Q(x)} \leq \boldsymbol{Q(-\infty)} = 1$;

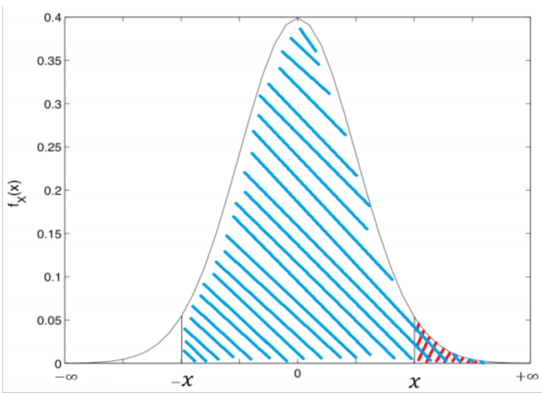
   Infatti, tenendo a mente il Grafico di una *PDF* di una Variabile Aleatoria Gaussiana:



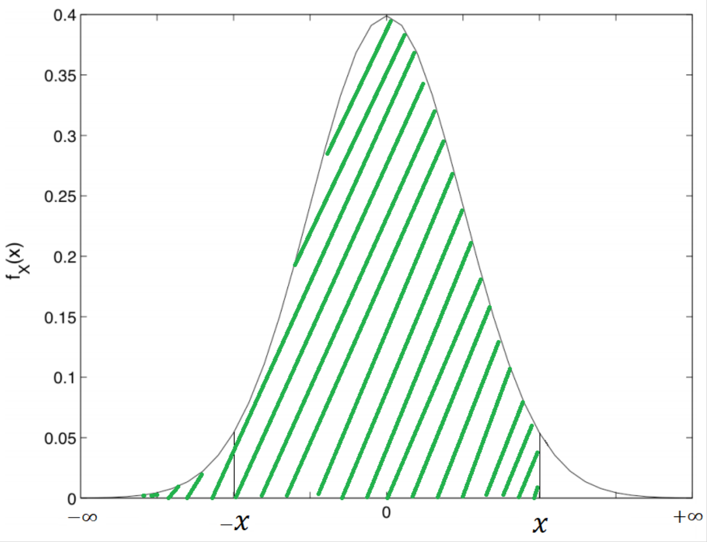
2. $x_1 < x_2 \quad \to \quad Q(x_1) > Q(x_2)$;

3. $Q(-x) = 1 - Q(x)$;

   La dimostrazione sta nel fatto che analizzando graficamente la $\boldsymbol{Q(x)}$ e la $\boldsymbol{Q(-x)}$:



È possibile notare come l'area relativa alla $\boldsymbol{Q(-x)}$ sia uguale alla seguente area in verde:



E quest'area verde la otteniamo proprio sottraendo all' "1", ossia il valore di tutta l'area (da $-\infty$ a $+\infty$) della *PDF* (sempre ricordando la Proprietà di Normalizzazione della *PDF*), l'area relativa a $Q(x)$ (quella in rosso)!

Tale proprietà possiamo dimostrarla anche attraverso gli integrali:

$$Q(-x) = \int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du - \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

Ora noi sappiamo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = 1$$

E dato che la *PDF* è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate:

$$\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = Q(x)$$

E quindi:

$$Q(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du - \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = 1 - Q(x)$$

4. $P\{X \leq x\} = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$;

   Infatti:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad ed \quad F_X(x) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

5. $P\{X > x\} = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$;

6. $P\{x_1 < X \leq x_2\} = Q\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)$;

   Infatti:

$$P\{x_1 < X_0 \leq x_2\} = P\{X > x_1\} - P\{X \leq x_2\} = Q\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)$$

7. $P\{-x < X \leq x\} = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$;

   Deriva dalla n.6 e la n.3.

Esempio 1 → Un gioco consiste nel lanciare una moneta quanto più possibile vicino ad un muro distante $2m$, senza toccarlo. Se la moneta tocca il muro il tiro è perso.
Due studenti gareggiano:

1. I lanci del primo studente sono modellati da una Variabile Aleatoria avente *PDF* Esponenziale $X_1 \sim \mathcal{E}x(\lambda)$ con parametro $\lambda = 2$;

2. I lanci del secondo studente sono modellati da una Variabile Aleatoria Uniforme $X \sim U(a, b)$ nell'intervallo $(1.6, 2.2)$;

Calcolare quale dei due studenti ha maggiore probabilità di toccare il muro.

Soluzione:

1. $X_1 \sim \mathcal{E}x(2)$ → Devo calcolare la $P\{X_1 \geq 2\}$;

2. $X_2 \sim U(1.6, 2.2)$ → Devo calcolare la $P\{X_2 \geq 2\}$;

Iniziamo:

1. $P\{X_1 \geq 2\} = P_1 = \int_2^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x)\, dx = \int_2^{+\infty} 2 \cdot e^{-2x} \cdot 1\, dx = \int_2^{+\infty} 2 \cdot e^{-2x}\, dx$;

2. $P\{X_2 \geq 2\} = P_2 = \int_2^{2.2} \frac{1}{b-a}\, dx = \int_2^{2.2} \frac{1}{2.2-1.6}\, dx$;

Svolgiamo gli Integrali:

1. $P_1 = \int_2^{+\infty} 2 \cdot e^{-2x}\, dx$

   Sostituzione:

$$y = -2x$$
$$dy = -2\, dx$$

   Per effettuare la sostituzione scrivo così l'integrale:

$$P_1 = -\int_2^{\infty} -2 \cdot e^{-2x}\, dx \;\rightarrow\; -\int_{-4}^{-\infty} e^y\, dy \;\rightarrow\; -[e^y]_{-4}^{-\infty} \;\rightarrow\; -[e^{-\infty} - e^{-4}] \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; -[0 - e^{-4}] \;\rightarrow\; e^{-4}$$

   Quindi:

$$P_1 = e^{-4} = 0.0183$$

2. $P_2 = \int_2^{2.2} \frac{1}{2.2-1.6}\, dx = \frac{1}{2.2-1.6} \cdot \int_2^{2.2} dx = \frac{1}{0.6} \cdot \int_2^{2.2} dx = \frac{1}{0.6} \cdot [x]_2^{2.2} = \frac{1}{0.6} \cdot [2.2 - 2] = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$

   Quindi:

$$P_2 = \frac{1}{3} = 0.3333$$

   Quindi il secondo studente ha maggior possibilità di toccare il muro.

Esempio 2 → Costo di un Televisore a Milano e Benevento:

1. Il costo di un Televisore nei negozi di Milano è modellabile attraverso una Variabile Aleatoria Uniforme tra i 400 ed i 500 euro:

$$CM \sim U(400, 500)$$

2. Il costo dello stesso Televisore nei negozi di Benevento è modellabile attraverso una Variabile Aleatoria Esponenziale di parametro $\lambda = 1/400$:

$$CB \sim \mathcal{E}x\left(\frac{1}{400}\right)$$

Il 90% dei televisori viene venduto a Milano, il restante 10% viene venduto a Benevento.

Calcolare la probabilità che un televisore pagato meno di 450 euro sia stato acquistato a Benevento.

Soluzione:

Per comodità definiamo:

- La Probabilità dell'Evento "*Televisore acquistato a Benevento*" come "$P\{BN\}$" ;
- La Probabilità dell'Evento "*Televisore acquistato a Milano*" come "$P\{MI\}$" ;
- La Probabilità dell'Evento "$Costo\ Televisore\ < 450$" come "$P\{T450\}$" .

Dobbiamo calcolare la probabilità che un televisore pagato meno di 450 euro sia stato acquistato a Benevento, ossia che "dato l'Evento $P\{BN\}$, sia verificato l'Evento $P\{T450\}$ e per la Legge di Bayes sappiamo che:

$$P\{BN|T450\} = \frac{P\{T450|BN\} \cdot P\{BN\}}{P\{T450\}}$$

1. La Probabilità che un Televisore venga acquistato a Benevento "$P\{BN\}$", come indicato dalla Traccia, è pari al 10%, quindi:

$$P\{BN\} = 0.1$$

2. Dobbiamo calcolare anche la Probabilità che, dato il $Costo\ del\ Televisore\ < 450$, questo venga acquistato a Benevento: "$P\{T450|BN\}$". Abbiamo detto che il costo del Televisore nei negozi di Benevento è modellabile attraverso la Variabile Aleatoria Esponenziale $CB \sim \mathcal{E}x\left(\frac{1}{400}\right)$ la cui *PDF* è così definita:

$$PDF = f_{CB}(x) = \frac{1}{400} \cdot e^{\left(-\frac{1}{400} \cdot x\right)} \cdot u(x)$$

Dobbiamo calcolare la *CDF* di *CB*, che equivale alla $P\{CB \leq 450\}$ e sapendo che, per definizione, la *CDF* è calcolabile integrando la *PDF:*

$$P\{CB \leq 450|BN\} = \int_0^{450} \frac{1}{400} \cdot e^{\left(-\frac{1}{400} \cdot x\right)}\, dx$$

$$Applico\ la\ sostituzione:\ \ y = -\frac{x}{400} \quad \rightarrow \quad dy = -\frac{1}{400} dx$$

$$P\{CB \leq 450|BN\} = -\int_0^{450} -\frac{1}{400} \cdot e^{\left(-\frac{1}{400} \cdot x\right)}\, dx =$$

$$= -\int_0^{-\frac{9}{8}} e^y \, dy = -[e^y]_0^{-\frac{9}{8}} = -\left[e^{-\frac{9}{8}} - e^0\right] =$$

$$P\{CB \leq 450|BN\} = 1 - e^{-\frac{9}{8}}$$

3. Ed infine calcoliamo la Probabilità che il $Costo\ del\ Televisore\ sia < 450$:

   Per la Legge della Probabilità Totale, sappiamo che:

$$P(E) = \sum_{n \in I} P(A_n) \cdot P(E|A_n)$$

   E nel nostro caso abbiamo che:

$$P\{T450\} = P\{T450|BN\} \cdot P\{BN\} + P\{T450|MI\} \cdot P\{MI\}$$

$$P\{T450\} = \left(1 - e^{-\frac{9}{8}}\right) \quad \cdot\ 0.1 + \qquad ? \qquad \cdot \quad 0.9$$

   La $P\{T450|MI\}$ è l'unica che non conosciamo e quindi calcoliamola:
   Abbiamo detto che il costo del Televisore nei negozi di Milano è modellabile attraverso Variabile Aleatoria Uniforme tra i 400 ed i 500 euro "$CM \sim U(400, 500)$", la cui *PDF* è così definita:

$$PDF = f_{CM}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{500 - 400} & se\ \ 400 \leq x \leq 500\ \ e\ quindi\ x \in (400, 500) \\ 0\ \ se\ \ x \notin (400,500) \end{cases}$$

   Dobbiamo calcolare la *CDF* di *CM*, che equivale alla $P\{CM \leq 450\}$ e sapendo che, per definizione, la *CDF* è calcolabile integrando la *PDF:*

$$P\{CM \leq 450|MI\} = \int_{400}^{450} \frac{1}{500 - 400}\, dx = \int_{400}^{450} \frac{1}{100}\, dx = \frac{1}{100} \cdot \int_{400}^{450} dx = \frac{1}{100} \cdot [x]_{400}^{450}$$
$$=$$

$$P\{CM \leq 450|MI\} = \frac{1}{100} \cdot (450 - 400) = \frac{50}{100} =$$

$$P\{CM \leq 450|MI\} = \frac{1}{2}$$

   E quindi:

$$P\{T450\} = \left(1 - e^{-\frac{9}{8}}\right) \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.9$$

A questo punto siamo in grado di calcolare la Probabilità che un televisore pagato meno di 450 euro sia stato acquistato a Benevento:

$$P\{BN|T450\} = \frac{P\{T450|BN\} \cdot P\{BN\}}{P\{T450\}} = 0.1305$$

N.B. Nel calcolo della Probabilità che il $Costo\ del\ Televisore\ sia < 450$ abbiamo applicato la Legge della Probabilità Totale:

$$P\{T450\} = P\{T450|BN\} \cdot P\{BN\} + P\{T450|MI\} \cdot P\{MI\}$$

Se, al posto del numero "450" avessi avuto una variabile "x", cioè se avessi dovuto calcolare la Probabilità che il $Costo\ del\ Televisore$ "CT" fosse $\leq x$, allora avrei scritto così:

$$P\{CT \leq x\} = P\{CT \leq x|BN\} \cdot P\{BN\} + P\{CT \leq x|MI\} \cdot P\{MI\}$$

Ricordando che una la *PDF* di una Variabile Aleatoria di tipo Mixture si calcola come:

$$f_X(x) = f_{X_1}(x) \cdot c + f_{X_2}(x) \cdot (1-c) \quad con \quad c \in [0,1]$$

Notiamo effettivamente come ci sia somiglianza tra le due equazioni, infatti:

- $P\{CT \leq x|BN\}$ equivale alla *CDF* della Variabile Aleatoria Esponenziale $CTBN$ (Costo Tavolo Benevento):
$$F_{CTBN}(x)$$
- $P\{CT \leq x|MI\}$ equivale alla *CDF* della Variabile Aleatoria Uniforme $CTMI$ (Costo Tavolo Milano):
$$F_{CTMI}(x)$$
- $P\{CT \leq x\}$ equivale alla *CDF* della Variabile Aleatoria di tipo Mixture CT (Costo Tavolo), la quale è, per l'appunto, la Mixture della Variabile Esponenziale $CTBN$ ed Uniforme $CTMI$:
$$F_{CT}(x)$$
- $P\{BN\}$ e $P\{MI\}$ giocano proprio il ruolo dei termini "c" ed "$1-c$".

Quindi:

$$F_{CT}(x) = F_{CTBN}(x) \cdot P\{BN\} + F_{CTMI}(x) \cdot P\{MI\}$$

E dato che, per definizione, la *PDF* di una Variabile Aleatoria è definita come la Derivata della *CDF*:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Derivando l'equazione ottengo:

$$f_{CT}(x) = f_{CTBN}(x) \cdot P\{BN\} + f_{CTMI}(x) \cdot P\{MI\}$$

Quindi è chiaro che, come già detto, la Variabile Aleatoria CT è una Variabile Aleatoria di tipo Mixture della Variabile Esponenziale $CTBN$ ed Uniforme $CTMI$.

Esempio 3 → Variabile Aleatoria Gaussiana $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ caratterizzata dai parametri "$\mu = 1$" e "$\sigma^2 = 2$", quindi "Non Standard":

$$X \sim N(1, 2)$$

Calcolare:

1. $P\{X \leq 2\}$;
2. $P\{1 < X \leq 2\}$.

Soluzione:

1. Una delle Proprietà della Funzione $Q(\cdot)$ afferma che:

$$P\{X \leq x\} = 1 - Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Quindi, nel nostro caso:

$$P\{X \leq 2\} = 1 - Q\left(\frac{2 - 1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - Q(0.7071) = 1 - 0.2388 = 0.7612$$

2. Una delle Proprietà della Funzione $Q(\cdot)$ afferma che:

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = Q\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)$$

Quindi, nel nostro caso:

$$P\{1 < X \leq 2\} = Q\left(\frac{1 - 1}{\sqrt{2}}\right) - Q\left(\frac{2 - 1}{\sqrt{2}}\right) = Q(0) - Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = Q(0) - Q(0.7071) \rightarrow$$

$$\rightarrow P\{1 < X \leq 2\} = 0.5000 - 0.2388 = 0.2612$$

Esempio 4 → Due giocatori: "A" e "B", lanciano alternativamente una moneta e vince chi per primo ottiene Testa.
Si assuma che A inizi il gioco.

Calcolare:

1. La Probabilità che vinca A, supposta una moneta ben bilanciata;
2. La Probabilità che vinca A, supposta una moneta arbitraria (cioè per la quale l'Evento $Testa$ e l'Evento $Croce$ non sono equiprobabili).

Soluzione:

1. A può vincere se:

    - Ottiene Testa al primo tiro "$\{T_A\}$" ;
    - O se ottiene Croce al primo tiro, poi tira B ed anch'esso ottiene Croce e poi ritira A ed ottiene Testa "$\{C_A, C_B, T_A\}$" ;
    - O se si verifica l'Evento "$\{C_A, C_B, C_A, C_B, T_A\}$" ;
    - E così via...

Quindi, la Probabilità che vinca A è data dall'Unione di questi Eventi:

$$P(Vittoria\ A) = P(\{T_A\} \cup \{C_A, C_B, T_A\} \cup \{C_A, C_B, C_A, C_B, T_A\} \cup \dots)$$

Ed essendo gli Eventi disgiunti tra loro, la Probabilità della loro Unione equivale alla Somma delle Probabilità:

$$P(Vittoria\ A) = P(T_A) + P(C_A, C_B, T_A) + P(C_A, C_B, C_A, C_B, T_A) + \dots$$

Ora, la Probabilità che A ottenga Testa al primo tiro "$P(T_A)$" equivale ad $1/2 = 0.5$.

La Probabilità che $P(C_A, C_B, T_A)$, essendo gli eventi $\{C_A\}, \{C_B\}, \{T_A\}$ indipendenti tra loro, equivale al prodotto delle loro probabilità:

$$P(C_A, C_B, T_A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Lo stesso vale per $P(C_A, C_B, C_A, C_B, T_A)$:

$$P(C_A, C_B, C_A, C_B, T_A) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

E così via...

Quindi è noto che:

$$P(VittoriaA) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot i} =$$

$$P(VittoriaA) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = Serie\ Geometrica = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} =$$

$$P(VittoriaA) = \frac{2}{3}$$

2. Per quanto riguarda la moneta arbitraria, bisogna ragionare nello stesso identico modo, ma con una differenza, stavolta:

   - La Probabilità di ottenere Croce lanciando la moneta corrisponde ad un certo valore "p" (che è diverso da 0.5) ;
   - La Probabilità di ottenere Croce lanciando la moneta corrisponde ad un certo valore "q" .

   Quindi parto sempre dalla seguente equazione:

$$P(Vittoria\ A) = P(T_A) + P(C_A, C_B, T_A) + P(C_A, C_B, C_A, C_B, T_A) + \dots$$

   Ma alle "C_A" e le "C_B" sostituirò il valore "p" invece che il valore $\frac{1}{2}$ ed alle "T_A" e le "T_B" sostituirò il valore "q":

$$P(Vittoria\ A) = p + p \cdot q^2 + p \cdot q^4 + \dots = p \cdot (1 + q^2 + q^4 + \dots) = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (q)^{2 \cdot i} =$$

$$P(VittoriaA) = Serie\ Geometrica = p \cdot \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p}{(1+q) \cdot (1-q)} = \frac{\cancel{1-q}}{(1+q) \cdot \cancel{(1-q)}} =$$

$$P(VittoriaA) = \frac{1}{1+q}$$

Media di una Variabile Aleatoria

Il Valor Medio di una Variabile Aleatoria "X" è definito come "$\mathbb{E}[X]$" e si calcola in questo modo:

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{x \in A_X} x \cdot P_X(x) & se\ X\ è\ Discreta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx & se\ X\ è\ Continua \end{cases}$$

Quindi:

- Nel caso di una Variabile Aleatoria Discreta, il Valor Medio è calcolabile come la Somma (per tutti valori dell'Alfabeto di X, cioè tutti i valori che X può assumere) dei prodotti tra i valori (discreti) che la Variabile Aleatoria può assumere "x" e le rispettive Probabilità $P_X(x)$.

  Quindi qui calcolo la Media attraverso la Sommatoria, perché la mia Variabile Aleatoria è Discreta.

- Nel caso di una Variabile Aleatoria Continua, il Valor Medio è calcolabile come l'Integrale del prodotto tra i valori (continui) che la Variabile Aleatoria può assumere "x" ed i rispettivi valori di *PDF* $f_X(x)$.

  In tal caso, invece, essendo la Variabile Aleatoria Continua, calcoliamo la media attraverso l'Integrale.

Es. → Valor Medio di una Variabile Aleatoria Bernoulliana:

Consideriamo una Variabile Aleatoria Bernoulliana $X \sim B(1, p)$, quindi con Alfabeto $A_x = \{0, 1\}$, di parametro "$p = P(X = 1)$" e $q = P(X = 0) = 1 - p$.

In tal caso:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in A_x} x \cdot P_X(x) = \sum_{x \in 0,1} x \cdot P_X(x) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = 0 \cdot q + 1 \cdot p \rightarrow$$

$$\mathbb{E}[X] = p$$

Es. → Valor Medio di una Variabile Aleatoria Esponenziale:

Consideriamo una Variabile Aleatoria Esponenziale $X \sim \mathcal{E}x(\lambda)$.

In tal caso:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

Sapendo che, la $f_X(x)$ (cioè la *PDF*) di una Variabile Aleatoria Esponenziale è definita come:

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x) \quad \lambda > 0$$

Allora avremo:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x)\ dx$$

Innanzitutto limito l'integrale tra 0 e $+\infty$ e sapendo che $u(x)$ rappresenta la Funzione a Gradino Unitario che vale 0 per $x < 0$ ed 1 per $x \geq 0$ avrò:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{0}^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\ dx$$

Risolvo l'integrale per sostituzione:

$$Applico\ la\ sostituzione\colon\ \ y = e^{-\lambda x} \quad \to \quad dy = -\lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

Quindi scrivo l'integrale come qui sotto in modo tale da poter sostituire:

$$\mathbb{E}[X] = -\int_0^{+\infty} -x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\ dx$$

Ma per comodità, però, continuo a scrivere l'integrale in funzione di "x", perché altrimenti dovrei scrivere:

$$\mathbb{E}[X] = -\int_1^0 \frac{ln(y)}{-\lambda}\ dy$$

Invece io sostituisco in questo modo:

$$Applico\ la\ sostituzione\colon\ \ y = e^{-\lambda x} \quad \to \quad de^{-\lambda x} = -\lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

Quindi posso continuare a scrivere in funzione della variabile x :

$$\mathbb{E}[X] = -\int_0^{+\infty} x\ de^{-\lambda x}$$

Risolvo l'integrale attraverso l' "Integrazione per Parti":

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Nel nostro caso:

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g'(x) = \ de^{-\lambda x} \ \to \ f'(x) = 1 \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-\lambda x}$$

E quindi:

$$\mathbb{E}[X] = -\int_0^{+\infty} x\ de^{-\lambda x} = -\left(\infty \cdot 0 - 0 \cdot 1 - \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-\lambda x}\ dx\right) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx \quad \to$$

$$\to \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot x}\, dx = \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x}\right]_0^{\infty} = \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot \infty} - \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot 0}\right)\right] = 0 + \frac{1}{\lambda} \quad \to$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Teorema Fondamentale per il Calcolo della Media

Tale Teorema risulta molto utile nel calcolo della Media di "Funzioni di Variabili Aleatorie", infatti afferma che:

Data una certa Variabile Aleatoria "X" ed una Funzione di questa Variabile Aleatoria "$g(X)$", allora la media di $g(X)$ è calcolabile come:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in A_x} g(x) \cdot P_X(x) & se\ X\ \text{è}\ Discreta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx & se\ X\ \text{è}\ Continua \end{cases}$$

Quindi, grazie a questo Teorema, per calcolare la media di una Funzione di una Variabile Aleatoria, non è necessario il calcolo della *PDF* della Funzione: "$f_{g(x)}(x)$", ma è sufficiente la *PDF* della Variabile Aleatoria: $f_X(x)$.

Es. → Valor Medio di una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard:

Consideriamo una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard "X", per definizione sappiamo che:

$$X = \sigma \cdot X_0 + \mu$$

Essendo le Variabili Aleatorie Gaussiane delle Variabili Aleatorie "Continue", il loro valor medio viene calcolato come:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

E sapendo che, la $f_X(x)$ (cioè la *PDF*) di una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard è definita come:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Allora avremo:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Possiamo però applicare il Teorema Fondamentale per il Calcolo della Media:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

Cioè sapendo che la Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard "X" è funzione della Variabile Aleatoria Gaussiana Standard "X_0" :

$$X = \sigma \cdot X_0 + \mu \quad \rightarrow \quad Quindi\ X\ \text{è}\ funzione\ di\ X_0 \quad \rightarrow \quad X = g(X_0)$$

Possiamo scrivere:

$$\mathbb{E}[g(X_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_{X_0}(x) dx \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \mathbb{E}[\sigma \cdot X_0 + \mu] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma \cdot x + \mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma \cdot x}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \rightarrow$$

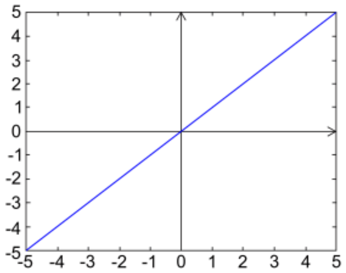
$$\rightarrow \quad \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Analizziamo il primo integrale:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

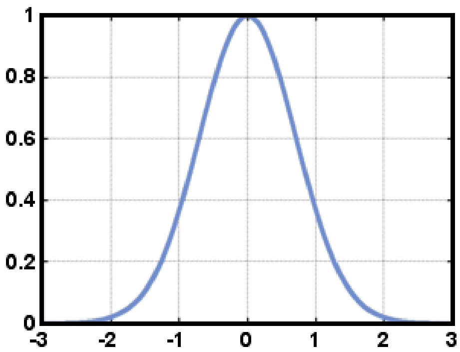
La funzione "x" è una funzione dispari:

$$f(-x) = -f(x)$$

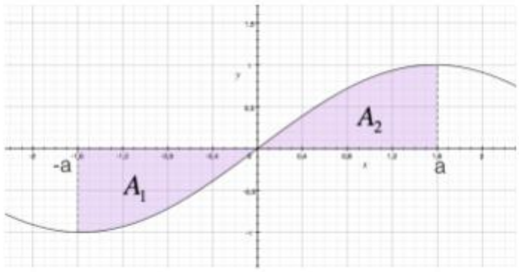


Invece, la funzione $e^{-\frac{x^2}{2}}$ è una funzione pari:

$$f(-x) = f(x)$$



La moltiplicazione tra una $funzione\ dispari$ ed una $funzione\ pari$ ha come risultato una $funzione\ dispari$ e l'integrale da $-n$ a $+n$ (nel nostro caso da $-\infty$ a $+\infty$) di una $funzione\ dispari$ è pari a 0, questo è intuibile graficamente:



Poiché le aree geometriche si elidono a vicenda.

Quindi il primo integrale è pari a 0.

Ora analizziamo il secondo integrale:

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$$

Se lo scrivo in questo modo:

$$\mu \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$$

Noto che questo è esattamente l'integrale della *PDF* di una Variabile Aleatoria Gaussiana Standard e per la Proprietà di Normalizzazione della *PDF*, ho che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 1$$

E quindi:

$$\mathbb{E}[X] = \mu$$

In realtà, potevamo giungere a questo risultato anche semplicemente considerando che:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma \cdot X_0 + \mu] = \sigma \cdot \mathbb{E}[X_0] + \mathbb{E}[\mu]$$

Ma il valor medio di una costante è pari alla costante stessa:

$$\mathbb{E}[\mu] = \mu$$

E quindi:

$$\mathbb{E}[\sigma \cdot X_0 + \mu] = \sigma \cdot \mathbb{E}[X_0] + \mu$$

E dato che:

$$\mathbb{E}[X_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_0}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Come già detto la funzione "x" è una $funzione\ dispari$, la funzione $e^{-\frac{x^2}{2}}$ è una $funzione\ pari$ ed il prodotto tra una $funzione\ dispari$ ed una $funzione\ pari$ ha come risultato una $funzione\ dispari$ e l'integrale da $-n$ a $+n$ (nel nostro caso da $-\infty$ a $+\infty$) di una $funzione\ dispari$ è pari a 0, quindi:

$$\mathbb{E}[X_0] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0$$

Ne consegue che:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma \cdot X_0 + \mu] = \sigma \cdot \mathbb{E}[X_0] + \mu = \sigma \cdot 0 + \mu = \mu$$

N.B. → Il parametro "μ" è quello che ha un effetto di "traslazione". Mentre il parametro "σ" è quello che definisce il "fattore di cambiamento di scala". Come si può notare dal risultato di questo esempio, la traslazione ha effetto sul calcolo del Valor Medio, al contrario del fattore di cambiamento di scala.

Momento di una Variabile Aleatoria

Il Momento di "$k-esimo$" ordine di una Variabile Aleatoria "X" è definito come "$\mathbb{E}[X^k]$" ed è calcolabile come:

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} \sum_{x \in A_x} x^k \cdot P_X(x) & se\ X\ è\ Discreta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_X(x)\, dx & se\ X\ è\ Continua \end{cases}$$

N.B. → Naturalmente, il Momento di prim'ordine di una Variabile Aleatoria "X", è definito come:

$$\mathbb{E}[X^1] = \mathbb{E}[X]$$

E coincide proprio con il Valor Medio della Variabile Aleatoria X.

Analizziamo alcuni dei Momenti più utili di una Variabile Aleatoria:

- ## Valore Quadratico Medio

  Il Valore Quadratico Medio di una Variabile Aleatoria è definito come il Momento del Secondo Ordine:

$$\mathbb{E}[X^2]$$

- ## RMS – Root Mean Square o Valore Efficace

  Il Root Mean Square o Valore Efficace di una Variabile Aleatoria è definito come la Radice Quadrata del Valore Quadratico Medio:

$$X_{rms} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

- # Momento Centrale

Il Momento Centrale di una Variabile Aleatoria è definito come il Momento della Variabile Aleatoria Centrata, ossia di X sottratto alla sua media:

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$$

- # Varianza

La Varianza di una Variabile Aleatoria è definita come il Momento Centrale di second'ordine:

$$\sigma^2{}_X = Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

La Varianza di una Variabile Aleatoria "X" fornisce informazioni sugli scostamenti quadratici medi della Variabile Aleatoria rispetto alla sua Media. Cioè indica mediamente di quanto i valori di "X" si discostano dal suo Valor Medio e lo fa attraverso un valore quadratico.

Infatti, una Variabile Aleatoria con "Varianza" pari a 0, perde tutta la sua "aleatorietà", perché avrà sempre un valore pari alla sua media.

Formula alternativa della Varianza:

$$\sigma^2{}_X = Var\,[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

Cioè la Varianza di una Variabile Aleatoria "X" può essere calcolata anche attraverso la moltiplicazione tra il Valore Quadratico Medio "$\mathbb{E}[X^2]$" ed il quadrato del Valor Medio $\mathbb{E}^2[X]$.

Dimostrazione:

$$\sigma^2{}_X = Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Sviluppando il quadrato del binomio "$(X - \mathbb{E}[X])^2$" otterrò:

$$\mathbb{E}\left[X^2 - 2X \cdot \mathbb{E}[X] + E^2[X]\right]$$

Sfruttando alcune tra le Proprietà della Media, in particolar modo il fatto che:

1. Il Valor Medio di una Costante "C" è pari alla Costante stessa:

$$\mathbb{E}[C] = C$$

   E dato che il Valor Medio di una Variabile è pari proprio ad un numero costante:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X]\right] = \mathbb{E}[X]$$

2. Il Valor Medio del Prodotto tra una Costante ed una Variabile è pari al prodotto tra la Costante ed il Valor Medio della Variabile:

$$\mathbb{E}[-2X] = -2\mathbb{E}[X]$$

3. Il Valor Medio della somma tra più termini è pari alla somma dei Valor Medi dei singoli termini.

Otterremo il seguente risultato:

$$\mathbb{E}\left[X^2 - 2X \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}^2[X]\right] = \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}^2[X] = \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbb{E}^2[X] + \mathbb{E}^2[X] \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma^2{}_X = Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

- ## Deviazione Standard

La Deviazione Standard di una Variabile Aleatoria è definita come la Radice Quadrata della Varianza:

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}$$

Es. → Calcolo della Varianza di una Variabile Aleatoria "Z", ottenuta come Trasformazione Affine di una Variabile Aleatoria "X" :

Innanzitutto, consideriamo che la Variabile Aleatoria Z è funzione della Variabile Aleatoria X, cioè è definita attraverso la seguente Trasformazione Affine:

$$Z = a \cdot X + b$$

Procediamo al calcolo:

$$\sigma^2{}_Z = Var[Z] = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\left((a \cdot X + b) - \mathbb{E}[a \cdot X + b\,]\right)^2\right] = \mathbb{E}[(a \cdot X + b - a \cdot \mathbb{E}[X] - b)^2] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(a \cdot (X - \mathbb{E}[X])\right)^2\right] = a^2 \cdot\ \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \quad \rightarrow$$

$$\sigma^2{}_Z = Var[Z] = a^2 \cdot \sigma^2{}_X = a^2 \cdot Var[X]$$

Quindi, la Varianza di una Variabile Aleatoria "Z", ottenuta attraverso la Trasformazione Affine di un'altra Variabile Aleatoria "X":

$$Z = a \cdot X + b$$

È definita come la Varianza della Variabile Aleatoria "X" moltiplicata per il quadrato della costante "a".

Es. → Calcolo della Varianza di una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard "X" :

Ricordiamo che una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard è definita come:

$$X = \sigma \cdot X_0 + b$$

E quindi, come evidenziato dal precedente esempio avremo che:

$$Var[X] = \sigma^2 \cdot Var[X_0]$$

Dove $Var[X_0]$ è calcolata come segue:

$$Var[X_0] = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0])^2]$$

Ricordando che, come avevamo visto "qui", il Valor Medio di una Variabile Aleatoria Gaussiana Standard è pari a 0, ho che:

$$Var[X_0] = \mathbb{E}[(X_0)^2] = Valore\ Quadratico\ Medio\ di\ X_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad Var[X_0] = \mathbb{E}[X_0{}^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2/2}\, dx = 1$$

Ne consegue che, la Varianza di una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard è pari al quadrato del parametro "σ" :

$$Var[X] = \sigma^2$$

N.B. → Il parametro "σ" è quello che ha un effetto di "cambiamento di scala". Mentre il parametro "μ" è quello che ha effetto di "traslazione". Come si può notare, al contrario del calcolo del Valor Medio (sul quale ha effetto la traslazione ma non il fattore di cambiamento di scala), sulla Varianza di una Trasformazione Affine (e quindi anche di una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard) ha effetto il fattore di cambiamento di scala, ma non la traslazione.

Es. → Calcolo della Varianza di una Variabile Aleatoria Bernoulliana "$X{\sim}B(1,p)$":

Sfruttiamo la formula "alternativa" della Varianza:

$$\sigma^2{}_X = Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

Quindi procediamo al calcolo del Valor Medio $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

E del Valore Quadratico Medio $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\mathbb{E}[X^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$$

Ed a questo punto possiamo calcolare la Varianza:

$$\sigma^2{}_X = Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$

Es. → Calcolo del Momento di una Variabile Aleatoria Esponenziale "$X \sim \mathcal{E}x(\lambda)$" di parametro "1":

$$X \sim \mathcal{E}x(1)$$

Ricordiamo che la *PDF* di una Variabile Aleatoria Esponenziale è così definita:

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x)$$

Che nel nostro caso è:

$$f_X(x) = e^{-x} \cdot u(x)$$

Dato che il Valor Medio di Variabili Aleatorie Continue è definito come:

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_X(x)\, dx$$

Nel nostro caso avremo:

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot e^{-x} \cdot u(x)\ dx$$

La $u(x)$ ha valore pari ad 1 per $x > 0$ e pari a 0 per $x < 0$, quindi l'integrale è così definito:

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_{0}^{+\infty} x^k \cdot e^{-x}\, dx$$

Risolviamo l'integrale per parti:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Nel nostro caso:

$$f(x) = x^k \quad \text{e} \quad g'(x) = e^{-x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = k \cdot x^{k-1} \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-x}$$

E quindi:

$$\int_0^{+\infty} x^k \cdot e^{-x}\, dx = \underbrace{0^k \cdot e^{-0} - \infty^k \cdot e^{-\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} k \cdot x^{k-1} \cdot e^{-x}\, dx \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \int_0^{+\infty} x^k \cdot e^{-x}\, dx = -k \cdot \int_0^{+\infty} x^{k-1} \cdot e^{-x}\, dx \quad \rightarrow$$

Questo passaggio può essere rieseguito in maniera ricorsiva ed avremo:

$$\int_0^{+\infty} x^{k-2} \cdot e^{-x}\, dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} x^{k-3} \cdot e^{-x}\, dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} x^{k-4} \cdot e^{-x}\, dx \quad , \quad \ldots$$

Quindi possiamo concludere che il Valor Medio di una Variabile Aleatoria Esponenziale è così definito:

$$\mathbb{E}[X^k] = k \cdot \mathbb{E}[X^{k-1}]$$

E dato che, come visto in precedenza, la Media di una Variabile Aleatoria Esponenziale è definita come:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \quad nel\ nostro\ caso \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{1} = 1$$

Avremo che:

- $\mathbb{E}[X^2] = k \cdot \mathbb{E}[X^1] = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2\,;$
- $\mathbb{E}[X^3] = k \cdot \mathbb{E}[X^2] = 3 \cdot 2 = 6\,;$

  E così via …

Quindi:

$$\mathbb{E}[X^k] = k!$$

Es. → Calcolo della Varianza di una Variabile Aleatoria Esponenziale "$X \sim \mathcal{E}x(\lambda)$" di parametro "$\lambda$":

Nell'esempio precedente abbiamo visto che il Momento di una Variabile Aleatoria $X_0 \sim \mathcal{E}x(1)$ è definito come:

$$\mathbb{E}[(X_0)^k] = k!$$

Ma se consideriamo una Variabile Aleatoria di parametro "λ" ?

Allora sulla base della Variabile Aleatoria $X_0 \sim \mathcal{E}x(1)$, costruiamo una Variabile Aleatoria Esponenziale X di parametro λ :

$$X \sim \mathcal{E}x(\lambda) \quad \rightarrow \quad X = \frac{1}{\lambda} \cdot X_0$$

Quindi il Momento della Variabile Aleatoria Esponenziale "X" sarà così definito :

$$\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\lambda} \cdot X_0\right)^k\right] = \frac{1}{\lambda^k} \cdot \mathbb{E}[(X_0)^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Volendo calcolare anche la Varianza, sapendo che:

$$\sigma^2{}_X = Var\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

E che:

- $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2!}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$;
- $\mathbb{E}^2[X] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{1!}{\lambda^1} \cdot \frac{1!}{\lambda^1} = \frac{1}{\lambda^2}$

Allora:

$$\sigma^2{}_X = Var[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

CDF Congiunta di Due Variabili Aleatorie

Supponiamo di avere due Variabili Aleatorie Discrete o Continue che sono dipendenti tra loro:

- X → Rappresenta l'Altezza di un Individuo;
- Y → Rappresenta il Peso di un Individuo.

Queste due Variabili Aleatorie sono dipendenti perché, se ad esempio consideriamo una popolazione di individui, ci aspetteremo di avere valori tendenzialmente bassi del peso relativamente ad individui bassi e valori tendenzialmente alti del peso relativamente ad individui alti. Ciò non significa che non sia possibile osservare casi di individui bassi e molto pensanti o alti e poco pesanti, ma generalmente ci aspetteremo che questo non accada.

La Probabilità Congiunta degli Eventi:

$$\{X \le x\} \quad ed \quad \{Y \le y\}$$

Viene indicata in questo modo:

$$Probabilità\ Congiunta\ degli\ Eventi\ \{X \le x\}\ ed\ \{Y \le y\} = P(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\})$$

È espressa attraverso la Funzione:

$$F_{XY}\,(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ed è calcolabile come:

$$F_{XY}\,(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = P(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\})$$

CDF di Congiunta di Due Variabili Aleatorie Indipendenti

"*N*" Variabili Aleatorie Discrete o Continue si dicono "indipendenti" se, la loro *CDF Congiunta* è fattorizzabile nel prodotto delle singole *CDF Marginali*, cioè se:

$$F_{X_1 \ldots X_N} = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_N}(x_N)$$

E quindi capiamo che la *CDF Congiunta* di due Variabili Aleatorie Discrete o Continue "*X*" ed "*Y*" è definita come:

$$F_{XY}\,(x, y) = F_X\,(x) \cdot F_Y\,(y)$$

Perché:

$$F_{XY}\,(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = P(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}) = F_X\,(x) \cdot F_Y\,(y)$$

PMF Congiunta di Due Variabili Aleatorie Discrete

La Probabilità Congiunta degli Eventi:

$$\{X = x\} \quad ed \quad \{Y = y\}$$

È espressa attraverso la Funzione:

$$P_{XY}(x, y) : (x, y) \in A_X \times A_Y$$

Ed è calcolabile come:

$$P_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

In conclusione:

La *PMF Congiunta* di due Variabili Aleatorie Discrete è definita come:

$$P_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

PMF Congiunta di Due Variabili Aleatorie Discrete

"N" Variabili Aleatorie Discrete si dicono "indipendenti" se, la loro *PMF Congiunta* è fattorizzabile nel prodotto delle singole PM*F Marginali*, cioè se:

$$P_{X_1 \dots X_N} = P_{X_1}(x_1) \cdot P_{X_2}(x_2) \dots P_{X_N}(x_N)$$

E quindi capiamo che la *PMF Congiunta* di due Variabili Aleatorie Discrete "X" ed "Y" è definita come:

$$P_{XY}(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

Perché:

$$P_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

PDF Congiunta di Due Variabili Aleatorie Continue

La *PDF Congiunta* di due Variabili Aleatorie Continue è definita come:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \, \partial y}$$

PDF Congiunta di Variabili Aleatorie Indipendenti

"N" Variabili Aleatorie Continue si dicono "indipendenti" se, la loro *PDF Congiunta* è fattorizzabile nel prodotto delle singole *PDF Marginali*, cioè se:

$$f_{X_1 \dots X_N} = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_N}(x_N)$$

E quindi capiamo che la *PDF Congiunta* di due Variabili Aleatorie Continue "X" ed "Y" è definita come:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F_X(x) \cdot F_Y(y)}{\partial x\, \partial y}$$

Derivando prima rispetto ad "x" otterremo:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial F_Y(y) \cdot f_x(x)}{\partial y}$$

Ed infine deriviamo anche rispetto ad "y":

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y) \cdot f_x(x)$$

CDF Condizionata ad un Evento

La *CDF* di una Variabile Aleatoria Discreta o Continua "X" che è condizionata ad un Evento "B" (con Probabilità non nulla) è definita come:

$$F_X(x|B) = P(\{X \leq x\}|B) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap B)}{P(B)} \quad : \quad P(B) \neq 0$$

PMF Condizionata ad un Evento

La *PMF* di una Variabile Aleatoria Discreta "X" che è condizionata ad un Evento "B" (con Probabilità non nulla) è definita come:

$$P_X(x|B) = \frac{P(\{X = x\} \cap B)}{P(B)} \quad : \quad P_X(x|B) : x \in A_X \quad e \quad P(B) \neq 0$$

PDF Condizionata ad un Evento

La *PDF* di una Variabile Aleatoria Discreta o Continua "X" che è condizionata ad un Evento "B" (con Probabilità non nulla) è definita come:

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}$$

Es. → CDF Condizionata ad un Evento.

Supponiamo di avere un Sistema Radar, ossia un sistema composto da un "Trasmettitore" che trasmette una "Forma d'Onda" la quale, se colpisce un oggetto (detto "target"), viene riflessa e torna indietro ad un Ricevitore e sulla base della formula:

$$Distanza = \frac{Velocità\ di\ Propagazione\ dell'onda \cdot tempo}{2}$$

Possiamo venire a conoscenza della distanza tra il luogo dal quale è stato trasmesso il segnale (che è lo stesso luogo verso il quale viene riflesso) e l'oggetto in questione.

Se la forma d'onda non incontra alcun oggetto, il Ricevitore non riceverà nessun segnale, salvo quello del rumore termico che è sempre presente.

In tal caso si effettua un "test d'ipotesi", vale a dire che abbiamo due ipotesi:

- Ipotesi H_0 : $rumore\ termico$
- Ipotesi H_1 : $rumore\ termico + segnale\ riflesso$

Presa in considerazione una certa "soglia", se il segnale ricevuto dal Ricevitore rimane al di sotto del valore di soglia siamo nell'ipotesi H_0, altrimenti, se il segnale ricevuto dal Ricevitore supera il valore di soglia siamo nell'ipotesi H_1.

Per rappresentare l'ampiezza del Segnale di Ritorno utilizziamo una Variabile Aleatoria "X" e per rappresentare il valore di soglia utilizziamo il simbolo "T":

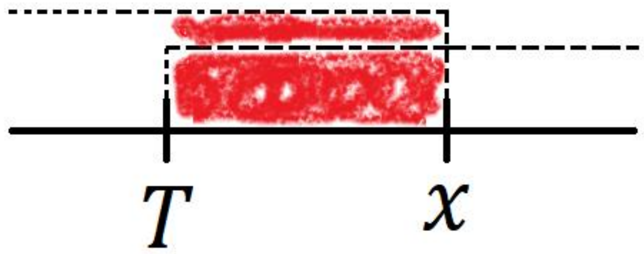
$$Se \quad X > T \ \rightarrow \ H_0 \quad se\ invece \quad X < T \ \rightarrow \ H_1$$

Ipotizziamo di utilizzare un Radar che mostra un segnale ricevuto in ingresso al Ricevitore, solo se questo supera il valore di soglia, quindi calcoliamo la *CDF della Variabile Aleatoria X, Condizionata all'Evento* $\{X > T\}$:

$$F_{X|T}\,(x|T) = P(\,X \leq x \mid X > T\,) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{X > T\})}{P(\{X > T\})}$$

Naturalmente dobbiamo supporre che $x > T$, poiché altrimenti la Probabilità $P(\{X \leq x\} \cap \{X > T\}) = 0$.

Supposto che $x > T$, possiamo rappresentare la Probabilità $P(\{X \leq x\} \cap \{X > T\})$ graficamente attraverso l'area colorata di rosso:



Quindi capiamo che equivale a:

$$\frac{P(\{X \leq x\} \cap \{X > T\})}{P(\{X > T\})} = \frac{P(\{T \leq X \leq x\})}{P(\{X > T\})}$$

E possiamo scriverla come:

$$\frac{P(\{T \leq X \leq x\})}{P(\{X > T\})} = \frac{P\{X \leq x\} - P\{X \leq T\}}{P(\{X > T\})}$$

Ossia come la sottrazione tra le due *CDF*:

$$P\{X \leq x\} - P\{X \leq T\} = F_X(x) - F_X(T)$$

Invece, al denominatore abbiamo la $P(\{X > T\})$ che può essere scritta come:

$$P(\{X > T\}) = 1 - P(\{X < T\}) = 1 - F_X(T)$$

Quindi:

$$F_{X|T}\,(x|T) = \frac{F_X(x) - F_X(T)}{1 - F_X(T)}$$

Supponiamo che la Variabile Aleatoria "X" sia di tipo Rayleigh, quindi:

$$X \sim Rayleigh(\sigma^2)$$

Ricordando che la *PDF* di una Variabile Aleatoria di tipo Rayleigh è definita come:

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-x^2/2\sigma^2} \cdot u(x)$$

E che la *CDF* di una Variabile Aleatoria di tipo Rayleigh è definita come:

$$F_X(x) = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2} \cdot u(x)$$

Calcoleremo:

$$F_{X|T}(x|T) = \frac{F_X(x) - F_X(T)}{1 - F_X(T)} \cdot u(x-T)$$

Con $u(x-T)$ che:

$$u(x-T) = \begin{cases} 0 & se \quad x - T < 0 \quad \rightarrow \quad x < T \\ 1 & se \quad x - T > 0 \quad \rightarrow \quad x > T \end{cases}$$

PMF Condizionata

Quando si parla di "*PMF Condizionata*" di una Variabile Aleatoria Discreta "X", data una Variabile Aleatoria Discreta "Y", s'intende:

$$P_{X|Y}(x \mid y) = P(\{X = x\} \mid \{Y = y\}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{PDF\ Congiunta\ di\ X\ ed\ Y}{PDF\ Marginale\ di\ Y} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad P_X(x \mid \{Y = y\}) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)} \quad : \quad P_Y(y) \neq 0$$

Proprietà e Leggi della PMF Condizionata

1. *PMF Marginale funzione della PDF Congiunta*:

$$P_X(x) = \sum_{y \in Y} P_{XY}(x,y)$$

$$P_Y(y) = \sum_{x \in X} P_{XY}(x,y)$$

PDF Condizionata

Quando si parla di "*PMF Condizionata*" di una Variabile Aleatoria Continua "X", data una Variabile Aleatoria Continua "Y", s'intende:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \quad : \quad f_Y(y) \neq 0$$

Proprietà e Leggi della PDF Condizionata

2. *Legge della Probabilità Composta per le PDF*:

   Data la Formula della *PDF Condizionata* vista sopra:

   $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \quad : \quad f_Y(y) \neq 0$$

   Ricaviamo che:

   $$f_{XY}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$$

3. *Legge di Bayes per le PDF*:

   Data la *Legge della Probabilità Composta per le PDF*:

   $$f_{XY}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$$

   E quindi, dato che:

   $$f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$$

   Avremo che:

   $$f_{X|Y}(x|y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot \frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$$

4. *PDF Marginale funzione della PDF Congiunta*:

   Partendo dalla Legge della Probabilità Composta:

   $$f_{XY}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)$$

   Ed integrando entrambi i membri, otterremo:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)\,dx$$

   Ora, dato che abbiamo integrato rispetto ad "x", "$f_Y(y)$" può essere portata fuori dall'integrale, poiché non dipende dalla variabile "x":

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = f_Y(y) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

   E, data la Proprietà di *Normalizzazione* della *PDF*, per la quale:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$$

   Avremo che:

   $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

   Ed allo stesso modo, partendo dalla Legge della Probabilità Composta:

   $$f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$$

Se integro rispetto ad “y” entrambi i membri, otterrò che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)\,dy$$

Ora, dato che abbiamo integrato rispetto ad “y”, “$f_X(x)$” può essere portata fuori dall’integrale, poiché non dipende dalla variabile “y”:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = f_X(x) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\,dy$$

E, data la Proprietà di *Normalizzazione* della *PDF*, per la quale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\,dy = 1$$

Avremo che:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

5. *Legge della Probabilità Composta*:

Partendo dalla Legge della Probabilità Composta:

$$f_{XY}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)$$

Ed integrando rispetto ad “y”:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)\,dy$$

In tal caso, a differenza della Legge dimostrata sopra, non posso portare fuori dall’integrale nessuno dei termini del secondo membro, poiché entrambi dipendono dalla variabile “y”.

Proprio dalla Legge di sopra, la quale esprime la *PDF Marginale in funzione della PDF Congiunta*, abbiamo che:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

E quindi:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)\,dy$$

Es. → Esercizio 1 – Prova d’Esame 13/04/2018:

Si consideri una Variabile Aleatoria “Z” che rappresenta la somma dei punteggi ottenuti dal lancio di due dadi. Determinare:

1. *PMF* di Z;
2. *Media* e *Varianza* di Z.

Svolgimento:

1. L’*Alfabeto* di Z (cioè l’insieme dei possibili valori che Z può assumere) è costituito dai valori:

$$A_Z = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

La *PMF* di Z è definita come:

$$P_Z(x) = P(Z = x)$$

Ora consideriamo altre due Variabili Aleatorie:

- D_1 che indica il punteggio del primo dado e che quindi ha alfabeto:

$$A_{D_1} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \};$$

- D_2 che indica il punteggio del secondo dado e che quindi ha alfabeto:

$$A_{D_2} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}.$$

Quindi:

$$Z = D_1 + D_2$$

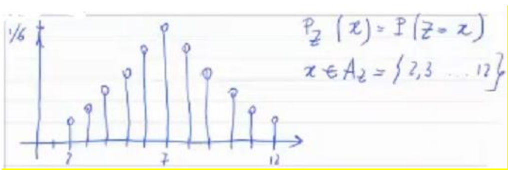
A questo punto posso realizzare una tabella con i vari valori che D_1 ed D_2 possono assumere:

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

E da questa posso ricavare i valori delle *PMF* di Z:

$$P(Z=2) = 1/36 = P(Z=12)$$
$$P(Z=3) = 1/18 = P(Z=11)$$
$$P(Z=4) = 1/12 = P(Z=10)$$
$$P(Z=5) = 1/9 = P(Z=9)$$
$$P(Z=6) = 5/36 = P(Z=8)$$
$$P(Z=7) = 1/6$$

E posso anche costruire il grafico della *PMF* disponendo sull'asse delle ascisse i possibili valori di "Z" e su quello delle ordinate i corrispettivi valori della *PMF*:



2. La *Media* di Z è definita come:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in A_Z} x_i \cdot P(Z = x_i) = \sum_{n=2}^{12} n \cdot P(Z = n) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{18} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Quindi:

$$\mathbb{E}[X] = 7$$

La Varianza di Z è definita come:

$$\sigma^2{}_Z = Var[Z] = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2] = \sum_{n=2}^{12} (n - \mathbb{E}[Z])^2 \cdot P(Z = n)$$

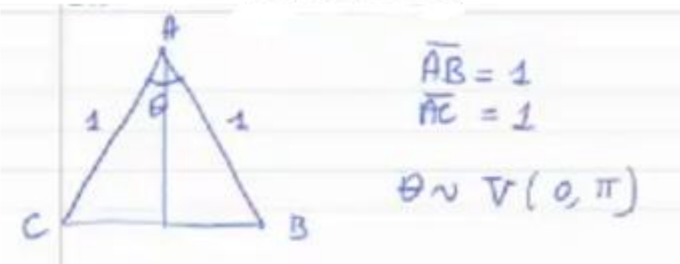
Es. → Esercizio Slide 4, Pagina 30.

Si consideri un triangolo isoscele in cui i lati uguali hanno misura unitaria e l'angolo al vertice è una Variabile Aleatoria Uniforme "θ" in $(0, \pi)$, quindi:

$$\theta \sim U(a, b)$$

Calcolare la Media e la Varianza dell'Area del Triangolo.

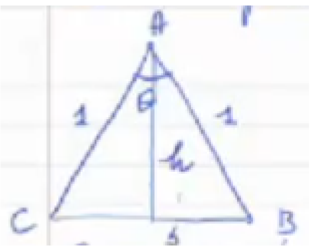
Svolgimento:



L'Area del Triangolo è definita come:

$$Area = \frac{Base \cdot Altezza}{2}$$

Calcoliamo l'Altezza "h" e la base $\overline{CB}$:



$$h = \overline{AB} \cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 \cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{\overline{CB}}{2} = \overline{AB} \cdot sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 \cdot sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \to = \overline{CB} = 2 \cdot sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Quindi:

$$Area = \frac{\cancel{2} \cdot sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{2}} = sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Considerando che, per definizione:

$$2 \cdot sin(x) \cdot cos(x) = sin(2x)$$

Allora:

$$sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot sin\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot sin(\theta)$$

E quindi:

$$Area = \frac{1}{2} \cdot sin(\theta)$$

Dato che θ è una Variabile Aleatoria, anche l'Area (che è funzione di θ), lo sarà.

Indichiamo l'Area attraverso la Variabile Aleatoria "A" e calcoliamone il Valor Medio:

$$\mathbb{E}[A] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot sin(\theta) \cdot f_A(A)\, dA$$

Ma il problema è che "$f_A(A)$" non ci è noto...

Però, dato che l'Area è funzione della Variabile Aleatoria θ, possiamo sfruttare il Teorema Fondamentale per il Calcolo della Media, il quale afferma che:

Data una certa Variabile Aleatoria "X" ed una Funzione di questa Variabile Aleatoria "$g(X)$", allora la media di $g(X)$ è calcolabile come:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in A_x} g(x) \cdot P_X(x) & se\ X\ \text{è}\ Discreta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx & se\ X\ \text{è}\ Continua \end{cases}$$

Quindi:

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[g(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot sin(\theta) \cdot f_\theta(\theta)\, d\theta$$

Ricordando che la *PDF* di una Variabile Aleatoria Uniforme è così definita:

$$PDF = f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & se\ \ a \leq x \leq b\ \ e\ quindi\ x \in (a,b) \\ 0\ \ se\ \ x \notin (a,b) \end{cases}$$

Nel nostro caso:

$$PDF = f_\theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi - 0} & se\ \ 0 \leq x \leq \pi\ \ e\ quindi\ x \in (0,\pi) \\ 0\ \ se\ \ x \notin (0,\pi) \end{cases}$$

E quindi avremo che:

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[g(\theta)] = \int_0^\pi \frac{1}{2} \cdot sin(\theta) \cdot \frac{1}{\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi sin(\theta)\, d\theta$$

Ricordando l'integrale notevole:

$$\int \sin(x) = -\cos(x)$$

Avremo che:

$$\mathbb{E}[A] = -\frac{1}{2\pi} \cdot [\cos(\theta)]_0^\pi = -\frac{1}{2\pi} \cdot [\cos(\pi) - \cos(0)] = -\frac{1}{2\pi} \cdot [-1-1] = -\frac{1}{2\pi} \cdot [-2] \ \rightarrow$$

$$\mathbb{E}[A] = \frac{1}{\pi}$$

Per quanto riguarda il calcolo della Varianza:

$$\sigma^2{}_\theta = Var[\theta] = \mathbb{E}[\theta^2] - \mathbb{E}^2[\theta]$$

Quindi calcoliamo il Valore Quadratico Medio "$\mathbb{E}[\theta^2]$" :

$$\mathbb{E}[\theta^2] = \int_0^\pi \frac{1}{4} \cdot \sin^2(\theta) \cdot \frac{1}{\pi}\, d\theta = \cdots$$

Es. → Esercizio su *PMF Congiunta* e *PMF Marginali*.

Ho una Coppia di Variabili Aleatorie Discrete:

$$X \rightarrow A_X = \{0, 1, 2\}$$

$$Y \rightarrow A_Y = \{1, 2, 3\}$$

Con *PMF Congiunta*:

Y \ X	0	1	2
1	0.12	0.2	0.12
2	0.05	0.12	0.2
3	0.02	0.05	0.12

Devo calcolare:

1. Le *PMF Marginali* ;
2. La *PMF Condizionata* di Y dato X ;
3. La Probabilità che $X + Y = 3$.

Svolgimento:

1. Dalla tabella sappiamo che:

$$P(X = 0\,, Y = 1) = 0.12\,;\; P(X = 1\,, Y = 1) = 0.2\,;\; ecc\ldots$$

Inoltre, dalla Proprietà della *PMF Condizionata*, sappiamo che la *PMF Marginale* è funzione della *PMF Congiunta* attraverso le seguenti formule:

$$P_X(x) = \sum_{y \in Y} P_{XY}\,(x, y)$$

$$P_Y(y) = \sum_{x \in X} P_{XY}\,(x, y)$$

E quindi:

$$P_X(0) = \sum_{y \in Y} P_{XY}\,(x, y) = 0.12 + 0.05 + 0.02 = 0.19$$

$$P_X(1) = \sum_{y \in Y} P_{XY}\,(x, y) = 0.2 + 0.12 + 0.05 = 0.34$$

$$P_X(2) = \sum_{y \in Y} P_{XY}\,(x, y) = 0.12 + 0.2 + 0.12 = 0.44$$

Relativamente alla *PMF Marginale* di Y :

$$P_X(1) = \sum_{x \in X} P_{XY}\,(x, y) = 0.12 + 0.2 + 0.12 = 0.44$$

$$P_X(2) = \sum_{x \in X} P_{XY}\,(x, y) = 0.05 + 0.12 + 0.2 = 0.37$$

$$P_X(3) = \sum_{x \in X} P_{XY}\ (x, y) = 0.02 + 0.05 + 0.12 = 0.19$$

2. La *PMF Condizionata* di Y dato X è definita come:

$$P_{Y|X}(y) = \frac{P_{XY}\ (x, y)}{P_X\ (x)}$$

Quindi:

Y \ X	0	1	2
1	0.12/0.19		
2	0.05/0.19	....	
3	0.02/0.19		

3. Per calcolare la Probabilità che $X + Y = 3$, devo prendere la Tabella dei Valori della PMF Congiunta, vedere quand'è che $X + Y = 3$ e le relative probabilità e poi devo sommare queste probabilità:

Y \ X	0	1	2
1	0.12	0.2	0.12
2	0.05	0.12	0.2
3	0.02	0.05	0.12

Quindi:

$$P(X + Y = 3) = 0.12 + 0.12 + 0.02$$

CDF Congiunta di Variabili Aleatorie Indipendenti

"N" Variabili Aleatorie Discrete o Continue si dicono "indipendenti" se, la loro *CDF Congiunta* è fattorizzabile nel prodotto delle singole *CDF Marginali*, cioè se:

$$F_{X_1 \dots X_N} = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_N}(x_N)$$

E quindi capiamo che la *CDF Congiunta* di due Variabili Aleatorie Discrete o Continue "X" ed "Y" è definita come:

$$F_{XY}\ (x, y) = F_X\ (x) \cdot F_Y\ (y)$$

Perché:

$$F_{XY}\ (x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = F_X\ (x) \cdot F_Y\ (y)$$

PMF Congiunta di Variabili Aleatorie Indipendenti

"N" Variabili Aleatorie Discrete si dicono "indipendenti" se, la loro *PMF Congiunta* è fattorizzabile nel prodotto delle singole PMF *Marginali*, cioè se:

$$P_{X_1 \dots X_N} = P_{X_1}(x_1) \cdot P_{X_2}(x_2) \dots P_{X_N}(x_N)$$

E quindi capiamo che la *PMF Congiunta* di due Variabili Aleatorie Discrete "X" ed "Y" è definita come:

$$P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

Perché:

$$P_{XY}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

PDF Congiunta di Variabili Aleatorie Indipendenti

"N" Variabili Aleatorie Continue si dicono "indipendenti" se, la loro *PDF Congiunta* è fattorizzabile nel prodotto delle singole *PDF Marginali*, cioè se:

$$f_{X_1 \dots X_N} = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_N}(x_N)$$

E quindi capiamo che la *PDF Congiunta* di due Variabili Aleatorie Continue "X" ed "Y" è definita come:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 F_X(x) \cdot F_Y(y)}{\partial x \, \partial y}$$

Derivando prima rispetto ad "x" otterremo:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial F_Y(y) \cdot f_x(x)}{\partial y}$$

Ed infine deriviamo anche rispetto ad "y":

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y) \cdot f_x(x)$$

Momento Congiunto di Due Variabili Aleatorie

Date due Variabili Aleatorie, il Momento Congiunto di tali Variabili è utile a definire il grado di influenza reciproca tra le Variabili Aleatorie ed è definito come:

$$\mathbb{E}[X^m \cdot Y^n] = \begin{cases} \sum_{?} ? \quad se\ X\ è\ Discreta \\ \iint_{\mathbb{R}^2} x^m \cdot y^n \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy \quad se\ X\ e\ Y\ sono\ Continua \end{cases}$$

Questo è il Momento Congiunto di Ordine "$k = m + n$".

Correlazione tra Due Variabili

La Correlazione di due Variabili Aleatorie è definita come il Momento Congiunto di Ordine $2 = 1 + 1$ delle Due Variabili:

$$r_{XY} = \mathbb{E}[X^1 \cdot Y^1] = corr[X,Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

Covarianza

La Covarianza di due Variabili Aleatorie è definita come il Momento Congiunto Centrale di Ordine $2 = 1 + 1$ delle Due Variabili:

$$c_{XY} = \mathbb{E}[(X^1 - \mu_X) \cdot (Y^1 - \mu_Y)] = cov[X,Y] = r_{XY} - \mu_Y \cdot \mu_X$$

Infatti, se noi calcoliamo il prodotto $(X^1 - \mu_X) \cdot (Y^1 - \mu_Y)$ otterremo:

$$X \cdot Y - \mu_Y \cdot X - \mu_X \cdot Y + \mu_X \cdot \mu_Y$$

E quindi:

$$\mathbb{E}[(X^1 - \mu_X) \cdot (Y^1 - \mu_Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mu_Y \cdot E[X] - \mu_X \cdot E[Y] + \mu_X \cdot \mu_Y \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad r_{XY} - \mu_Y \cdot \mu_X - \cancel{\mu_X \cdot \mu_Y} + \cancel{\mu_X \cdot \mu_Y} \quad \rightarrow$$

$$c_{XY} = \mathbb{E}[(X^1 - \mu_X) \cdot (Y^1 - \mu_Y)] = cov[X,Y] = r_{XY} - \mu_Y \cdot \mu_X$$

N.B. → Essendo che:

$$c_{XY} = r_{XY} - \mu_Y \cdot \mu_X$$

Capiamo che Correlazione e Covarianza sono legate tra loro e se almeno una delle due Variabili Aleatorie ha Valor Medio nullo, Correlazione e Covarianza coincidono:

$$c_{XY} = r_{XY}$$

Incorrelazione ed Indipendenza

Due Variabili Aleatorie Indipendenti hanno "Covarianza nulla" e quindi si dicono Incorrelate.

Dimostrazione:

Sappiamo che:

$$r_{XY} = \mathbb{E}[X^1 \cdot Y^1] = corr[X,Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

E quindi:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\, dx}_{\mathbb{E}[X]} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} y \cdot f_Y(y)\, dy}_{\mathbb{E}[Y]}$$

Da cui:

$$r_{XY} = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \mu_X \cdot \mu_Y$$

E sapendo che la Covarianza è definita come:

$$c_{XY} = r_{XY} - \mu_Y \cdot \mu_X$$

Avremo:

$$c_{XY} = \mu_X \cdot \mu_Y - \mu_Y \cdot \mu_X = 0$$

N.B. → L'Incorrelazione è una condizione più debole dell'Indipendenza Statistica, infatti: due Variabili Aleatorie Indipendenti sono Incorrelate (cioè hanno Covarianza nulla), ma due Variabili Aleatorie Incorrelate non sono per forza Indipendenti.

Dimostrazione:

Prendiamo Due Variabili Aleatorie:

- $X = \cos(\theta)$
- $Y = \sin(\theta)$

Con "θ" che è a sua volta una Variabile Aleatoria ed è di tipo Uniforme:

$$\theta \sim U(-\pi, \pi)$$

Vogliamo calcolare la loro Covarianza:

$$c_{XY} = r_{XY} - \mu_Y \cdot \mu_X$$

Iniziamo calcolando il Valor Medio delle Variabili:

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\theta) \cdot f_\theta(\theta)\, d\theta$$

Ricordando che la *PDF* di una Variabile Aleatoria Uniforme è così definita:

$$PDF = f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & se \ \ a \leq x \leq b \ \ e \ quindi \ x \in (a,b) \\ 0 \ \ se \ \ x \notin (a,b) \end{cases}$$

Nel nostro caso:

$$PDF = f_\theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi - (-\pi)} = \dfrac{1}{2\pi} & se \ -\pi \leq x \leq \pi \ \ e \ quindi \ x \in (-\pi, \pi) \\ 0 \ \ se \ \ x \notin (-\pi, \pi) \end{cases}$$

Quindi:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\theta) \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\theta)\ d\theta$$

Ricordando che l'integrale di una funzione sinusoidale nel suo periodo è nullo, ho che:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\theta)\ d\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}[X] = 0$$

Lo stesso vale per il Valor Medio di Y:

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\theta) \cdot f_\theta(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(\theta)\ d\theta = 0$$

Ora calcoliamo la Correlazione, che teoricamente è definita come:

$$r_{XY} = \mathbb{E}[X^1 \cdot Y^1] = corr[X,Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

Ma in realtà, dato che X e Y sono funzioni della Variabile Aleatoria θ, possiamo sfruttare il Teorema Fondamentale per il Calcolo della Media, il quale afferma che:

Data una certa Variabile Aleatoria "X" ed una Funzione di questa Variabile Aleatoria "$g(X)$", allora la media di $g(X)$ è calcolabile come:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in A_x} g(x) \cdot P_X(x) & se \ X \ è \ Discreta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx & se \ X \ è \ Continua \end{cases}$$

Quindi:

$$\mathbb{E}[X^1 \cdot Y^1] = \int_{-\infty}^{+\infty} cos(\theta) \cdot sin(\theta) \cdot f_\theta(\theta)\ d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} cos(\theta) \cdot sin(\theta)\ d\theta$$

E ricordando l'uguaglianza:

$$2 \cdot cos(x) \cdot sin(x) = sin(2x) \quad \rightarrow \quad cos(x) \cdot sin(x) = \frac{sin(2x)}{2}$$

Avremo che:

$$\mathbb{E}[X^1 \cdot Y^1] = \int_{-\pi}^{+\pi} cos(\theta) \cdot sin(\theta) \cdot f_\theta(\theta)\ d\theta = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} sin(2\theta)\ d\theta = 0$$

Dato che l'integrale di una funzione sinusoidale nel suo periodo è nullo.

Abbiamo appurato che la Covarianza delle Due Variabili Aleatorie è nulla:

$$c_{XY} = r_{XY} - \mu_Y \cdot \mu_X = 0 - 0$$

Quindi queste Variabili sono Incorrelate ($Covarianza = 0$) ed Ortogonali ($Correlazione = 0$).

Ma pur essendo Incorrelate, non sono Indipendenti! Anzi, sono dipendenti, infatti:

$$X^2 + Y^2 = cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

E questo significa che:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X^2 = 1 - Y^2 \\ \bullet\ Y^2 = 1 - X^2 \end{array}\right\} \quad \text{Sono dipendenti!}$$

Ortogonalità

Due Variabili Aleatorie si dicono Ortogonali se hanno "Correlazione nulla" e quindi se almeno una delle due ha Media nulla.

Caratterizzazione di Due Variabili Aleatorie Congiuntamente Gaussiane

Consideriamo due Variabili Aleatorie Gaussiane Standard Indipendenti:

- $X_{01} \sim N(0,1)$;
- $X_{02} \sim N(0,1)$.

Essendo indipendenti, la *PDF Congiunta* di queste due Variabili Aleatorie è definita come:

$$f_{X_{01}X_{02}}(x,y) = f_{X_{01}}(x) \cdot f_{X_{02}}(y)$$

Con :

- $f_{X_{01}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$;
- $f_{X_{02}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2}$.

Una Coppia di Variabili Aleatorie Gaussiane “X_1” ed “X_2” è definita come la trasformazione affine delle due Variabili Gaussiane Standard Indipendenti definite sopra, quindi:

$$X_1 = a_{11} \cdot X_{01} + a_{12} \cdot X_{02} + \mu_1$$

$$X_2 = a_{21} \cdot X_{01} + a_{22} \cdot X_{02} + \mu_2$$

N.B. → Questa “trasformazione affine” può essere rappresentata anche sfruttando i Vettori e le Matrici, cioè se definiamo:

- “$\boldsymbol{X}$” come il Vettore Colonna delle Variabili Aleatorie Gaussiane “X_1” ed “X_2”:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} ;$$

- “$\boldsymbol{A}$” come la Matrice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ;$$

- “$\boldsymbol{X_0}$” come il Vettore Colonna delle Variabili Aleatorie Gaussiane Standard Indipendenti “X_{01}” ed “X_{02}”:

$$\boldsymbol{X_0} = \begin{pmatrix} X_{01} \\ X_{02} \end{pmatrix} ;$$

- “$\boldsymbol{\mu}$” come il Vettore Colonna dei Valor Medi delle Variabili Aleatorie Gaussiane “μ_{X_1}” ed “μ_{X_2}”:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{pmatrix} ;$$

Possiamo definire la trasformazione affine:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{\mu}$$

- “$\boldsymbol{x}$” come il Vettore Colonna delle Variabili Indipendenti “x_1” ed “x_2”:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ;$$

- “$\boldsymbol{C}$” come la “Matrice di Covarianza” composta da quattro elementi, che sono:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad dove \quad c_{ij} = \mathbb{E}\left[\left(X_i - \mu_{X\,i}\right) \cdot \left(X_j - \mu_{X\,j}\right) \right]$$

Quindi, ricordandoci la formula della Covarianza e quella della Varianza:

- $c_{11} = \mathbb{E}\left[\left(X_1 - \mu_{X_1}\right) \cdot \left(X_1 - \mu_{X_1}\right) \right] = \mathbb{E}\left[\left(X_1 - \mu_{X_1}\right)^2 \right] = \sigma^2{}_{X_1} ;$
- $c_{22} = \mathbb{E}\left[\left(X_2 - \mu_{X_2}\right) \cdot \left(X_2 - \mu_{X_2}\right) \right] = \mathbb{E}\left[\left(X_2 - \mu_{X_2}\right)^2 \right] = \sigma^2{}_{X_2} ;$
- $c_{12} = \mathbb{E}\left[\left(X_1 - \mu_{X_1}\right) \cdot \left(X_2 - \mu_{X_2}\right) \right] = cov[X_1, X_2] ;$
- $c_{21} = \mathbb{E}\left[\left(X_2 - \mu_{X_2}\right) \cdot \left(X_1 - \mu_{X_1}\right) \right] = cov[X_1, X_2] .$

Si nota come $c_{12} = c_{21} = cov[X_1, X_2]$.

N.B. → In generale, anche se non abbiamo a che fare con Variabili Aleatorie Gaussiane, la Matrice di Covarianza di due Variabili Aleatorie “X” ed “Y” (di qualsiasi tipo) è definita come:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2{}_X & cov[X, Y] \\ cov[X, Y] & \sigma^2{}_Y \end{bmatrix}$$

La *PDF Congiunta* della Coppia di Variabili Aleatorie Gaussiane "X_1" ed "X_2" è così definita:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot |\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right]}$$

Con "$\boldsymbol{C}$" che indica il Determinate della Matrice di Covarianza e con "$N = 2$" che indica il Numero di Variabili Aleatorie Gaussiane delle quali stiamo calcolando la *PDF Congiunta*, infatti questa formula è valida per "N" Variabili Aleatorie Gaussiane, non soltanto per una Coppia.

N.B. → L'espressione $[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})]$ viene definita "Forma Quadratica".

Coefficiente di Correlazione

Oltre alla Correlazione ed alla Covarianza, un altro valore utile è il "Coefficiente di Correlazione".

Questo, considerando due Variabili Aleatorie "X" ed "Y", è definito come:

$$\rho_{XY} = \frac{cov[X, Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

N.B. → È possibile esprimere la *PDF Congiunta* di "N" Variabili Aleatorie Gaussiane in funzione del Coefficiente di Correlazione:

Consideriamo ad esempio la Coppia di Variabili Aleatorie Gaussiane "X_1" ed "X_2" definita nella pagina precedente e consideriamo la relativa Matrice di Covarianza:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2{}_{X_1} & cov[X_1, X_2] \\ cov[X_1, X_2] & \sigma^2{}_{X_2} \end{bmatrix}$$

Considerando che:

$$\rho_{X_1X_2} = \frac{cov[X_1, X_2]}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} \quad \rightarrow \quad cov[X_1, X_2] = \rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}$$

Possiamo esprimere la Matrice di Covarianza in funzione del Coefficiente di Correlazione:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2{}_{X_1} & \rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \\ \rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} & \sigma^2{}_{X_2} \end{bmatrix}$$

Il cui determinate è pari a:

$$|\boldsymbol{C}| = \sigma^2{}_{X_1} \cdot \sigma^2{}_{X_2} - \rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \cdot \rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} = \sigma^2{}_{X_1} \cdot \sigma^2{}_{X_2} - \rho^2{}_{X_1X_2} \cdot \sigma^2{}_{X_1} \cdot \sigma^2{}_{X_2} \quad \rightarrow$$

Mettendo in evidenza "$\sigma^2{}_{X_1} \cdot \sigma^2{}_{X_2}$" otterremo:

$$|\boldsymbol{C}| = \sigma^2{}_{X_1} \cdot \sigma^2{}_{X_2}(1 - \rho^2{}_{X_1X_2})$$

L'inversa della Matrice di Covarianza è pari a:

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2{}_{X_1} & \rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \\ \rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} & \sigma^2{}_{X_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{C}|} \cdot \begin{bmatrix} \sigma^2{}_{X_2} & -\rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \\ -\rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} & \sigma^2{}_{X_1} \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2{}_{X_1} \cdot \sigma^2{}_{X_2}\left(1 - \rho^2{}_{X_1X_2}\right)} \cdot \begin{bmatrix} \sigma^2{}_{X_2} & -\rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \\ -\rho_{X_1X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} & \sigma^2{}_{X_1} \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{\left(1-\rho^2{}_{X_1X_2}\right)} \cdot \begin{bmatrix} {}^{1}\!/_{\sigma^2{}_{X_1}} & {}^{-\rho_{X_1X_2}}\!/_{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} \\ {}^{-\rho_{X_1X_2}}\!/_{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} & {}^{1}\!/_{\sigma^2{}_{X_2}} \end{bmatrix}$$

Ora prendiamo in considerazione il termine della formula della PDF Congiunta *PDF Congiunta* di "*N*" Variabili Aleatorie Gaussiane che costituisce la "Forma Quadratica" :

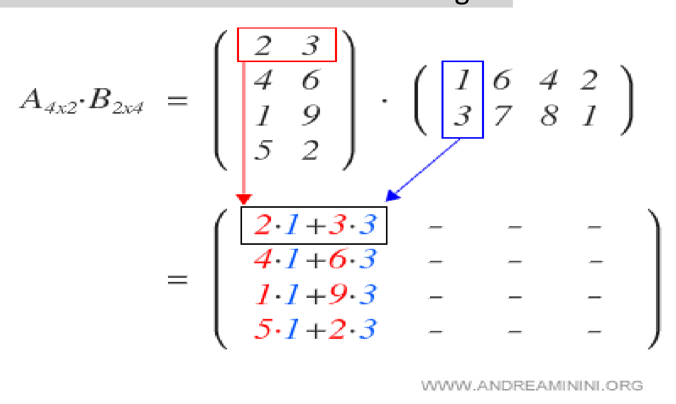
$$[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})]$$

Nel nostro caso avremo:

$$\left[(x_1-\mu_1 \quad x_2-\mu_2)^T \cdot \frac{1}{\left(1-\rho^2{}_{X_1X_2}\right)} \cdot \begin{bmatrix} {}^{1}\!/_{\sigma^2{}_{X_1}} & {}^{-\rho_{X_1X_2}}\!/_{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} \\ {}^{-\rho_{X_1X_2}}\!/_{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} & {}^{1}\!/_{\sigma^2{}_{X_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\left(1-\rho^2{}_{X_1X_2}\right)} \cdot \left[(x_1-\mu_1 \quad x_2-\mu_2)^T \cdot \begin{bmatrix} {}^{1}\!/_{\sigma^2{}_{X_1}} & {}^{-\rho_{X_1X_2}}\!/_{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} \\ {}^{-\rho_{X_1X_2}}\!/_{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} & {}^{1}\!/_{\sigma^2{}_{X_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}\right] \rightarrow$$

Ricordando che il Prodotto tra due Matrici è calcolato come segue:



Avremo:

$$\rightarrow \frac{1}{\left(1-\rho^2{}_{X_1X_2}\right)} \cdot \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma^2{}_{X_1}} - \frac{\rho_{X_1X_2}(x_2-\mu_2)}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} \quad -\frac{\rho_{X_1X_2}(x_1-\mu_1)}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} + \frac{x_2-\mu_2}{\sigma^2{}_{X_2}}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\left(1-\rho^2{}_{X_1X_2}\right)} \cdot \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2{}_{X_1}} - \frac{\rho_{X_1X_2}(x_2-\mu_2)(x_1-\mu_1)}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} - \frac{\rho_{X_1X_2}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2{}_{X_2}}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\left(1-\rho^2{}_{X_1X_2}\right)} \cdot \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2{}_{X_1}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2{}_{X_2}} - \frac{2\cdot\rho_{X_1X_2}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}}\right] \rightarrow$$

Ora, considerando che la *PDF Congiunta* della Coppia di Variabili Aleatorie Congiuntamente Gaussiane è la seguente:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot |\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right]}$$

Possiamo esprimerla in funzione del "Coefficiente di Correlazione":

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot \left[\sigma^2{}_{X_1} \cdot \sigma^2{}_{X_2}\left(1-\rho^2{}_{X_1X_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho^2{}_{X_1X_2}\right)} \cdot \left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2{}_{X_1}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2{}_{X_2}} - \frac{2\cdot\rho_{X_1X_2}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}}\right)\right]}$$

Incorrelazione ed Indipendenza per Variabili Aleatorie Congiuntamente Gaussiane

Se il "Coefficiente di Correlazione" di due Variabili Aleatorie Congiuntamente Gaussiane è nullo?

Sappiamo che il Coefficiente di Correlazione di due Variabili Aleatorie "X" ed "Y", si calcola come:

$$\rho_{XY} = \frac{cov[X,Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Questo significa che se il Coefficiente di Correlazione è nullo, la Covarianza delle due Variabili è nulla:

$$\rho_{XY} = \frac{cov[X,Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad cov[X,Y] = 0$$

E quindi le Variabili sono Incorrelate.

Nel caso specifico di Due Variabili Aleatorie Congiuntamente Gaussiane "X_1" e "X_2", se il loro Coefficiente di Correlazione è nullo, la loro *PDF Congiunta* sarà pari a:

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot \left[\sigma^2{}_{X_1} \cdot \sigma^2{}_{X_2}(1-0)\right]^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2(1-0)} \cdot \left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2{}_{X_1}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2{}_{X_2}} - \frac{2 \cdot 0 \cdot (x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}}\right)\right]} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} e^{\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2{}_{X_1}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2{}_{X_2}}\right)\right]} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} e^{\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2{}_{X_1}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2{}_{X_2}}\right)\right]}$$

Possiamo scriverla come:

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{X_1}} e^{\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2{}_{X_1}}\right]} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{X_2}} e^{\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2{}_{X_2}}\right]}$$

Quindi:

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

E sapendo che la formula della *PDF Congiunta* di due Variabili Aleatorie "$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$" è valida solo per Variabili Aleatorie Congiunte Indipendenti, possiamo concludere che, anche se normalmente:

- Indipendenza $\Rightarrow$ Incorrelazione ;
- Incorrelazione $\nRightarrow$ Indipendenza ;

Eccezionalmente, per le Variabili Aleatorie Congiuntamente Gaussiane:

Incorrelazione $\Rightarrow$ Indipendenza

Cioè due Variabili Aleatorie Congiuntamente Gaussiane che sono Incorrelate, sono anche Indipendenti.

Matrice di Covarianza

Abbiamo visto come si costruisce la Matrice di Covarianza a partire da due Variabili Aleatorie Congiuntamente Gaussiane "X_1" ed "X_2" :

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad dove \quad c_{ij} = \mathbb{E}\left[\left(X_i - \mu_{X\,i}\right) \cdot \left(X_j - \mu_{X\,j}\right)\right]$$

In particolare:

- ○ $c_{11} = \mathbb{E}\left[\left(X_1 - \mu_{X_1}\right) \cdot \left(X_1 - \mu_{X_1}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(X_1 - \mu_{X_1}\right)^2\right] = \sigma^2{}_{X_1}$;
- ○ $c_{22} = \mathbb{E}\left[\left(X_2 - \mu_{X_2}\right) \cdot \left(X_2 - \mu_{X_2}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(X_2 - \mu_{X_2}\right)^2\right] = \sigma^2{}_{X_2}$;
- ○ $c_{12} = \mathbb{E}\left[\left(X_1 - \mu_{X_1}\right) \cdot \left(X_2 - \mu_{X_2}\right)\right] = cov[X_1, X_2]$;
- ○ $c_{21} = \mathbb{E}\left[\left(X_2 - \mu_{X_2}\right) \cdot \left(X_1 - \mu_{X_1}\right)\right] = cov[X_1, X_2]$.

Volendo utilizzare la notazione vettoriale, se definiamo:

- "$\boldsymbol{X}$" come il Vettore Colonna delle Variabili Aleatorie Gaussiane "X_1" ed "X_2":

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} ;$$

- "$\boldsymbol{\mu}$" come il Vettore Colonna dei Valor Medi delle Variabili Aleatorie Gaussiane "μ_{X_1}" ed "μ_{X_2}":

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{pmatrix} ;$$

Allora possiamo trasformare questa formula:

$$c_{ij} = \mathbb{E}\left[\left(X_i - \mu_{X\,i}\right) \cdot \left(X_j - \mu_{X\,j}\right)\right]$$

Nella seguente:

$$\boldsymbol{C} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^T]$$

Dove:

$$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} X_1 - \mu_{X\,1} \\ X_2 - \mu_{X\,2} \end{pmatrix} \quad e \quad (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^T = (X_1 - \mu_{X\,1} \quad X_2 - \mu_{X\,2})$$

Considerando inoltre che, come visto in precedenza, una Coppia di Variabili Aleatorie Gaussiane "X_1" ed "X_2" è definita come la trasformazione affine di due Variabili Gaussiane Standard Indipendenti del tipo "$X_{01} \sim N(0,1)$" ed "$X_{02} \sim N(0,1)$" :

$$X_1 = a_{11} \cdot X_{01} + a_{12} \cdot X_{02} + \mu_1$$

$$X_2 = a_{21} \cdot X_{01} + a_{22} \cdot X_{02} + \mu_2$$

E che questa "trasformazione affine" può essere rappresentata anche sfruttando i Vettori e le Matrici, cioè se definiamo:

- "$\boldsymbol{A}$" come la Matrice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ;$$

- "$\boldsymbol{X_0}$" come il Vettore Colonna delle Variabili Aleatorie Gaussiane Standard Indipendenti "X_{01}" ed "X_{02}":

$$\boldsymbol{X_0} = \begin{pmatrix} X_{01} \\ X_{02} \end{pmatrix} ;$$

Allora possiamo definire la trasformazione affine come:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{\mu}$$

E quindi possiamo sfruttare quest'uguaglianza nella formula:

$$\boldsymbol{C} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}) \cdot (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^T] = \mathbb{E}[(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}) \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu})^T] \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{C} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X_0}) \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X_0})^T] \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{C} = A \cdot A^T \cdot \mathbb{E}[(\boldsymbol{X_0}) \cdot (\boldsymbol{X_0})^T]$$

Dove il termine "$\mathbb{E}[(\boldsymbol{X_0}) \cdot (\boldsymbol{X_0})^T]$" indica la "Matrice di Covarianza di due Variabili Aleatorie Gaussiane Standard Indipendenti", in particolare delle due Variabili Aleatorie Gaussiane Standard Indipendenti "X_{01}" ed "X_{02}", e coincide proprio con la Matrice Identità dato che:

- $c_{11} = {\sigma^2}_{X_{01}} = 1$
- $c_{22} = {\sigma^2}_{X_{02}} = 1$

Ma come abbiamo visto qui, la Varianza di una Variabile Aleatoria Gaussiana Standard è pari ad 1.

- $c_{12} = cov[X_{01}, X_{02}] = 0$
- $c_{21} = cov[X_{01}, X_{02}] = 0$

Infatti "Indipendenza $\Rightarrow$ Incorrelazione" e le Variabili Aleatorie Incorrelate hanno Covarianza nulla.

Quindi:

$$\mathbb{E}[(\boldsymbol{X_0}) \cdot (\boldsymbol{X_0})^T] = \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Grafico PDF Gaussiana e Coefficiente di Correlazione

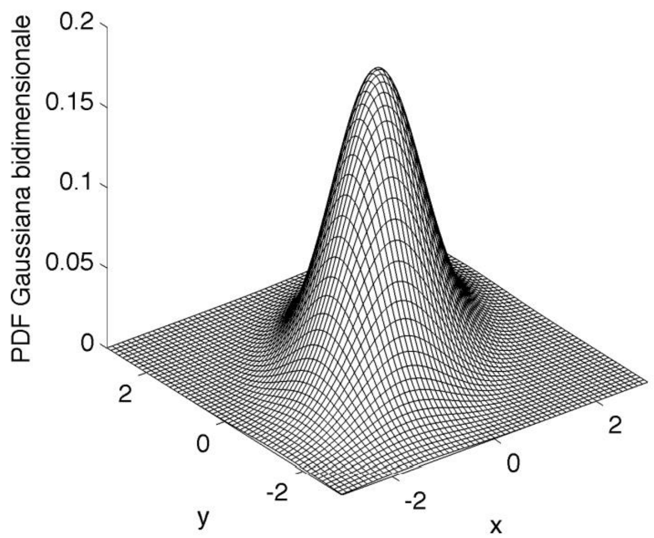
Esempio della variazione del grafico della *PDF Gaussiana* in funzione della variazione del Coefficiente di Correlazione:

Consideriamo due Variabili Aleatorie "X" ed "Y", entrambe con Deviazione Standard pari ad uno:

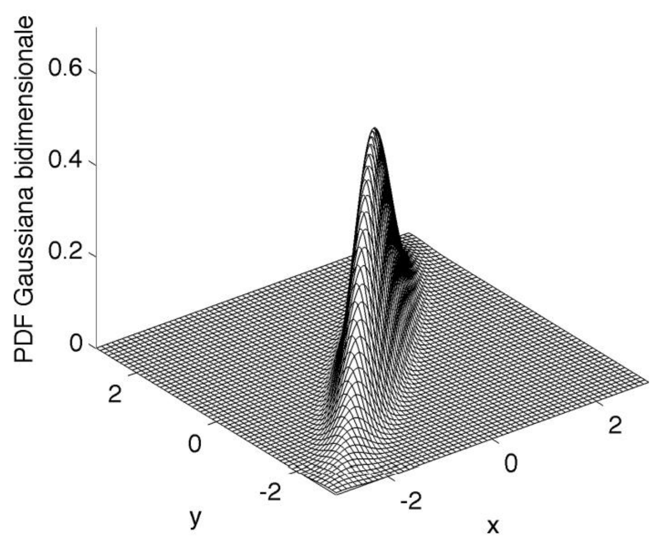
$$\text{“}\sigma_X = \sigma_Y = 1\text{”}$$

E consideriamo due valori differenti del Coefficiente di Determinazione:

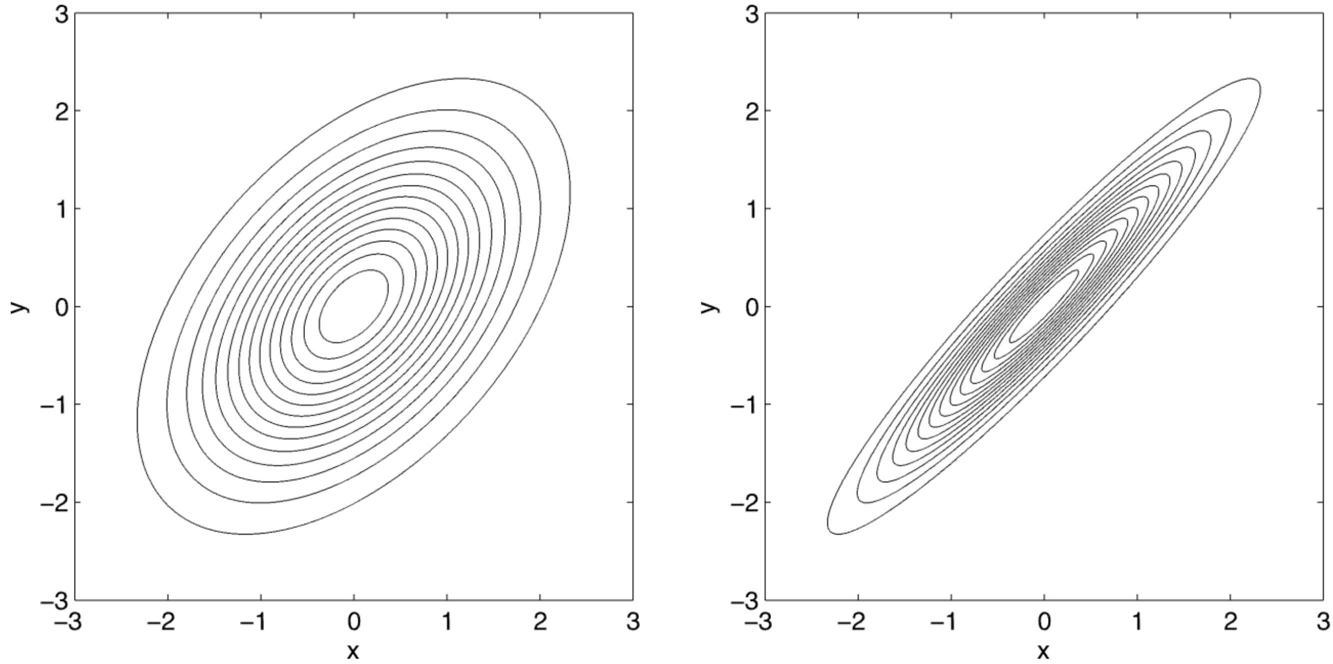
$\rho = 0.5$



$\rho = 0.95$



Le “Curve di Livello” delle *PDF Gaussiane* sono:



Ognuna di queste curve ha una forma ellittica e si ottiene prendendo la funzione della PDF Gaussiana:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot |\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right]}$$

E ponendo il termine della “Forma Quadratica” pari ad una determinata costante:

$$[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})] = Costante$$

A seconda della costante alla quale poniamo il termine, otterremo una determinata Curva di Livello.

Cioè a seconda della Costante andiamo a “tagliare” ad un determinato livello (cioè ad una determinata altezza) la *PDF Gaussiana Bidimensionale*, ottenendo così una determinata Curva di Livello. Se taglio più alla base l’ellissi è più larga, man mano che ci avviciniamo al picco della *PDF*, l’ellissi sarà sempre più piccola.

Stime basate su Sequenze di Osservazioni

È noto che quando si stimano grandezze non deterministiche, l'accuratezza di queste stime dipende dal numero di osservazioni che si hanno a disposizione e sulle quali è stata effettuata la stima.

Ma dovendo stimare una certa quantità attraverso parametri aleatori, quante osservazioni devo avere a disposizione affiche la stima abbia un determinata accuratezza?

Media Campionaria

Avendo "N" Variabili Aleatorie $(X_1, X_2, \dots, X_N)$, la Media Campionaria è definita come:

$$S_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i$$

La Media Campionaria "S_N", è a sua volta una Variabile Aleatoria: infatti a seconda delle osservazioni e del numero di osservazioni che ho a disposizione (cioè a seconda dei Valori che assumono le N Variabili Aleatorie ed a seconda del numero di Variabili Aleatorie), la Media Campionaria assumerà un differente valore.

Essendo S_N una Variabile Aleatoria, è possibile calcolare:

- Il Valor Medio della Media Campionaria:

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_i]$$

E supponendo che le singole Variabili Aleatorie $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ abbiano tutte lo stesso valore di Media Statistica:

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu$$

Allora la Media Campionaria sarà definita come:

$$\mathbb{E}[S_N] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mu = \frac{1}{\cancel{N}} \cdot \cancel{N} \cdot \mu \quad \rightarrow$$

$$\mathbb{E}[S_N] = \mu = \mathbb{E}[X_i]$$

Cioè la Media Campionaria "S_N" è uno "Stimatore Non Polarizzato" della Media Statistica delle X_i .

"Non Polarizzato" poiché la Media dello Stimatore $(\mathbb{E}[S_N])$ è pari alla grandezza da stimare $(\mathbb{E}[X_i])$.

- La Varianza della Media Campionaria:

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \mathbb{E}[(S_N - \mathbb{E}[S_N])^2] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i - \mathbb{E}\left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i\right]\right)^2\right] \rightarrow$$

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_i]\right)^2\right] \rightarrow$$

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_i]\right)^2\right] \rightarrow$$

A questo punto utilizziamo un'unica sommatoria:

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right)^2\right] \rightarrow$$

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right)^2\right] \rightarrow$$

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right)^2\right] \rightarrow$$

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right)^2\right] \rightarrow$$

Il Quadrato di una Sommatoria si sviluppa così:

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\left(X_j - \mathbb{E}[X_j]\right)\right] \rightarrow$$

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \frac{1}{N^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] \rightarrow$$

Ora, ricordando che la formula della Covarianza è:

$$c_{XY} = \mathbb{E}[(X^1 - \mu_X)\cdot(Y^1 - \mu_Y)] = cov[X, Y]$$

Allora:

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \frac{1}{N^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} cov[X_i, X_j]$$

N.B. → La Varianza della Media Campionaria nel caso di Variabili Aleatorie Indipendenti e quindi Incorrelate, è definita come:

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \frac{1}{N^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sigma^2{}_{X_i}$$

Infatti:

$$cov[X_i, X_j] = \begin{cases}\sigma^2{}_{X_i} & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j\end{cases}$$

Perché:

- $cov[X_i, X_i] = \mathbb{E}[(X_i - \mu_{X_i})\cdot(X_i - \mu_{X_i})] = \mathbb{E}\left[(X_i - \mu_{X_i})^2\right] = \sigma^2{}_{X_i}$
- $cov[X_i, X_j] = 0$ } Infatti "Indipendenza ⇒ Incorrelazione" e le Variabili Aleatorie Incorrelate hanno Covarianza nulla.

N.B. → La Varianza della Media Campionaria nel caso di Variabili Aleatorie sia Indipendenti (quindi Incorrelate) che con Varianza uguale, è definita come:

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \frac{\sigma^2{}_X}{N}$$

Infatti, se le Variabili Aleatorie hanno lo stesso valore di Covarianza "$\sigma^2{}_X$" :

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \frac{1}{N^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sigma^2{}_X = \frac{1}{N^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{N}\cdot\sigma^2{}_X = \frac{\sigma^2{}_X}{N}$$

Legge dei Grandi Numeri

Data una successione di Variabili Aleatorie i.i.d. (indipendenti ed identicamente distribuite, cioè con Media e Varianza uguale) "$X_1, X_2, \dots, X_N$", la Media Campionaria "S_N" di questa successione converge al valore della Media Statistica di queste Variabili Aleatorie.

N.B. → Questa "convergenza", va intesa in "Media Quadratica", cioè:

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}[(S_N - \mu)^2] = 0$$

Per "Errore Quadratico Medio" s'intende l'errore che si commette nell'approssimare la Media Statistica delle Variabili Aleatorie $X_1, X_2, \dots, X_N$, con la Media Campionaria, ed è inversamente proporzionale al numero "N" di osservazioni (e quindi di Variabili Aleatorie).

Dimostrazione → Ricordando che la Varianza di una Variabile Aleatoria fornisce informazioni sugli scostamenti quadratici medi della Variabile Aleatoria rispetto alla sua Media, cioè indica mediamente di quanto i valori della Variabile Aleatoria si discostano dal suo Valor Medio.

(Ad esempio, una Variabile Aleatoria con "Varianza" pari a 0, perde tutta la sua "aleatorietà", perché avrà sempre un valore pari alla sua media.)

Considerando una successione di Variabili Aleatorie *i.i.d.* "$X_1, X_2, \dots, X_N$", la Varianza della Media Campionaria delle "N" Variabili Aleatorie (come dimostrato poco sopra) sarà definita come:

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \frac{\sigma^2{}_X}{N}$$

Quindi la Varianza della Media Campionaria è pari alla Varianza della Variabili Aleatorie ma scalata per un fattore "${}^1/_N$", quindi all'aumentare di "N" (cioè del numero di Variabili Aleatorie), la Varianza della Media Campionaria assumerà un valore sempre più piccolo, cioè i suoi scostamenti rispetto alla Media Statistica delle Variabili Aleatorie "X_i" saranno sempre più piccoli.

Quindi, all'aumentare di "N", S_N rappresenterà una stima sempre più accurata della Media Statistica delle Variabili Aleatorie "X_i".

Es. → Utilità Media Campionaria.

Consideriamo un certo Evento "A" con una certa Probabilità "$P(A)$".

Allora creo una Variabile Aleatoria "Indicatore dell'Evento A":

$$I_A = \begin{cases} 1 & se\ l'evento\ \text{"A"}\ si\ verifica \\ 0 & se\ l'evento\ \text{"A"}\ non\ si\ verifica \end{cases}$$

Quindi I_A è una Variabile Aleatoria Bernoulliana "$X \sim B(1, P(A))$" (con Alfabeto $A_{I_A} = \{0, 1\}$) con Probabilità di Successo "$P(A)$".

Vediamo com'è possibile "stimare" $P(A)$ attraverso la Media Campionaria:

Come studiato in precedenza, la Media di una Variabile Aleatoria Bernoulliana è definita come:

$$\mathbb{E}[I_A] = p = P(A)$$

La sua Media Campionaria è definita come:

$$S_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} I_A(N)$$

E la Media della Media Campionaria:

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} I_A(N)\right] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[I_A(N)]$$

Ma dato che la Media di I_A, come visto poco sopra, è proprio pari a $P(A)$:

$$\mathbb{E}[S_N] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} P(A) = \frac{1}{\cancel{N}} \cdot \cancel{N} \cdot P(A) \quad \rightarrow$$

$$\mathbb{E}[S_N] = P(A)$$

E la Varianza di della Media Campionaria:

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \frac{\sigma^2{}_{I_A}}{N}$$

Infatti:

$$cov[I_A, I_A] = \mathbb{E}[(I_A - \mu_{I_A}) \cdot (I_A - \mu_{I_A})] = \mathbb{E}\left[(I_A - \mu_{I_A})^2\right] = \sigma^2{}_{I_A}$$

Questo vale a dire che se il numero di osservazioni (cioè il valore di "N") cresce, la $Var[S_N] \rightarrow 0$, e quindi vado a stimare con maggiore accuratezza la $\mathbb{E}[S_N]$, che corrisponde a $\mathbb{E}[I_A] = P(A)$.

Cioè attraverso la Media Campionaria io posso stimare con una certa accuratezza la Probabilità che si verifichi il mio evento "A".

In particolare, essendo la Varianza $Var[I_A] = \sigma^2{}_{I_A} = P(A) \cdot (1 - P(A))$ (come dimostrato qui), allora:

$$\sigma^2{}_{S_N} = Var[S_N] = \frac{P(A) \cdot (1 - P(A))}{N}$$

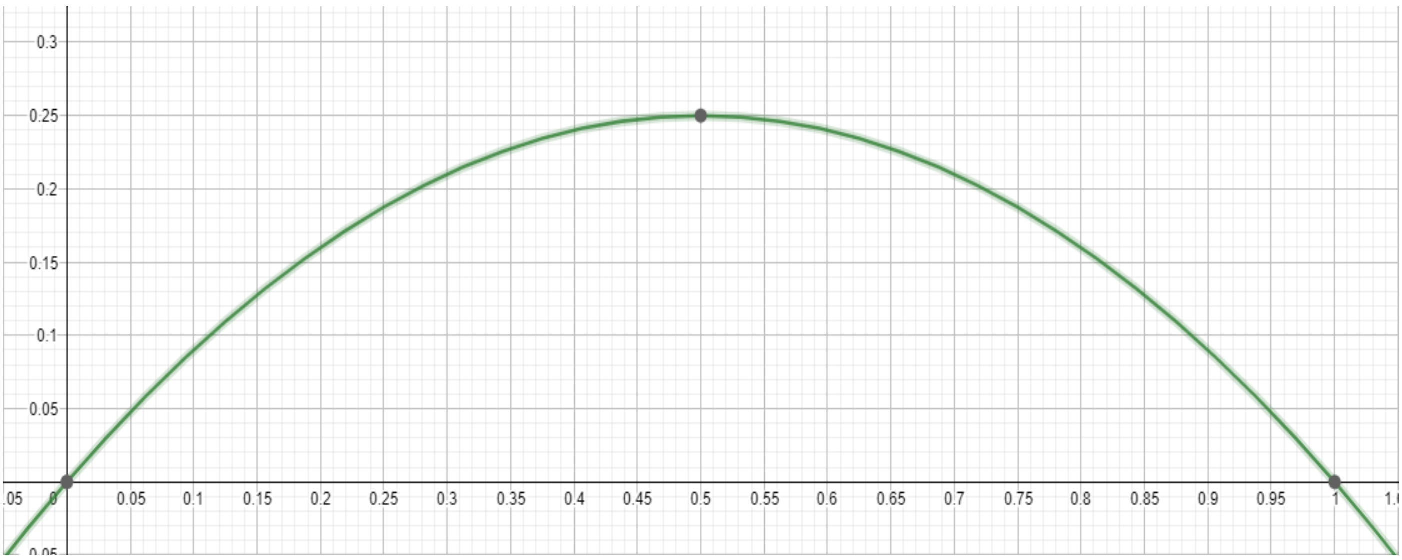
Quindi la Deviazione Standard di S_N sarà:

$$\sigma_{S_N} = \sqrt{Var[S_N]} = \sqrt{\frac{P(A) \cdot (1 - P(A))}{N}}$$

Sappiamo che "$P(A)$", essendo una Probabilità, è sempre $0 \leq P(A) \leq 1$, e che il termine "$P(A) \cdot (1 - P(A))$" può assumere diversi valori, ma notiamo che, ponendo $P(A) = x$ e studiando la funzione:

$$\text{"}x \cdot (1 - x)\text{"}$$

Questa ha un valore massimo "0.25", cioè "$^1/_4$", che non potrà mai essere superato:



Quindi, automaticamente, la Deviazione Standard di S_N sarà sempre minore o uguale a:

$$\sigma_{S_N} \leq \sqrt{\frac{1}{4 \cdot N}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{S_N} \leq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{N}}$$

E quindi ora possiamo effettivamente scegliere "N" in modo tale che la Deviazione Standard sia pari ad una certa quantità!

Ad esempio, se vogliamo sapere il numero di osservazioni "N" da effettuare al fine di stimare la Probabilità "$P(A)$" con una Deviazione Standard migliore dell'1%, allora:

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{N}} = {}^{1}\!/_{100} \quad \rightarrow \quad \sqrt{N} = \frac{1}{2 \cdot {}^{1}\!/_{100}} \quad \rightarrow \quad N = \frac{1}{4 \cdot {}^{1}\!/_{10000}} = \frac{10000}{4} \quad \rightarrow$$

$$N = 2500$$

Quindi dovremo effettuare 2500 prove, cioè avere 2500 osservazioni.

Quindi calcolerò la Media Campionaria con "$N = 2500$" e potrò stimare $P(A)$ con l'accuratezza che desidero (cioè la mia stima avrà una Deviazione Standard migliore dell' 1%).

Es. → Stima della Probabilità che si Verifichi un certo Evento attraverso la Media Campionaria.

Supponiamo di lanciare di un Dado. L'Evento di nostro interesse è:

$$A = \{esce\ un\ 2\ o\ un\ 3\}$$

Vogliamo stimare la Probabilità di questo Evento sfruttando la Media Campionaria.

Quindi innanzitutto creiamo una Variabile Aleatoria "Indicatore dell'Evento A":

$$I_A = \begin{cases} 1 & se\ l'evento\ \text{"A"}\ si\ verifica \\ 0 & se\ l'evento\ \text{"A"}\ non\ si\ verifica \end{cases}$$

Supponiamo di lanciare il dado per 10 volte e che questi siano i risultati:

$$1, 1, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 2, 1$$

Quindi, i valori di I_A saranno:

$$0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0$$

Ed ora posso calcolare la Media Campionaria:

$$S_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} I_A(N) = \frac{1}{10} \cdot 3 = {}^{3}\!/_{10}$$

Quindi:

$$P(A) \approx {}^{3}\!/_{10}$$

Ma con quanta accuratezza ho fatto questa stima? → Per saperlo calcoliamo la Deviazione Standard della stima:

$$\sigma_{S_N} \leq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{10}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{S_N} \leq 0.16$$

Vale a dire che ho effettuato una stima di $P(A)$ con una Deviazione Standard che è migliore del 16%.

Esercizio → Slide 4, Pag. 31, Ex.6.

Siano X_1 e X_2 due Variabili Aleatorie Gaussiane Indipendenti così definite:

- $X_1 \sim N(1,4)$;
- $X_2 \sim N(0.5, 0.36)$.

Date due Variabili Aleatorie:

- $Y_1 = X_1$;
- $Y_2 = X_1 + X_2$.

Si determinino Media, Varianza e Coefficiente di Correlazione di Y_1 ed Y_2.

Svolgimento:

Ricordiamo innanzitutto che una Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard è così definita:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Quindi capiamo che:

- X_1 ha:
  - $Media\ "\mu" = 1$;
  - $Varianza\ "\sigma^2" = 4$;
- X_2 ha:
  - $Media\ "\mu" = 0.5$;
  - $Varianza\ "\sigma^2" = 0.36$.

È bene considerare che:

N.B. → Il risultato della somma di due o più Variabili Aleatorie Gaussiane è anch'essa una Variabile Aleatoria Gaussiana.

Questo non vale per gli altri tipi di Variabili Aleatorie ed il fatto che la Variabile Aleatoria Gaussiana faccia eccezione, è dato proprio dal fatto che la Variabile Aleatoria Gaussiana stessa è ottenuta attraverso una trasformazione affine di una Variabile Aleatoria Gaussiana Standard:

$$X = \sigma \cdot X_0 + \mu$$

Cioè anche attraverso l'operazione di somma.

Iniziamo a calcolare la Media delle Variabili Aleatorie Y_1 ed Y_2:

- $Y_1 = X_1 \rightarrow \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[X_1] = 1$;
- $Y_2 = X_1 + X_2 \rightarrow \mathbb{E}[Y_2] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 1 + 0.5 = 1.5$;

Ora procediamo con il calcolo della Varianza delle Variabili Aleatorie Y_1 ed Y_2:

- $Y_1 = X_1 \rightarrow Var[Y_1] = Var[X_1] = 4$;
- $Y_2 = X_1 + X_2 \rightarrow Var[Y_2] = Var[X_1 + X_2]$ → Ricordando la formula della Varianza:

$$\sigma^2{}_X = Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

E considerando che, nel nostro caso possiamo scrivere $Var[Y_2] = Var\,[X_1 + X_2]$ come:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{2}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right)^2\right]$$

Dato che il Quadrato di una Sommatoria si sviluppa così:

$$Var[X_1 + X_2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\,(X_j - \mathbb{E}[X_j])\right]$$

$$Var[X_1 + X_2] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}\big[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])\big] \rightarrow$$

Ora, ricordando che la formula della Covarianza è:

$$c_{XY} = \mathbb{E}[(X^1 - \mu_X)\cdot(Y^1 - \mu_Y)] = cov[X, Y]$$

Allora:

$$Var\,[X_1 + X_2] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} cov[X_i, X_j]$$

Considerando inoltre che:

$$cov[X_i, X_j] = \begin{cases} \sigma^2{}_{X_i} & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$$

Perché:

- $cov[X_i, X_i] = \mathbb{E}\big[(X_i - \mu_{X_i})\cdot(X_i - \mu_{X_i})\big] = \mathbb{E}\left[(X_i - \mu_{X_i})^2\right] = \sigma^2{}_{X_i}$

- $cov[X_i, X_j] = 0$ Infatti, X_1 ed X_2 sono Indipendenti ed "Indipendenza $\Rightarrow$ Incorrelazione" e le Variabili Aleatorie Incorrelate hanno Covarianza nulla.

Quindi:

$$Var\,[X_1 + X_2] = \sum_{i=1}^{2}\sigma^2{}_{X_i} = \sigma^2{}_{X_1} + \sigma^2{}_{X_2} = 4 + 0.36 = 4.36$$

Infine, calcoliamo il Coefficiente di Correlazione, che per definizione è pari a:

$$\rho_{Y_1Y_2} = \frac{cov[Y_1, Y_2]}{\sigma_{Y_1}\cdot\sigma_{Y_2}}$$

Quindi:

$$cov[Y_1, Y_2] = \mathbb{E}\big[(Y_1 - \mu_{Y_1})\cdot(Y_2 - \mu_{Y_2})\big] = \mathbb{E}\big[(X_1 - \mu_{X_1})\cdot(X_1 + X_2 - (\mu_{X_1} + \mu_{X_2}))\big] \rightarrow$$

$$cov[Y_1, Y_2] = \mathbb{E}\big[(X_1 - \mu_{X_1})\cdot(X_1 + X_2 - \mu_{X_1} - \mu_{X_2})\big] \rightarrow$$

Che posso scrivere come:

$$cov[Y_1, Y_2] = \mathbb{E}\big[(X_1 - \mu_{X_1})\cdot((X_1 - \mu_{X_1}) + (X_2 - \mu_{X_2}))\big] \rightarrow$$

$$cov[Y_1, Y_2] = \mathbb{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})^2 + ((X_1 - \mu_{X_1})\cdot(X_2 - \mu_{X_2}))\right] \rightarrow$$

$$cov[Y_1, Y_2] = \mathbb{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})^2\right] + \mathbb{E}[(X_1 - \mu_{X_1})\cdot(X_2 - \mu_{X_2})] \rightarrow$$

$$cov[Y_1, Y_2] = \sigma^2{}_{X_1} + cov[X_1, X_2] = \sigma^2{}_{X_1} + 0 = \sigma^2{}_{X_1}$$

Sempre perché X_1 ed X_2 sono Indipendenti ed "Indipendenza $\Rightarrow$ Incorrelazione" e le Variabili Aleatorie Incorrelate hanno Covarianza nulla.

Quindi:

$$\rho_{Y_1 Y_2} = \frac{cov[Y_1, Y_2]}{\sigma_{Y_1} \cdot \sigma_{Y_2}} = \frac{\sigma^2{}_{X_1}}{\sqrt{\sigma^2{}_{X_1}} \cdot \sqrt{(\sigma^2{}_{X_1} + \sigma^2{}_{X_2})}} = \frac{4}{\sqrt{0.36} \cdot \sqrt{4.36}} = 3.19$$

Segnali

Un Segnale descrive le variazioni di una Grandezza Misurabile e può essere rappresentato attraverso una funzione matematica che varia a seconda di una o più variabili indipendenti (solitamente una variabile temporale, ma non sempre).

Classificazione dei Segnali

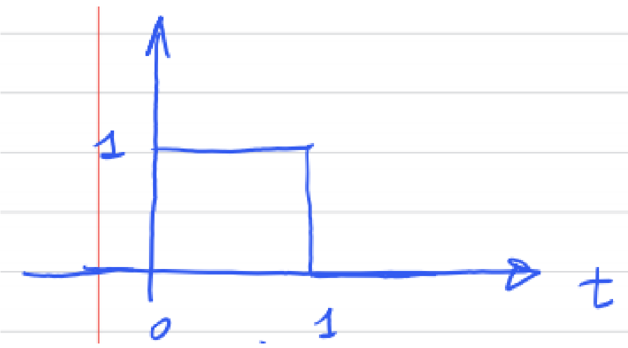
- Segnali a Tempo Continuo → Definiti su un insieme *continuo* (ad esempio un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ o tutto $\mathbb{R}$), in tal caso la variabile indipendente viene indicata con la lettera "t";
- Segnali a Tempo Discreto (o Sequenze) → Definiti in un insieme *discreto* (ad esempio un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ o tutto $\mathbb{N}$), in tal caso la variabile indipendente viene indicata con la lettera "n";
- Segnali Numerici → Segnali a Tempo Discreto che assumono un numero finito di valori.
- Segnali Reali → Segnali a Tempo Continuo o a Tempo Discreto i cui valori appartengono ad un Sottoinsieme dei Numeri Reali:
$$Segnale(t) \in \mathbb{R}$$
- Segnali Complessi → Segnali a Tempo Continuo o a Tempo Discreto i cui valori appartengono ad un Sottoinsieme dei Numeri Complessi:
$$Segnale(t) \in \mathbb{C}$$

Trasformazioni delle Variabili Dipendenti (Ampiezza)

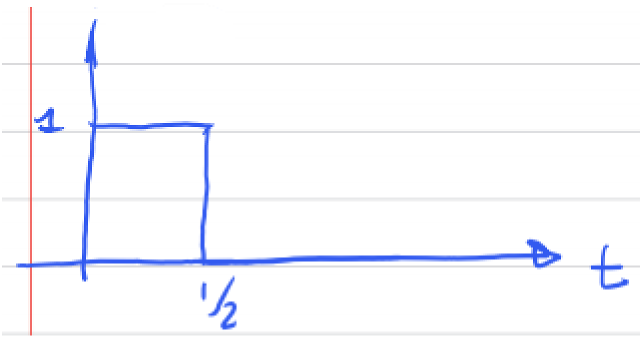
È possibile effettuare delle "Trasformazioni Elementari" delle Variabili Dipendenti di un Segnale. Queste Trasformazioni consistono nella somma, nella differenza e nel prodotto di due Segnali, ma anche nel prodotto di un Segnale per una costante.

Ad esempio, se supponiamo di avere due Segnali così definiti:

$x_1(t)$



$x_2(t)$



La Somma tra questi Segnali si costruisce sommando punto a punto le ordinate dei due segnali e quindi sarà così definita:

$$\leftarrow \qquad x_1(t) + x_2(t)$$

La Differenza tra questi Segnali si costruisce sottraendo punto a punto le ordinate dei due segnali e quindi sarà così definita:

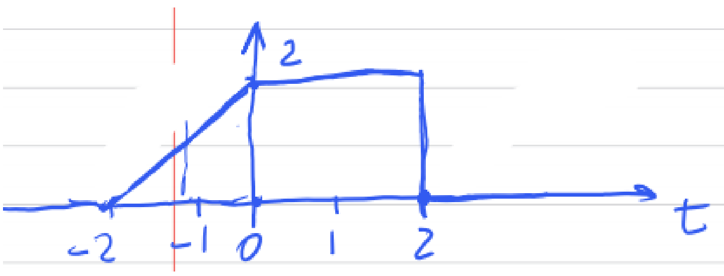
$$\leftarrow \qquad x_1(t) - x_2(t)$$

Trasformazioni delle Variabili Indipendenti (Tempo)

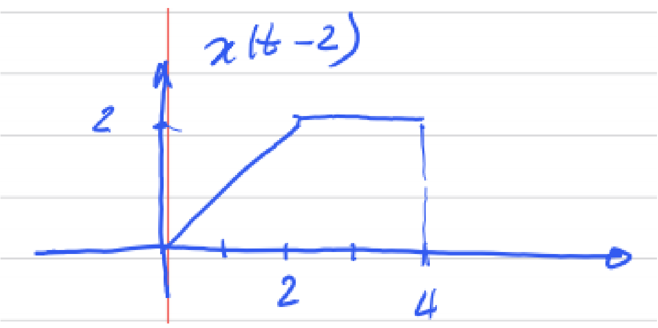
È possibile effettuare delle "Trasformazioni Elementari" delle Variabili Indipendenti di un Segnale. Queste Trasformazioni consistono nella traslazione temporale, nella riflessione temporale e nel cambiamento di scala.

Ad esempio, se supponiamo di avere il Segnale così definito:

$$x(t)$$



La **Traslazione Temporale** di questo Segnale è definita come $x(t-T)$. Se ad esempio scegliamo $T = 2$, Trasleremo Temporalmente il Segnale in questo modo:



$$\leftarrow \qquad x(t-2)$$

Il risultato è un Segnale Ritardato, infatti, il valore che $x(t)$ assume in "$t = 2$", ora $x(t-2)$ lo assume al tempo 4, perché:

$$t - 2 = 2 \rightarrow t = 2 + 2 = 4$$

Più in generale il valore che $x(t)$ assume ad un determinato tempo "t_1", ora $x(t-T)$ lo assume al tempo $t_1 + T$, perché :

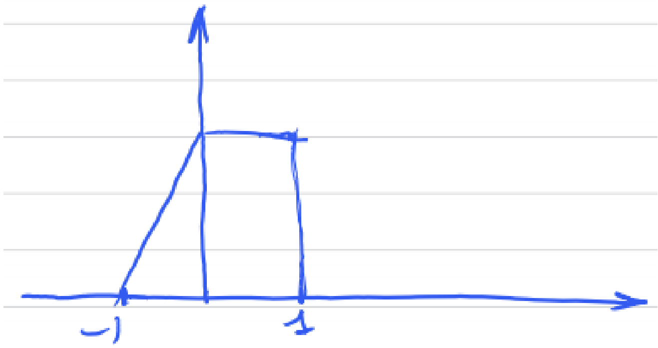
$$t - T = t_1 \;\rightarrow\; t = t_1 + T$$

Il Segnale Anticipato, invece, lo si ottiene come $x(t+2)$.

Quindi:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Anticipo} & x(t+2)\\ \text{Ritardo} & x(t-2)\end{array}\right\} \; x(t-T)$$

Il **Cambiamento di Scala** del segnale $x(t)$ lo si ottiene attraverso la trasformazione $x(t \cdot a)$ con "a" che è una costante positiva. Se ad esempio scegliamo $a = 2$, effettueremo un Cambiamento di Scala del Segnale in questo modo:



$\leftarrow \qquad x(2t)$

Il risultato è che è come se l'asse delle Ascisse del Segnale venisse "compresso", infatti il valore che $x(t)$ assume in "$t = 2$", ora $x(2t)$ lo assume al tempo 1, perché:

$$2t = 2 \;\rightarrow\; t = 1$$

Più in generale il valore che $x(t)$ assume ad un determinato tempo "t_1", ora $x(at)$ lo assume al tempo ${t_1}/{a}$, perché :

$$at = t_1 \;\rightarrow\; t = \frac{t_1}{a}$$

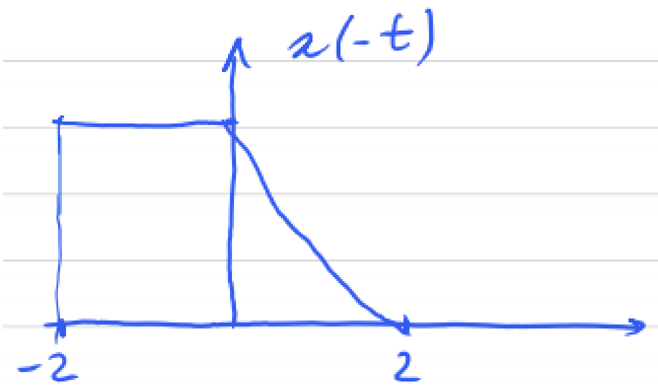
L'espansione dell'asse delle Ascisse, invece, la si ottiene per $0 < a \leq 1$.

Quindi:

$$a > 1 \;\rightarrow\; Compressione$$

$$0 < a \leq 1 \;\rightarrow\; Espansione$$

La **Riflessione** del segnale $x(t)$ la si ottiene attraverso la trasformazione $x(-t)$, cioè:



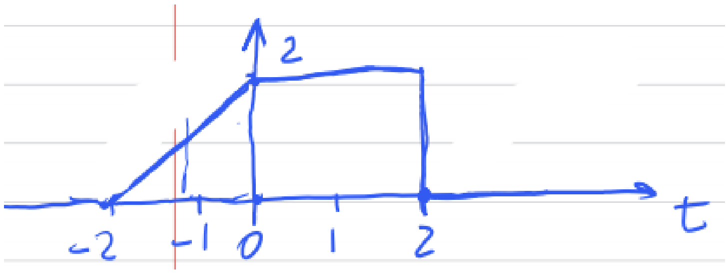
$\leftarrow \qquad x(-t)$

Trasformazioni Composte delle Variabili Indipendenti (Tempo)

È possibile effettuare delle "Trasformazioni Composte" delle Variabili Indipendenti di un Segnale, cioè effettuare più Trasformazioni Elementari Contemporaneamente.

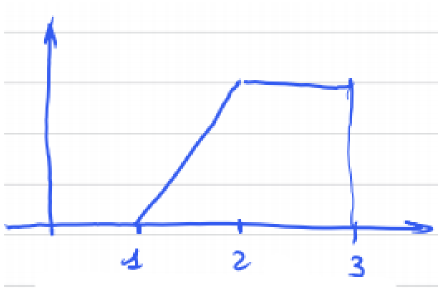
Ad esempio, partendo dal Segnale:

$$x(t)$$



Il Segnale $x(2t-4)$ rappresenta una Cambiamento di Scala con Compressione di un fattore pari a 2 ed una Traslazione Temporale con Ritardo di due Unità Temporali:

$$x(2t-4)$$



Dimostrazione:

Abbiamo due possibilità:

1. Calcoliamo sia Compressione che Traslazione assieme:

   Innanzitutto, scegliamo un punto, che per esempio è il "2", allora:

   $$2t-4=2 \rightarrow 2t = 2+4 \rightarrow t=3$$

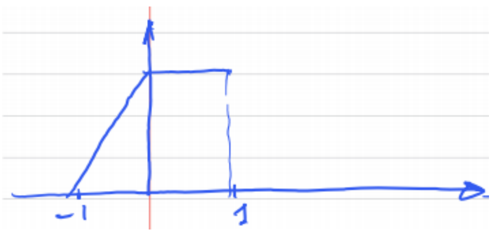
   Quindi $x(2t-4)$, nel punto 3, vale quanto $x(t)$ nel punto 2.

   Faccio lo stesso per gli altri punti e capisco come si comporta il Segnale $x(2t-4)$;

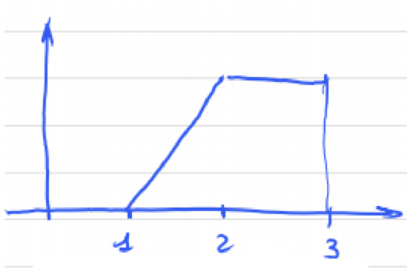
2. Scriviamo $x(2t-4)$ come:

   $$x(2t-4) = x(2(t-2))$$

   Quindi capiamo che la Compressione è pari a "2":



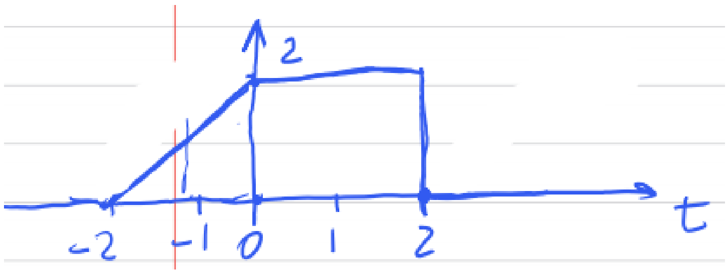
E la Traslazione Temporale è pari a "2" (perché $(t-2)$) ed è in Ritardo:



Un altro esempio:

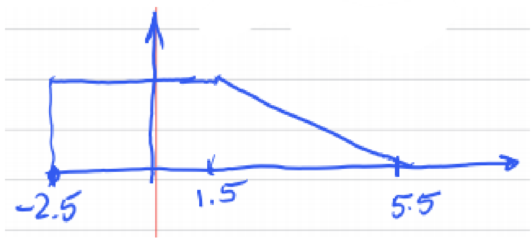
Partendo dal Segnale:

$$x(t)$$



Il Segnale $x\left(\frac{(3-2t)}{4}\right)$ rappresenta un Cambiamento di Scala con Espansione di un fattore pari a 2 ed una Traslazione Temporale con Ritardo di $^3/_2$, cioè 1.5 Unità Temporali:

$$x\left(\frac{(3-2t)}{4}\right)$$



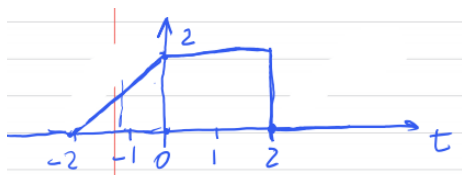
Dimostrazione:

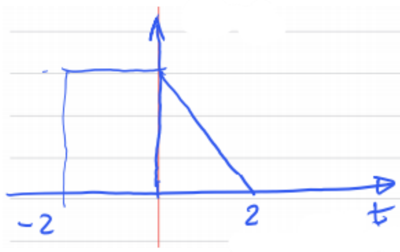
Scriviamo il Segnale come:

$$x\left(\frac{(3-2t)}{4}\right) = x\left(\frac{-2\left(t-\frac{3}{2}\right)}{4}\right) = x\left(-\frac{\left(t-\frac{3}{2}\right)}{2}\right)$$

Notiamo che, a partire dall'operazione più esterna a quella più interna, abbiamo:

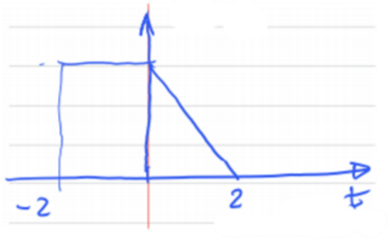
Un'operazione di Riflessione, per cui:

$x(t) =$ 

$x(-t) =$ 

Poi abbiamo un'operazione di Cambiamento di Scala di un fattore pari ad $\frac{1}{2}$:

$x(-t) =$

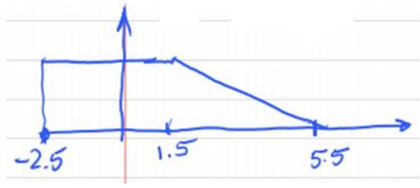


$x\left(-\frac{t}{2}\right) =$

Ed infine una Traslazione Temporale di $3/2$:

$x\left(-\frac{t}{2}\right) =$

$x\left(-\frac{\left(t-\frac{3}{2}\right)}{2}\right) =$



Verifichiamo se abbiamo fatto bene i calcoli:

Prendiamo per esempio il punto "2" delle Ascisse e vediamo: "Ciò che avveniva nel punto 2 delle ascisse, ora dove avviene?" →

$$\frac{(3-2t)}{4} = 2 \rightarrow 3-2t = 8 \rightarrow -2t = 5 \rightarrow t = -2.5$$

Quindi ciò che prima avveniva in 2, ora avviene in 2.5 → Si trova.

Segnali Complessi

Un Segnale Complesso, come già detto nella Classificazione dei Segnali, è un Segnale a Tempo Continuo o a Tempo Discreto i cui valori appartengono ad un Sottoinsieme dei Numeri Complessi:

$$Segnale(t) \in \mathbb{C}$$

Sappiamo che un Numero Complesso è costituito da una parte Reale "$\mathbb{R}$" ed una Immaginaria "$\mathbb{I}$", quindi, considerando un Segnale Complesso "$x(t)$" avremo:

$$x(t) \in \mathbb{C} \rightarrow x(t) = x_{\mathbb{R}}(t) + j \cdot x_{\mathbb{I}}(t)$$

Rappresentazioni di Segnali Complessi

Ricordiamo che i Numeri Complessi, così come le Funzioni Complesse, godono di due differenti rappresentazioni, cioè considerando il Segnale Complesso:

$$x(t) \in \mathbb{C}$$

Questo può essere rappresentato attraverso:

- Rappresentazione per Parte Reale "$x_{\mathbb{R}}(t)$" ed Immaginaria "$x_{\mathbb{I}}(t)$":

$$x(t) = x_{\mathbb{R}}(t) + j \cdot x_{\mathbb{I}}(t)$$

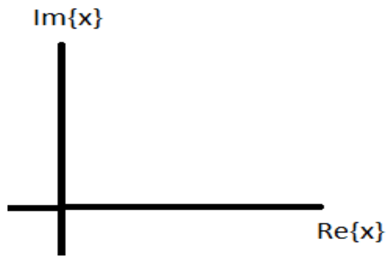
- Rappresentazione Polare (cioè tramite Modulo “$r(t)$” e Fase “$\varphi(t)$”):

$$x(t) = r(t) \cdot e^{j \cdot \varphi(t)}$$

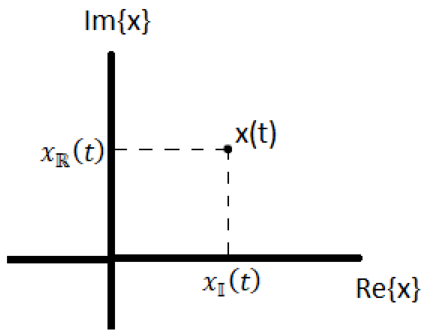
  Con:

  - Modulo $\qquad r(t) = \sqrt{x^2{}_{\mathbb{R}}(t) + x^2{}_{\mathbb{I}}(t)}\,;$
  - Fase $\qquad \varphi(t) = arctg\left(\frac{x_{\mathbb{I}}(t)}{x_{\mathbb{R}}(t)}\right)$

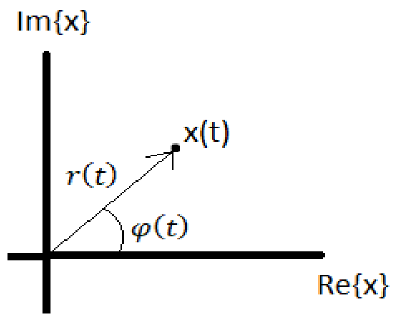
In entrambi i casi posso rappresentare i Numeri Complessi e Funzioni Complesse sul Piano Complesso, ossia il piano caratterizzato dall’Asse delle Ascisse che rappresenta l’Asse Reale e l’Asse delle Ordinate che rappresenta l’Asse Immaginario:



Rappresentazione per Parte Reale ed Immaginaria:



Rappresentazione Polare:



Operazioni tra Segnali Complessi

Consideriamo due Segnali Complessi:

$$x(t) \ ed \ y(t) \in \mathbb{C}$$

Allora:

- La loro Somma sarà:

$$x(t) + y(t) = [x_{\mathbb{R}}(t) + y_{\mathbb{R}}(t)] + j \cdot [x_{\mathbb{I}}(t) + y_{\mathbb{I}}(t)]$$

- Il loro Prodotto sarà:

  - Rappresentazione per Parte Reale “$x_{\mathbb{R}}(t)$” ed Immaginaria “$x_{\mathbb{I}}(t)$” :

$$x(t) \cdot y(t) = [x_{\mathbb{R}}(t) + j \cdot x_{\mathbb{I}}(t)] \cdot [y_{\mathbb{R}}(t) + j \cdot y_{\mathbb{I}}(t)] \rightarrow$$

$$x(t) \cdot y(t) = x_{\mathbb{R}}(t) \cdot y_{\mathbb{R}}(t) + j^2 \cdot x_{\mathbb{I}}(t) \cdot y_{\mathbb{I}}(t) + j \cdot x_{\mathbb{I}}(t) \cdot y_{\mathbb{R}}(t) + j \cdot x_{\mathbb{R}}(t) \cdot y_{\mathbb{I}}(t) \rightarrow$$

$$x(t) \cdot y(t) = \underbrace{x_{\mathbb{R}}(t) \cdot y_{\mathbb{R}}(t) - x_{\mathbb{I}}(t) \cdot y_{\mathbb{I}}(t)} + j \cdot \underbrace{[x_{\mathbb{I}}(t) \cdot y_{\mathbb{R}}(t) + x_{\mathbb{R}}(t) \cdot y_{\mathbb{I}}(t)]} \rightarrow$$

Cioè il Segnale risultante ha una $\boxed{\text{Parte Reale}}$ ed una $\boxed{\text{Parte Immaginaria}}$.

La Parte Reale del Segnale risultante è pari al Prodotto delle Parti Reali meno il Prodotto delle Parti Immaginarie, mentre la Parte Immaginaria è data dai Prodotti Misti.

- Rappresentazione Polare:

$$x(t) \cdot y(t) = r_x(t) \cdot e^{j \cdot \varphi_x(t)} \cdot r_y(t) \cdot e^{j \cdot \varphi_y(t)} \rightarrow$$

$$x(t) \cdot y(t) = r_x(t) \cdot r_y(t) \cdot e^{j \cdot \left(\varphi_x(t) + \varphi_y(t)\right)}$$

Cioè il Segnale Risultate ha come Modulo il Prodotto dei Moduli e come Fase il Prodotto delle Fasi.

- Il Coniugato di $x(t)$ sarà:

$$x(t)^* = x_{\mathbb{R}}(t) - j \cdot x_{\mathbb{I}}(t)$$

Es. → Rappresentazione a Parte Reale ed Immaginaria:

Consideriamo il Segnale Complesso: $x(t) = \frac{1}{3+2j \cdot t} \quad con \quad t \in \mathbb{R}$

Cerchiamo di rappresentarlo come la somma tra Parte Reale "$x_{\mathbb{R}}(t)$" e Parte Immaginaria "$x_{\mathbb{I}}(t)$" e per farlo moltiplichiamo numeratore e denominatore per il Coniugato di $3 + 2j \cdot t$:

$$x(t) = \frac{3 - 2j \cdot t}{(3 + 2j \cdot t) \cdot (3 - 2j \cdot t)} = \frac{3 - 2j \cdot t}{|3 + 2j \cdot t|^2} = \frac{3 - 2j \cdot t}{\left(\sqrt{3^2 + (2 \cdot t)^2}\right)^2} = \frac{3 - 2j \cdot t}{9 + 4 \cdot t^2}$$

Infatti, sappiamo che il Prodotto tra un Numero Complesso ed il suo Coniugato è pari al Modulo del Numero Complesso elevato al quadrato, perché:

$$x(t) \cdot x^*(t) = \left(x_{\mathbb{R}}(t) + j \cdot x_{\mathbb{I}}(t)\right) \cdot \left(x_{\mathbb{R}}(t) - j \cdot x_{\mathbb{I}}(t)\right) = x^2{}_{\mathbb{R}}(t) + x^2{}_{\mathbb{I}}(t)$$

Ora "separiamo" Parte Reale ed Immaginaria:

$$x(t) = \frac{3}{9 + 4 \cdot t^2} - j \cdot \frac{2 \cdot t}{9 + 4 \cdot t^2}$$

Es. → Rappresentazione Polare:

Consideriamo lo stesso Segnale Complesso precedente: $x(t) = \frac{1}{3+2j \cdot t} \quad con \quad t \in \mathbb{R}$

Cerchiamo di rappresentarlo tramite Rappresentazione Polare:

$$x(t) = r(t) \cdot e^{j \cdot \varphi(t)}$$

Quindi calcoliamo il Modulo:

$$r(t) = |x(t)| = \left|\frac{1}{3 + 2j \cdot t}\right| = \frac{|1|}{|3 + 2j \cdot t|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (2 \cdot t)^2}} = \frac{1}{9 + 4 \cdot t^2}$$

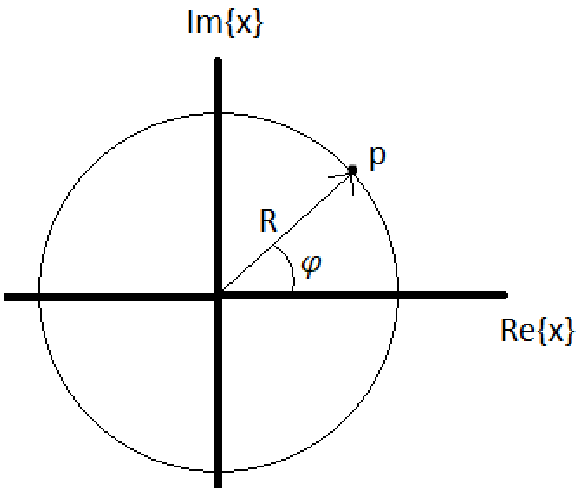
E la Fase:

$$\varphi(t) = \varphi(1) - \varphi(3 + 2j \cdot t) = 0 - arctg\left(\frac{2 \cdot t}{3}\right) = -arctg\left(\frac{2 \cdot t}{3}\right)$$

Quindi la Rappresentazione Polare del Segnale è:

$$x(t) = \frac{1}{9 + 4 \cdot t^2} \cdot e^{-j \cdot arctg\left(\frac{2 \cdot t}{3}\right)}$$

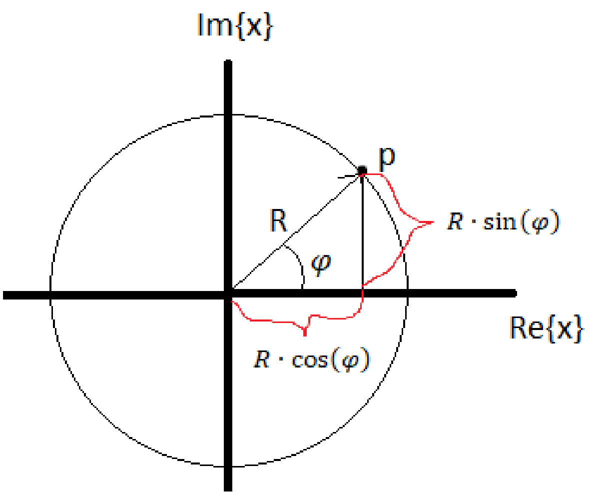
Es. → Rappresentazione di una Funzione Circolare "$x(t)$" di Raggio "R" sul Piano Complesso:



Le coordinate di un generico punto "p" possono essere espresse come:

$$p = (R \cdot \cos(\varphi)\, ;\ R \cdot \sin(\varphi))$$

Infatti:



Volendo Rappresentare questa Funzione come una Funzione Complessa "Parte Reale più Parte Immaginaria", possiamo dire che:

$$x(t) = R(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$$

Infatti, supponendo che $\varphi(t) = t$:

$$x(t) = R(\cos(t) + j \cdot \sin(t))$$

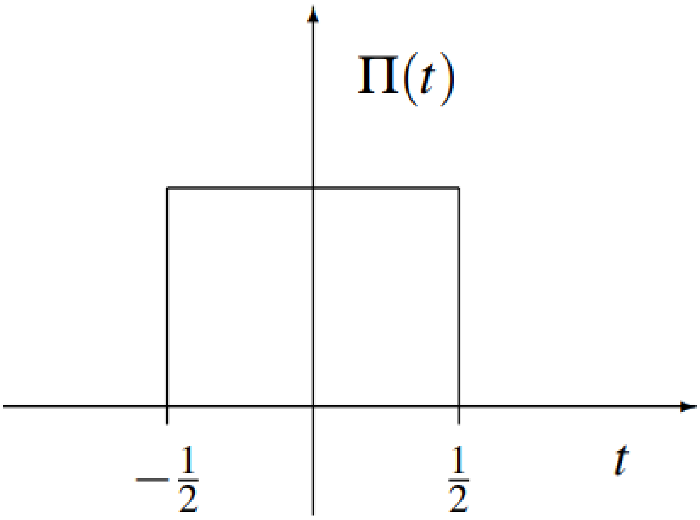
Questo è possibile poiché la Funzione è una circonferenza, quindi può essere proprio uguale alla sua Fase.

Volendo rappresentare tramite Rappresentazione Polare la Funzione avremo:

- Modulo → R ;
- Fase → $arctg\left(\frac{\cancel{R}\cdot\sin(t)}{\cancel{R}\cdot\cos(t)}\right) = arctg(\tan(t)) = t$.

Impulso Rettangolare Continuo

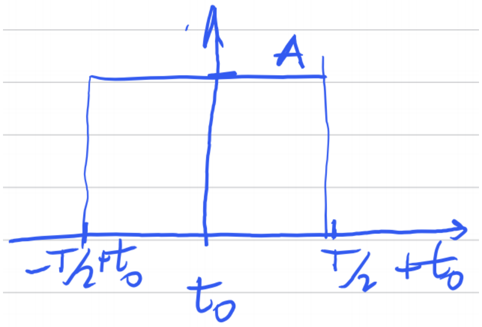
L'Impulso Rettangolare Continuo di Ampiezza e Durata Unitaria è un Segnale così definito:



$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -0.5 < t < 0.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Impulso Rettangolare Continuo Trasformato

Un Impulso Rettangolare Continuo che ha subito una Trasformazione dell'Ampiezza, una Traslazione Temporale ed un Cambiamento di Scala è definito come:

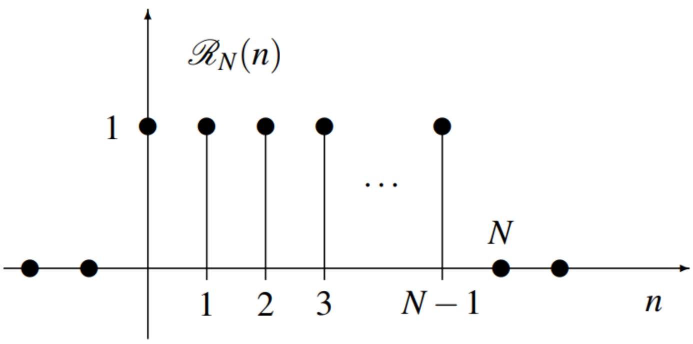


$$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

Più precisamente questo indica l'Impulso Rettangolare di Ampiezza "A", Centrato in "t_0" e di Durata "T".

Impulso Rettangolare Discreto

L'Impulso Rettangolare Discreto di Ampiezza e Durata Unitaria è un Segnale così definito:



$$\mathscr{R}_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Impulso Rettangolare Discreto Trasformato

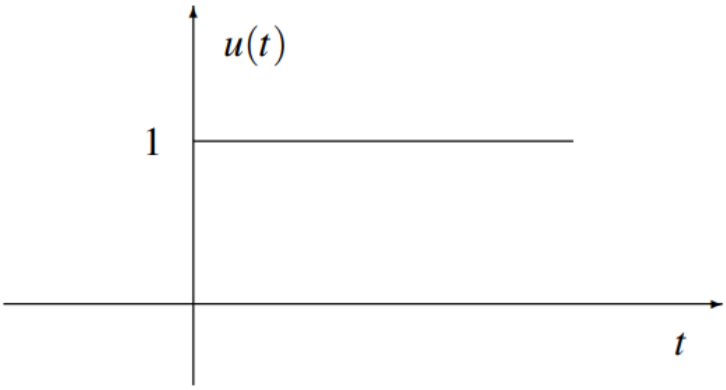
Un Impulso Rettangolare Discreto che ha subito una Traslazione Temporale è definito come:

$$\mathcal{R}_N(n - Numero)$$

Più precisamente questo indica l'Impulso Rettangolare Centrato in "$Numero$".

Gradino Unitario Continuo

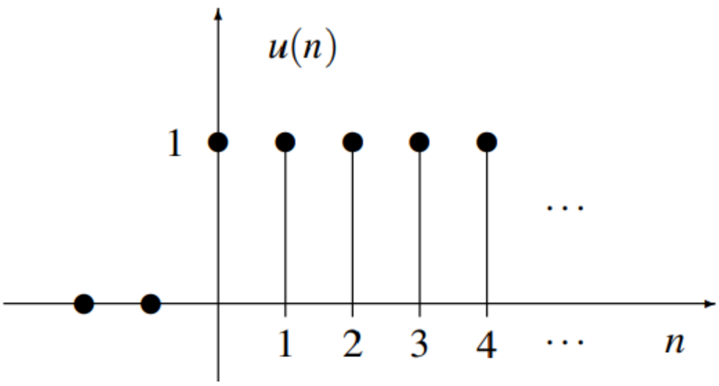
Il Gradino Unitario Continuo è un Segnale così definito:



$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

Gradino Unitario Discreto

Il Gradino Unitario Discreto è un Segnale così definito:



$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$$

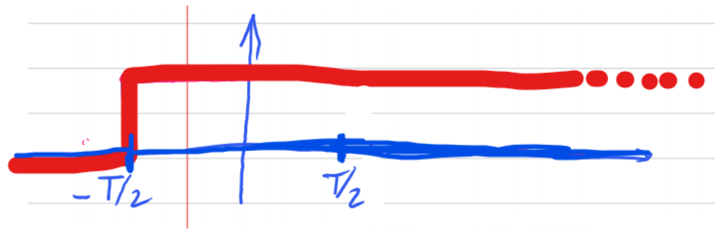
Da Gradino ad Impulso Rettangole

Combinando opportunamente due Gradini di uguale Ampiezza, si ottengono impulsi rettangolari.

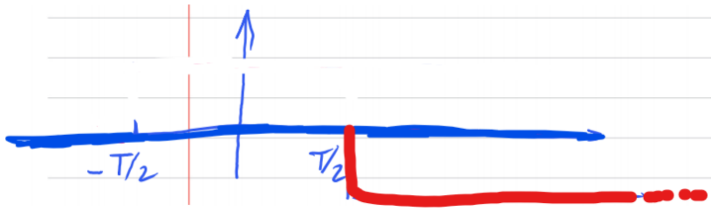
Ad esempio, l'Impulso Rettangolare "$\prod\left(\frac{t}{T}\right)$" di durata T si può ottenere come:

$$\prod\left(\frac{t}{T}\right) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Perché:

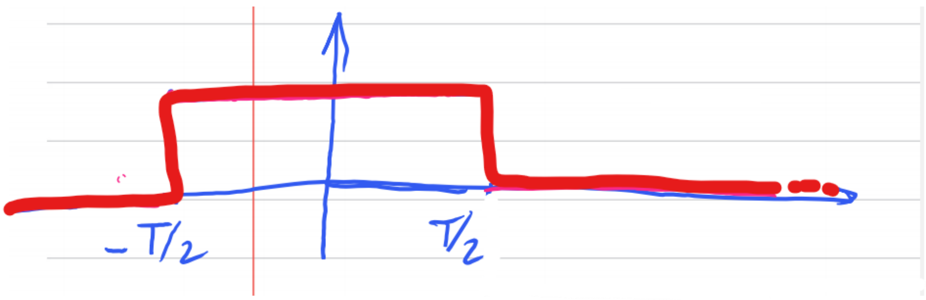


$\rightarrow u\left(t+\frac{T}{2}\right)$



$\rightarrow u\left(t-\frac{T}{2}\right)$

E sottraendo il Primo al Secondo punto per punto ottengo:



Fasore Continuo

Il Fasore Continuo "$x(t)$" è definito come:

- In Termini di Pulsazione:

$$A \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$$

- In Termini di Frequenza:

$$A \cdot e^{j(2\pi f t+\varphi)}$$

Con:

- A → Ampiezza;
- $\omega = 2\pi f$ → Pulsazione;
- $f = \frac{\omega}{2\pi}$ → Frequenza;
- φ → Fase Iniziale;
- $\varphi(t)$ → Fase Complessiva:

$$\varphi(t) = 2\pi f t + \varphi \ ;$$

- $f(t)$ = Frequenza Istantanea:

  La Frequenza Istantanea può essere costante, in tal caso:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}(2\pi f t + \varphi) = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} f = f \ ;$$

- T → Periodo:

  Il Fasore può essere un Segnale Periodico se:

$$\exists\, T \mid \forall\, t = t + KT \quad con \quad K \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad A \cdot e^{\,j(2\pi f t+\varphi)} = A \cdot e^{\,j(2\pi f (t+KT)+\varphi)}$$

  Ma l'uguaglianza $A \cdot e^{\,j(2\pi f t+\varphi)} = A \cdot e^{\,j(2\pi f (t+KT)+\varphi)}$ è verificata se:

$$e^{\,j(2\pi f t+\varphi)} = e^{\,j(2\pi f (t+KT)+\varphi)} \rightarrow$$

$$e^{\,j(2\pi f t+\varphi)} = e^{\,j(2\pi f t+\varphi)} \cdot e^{\,j(2\pi f KT+\varphi)} \rightarrow$$

$$e^{\,j(2\pi f t+\varphi)} = e^{\,j(2\pi f t+\varphi)} \cdot \underbrace{e^{\,j2\pi f KT}}_{1} \rightarrow$$

  Cioè se $e^{\,j2\pi f KT} = 1$ e questo è vero solo se $fKT \in \mathbb{Z}$, cioè se $fKT = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \dots$

  Quindi se $fKT = N \; con \; N \in \mathbb{Z}$, cioè se $f = \dfrac{N}{KT}$.

  Il "Periodo Fondamentale $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$" si ha quando $N = K = 1$.

Il Fasore Continuo è una Funzione Complessa che possiamo esprimere attraverso:

- Rappresentazione Polare:

$$x(t) = r(t) \cdot e^{j \cdot \varphi(t)}$$

  Con:

$$r(t) = A \quad ed \quad \varphi(t) = \omega t + \varphi$$

- Rappresentazione attraverso Parte Reale ed Immaginaria:

$$x(t) = r(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot r(t) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

  Con:

$$r(t) = A$$

Segnale Sinusoidale Continuo

Il Segnale Sinusoidale Continuo "$x(t)$" è definito come:

$$x(t) = A \cdot \cos\,(\omega t + \varphi)$$

E può essere rappresentato anche come la Parte Reale di un Fasore:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{Re}\{A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

Infatti, per le formule di Eulero:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} A \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{1}{2} A \cdot e^{-j(\omega t+\varphi)} = \mathcal{Re}\{A \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}\}$$

Infatti, come abbiamo visto poco più su, la Parte Reale di un Fasore è:

$$x(t) = r(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad con \quad r(t) = A$$

Fasore Discreto

Il Fasore Discreto "$x(n)$" è definito come:

- In Termini di Pulsazione Discreta:

$$A \cdot e^{j(\theta n+\varphi)}$$

- In Termini di Frequenza Discreta:

$$A \cdot e^{j(2\pi v n+\varphi)}$$

Con:

- A → Ampiezza;
- $\theta = 2\pi v$ → Pulsazione Discreta;
- $v = \frac{\theta}{2\pi}$ → Frequenza Discreta;

Il Fasore Discreto è una Funzione Complessa che è caratterizzata da una Parte Reale ed una Parte Immaginaria:

$$x(n) = A \cdot \cos(\theta n + \varphi) + j \cdot A \cdot \sin(\theta n + \varphi)$$

Differenze tra Fasori Continui e Fasori Discreti

1. Oscillazione e Frequenza:

   Nei Fasori Continui il Segnale oscilla sempre più velocemente al crescere della Frequenza, ma nei Fasori Discreti questo non avviene.

Es. → Fasore Continuo con Frequenza di $10Hz$ $\neq$ Fasore Continuo con Frequenza di $20Hz$;

Mentre: Fasore Discreto con Frequenza di $10Hz$ $=$ Fasore Discreto con Frequenza di $20Hz$;

Dimostrazione:

Se ad esempio prendiamo in considerazione il generico Fasore Discreto:

$$A \cdot e^{j(2\pi v n)}$$

E consideriamo una Frequenza Discreta maggiore di "v", ad esempio "$v+1$", allora avremo:

$$A \cdot e^{j(2\pi(v+1)n)} = A \cdot e^{j(2\pi v n + 2\pi n)} = A \cdot e^{j(2\pi v n)} \cdot e^{j(2\pi n)}$$

Per la seguente formula di Eulero: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, sappiamo che:

$$e^{j(2\pi n)} = \cos(2\pi n) + j \cdot \sin(2\pi n)$$

Il coseno di 2π o di un suo multiplo vale 1, mentre il seno di 2π o un suo multiplo vale 0.

Quindi, al variare di "n", la quantità "$e^{j(2\pi n)}$" è sempre pari ad 1, per cui:

$$A \cdot e^{j(2\pi(v+1)n)} = A \cdot e^{j(2\pi v n)} \cdot e^{j(2\pi n)} = A \cdot e^{j(2\pi v n)}$$

Quindi all'aumentare della Frequenza Discreta, un Fasore Discreto non oscilla più velocemente, ma oscilla sempre allo stesso modo.

N.B. → Da questo deriva che ha senso analizzare un Fasore Discreto solo in un intervallo unitario di Frequenza Discreta, infatti abbiamo visto che incrementando di un qualsiasi numero intero la Frequenza Discreta di un Fasore, questo si comporterà esattamente allo stesso modo, per cui se analizzo il comportamento di un Fasore Discreto in un intervallo unitario del tipo:

$$-\frac{1}{2} \leq v < \frac{1}{2} \ \ oppure \ \ 0 \leq v < 1$$

Saprò automaticamente com'è che si comporta il Fasore Discreto in qualsiasi altro intervallo unitario.

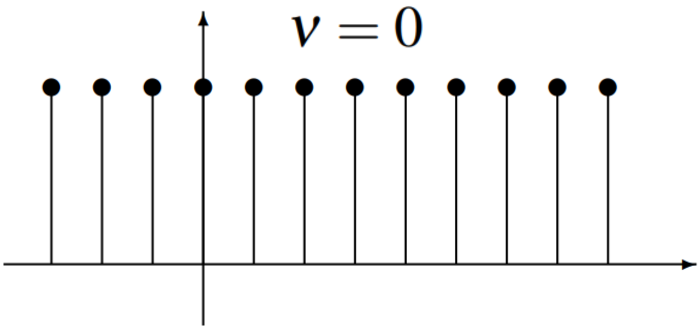
In termini di Pulsazione Discreta andrò a considerare un intervallo di ampiezza pari a 2π, generalmente vengono utilizzati gli intervalli:

$$-\pi \leq \theta < \pi \ \ oppure \ \ 0 \leq \theta < 2\pi$$

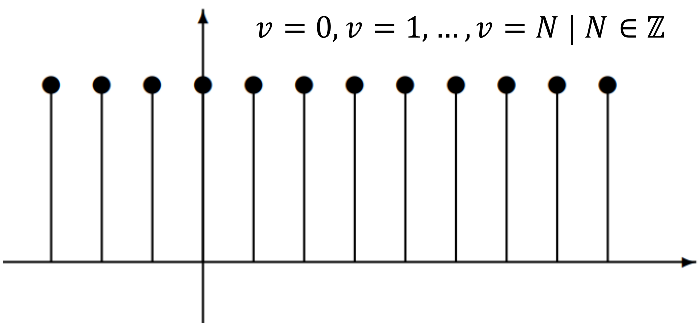
Es. → Consideriamo un Fasore Discreto con $v = 0$:

$$A \cdot e^{j(2\pi 0 n)} = A \cdot e^{0} = A$$

Per cui, questo fasore è costante, cioè sarà così:



Da ciò che abbiamo detto prima però, sappiamo che anche incrementando v di un qualsiasi numero intero, il Fasore Discreto sarà sempre identico, per cui:



Es. → Consideriamo un Fasore Discreto con $v = \frac{1}{8}$:

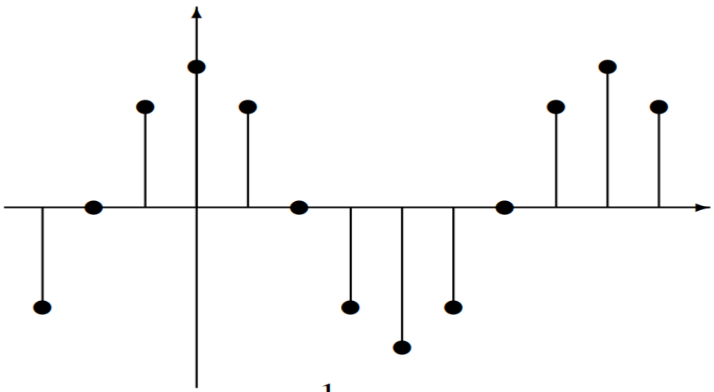
$$e^{j\left(2\pi \frac{1}{8} n\right)}$$

Per sapere come si comporta il Segnale al Variare di "n", calcoliamone la Parte Reale punto per punto in un certo intervallo e poi capiamo come si comporta anche negli altri:

- $n = 0 \ \rightarrow cos(0) = 1$;
- $n = 1 \ \rightarrow cos\left(2\pi \frac{1}{8}\right) = 0.7$;

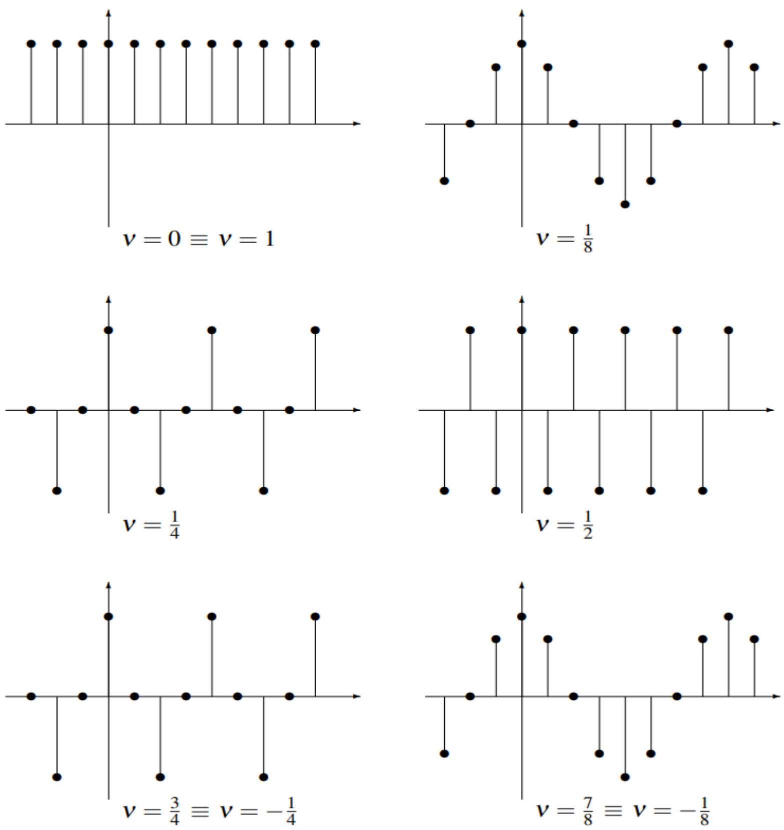
- $n = 2 \rightarrow cos\left(2\pi\,\frac{2}{8}\right) = 0\,;$
- $n = 3 \rightarrow cos\left(2\pi\,\frac{3}{8}\right) = -0.7\,;$
- $n = 4 \rightarrow cos\left(2\pi\,\frac{4}{8}\right) = -1\,;$
- $n = 5 \rightarrow cos\left(2\pi\,\frac{5}{8}\right) = -0.7\,;$
- $n = 6 \rightarrow cos\left(2\pi\,\frac{6}{8}\right) = 0\,;$
- $n = 7 \rightarrow cos\left(2\pi\,\frac{7}{8}\right) = 0.7\,;$
- $n = 8 \rightarrow cos\left(2\pi\,\frac{8}{8}\right) = 1\,;$
- *E così via…*

Quindi:



$\nu = \frac{1}{8}$

N.B. → In generale, come si può vedere da quest'immagine:



I Fasori Discreti oscillano sempre più velocemente al crescere di v da 0 ad $\frac{1}{2}$ e sempre meno rapidamente al crescere di v da $\frac{1}{2}$ ad 1.

Inoltre, non ha senso considerare ulteriori valori di "v", cioè della Frequenza Discreta, perché tutto quello che succede in questo intervallo di v (cioè da 0 ad 1) poi si ripete negli altri.

2. Periodicità:

   Nei Fasori Continui se consideriamo il Valore del Segnale ad un tempo “t_0” e poi ad un altro tempo “$t_0 + k \cdot T$” con “T” che indica il Periodo del Segnale e $k \in \mathbb{Z}$, i due Valori saranno identici.

   Nei Fasori Discreti, invece, la Periodicità del Segnale si ha se si individua un Numero “N” tale che:

$$e^{j(2\pi v(n+N))} = e^{j(2\pi vn)} \rightarrow$$

$$\cancel{e^{j(2\pi vn)}} \cdot e^{j(2\pi vN)} = \cancel{e^{j(2\pi vn)}} \rightarrow$$

$$e^{j(2\pi vN)} = 1$$

   Ed il Fasore “$e^{j(2\pi vN)}$” è pari ad 1 se la sua Parte Reale è pari ad 1 e la sua Parte Immaginaria è pari a 0, cioè se:

$$e^{j(2\pi vN)} = \cos(2\pi vN) + j \cdot \sin(2\pi vN)$$

$$Con\ \cos(2\pi vN) = 1\ \ e\ \sin(2\pi vN) = 0$$

   E questo avviene quando:

$$vN = ad\ un\ numero\ intero\ 'm'\ |\ m \in \mathbb{Z}$$

   Ma questo potrebbe anche non essere possibile! Cioè se:

$$vN = m \rightarrow v = \frac{m}{N}$$

   Ma non sempre “v” è un numero Razionale, cioè non sempre è rappresentabile come rapporto tra due numeri interi.

Sequenza Esponenziale Discreta

La Sequenza Esponenziale Discreta è un Segnale definito come:

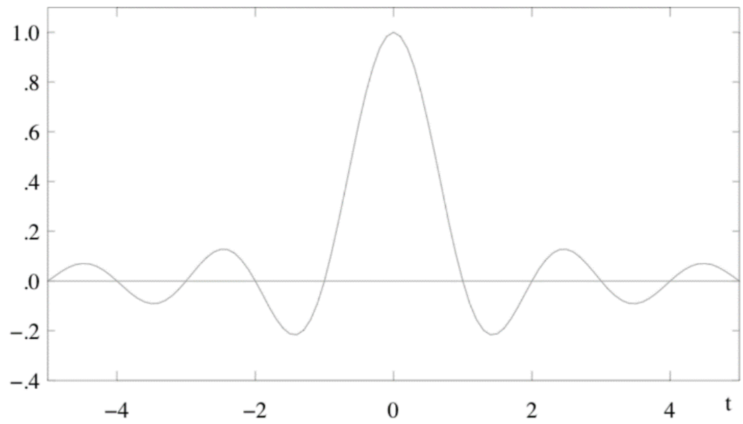
$$x(n) = A \cdot z^n$$

La Sequenza Esponenziale Discreta può essere:

- Sequenza Esponenziale Discreta Complessa → Se A e z che sono due Numeri Complessi;
- Sequenza Esponenziale Discreta Reale o semplicemente Sequenza Esponenziale Discreta → Se A e z che sono due Numeri Complessi.

Segnale Sinc

Il Segnale Sinc è definito come:



$$x(t) = sinc(t) = \frac{sin\ (\pi t)}{\pi t}$$

Il segnale presenta una serie di lobi laterali di durata 1, salvo il lobo centrale che ha durata 2 (da $t = -1$ a $t = +1$).

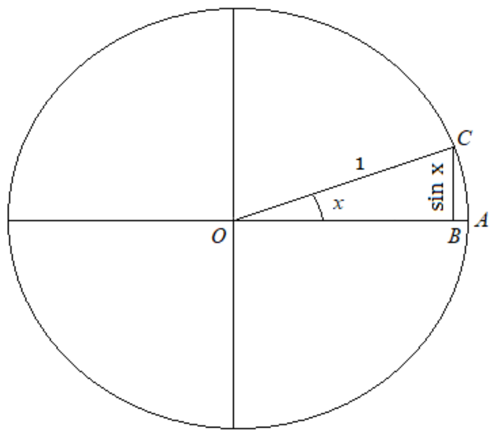
N.B. → In Corrispondenza di $t = 0$ abbiamo un lobo d'ampiezza pari ad 1, ciò significa che:

$$\lim_{t \to 0} sinc(t) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{sin\ (\pi t)}{\pi t} \right) = 1$$

Per quanto strano possa sembrare che:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{sin\ (x)}{x} \right) = 1$$

In effetti, se effettuiamo una metafora geometrica abbiamo che:



$$x = \overline{AC} \quad e \quad \sin(x) = \overline{BC}$$

Se $x \to 0$, allora anche $\sin(x) \to 0$, in particolare:

$$\overline{AC} \approx \overline{BC}$$

E naturalmente, il loro rapporto vale 1.

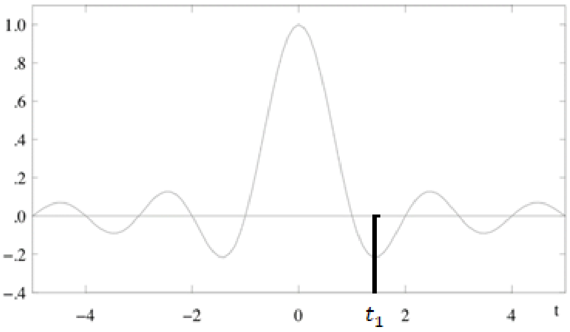
I lobi hanno Ampiezza Decrescente, cioè man mano che ci allontaniamo dal lobo centrale, cioè quello in $t = 0$ con Ampiezza pari ad 1, gli altri lobi sono sempre più attenuati.

Questa attenuazione è definita dalla legge:

$$\alpha_1 = 20 \log_{10} \frac{|sinc(0)|}{|sinc(t_1)|} = 20 \log_{10} \frac{1}{|sinc(t_1)|}$$

Con "t_1" che rappresenta il tempo in corrispondenza del quale c'è il lobo del quale vogliamo conoscere l'attenuazione.

Ad esempio, il primo lobo negativo a destra del lobo centrale, cioè quello in corrispondenza di t_1:



Ha un'Ampiezza pari a "-0.207", cioè un'Ampiezza 0.207 volte quella del lobo centrale.

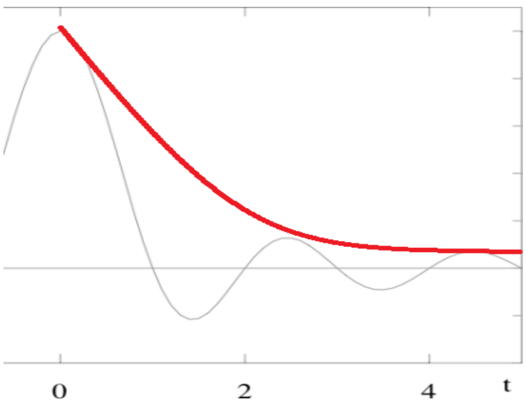
L'Attenuazione di questo primo lobo negativo a destra del lobo centrale, cioè il seguente:

È pari al lobo negativo in corrispondenza di t_1, cioè pari a:

$$20 \log_{10} \frac{1}{|sinc(t_1)|} = 20 \log_{10} \frac{1}{\left|\frac{sin(\pi \cdot t_1)}{\pi \cdot t_1}\right|} = 13.26\ dB.$$

Cioè si trova a "$-13.26\ dB$" al di sotto del lobo centrale.

La Decrescenza dell'Ampiezza dei lobi laterali è definita dalla funzione $1/_t$:



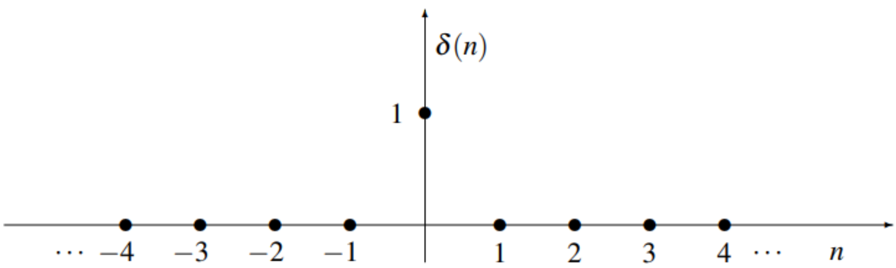
Ovvero di $6\ db/ottava = 20\ dB/decade$.

Cioè se in t_1 il Segnale ha un'attenuazione di 13.26, in $2 \cdot t_1$ si attenua di ulteriori $6\ dB$, in $4 \cdot t_1$ di altri e $6\ dB$ ancora, ecc…

Così come se in t_1 il Segnale ha un'attenuazione di 13.26, in $10 \cdot t_1$ si attenua di ulteriori $20\ dB$, in $20 \cdot t_1$ di altri e $20\ dB$ ancora, ecc…

Impulso Unitario Discreto

L'Impulso Unitario Discreto è definito come:



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ 0 & \text{se} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Consideriamo la Moltiplicazione tra un Segnale Discreto "$x(n)$" e l'Impulso Discreto: $x(n) \cdot \delta(n)$

Dato che :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ 0 & \text{se} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

➔ Allora $x(n) \cdot \delta(n)$ varrà sempre 0, salvo per $n = 0$.

E quindi:

$$x(n) \cdot \delta(n) = x(0) \cdot \delta(n)$$

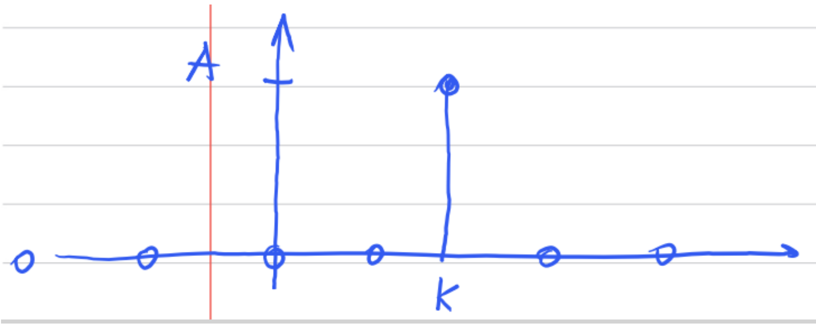
Proprietà dell'Impulso Discreto

Questo Segnale gode di alcune Proprietà:

1. Campionamento:

   Consideriamo l'Impulso Discreto Traslato:

$$A \cdot \delta(n-k) = \begin{cases} A & se \quad n-k=0 \rightarrow n=k \\ 0 & se \quad n-k \neq 0 \rightarrow n \neq k \end{cases}$$



   Questo significa che moltiplicando un Segnale "$x(n)$" per l'Impulso Discreto Traslato Temporalmente:

$$x(n) \cdot \delta(n-k) = x(k) \cdot \delta(n-k)$$

   Io effettuo un'operazione di Campionamento.

2. Riproducibilità:

   Consideriamo l'equazione di sopra ed effettuiamo una somma di tutti i valori e per tutti i valori di "k" ad entrambi i membri:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) \rightarrow$$

$$x(n) \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)}_{..+\delta(n-1)+\delta(n-2)+..} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) \rightarrow$$

   Ma di questi termini soltanto uno sarà pari ad 1, cioè quello nel quale "n" è uguale al numero per il quale lo si sottrae, ad esempio, se $n=1$:

$$..+\delta(1-1)+\delta(1-2)+..$$

   E quindi solo $\delta(1-1)=0$ sarà pari ad 1, gli altri termini della sommatoria saranno pari a 0.

   In altre parole, questa Sommatoria vale sempre e solo 1:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

Gradino Unitario Discreto ed Impulso Unitario Discreto

Per la Proprietà di Riproducibilità dell'Impulso Discreto, abbiamo che:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n) \cdot \delta(n-k)$$

Dato che: $u(n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$

Allora:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

Ora poniamo:

$$n - k = m \rightarrow k = n - m$$

Quindi:

$$u(n) = \sum_{m=n}^{-\infty} \delta(m)$$

Perché $n - k = m$ e quindi quando $k = 0 \rightarrow n - 0 = m \rightarrow m = n$ e quando $k = \infty \rightarrow n - \infty = = m \rightarrow m = -\infty$.

Infine:

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$$

Quindi affermiamo che:

"Il Gradino Unitario Discreto è la somma corrente (cioè la somma tra $-\infty$ ed n) dei valori dell'Impulso Unitario Discreto".

Impulso Continuo o Impulso di Dirac

Consideriamo una funzione "$x(t)$" continua in $t = 0$, cioè:

$$x(t) \text{ è } continua\ in\ t = 0$$

L'Impulso Unitario Continuo è definito come una Funzione Continua "$\delta(t)$" tale che:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = \begin{cases} x(0) & \text{se} \quad 0 \in (t_1, t_2) \\ 0 & \text{se} \quad 0 \notin (t_1, t_2) \end{cases}$$

Proprietà dell'Impulso Continuo o Impulso di Dirac

Questo Segnale gode di alcune Proprietà:

1. Normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

   Cioè "L'impulso Continuo ha area unitaria".

Dimostrazione:

Sappiamo che: $\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = \begin{cases} x(0) & \text{se} \quad 0 \in (t_1,t_2) \\ 0 & \text{se} \quad 0 \notin (t_1,t_2) \end{cases}$ Quindi, se integriamo tra $-\infty$ ed ∞, dato che $0 \in (-\infty,\infty)$, avremo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Ora scegliamo $x(t) = 1$, quindi, essendo $x(t)$ sempre pari ad 1, anche $x(0) = 1$ e quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

2. Campionamento:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Dimostrazione:

Consideriamo due Funzioni "$x(t)$" ed "$y(t)$" continue in $t = 0$, allora possiamo dire che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)\delta(t)dt = x(0)y(0)$$

Ora consideriamo, invece, il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(0)y(t)\delta(t)dt$$

Dato che $x(0)$ è costante lo porto fuori:

$$x(0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\delta(t)dt$$

E dato che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\delta(t)dt = y(0)$$

Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(0)y(t)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\delta(t)dt = x(0)y(0)$$

Cioè, in generale:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Lo stesso vale anche se $\delta(t)$ subisce una Traslazione Temporale, cioè:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

3. Riproducibilità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

Dimostrazione:

Dalla Proprietà di Campionamento per $\delta(t)$ Traslata nel Tempo: "$\delta(t-\tau)$", possiamo dire che:

$$x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$$

Ora, integrando entrambi i membri da $-\infty$ a $+\infty$ rispetto a "τ" ed otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\,d\tau$$

"$x(t)$", non dipendendo da "τ", può essere portato fuori dall'integrale:

$$x(t)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\,d\tau \rightarrow$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\,d\tau$$

4. Cambiamento di Scala:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\cdot\delta(t)$$

Dimostrazione:

Effettuiamo un Cambiamento di Scala sull'Impulso di Dirac: "$\delta(at)$".

Considerando la funzione "$x(t)$" continua in t, calcoliamo il seguente Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(at)\,\,dt$$

Effettuiamo un cambio di variabile:

$$at = u \rightarrow t = \frac{u}{a} \rightarrow dt = \frac{1}{a}\cdot du$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(at)\,\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{u}{a}\right)\cdot\delta(u)\cdot\frac{1}{a}du \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(at)\,\,dt = \frac{1}{a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{u}{a}\right)\cdot\delta(u)\,\,du$$

Ora noi sappiamo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)\quad per\ cui \quad\rightarrow\quad \frac{1}{a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{u}{a}\right)\cdot\delta(u)\,\,du = \frac{1}{a}\cdot x\left(\frac{0}{a}\right)$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(at)\,\,dt = \frac{1}{a}\cdot x\left(\frac{0}{a}\right) \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(at)\,\,dt = \frac{1}{a}\cdot x(0) \rightarrow$$

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\cdot x\left(\frac{t}{a}\right)\cdot\delta(t) \rightarrow \delta(at) = \frac{1}{|a|}\cdot x\left(\frac{t}{a}\right)\cdot\delta(t)$$

Il Valore Assoluto serve perché "a" potrebbe anche essere negativa.

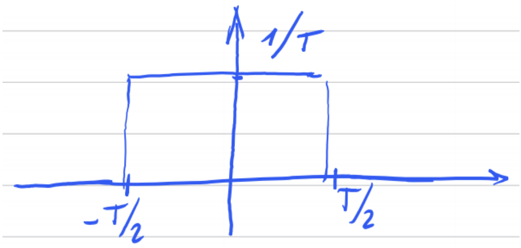
N.B. → L'Impulso Continuo o Impulso di Dirac ha sempre valore zero, fuorché per $t = 0$, in corrispondenza del quale vale "infinito". Inoltre, come indicato dalla proprietà di Normalizzazione, la sua area è Unitaria.

Chiaramente nessuna funzione "ordinaria" soddisfa tali requisiti, ma e possibile trovare delle famiglie di funzioni ordinarie che approssimano $\delta(t)$.

Una Famiglia "$\delta_T(t)$" di funzioni ordinarie, approssima $\delta(t)$ se vale la seguente proprietà:

$$\lim_{T \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta_T(t)\, dt = x(0)$$

Ad esempio, questa Proprietà è rispettata dalla seguente Famiglia di Rettangoli:



$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

Possiamo notare come questa Famiglia di Rettangoli abbia Area Unitaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_T(t)\, dt = 1$$

Questa è detta "Famiglia di Funzioni" poiché al variare di "T" si hanno funzioni differenti, ad esempio se "T" diminuisce avremo una funzione con ampiezza maggiore ma durata minore, che in effetti è proprio ciò che vogliamo!
Cioè questa Famiglia di Funzioni approssima $\delta(t)$ per $T \to 0$ perché per $T \to 0$ avremo l'Ampiezza (che è $\frac{1}{T}$) che tende ad ∞, e la durata (che è pari a T) che tende a 0, inoltre l'area di questa Famiglia di Funzioni è Unitaria! Quindi approssimiamo bene le caratteristiche della $\delta(t)$.

Dimostrazione:

Abbiamo detto che;

Una Famiglia "$\delta_T(t)$" di funzioni ordinarie, approssima $\delta(t)$ se vale la seguente proprietà:

$$\lim_{T \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta_T(t)\, dt = x(0)$$

Quindi dimostriamo che la Famiglia di Rettangoli "$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right)$" rispetta tale Proprietà:

Consideriamo una funzione "$x(t)$" continua in t, e calcoliamo il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta_T(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \frac{1}{T} \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right)\, dt$$

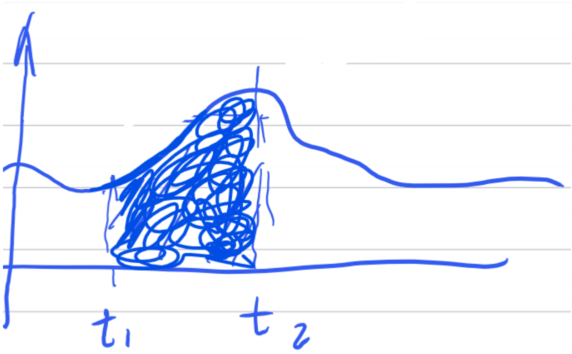
La nostra Famiglia di Funzioni, però, ha valore $\neq 0$ solo nell'intervallo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ e quindi:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \frac{1}{T} \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right)\, dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

Ora calcoliamone il limite per $T \to 0$:

$$\lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

Per calcolare quest'integrale sfruttiamo il "Teorema Fondamentale della Media", il quale afferma che, dovendo calcolare l'area sottesa alla seguente funzione "$x(t)$" e compresa nell'intervallo (t_1, t_2):



$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt$$

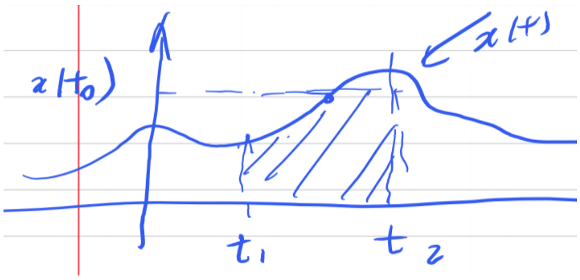
Posso affermare che quest'area è uguale all'area del rettangolo con:

- Base pari a $(t_2 - t_1)$;
- Ed Altezza pari ad $x(t_0)$.

Quindi che è calcolabile come:

$$(t_2 - t_1) \cdot x(t_0)$$

Con "t_0" corrispondente ad un opportuno punto compreso nell'intervallo (t_2, t_1) ed in corrispondenza del quale abbiamo il valor medio della Funzione nell'Intervallo:



Quindi, nel nostro caso avremo che:

$$\lim_{T\to 0} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt \right) = \lim_{T\to 0} \left(\frac{1}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T} \cdot x(t_0) \right) \quad con \quad t_0 \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right)$$

Per cui:

$$\lim_{T\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta_T(t)\, dt = \lim_{T\to 0} x(t_0)$$

Ma se $T \to 0$, per forza di cose anche $t_0 \to 0$, infatti se $T \to 0$ significa che il Periodo della Funzione, che è centrato in zero, sarà sempre più prossimo a zero, per cui anche un qualsiasi punto $t_0 \in (T)$ sarà prossimo a zero:

$$\lim_{T\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta_T(t)\, dt = x(0) \quad \to \quad Dimostrata.$$

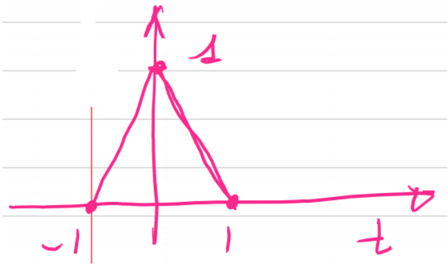
Gradino Unitario Continuo e Impulso Unitario Continuo

Esiste una Relazione che li lega, ossia la seguente:

$$\frac{d}{dt}(u(t)) = \delta(t)$$

Impulso Triangolare Continuo Unitario

L'Impulso Triangolare Continuo ed Unitario è un Segnale così definito:



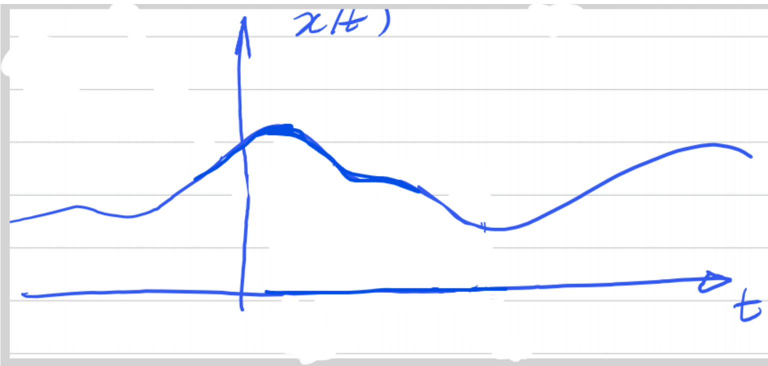
$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

Media Temporale di un Segnale Continuo

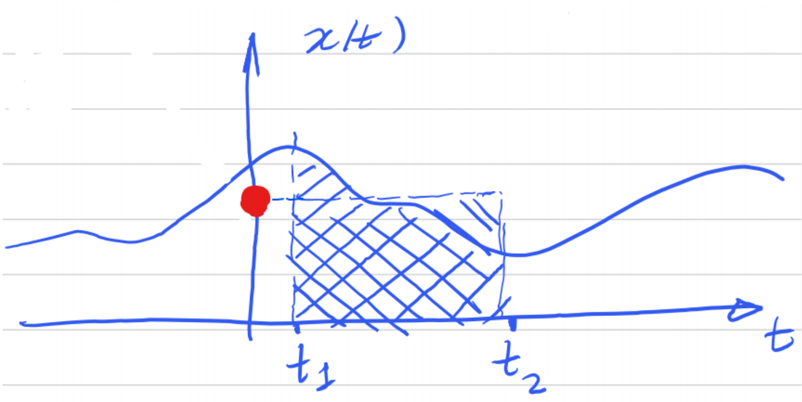
La Media Temporale di un Segnale Continuo "$x(t)$" nell'intervallo (t_1, t_2) è definita come:

$$< x(t) >_{(t_1,\ t_2)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt$$

Graficamente, la "Media Temporale" della seguente funzione:



Equivale ad un Valore dell'Asse delle Ordinate corrispondente all'altezza di un Rettangolo con base $(t_2 - t_1)$ e con Area pari all'Area sottesa alla Funzione nell'Intervallo (t_1, t_2):



Ossia il valore segnato

in rosso nel grafico.

È possibile calcolare la Media Temporale anche nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$:

$$< x(t) > = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} x(t)\, dt \right)$$

Quindi consideriamo la Funzione Continua "$x(t)$" in un certo intervallo $(-T, +T)$ e poi facciamo tendere "T" ad infinito, per cui l'intervallo diventa $(-\infty, +\infty)$.

Media Temporale di un Segnale Discreto

La Media Temporale di un Segnale Discreto "$x(n)$" nell'intervallo $N_1 \leq n \leq N_2$ è definita come:

$$< x(n) >_{(N_1,\ N_2)} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \cdot \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)$$

È possibile calcolare la Media Temporale anche nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$:

$$< x(n) > = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{2N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{N} x(n) \right)$$

Quindi consideriamo la Funzione Continua "$x(t)$" in un certo intervallo $(-T, +T)$ e poi facciamo tendere "T" ad infinito, per cui l'intervallo diventa $(-\infty, +\infty)$.

N.B. → La Media Temporale prende anche il nome di "Componente Continua" di un segnale e la si denota con x_{dc}.

Potenza di un Segnale Continuo

La Potenza di un Segnale Continuo "$x(t)$", è definita come:

$$\mathcal{P}_x = < |x(t)|^2 > \quad con \quad |x(t)|^2 = \begin{cases} Valore\ Assoluto^2\ di\ x(t)\ se\ x(t)\ è\ un\ Segnale\ Reale \\ \underbrace{Modulo^2\ di\ x(t)}_{[\mathcal{R}e^2\{x(t)\} + \mathcal{I}m^2\{x(t)\}]}\ se\ x(t)\ è\ un\ Segnale\ Complesso \end{cases}$$

Quindi:

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2\, dt \right)$$

Potenza di un Segnale Discreto

La Potenza di un Segnale Discreto "$x(n)$", è definita come:

$$\mathcal{P}_x = < |x(n)|^2 > \quad con \quad |x(n)|^2 = \begin{cases} Valore\ Assoluto^2\ di\ x(n)\ se\ x(n)\ è\ un\ Segnale\ Reale \\ \underbrace{Modulo^2\ di\ x(n)}_{[\mathcal{R}e^2\{x(n)\} + \mathcal{I}m^2\{x(n)\}]}\ se\ x(n)\ è\ un\ Segnale\ Complesso \end{cases}$$

Quindi:

$$\mathcal{P}_x = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{2N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \right)$$

Valore Efficace o Valore Quadratico Medio – RMS (Root Mean Square) di un Segnale Continuo

Il "Valore Efficace" o "Valore Quadratico Medio" (in inglese Root Mean Square) di un Segnale Continuo "$x(t)$" è definito come:

$$x_{rms} = \sqrt{\mathcal{P}_x} = \sqrt{< |x(t)|^2 >}$$

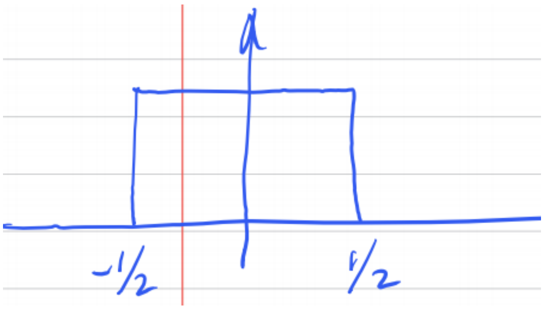
Valore Efficace o Valore Quadratico Medio – RMS (Root Mean Square) di un Segnale Discreto

Il "Valore Efficace" o "Valore Quadratico Medio" (in inglese Root Mean Square) di un Segnale Discreto "$x(n)$" è definito come:

$$x_{rms} = \sqrt{\mathcal{P}_x} = \sqrt{< |x(n)|^2 >}$$

Media Temporale e Potenza di una Funzione Rettangolare

Consideriamo la seguente Funzione Rettangolare:



$$x(t) = A \cdot \prod(t)$$

Calcoliamone la Media Temporale:

$$< x(t) > = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} A \cdot \prod(t)\, dt \right) \rightarrow$$

Sappiamo che l'Area sottesa a questa Funzione (evitando il calcolo integrale), essendo tale Funzione "Rettangolare", può essere calcolata come:

$$Base \cdot Altezza = 1 \cdot A$$

Quindi:

$$< x(t) > = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \cdot A \right) = 0$$

Ora Calcoliamone la Potenza:

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} |A|^2 \cdot |\prod(t)|^2\, dt \right)$$

Anche in tal caso (evitando il calcolo integrale), possiamo notare che il quadrato dell'Area sottesa a questa Funzione è pari a:

$$Base^2 \cdot Altezza^2 = 1 \cdot A^2$$

Quindi:

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \cdot A^2 \right) = 0$$

Media Temporale e Potenza di una Funzione Costante

Consideriamo la seguente Funzione Costante:

$$x(t) = A$$

Calcoliamone la Media Temporale:

$$< x(t) > = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{+T} A\,dt\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot A\cdot\int_{-T}^{+T} dt\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot A\cdot[T-(-T)]\right) \to$$

$$< x(t) > = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{\cancel{2T}}\cdot A\cdot \cancel{2T}\right) \to$$

$$< x(t) > = A$$

Ora Calcoliamone la Potenza:

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{+T} |A|^2\,dt\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{+T} A^2\,dt\right) \to$$

$$\to \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot A^2\cdot\int_{-T}^{+T} dt\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{\cancel{2T}}\cdot A^2\cdot \cancel{2T}\right) \to$$

$$\mathcal{P}_x = A^2$$

Energia di un Segnale Continuo

L'Energia di un Segnale Continuo "$x(t)$", è definita come:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$$

N.B. → L'Energia di un Segnale non può essere negativa.

Energia di un Segnale Discreto

L'Energia di un Segnale Discreto "$x(n)$", è definita come:

$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Segnali di Potenza e Segnali di Energia

I Segnali "di Potenza", ossia con "Potenza Finita", hanno Energia Infinita, mentre i Segnali "di Energia", ossia con "Energia Finita", hanno Potenza pari a zero. Per cui è possibile Classificare i Segnali come:

- Segnali di Potenza (Periodici, Costanti, ecc…) → Segnali con $\mathcal{P}_x\ finita \Longrightarrow \mathcal{E}_x\ infinita$;
- Segnali di Energia → Segnali con $\mathcal{E}_x\ finita \Longrightarrow \mathcal{P}_x = 0$.

Segnale Periodico

I Segnali Periodici sono Segnali di Potenza.

Media Temporale di un Segnale Periodico Continuo

La Media Temporale di un Segnale Periodico Continuo può essere calcolata più semplicemente, infatti, invece della normale formula utilizzeremo la seguente formula:

Considerando un Segnale Periodico Continuo "$x(t)$" di periodo "Δ", allora:

$$< x(t) > = \frac{1}{\Delta} \cdot \int_{\Delta} x(t) \ dt$$

Es. → Calcolo della Media Temporale di un Fasore Continuo.

Sappiamo che il Fasore è un Segnale Periodico, quindi calcoliamo la Media Temporale del Fasore:

$e^{j(\omega t)}$ di Periodo "T"

Quindi:

$$< x(t) > = \frac{1}{T} \cdot \int_{0}^{T} e^{j(\omega t)} \ dt = \frac{1}{T} \cdot \left[\frac{1}{j\omega} \cdot e^{j(\omega t)}\right]_{0}^{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \left[e^{j(\omega t)}\right]_{0}^{T} \rightarrow$$

$$< x(t) > = \frac{1}{j\omega T} \cdot \left[e^{j(\omega T)} - 1\right] \rightarrow$$

Possiamo scrivere "ω" come "$\frac{2\pi}{T}$" e quindi:

$$< x(t) > = \frac{1}{j\omega T} \cdot \left[e^{j\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right)} - 1\right] = \frac{1}{j\omega T} \cdot \left[e^{j(2\pi)} - 1\right]$$

Ma se scriviamo $e^{j(2\pi)}$ come Parte Reale più Parte Immaginaria avremo:

$$e^{j(2\pi)} = \cos(2\pi) + j \cdot \sin(2\pi) = 1$$

Per cui:

$$< x(t) > = 0$$

Media Temporale di un Segnale Periodico Discreto

La Media Temporale di un Segnale Periodico Discreto può essere calcolata più semplicemente, infatti, invece della normale formula utilizzeremo la seguente formula:

Considerando un Segnale Periodico Discreto "$x(t)$" di periodo "Δ", allora:

$$< x(n) > = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{n=0}^{\Delta-1} x(n)$$

Potenza di un Segnale Periodico

La Potenza di un Segnale Periodico può essere calcolata più semplicemente, infatti, invece della normale formula utilizzeremo la seguente formula:

Considerando un Segnale Periodico "$x(t)$" di periodo "Δ", allora:

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{\Delta} \cdot \int_{\Delta} |x(t)|^2 \ dt$$

Es. → Calcolo della Potenza di un Fasore Continuo.

Sappiamo che il Fasore è un Segnale Periodico, quindi calcoliamo la Potenza del Fasore:

$$A \cdot e^{j(\omega t)} \text{ di Periodo "}T\text{"}$$

Quindi:

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left| A \cdot e^{j(\omega t)} \right|^2 \, dt$$

Dato che:

$$\left| A \cdot e^{j(\omega t)} \right|^2 = A^2$$

Infatti, rappresentando il Fasore in Parte Reale ed Immaginaria abbiamo:

$$\left| A \cdot e^{j(\omega t)} \right|^2 = |A \cdot cos(\omega t) + A \cdot sin(\omega t)|^2 = A^2 \cdot cos^2(\omega t) + A^2 \cdot sin^2(\omega t) \rightarrow$$

$$\rightarrow A^2 (cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t)) \rightarrow$$

E dato che "l'Identità Fondamentale della Goniometria" stabilisce che:

$$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$$

Allora:

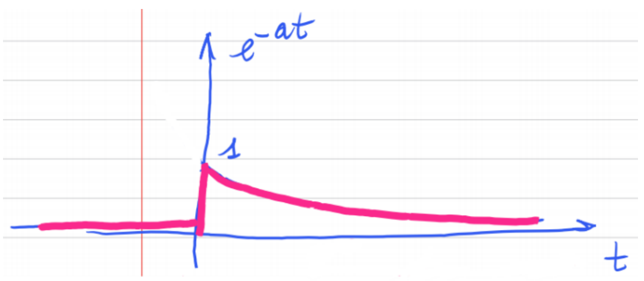
$$\left| A \cdot e^{j(\omega t)} \right|^2 = A^2$$

Per cui:

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \, dt = \frac{A^2 \cdot \cancel{T}}{\cancel{T}} = A^2$$

Energia di un Segnale Esponenziale Decrescente

Consideriamo il Segnale Esponenziale "$x(t)$" così definito:



$$x(t) = e^{-at} \cdot u(t) \quad con \quad a > 0$$

Calcoliamone l'Energia:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-at} \cdot u(t)|^2 \, dt$$

Il "Valore Assoluto" posso non considerarlo dato che questo è un Segnale Esponenziale, quindi è sempre ≥ 0 :

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-at} \cdot u(t) \right)^2 dt$$

Ma tale Segnale vale zero per $t < 0$, quindi:

$$\mathcal{E}_x = \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-at} \cdot u(t) \right)^2 dt$$

Ora consideriamo che $u(t)$ da 0 ad infinito è sempre pari ad 1, così come $u(t)^2$, invece $(e^{-at})^2 = e^{-2at}$.

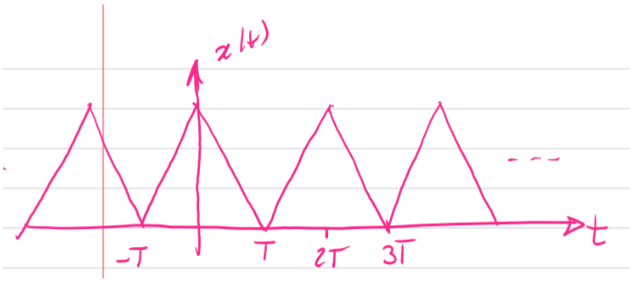
Quindi:

$$\mathcal{E}_x = \int_0^{+\infty} e^{-2at}\,dt = \left[-\frac{1}{2a}\cdot e^{-2at}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2a}\cdot\left[e^{-2at}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2a}\cdot[0-1] \rightarrow$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{2a}$$

Potenza di un Segnale Triangolare

Consideriamo il seguente Segnale Triangolare Continuo:



$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1-\left|\frac{t}{T}\right| & se \quad -T \le t \le T \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Calcoliamone la Potenza (infatti questo è un Segnale Periodico → Segnale di Potenza):

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}\left|\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right|^2 dt$$

Questa Funzione è Reale, non Complessa, quindi $\left|\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right|$ indica il Valore Assoluto e dato che questa funzione è sempre positiva:

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}\left(\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right)^2 dt = \frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}\left(1-\left|\frac{t}{T}\right|\right)^2 dt = \frac{1}{2T}\cdot\left(\int_{-T}^{0}\left(1-\left|\frac{t}{T}\right|\right)^2 dt + \int_{0}^{T}\left(1-\left|\frac{t}{T}\right|\right)^2 dt\right) \rightarrow$$

Ho spezzato l'integrale $\int_{-T}^{T}\left(1-\left|\frac{t}{T}\right|\right)^2 dt$ in due integrali differenti: $\int_{-T}^{0}\left(1-\left|\frac{t}{T}\right|\right)^2 dt + \int_{0}^{T}\left(1-\left|\frac{t}{T}\right|\right)^2 dt$.

Ora calcoliamo il secondo:

$$\frac{1}{2T}\cdot\int_0^T\left(1-\left|\frac{t}{T}\right|\right)^2 dt$$

Nell'intervallo $(0, T)$, "T" e "t" sono sempre positivi, quindi posso togliere i loro Valori Assoluti:

$$\frac{1}{2T}\cdot\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{1}{2T}\cdot\int_0^T 1+\frac{t^2}{T^2}-\frac{2t}{T}dt = \frac{1}{2T}\cdot\left(\int_0^T 1\,dt + \int_0^T\frac{t^2}{T^2}\,dt - \int_0^T\frac{2t}{T}\,dt\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2T}\cdot\left([t]_0^T + \frac{1}{T^2}\cdot\int_0^T t^2\,dt - \frac{2}{T}\cdot\int_0^T t\,dt\right) = \frac{1}{2T}\cdot\left([t]_0^T + \frac{1}{T^2}\cdot\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T - \frac{2}{T}\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2T}\cdot\left([t]_0^T + \frac{1}{3T^2}\cdot[t^3]_0^T - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}T}\cdot[t^2]_0^T\right) = \frac{1}{2T}\cdot\left(T+\frac{T^3}{3T^2}-\frac{T^2}{T}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2T}\cdot\left(T+\frac{T}{3}-T\right) = \frac{1}{2T}\cdot\left(\frac{T}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

Quindi:

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{6}$$

Media Temporale di un Segnale Sinusoidale

Consideriamo il seguente Segnale Sinusoidale Continuo:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Essendo Periodico, è un Segnale di Potenza.

Calcoliamo la Media Temporale del Segnale:

$$< x(t) > = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A \cdot \cos(\omega t + \varphi)\, dt$$

Per la Formula di Eulero:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} \cdot \left[e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}\right] = \frac{A}{2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)}$$

E quindi calcoleremo la Media Temporale come:

$$< x(t) > = < \frac{A}{2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)} > = < \frac{A}{2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} > + < \frac{A}{2} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)} > \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{A}{2} \cdot \underbrace{< e^{j(\omega t + \varphi)} >}_{0} + \frac{A}{2} \underbrace{< e^{-j(\omega t + \varphi)} >}_{0} = 0$$

Infatti, "$e^{j(\omega t + \varphi)}$" ed "$e^{-j(\omega t + \varphi)}$" sono Fasori e come già visto qui, la Media Temporale di un Fasore è pari a 0.

Potenza di un Segnale Sinusoidale

Consideriamo il seguente Segnale Sinusoidale Continuo:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Essendo Periodico, è un Segnale di Potenza.

Calcoliamo la Potenza del Segnale:

$$\mathcal{P}_x = < |x(t)|^2 > = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |A \cdot \cos(\omega t + \varphi)|^2\, dt$$

Per la seguente uguaglianza trigonometrica:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Possiamo scrivere:

$$\mathcal{P}_x = < |x(t)|^2 > = < |A \cdot \cos(\omega t + \varphi)|^2 > = < A^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + 2\varphi)\right) > \rightarrow$$

$$\rightarrow < \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(2\omega t + 2\varphi) > = < \frac{A^2}{2} > + < \frac{A^2}{2}\cos(2\omega t + 2\varphi) > = \frac{A^2}{2} + \underbrace{< \frac{A^2}{2}\cos(2\omega t + 2\varphi) >} \rightarrow$$

Il Termine "$< \frac{A^2}{2}\cos(2\omega t + 2\varphi) >$" indica la Media Temporale di una Sinusoide, che è pari a 0, quindi:

$$\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2}$$

Proprietà della Media Temporale

1. Linearità:

   Consideriamo una coppia di Numeri Reali o Complessi "a_1" ed "a_2" e consideriamo anche una coppia di Segnali Continui o Discreti "$x_1(\cdot)$" ed "$x_2(\cdot)$" [utilizziamo il simbolo " $\cdot$ " perché può esserci sia la "t" (nel caso di Segnali Continui) che la "n" (nel caso di Segnali Discreti)], allora:

   $$< a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t) > = a_1 \cdot < x_1(t) > + a_2 \cdot < x_2(t) >$$

2. Invarianza Temporale:

   Consideriamo un Segnale Continuo o Discreto "$x(\cdot)$", allora se Trasliamo Temporalmente questo Segnale, qualsiasi sia il ritardo Δ (o M se trattasi di sequenze), allora:

   $$< x(t-\Delta) > = < x(t) > \qquad e \qquad < x(n-M) > = < x(n) >$$

Potenza Mutua

Vogliamo calcolare la Potenza di una somma di due Segnali Complessi:

$$\mathcal{P}_{x+y} = < |x(t) + y(t)|^2 >$$

Allora, sapendo che:

$$|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$$

Dimostrazione:

$$x(t) \cdot x^*(t) = [x_{\mathbb{R}}(t) + j \cdot x_{\mathbb{I}}(t)] \cdot [x_{\mathbb{R}}(t) - j \cdot x_{\mathbb{I}}(t)] \rightarrow$$

$$x(t) \cdot x^*(t) = x^2{}_{\mathbb{R}}(t) \cancel{- j \cdot x_{\mathbb{R}}(t) \cdot x_{\mathbb{I}}(t) + j \cdot x_{\mathbb{R}}(t) \cdot x_{\mathbb{I}}(t)} + x^2{}_{\mathbb{I}}(t) = x^2{}_{\mathbb{R}}(t) + x^2{}_{\mathbb{I}}(t) \rightarrow$$

$$x(t) \cdot x^*(t) = x^2{}_{\mathbb{R}}(t) + x^2{}_{\mathbb{I}}(t) = |x(t)|^2$$

Quindi:

$$\mathcal{P}_{x+y} = < |x(t) + y(t)|^2 > = < \big(x(t) + y(t)\big) \cdot \big(x(t) + y(t)\big)^* > \rightarrow$$

$$\mathcal{P}_{x+y} = < |x(t)|^2 + x(t) \cdot y^*(t) + y(t) \cdot x^*(t) + |y(t)|^2 > \rightarrow$$

$$\mathcal{P}_{x+y} = P_x + \underbrace{< x(t) \cdot y^*(t) >}_{\mathcal{P}_{xy}} + \underbrace{< y(t) \cdot x^*(t) >}_{\mathcal{P}_{yx}} + \mathcal{P}_y \rightarrow$$

Queste si definiscono "Potenze Mutue".

Quindi possiamo concludere affermando che:

$$\mathcal{P}_{x+y} = \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_{xy} + \mathcal{P}_{yx} + \mathcal{P}_y$$

N.B. → Tra queste de Potenze Mutue c'è una relazione:

$$\mathcal{P}^*{}_{xy} = \mathcal{P}_{yx} \quad e \quad \mathcal{P}^*{}_{yx} = \mathcal{P}_{xy}$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{P}^*{}_{xy} = < x(t) \cdot y^*(t) >^* = < \big(x(t) \cdot y^*(t)\big)^* > = < x^*(t) \cdot y(t) > = \mathcal{P}_{yx}$$

E quindi, dato che:

$$\mathcal{P}^*{}_{xy} = \mathcal{P}_{yx}$$

Possiamo scrivere che:

$$\mathcal{P}_{x+y} = \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_{xy} + \mathcal{P}^*{}_{xy} + \mathcal{P}_y$$

E considerando che:

$$\mathcal{P}_{xy} + \mathcal{P}^*{}_{xy} = 2 \cdot \mathcal{R}e\{\mathcal{P}_{xy}\}$$

Possiamo anche affermare che:

$$\mathcal{P}_{x+y} = \mathcal{P}_x + 2 \cdot \mathcal{R}e\{\mathcal{P}_{xy}\} + \mathcal{P}_y$$

N.B. → Segnali Ortogonali → Se $\mathcal{R}e\{\mathcal{P}_{xy}\} = 0$ e quindi se la Potenza Mutua “$\mathcal{P}_{xy}$” è nulla, allora:

$$\mathcal{P}_{x+y} = \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y$$

In tal caso diremo che:

$$x(t) \ \ ed \ \ y(t) \ \ sono \ 'ortogonali'.$$

Energia Mutua

Ciò che abbiamo scritto sopra, vale anche per l’Energia, quindi:

$$\mathcal{E}_{x+y} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_{xy} + \mathcal{E}_{yx} + \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_x + 2 \cdot \mathcal{R}e\{\mathcal{E}_{xy}\} + \mathcal{E}_y$$

Spazio Funzionale o Spazio Lineare

I Segnali di Energia e di Potenza possono essere interpretati come elementi di uno “Spazio Funzionale” (anche detto Spazio Lineare o Spazio di Segnali) che è costituito da questi elementi, ma anche:

- Dalle Operazioni che è possibile effettuare tra questi elementi:
  - Combinazione Lineare:

    Dati due Segnali di Potenza “$x(\cdot)$” ed “$y(\cdot)$”, la Combinazione Lineare di questi Segnali di Potenza è ancora un Segnale di Potenza.

    Lo stesso vale sia per Segnali di Potenza che per Segnali di Energia.

    Lo stesso vale sia per Segnali Continui che per Segnali Discreti.

    Quindi abbiamo Quattro Spazi Vettoriali

- Dal Prodotto Scalare degli elementi:
  - Dati due Segnali di Potenza “$x(\cdot)$” ed “$y(\cdot)$”, il loro Prodotto Scalare “$< x(\cdot), y(\cdot) >$” è la Potenza Mutua $\mathcal{P}_{xy}$.

    Lo stesso vale sia per Segnali di Potenza che per Segnali di Energia.

    Lo stesso vale sia per Segnali Continui che per Segnali Discreti.

  - N.B. → Dato che il Prodotto Scalare di due Segnali “$x(\cdot)$” ed “$y(\cdot)$”, è la Potenza Mutua $\mathcal{P}_{xy}$, capiamo che questo si calcola attraverso la Media Temporale, più precisamente:

$$< x(\cdot), y(\cdot) > = < x(t) \cdot y^*(t) > = \mathcal{P}_{xy}$$

Quindi, dato che, presi due segnali "$x(\cdot)$" ed "$y(\cdot)$", se la loro Potenza Mutua $\mathcal{P}_{xy} = 0$, questi si dicono "ortogonali", allo stesso modo: se il loro Prodotto Scalare è nullo, questi si dicono "ortogonali".

Il Prodotto Scalare, inoltre, è indicatore del grado di "similitudine tra due segnali", nel senso che se il Prodotto Scalare di due segnali è nullo, questi sono "massimamente dissimili" e contrariamente, più è massimo il Prodotto Scalare e più i segnali sono simili.

- Dalla Norma di un Segnale:
  - Ora che abbiamo introdotto il "Prodotto Scalare" tra Segnali, possiamo individuare un altro elemento che fa parte di questo Spazio Funzionale: la "Norma di un Segnale".

    Questa è definita come:

$$\|x(\cdot)\|^2 = < x(\cdot), x(\cdot) >$$

Quindi:

$$\|x(\cdot)\|^2 = < x(\cdot), x(\cdot) > = < x(\cdot) \cdot x^*(\cdot) > = \; < |x(\cdot)|^2 > = \begin{cases} \mathcal{P}_x \;\; se \;\; x(\cdot) \text{ è } un\ Segnale\ di\ Potenza \\ \mathcal{E}_x \;\; se \;\; x(\cdot) \text{ è } un\ Segnale\ di\ Energia \end{cases}$$

- Dalla Distanza tra Segnali:
  - Ora che abbiamo introdotto la "Norma" di un Segnale, possiamo individuare un altro elemento che fa parte di questo Spazio Funzionale: la "Distanza tra Segnali".

    Questa è definita come:

$$d\big(x(\cdot), y(\cdot)\big) = \|x(\cdot) - y(\cdot)\|$$

Spazio di Hilbert

Lo "Spazio di Hilbert" è uno "Spazio Funzionale" che è dotato e quindi costituito anche dal Prodotto Scalare.

Riconoscere Segnali di Potenza e Segnali di Energia

Consideriamo un Segnale, se sappiamo che questo Segnale è Periodico, automaticamente sappiamo che è di Potenza, ma il problema si pone nel caso in cui il Segnale non è periodico: in tal caso come facciamo a sapere se è un Segnale di Potenza o di Energia?

Bisogna per forza calcolare la Potenza del Segnale o l'Energia del Segnale e poi, sapendo che:

- Segnali di Potenza → Segnali con $\mathcal{P}_x\ finita \Longrightarrow \mathcal{E}_x\ infinita$
- Segnali di Energia → Segnali con $\mathcal{E}_x\ finita \Longrightarrow \mathcal{P}_x = 0$

Trarre le dovute conclusioni? No, questa non è l'unica soluzione, infatti:

"Per verificare se un Segnale è di Energia non è necessario eseguire il calcolo dell'integrale o della sommatoria, ma basta verificare se il Segnale è di quadrato sommabile, cioè se l'integrale o la sommatoria sono finiti. A tal fine è sufficiente applicare uno dei criteri di sommabilità delle funzioni, tenendo in conto che la sommabilità deve sussistere per il "quadrato del modulo" (cioè devo vedere se il quadrato del modulo della funzione è sommabile e quindi se il suo integrale è finito, perché la Potenza e l'Energia si calcolano come l'integrale del quadrato del modulo della funzione e io devo capire se la Potenza o l'Energia del Segnale hanno valore finito o se non lo hanno)."

Es. → Prendiamo per esempio il Segnale "$x(t) = sinc(t)$":

$$x(t) = sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Supponiamo di voler capire se questo Segnale è o meno un Segnale di Energia:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t) \, dt$$

Quindi dobbiamo verificare se quest'integrale è "finito" → Se lo è, allora $x(t) = sinc(t)$ è un Segnale di Energia, altrimenti è un Segnale di Potenza.

Sappiamo che $sinc^2(t)$ va ad infinito, ma affinché $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t) \, dt$ sia finito, basta che $sinc^2(t)$ vada a zero in modo sufficientemente lento.

Come già detto, uno dei criteri per verificare che l'integrale di questa funzione "$sinc^2(t)$" sia finito è quello di verificare che questa funzione sia "sommabile", ed uno dei modi per verificarlo consiste nel trovare un'altra funzione, maggiore di questa, e che sia sommabile. Infatti, se quest'ultima è sommabile, allora lo è per forza anche $sinc^2(t)$.

Quindi devo trovare un'altra funzione $\geq sinc^2(t)$ e che vada a zero in maniera sufficientemente lenta.

Sappiamo che:

$$sinc^2(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2}$$

E sappiamo anche che:

$$0 \leq \sin(x) \leq 1 \ \rightarrow Quindi \ \rightarrow \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2} \leq \frac{1}{(\pi t)^2}$$

Ora mi resta da capire se $\frac{1}{(\pi t)^2}$ sia una funzione che va ad infinito in maniera "sufficientemente lenta".

La risposta è si, infatti questa funzione decade con "t^2", quindi è sommabile e quindi l'integrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\pi t)^2} dt < \infty \Rightarrow \text{È} \ finito \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t) \, dt < \infty \Rightarrow \text{È} \ finito$$

Quindi si, il Segnale $x(t) = sinc(t)$ è un Segnale di Energia.

N.B. → Affinché una Funzione sia Sommabile, questa deve "decadere a zero abbastanza velocemente", cioè almeno con t^2, vale a dire che al denominatore della funzione ci deve essere almeno t^2.

Se ad esempio abbiamo la funzione "$1/_{t^1}$", allora questa non decade a zero abbastanza velocemente e quindi NON va ad infinito abbastanza lentamente, perché serve almeno t^2 al denominatore.

Funzione di Correlazione

La Funzione di Correlazione di due Segnali:

- Continui "$x(t)$" ed "$y(t)$", è definita come il Prodotto Scalare dei due Segnali ma con $y(t)$ Traslato Temporalmente:

$$r_{xy}(\tau) = < x(t), y(t-\tau) > = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

- Discreti "$x(n)$" ed "$y(n)$", è definita come il Prodotto Scalare dei due Segnali ma con $y(n)$ Traslato di una quantità "m":

$$r_{xy}(m) =< x(n), y(n-m) > = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot y^*(n-m)$$

Essendo il Prodotto Scalare di due Segnali "$x(t)$" ed "$y(t)$", come già detto, indicatore del grado di similitudine tra questi, automaticamente capiamo che la Funzione di Correlazione indica il grado di similitudine tra il Segnale $x(t)$ ed il Segnale $y(t-\tau)$.

Funzione di Autocorrelazione

La Funzione di Autocorrelazione di un Segnale:

- Continuo "$x(t)$", è definita come il Prodotto Scalare del Segnale e dello stesso Segnale Traslato Temporalmente:

$$r_x(\tau) = < x(t), x(t-\tau) > = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt$$

- Discreto "$x(n)$", è definita come il Prodotto Scalare del Segnale e dello stesso Segnale Traslato di una quantità "m":

$$r_x(m) =< x(n), x(n-m) > = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot x^*(n-m)$$

Essendo il Prodotto Scalare di due Segnali "$x(t)$" ed "$y(t)$", come già detto, indicatore del grado di similitudine tra questi, automaticamente capiamo che la Funzione di Autocorrelazione indica il grado di similitudine tra il Segnale $x(t)$ e lo stesso Segnale ma Traslato "x$(t-\tau)$". Questo può tornarci utile nel capire se un Segnale varia molto velocemente nel tempo o meno.

Es. → Funzione di Autocorrelazione di un Segnale Rettangolare.

Consideriamo un Segnale Rettangolare:

$$x(t) = A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

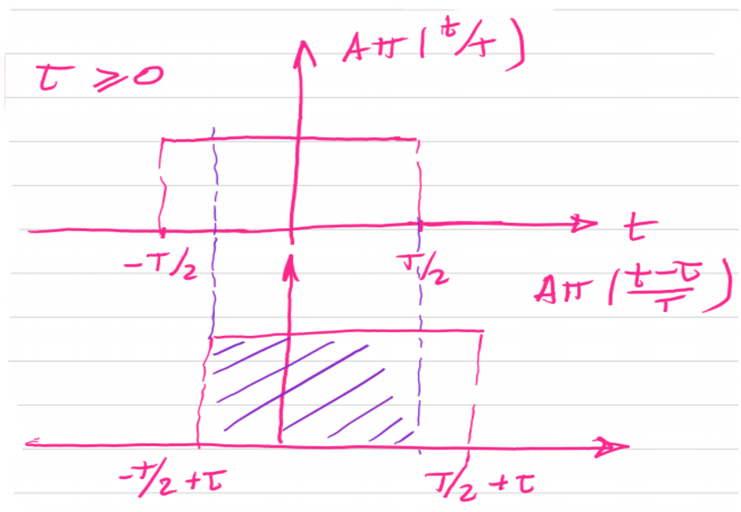
Calcoliamo la sua Funzione di Autocorrelazione, considerando che il Segnale Rettangolare è un Segnale di Energia:

$$r_x(\tau) = < x(t), x(t-\tau) > = < A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right), \left(A \cdot \prod\left(\frac{t-\tau}{T}\right)\right)^* > = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt$$

In tal caso la Funzione che abbiamo considerato è una Funzione Reale, non Complessa, quindi il suo Coniugato corrisponde alla Funzione stessa:

$$r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot\ A \cdot \prod\left(\frac{t-\tau}{T}\right) dt$$

Consideriamo $\tau \geq 0$ e rappresentiamo questi Segnali Graficamente per avere un'idea più chiara:



Io devo calcolare l'integrale del loro prodotto, ma come possiamo vedere dal grafico, il loro prodotto è $\neq 0$ soltanto nell'area tratteggiata, perché dovendo moltiplicare i due segnali, tra $-{}^{T}/_{2}$ e $-{}^{T}/_{2} + \tau$ il prodotto è zero dato che il secondo segnale vale zero in quell'intervallo e tra ${}^{T}/_{2}$ e ${}^{T}/_{2} + \tau$ il prodotto è zero dato che il primo segnale vale zero in quell'intervallo.

Per cui:

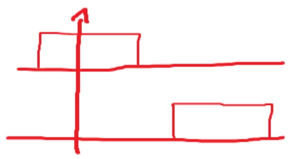
$$r_x(\tau) = \int_{-{}^{T}/_{2}+\tau}^{{}^{T}/_{2}} A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot A \cdot \prod\left(\frac{t-\tau}{T}\right) dt$$

In quest'intervallo considerato, i segnali sono costanti: il primo vale "A" ed il secondo vale "A", quindi il loro prodotto è pari ad A^2 :

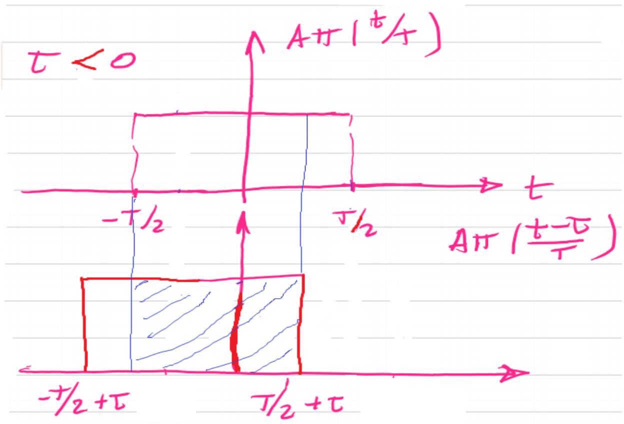
$$r_x(\tau) = \int_{-{}^{T}/_{2}+\tau}^{{}^{T}/_{2}} A^2\, dt = A^2 \cdot [t]_{-{}^{T}/_{2}+\tau}^{{}^{T}/_{2}} = A^2 \cdot \left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} + \tau\right)\right] = A^2 \cdot \left[\frac{T}{2} + \frac{T}{2} - \tau\right] \rightarrow$$

$$r_x(\tau) = A^2 \cdot [T - \tau] = \begin{cases} A^2 \cdot [T-\tau] & se \quad 0 \leq \tau \leq T \\ 0 & se \quad \tau > T \end{cases}$$

Infatti, se $\tau > T$:



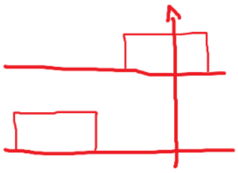
Se ora consideriamo $\tau < 0$, ci accorgiamo che l'intervallo nel quale il prodotto tra segnali è $\neq 0$ è il seguente:



$$r_x(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2+\tau} A^2\, dt = A^2 \cdot \left[\frac{T}{2} + \tau - \left(-\frac{T}{2}\right)\right] = A^2 \cdot \left[\frac{T}{2} + \tau + \frac{T}{2}\right] \rightarrow$$

$$r_x(\tau) = A^2 \cdot [T + \tau] = \begin{cases} A^2 \cdot [T + \tau] & se \quad 0 \leq \tau \leq T \\ 0 & se \quad \tau < -T \end{cases}$$

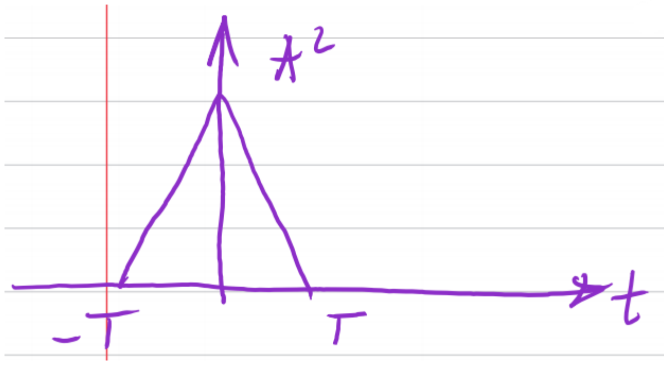
Infatti, se $\tau > T$:



Ora, unendo i risultati ottenuti:

$$r_x(\tau) = A^2 \cdot [T - |\tau|] = \begin{cases} A^2 \cdot [T - |\tau|] & se \quad |\tau| \leq T \\ 0 & se \quad |\tau| > T \end{cases}$$

E ciò che abbiamo ottenuto equivale proprio ad una Funzione Triangolare:



Quindi concludiamo affermando che:

"L'autocorrelazione di un Segnale Rettangolare, è un Segnale Triangolare".

Più precisamente: l'autocorrelazione di un Segnale Rettangolare di ampiezza A e che è compreso nell'intervallo $(-T/_2, T/_2)$, è un Segnale Triangolare di ampiezza massima A^2 e che è compreso nell'intervallo $(-T, T)$.

Infatti, noi sappiamo che un Segnale Triangolare è definito come:

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{T}\right| & se \quad |t| \leq T \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Ed abbiamo ottenuto:

$$r_x(\tau) = A^2 \cdot [T - |\tau|]$$

Che possiamo scrivere come:

$$r_x(\tau) = A^2 \cdot [T - |\tau|] = A^2 T \cdot \left[1 - \frac{|\tau|}{T}\right] = A^2 T \cdot \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

Es. → Funzione di Autocorrelazione di un Segnale Costante.

Consideriamo un Segnale Costante:

$$x(t) = A$$

Calcoliamo la sua Funzione di Autocorrelazione, considerando che il Segnale Costante è un Segnale di Potenza:

$$r_x(\tau) = < x(t), x(t-\tau) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt$$

In tal caso la Funzione che abbiamo considerato è una Funzione Reale, non Complessa, quindi il suo Coniugato corrisponde alla Funzione stessa:

$$r_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} A \cdot A\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{2T}} \cdot A^2 \cdot \cancel{2T} \to$$

$$r_x(\tau) = A^2$$

Quindi concludiamo affermando che:

"L'autocorrelazione di un Segnale Costante, è ancora un Segnale Costante".

Più precisamente: l'autocorrelazione di un Segnale Costante di ampiezza A è un Segnale Costante di ampiezza A^2.

Es. → Mutua Correlazione tra due Fasori.

Consideriamo due Fasori:

$$x(t) = A_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j2\pi f_1 t} \quad e \quad y(t) = A_2 \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j2\pi f_2 t}$$

Calcoliamone la sua Funzione di Correlazione, considerando che i Fasori sono Segnali Periodici, quindi Segnali di Potenza:

$$r_{xy}(\tau) = < x(t), y(t-\tau) > = < A_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j2\pi f_1 t}, A_2 \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j2\pi f_2 (t-\tau)} > \to$$

In tal caso abbiamo dei Fasori, che sono Segnali Complessi, per cui il coniugato si ottiene cambiando segno alla parte immaginaria:

$$r_{xy}(\tau) = < A_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j2\pi f_1 t} \cdot \left(A_2 \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j2\pi f_2 (t-\tau)} \right)^* > \to$$

$$r_{xy}(\tau) = < A_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j2\pi f_1 t} \cdot A_2 \cdot e^{-j\varphi_2} \cdot e^{-j2\pi f_2 (t-\tau)} > \to$$

$$r_{xy}(\tau) = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot < e^{j2\pi f_1 t} \cdot e^{-j2\pi f_2 (t-\tau)} > \to$$

$$r_{xy}(\tau) = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot < e^{j2\pi f_1 t} \cdot e^{-j2\pi f_2 t} \cdot e^{j2\pi f_2 \tau} > \to$$

In realtà, dato che la Funzione di Correlazione di Segnali di Potenza si calcola come:

$$r_{xy}(\tau) = < x(t), y(t-\tau) > = < x(t) \cdot y^*(t-\tau) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

Questo significa che " τ " non è la variabile d'integrazione e quindi posso portare fuori dalla Media Temporale anche il termine " $e^{j2\pi f_2 \tau}$ " e scrivere:

$$r_{xy}(\tau) = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot e^{j2\pi f_2 \tau} \cdot < e^{j2\pi f_1 t} \cdot e^{-j2\pi f_2 t} > \to$$

$$r_{xy}(\tau) = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot e^{j2\pi f_2 \tau} \cdot < e^{j2\pi (f_1 - f_2) t} >$$

Ma $e^{j2\pi(f_1-f_2)t}$ è un Fasore e noi sappiamo che, come calcolato e dimostrato in precedenza, la Media Temporale di un Fasore è pari a 0 se la sua Frequenza è $\neq 0$, quindi:

- $r_x(\tau) = 0 \quad se \quad f_1 - f_2 \neq 0 \rightarrow f_1 \neq f_2\,;$
- $r_x(\tau) = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \cdot e^{j2\pi f_2 \tau} \quad se \quad f_1 - f_2 = 0 \rightarrow f_1 = f_2\,.$

N.B. → Due Fasori che hanno Frequenza uguale, si dicono "Isofrequenziali".

N.B. → La Media Temporale di un Fasore è pari a $zero$ salvo quando la frequenza del Fasore è pari a $zero$, perché in tal caso:

$$A \cdot e^{j(2\pi f t+\varphi)} \ se\ f = 0 \ \rightarrow A \cdot e^0 = A$$

Quindi il Fasore si ridurrebbe ad un Segnale Costante e la Media Temporale di un Segnale Costante è $\neq 0$.

N.B. → Incoerenza → Se la Funzione di Correlazione di due Segnali è pari a zero, allora questi si dicono "Incoerenti":

$$r_{xy}(\tau) = 0 \rightarrow x(t)\ ed\ y(t)\ sono\ incoerenti\ \forall\ \tau$$

Incoerenza e Ortogonalità

Incoerenza $\neq$ Ortogonalità:

Incoerenza $\Longrightarrow$ Ortogonalità

Ortogonalità $\not\Longrightarrow$ Incoerenza

Se la Funzione di Correlazione di due Segnali è pari a zero, allora questi si dicono "Incoerenti":

- Incoerenza → $r_{xy}(\tau) = 0 \rightarrow x(t)\ ed\ y(t)\ sono\ incoerenti\ \forall\ \tau$

Se il Prodotto Scalare di due Segnali è pari a zero, allora questi si dicono "Ortogonali":

- Ortogonalità → $< x(t), y(t) > = 0 \rightarrow x(t)\ ed\ y(t)\ sono\ ortogonali.$

N.B. → Prodotto Scalare e Funzione di Correlazione → Il Prodotto Scalare di due Segnali può essere indicato anche come la Funzione di Correlazione "nello zero", cioè come "$r_{xy}(0)$" infatti:

$$Prodotto\ Scalare = < x(t), y(t) > = < x(t) \cdot y^*(t) >$$

$$r_{xy}(\tau) = Funzione\ di\ Correlazione = < x(t), y(t-\tau) > = < x(t) \cdot y^*(t-\tau) >$$

Quindi:

$$r_{xy}(0) = < x(t), y(t-0) > = < x(t), y(t) > = Prodotto\ Scalare$$

Proprietà della Funzione di Correlazione

1. Valore nell'Origine:

$$r_{xy}(0) = < x(t), y(t) > = Prodotto\ Scalare = \begin{cases} \mathcal{P}_x \\ \mathcal{E}_x \end{cases}$$

Dimostrazione:

Il Prodotto Scalare di due Segnali può essere indicato anche come la Funzione di Correlazione "nello zero", cioè come "$r_{xy}(0)$" infatti:

$$Prodotto\ Scalare = < x(t), y(t) > = < x(t) \cdot y^*(t) >$$

$$r_{xy}(\tau) = Funzione\ di\ Correlazione = < x(t), y(t-\tau) > = < x(t) \cdot y^*(t-\tau) >$$

Quindi:

$$r_{xy}(0) = < x(t), y(t-0) > = < x(t), y(t) > = Prodotto\ Scalare$$

2. Simmetria Coniugata:

$$r_{xy}(\tau) = r_{xy}^{*}(-\tau)$$

Dimostrazione:

$$r_{xy}(\tau) = < x(t), y(t-\tau) > = < y(t-\tau), x(t) >^{*} = r_{xy}^{*}(-\tau)$$

3. Limite della Funzione di Correlazione:

$$|r_{xy}(t)| \leq \|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$$

Dimostrazione:

Il Prof ha detto che "Non la dimostra", quindi la dimostrazione c'è, ma non fa parte del programma.

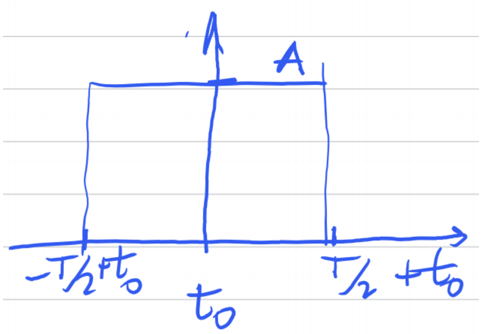
Esercizio 1, Slide 5, Pag. 33 → Applicazione Proprietà e Regole Studiate:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod(3t-1) \cdot \delta(4t-1)\, dt + 5 \cdot sinc(t) \cdot \delta(t-1)$$

Consideriamo il primo termine, il quale indica un Segnale Rettangolare:

$$\prod(3t-1)$$

Sapendo che un Segnale Rettangolare di Ampiezza "A", Centrato in "t_0" e di Durata "T" è definito come:

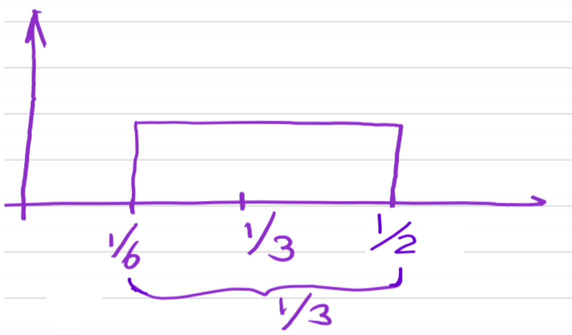


$$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$

Allora scriviamo il nostro segnale come:

$$\prod(3t-1) = \prod\left[3\left(t-\frac{1}{3}\right)\right] = \prod\left(\frac{t-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right)$$

E capiamo che questo è un Segnale Rettangolare di Ampiezza "1", Centrato in "$\frac{1}{3}$" e di Durata "$\frac{1}{3}$":



Prendiamo il secondo termine, ossia l'Impulso di Dirac Continuo e Traslato:

$$\delta(4t-1) = \frac{1}{4} \cdot \delta\left(t - \frac{1}{4}\right)$$

Per la Proprietà di Campionamento dell'Impulso di Dirac Traslato abbiamo che:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

Quindi abbiamo:

$$x(t) = \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right) \cdot \delta\left(t-\frac{1}{4}\right) dt + 5 \cdot sinc(t) \cdot \delta(t-1) =$$

$$x(t) = \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right) dt + 5 \cdot sinc(t) \cdot \delta(t-1) =$$

$$x(t) = \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod\left(-\frac{1}{4}\right) dt + 5 \cdot sinc(t) \cdot \delta(t-1) =$$

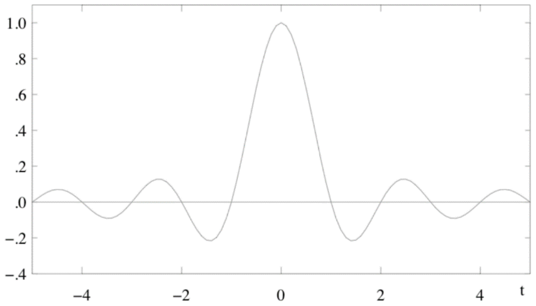
$\prod\left(-\frac{1}{4}\right)$ sarebbe la Funzione Rettangolare di Ampiezza 1 nell'istante temporale "$-\frac{1}{4}$" e la sua area è proprio pari ad 1, quindi:

$$x(t) = \frac{1}{4} + 5 \cdot sinc(t) \cdot \delta(t-1)$$

Ora, sempre considerando la Proprietà di Campionamento dell'Impulso di Dirac Traslato, abbiamo che:

$$x(t) = \frac{1}{4} + 5 \cdot sinc(1)$$

Ma ricordandoci com'è definita la Funzione "$sinc(t)$":



Ricordiamoci che questo vale 0 proprio in corrispondenza dei Valori Discreti (1, 2, 3, ecc…)

Quindi:

$$x(t) = \frac{1}{4} + 5 \cdot 0 = 0$$

Esercizio 3, Slide 5, Pag. 33 → Ortogonalità:

Dati due Segnali:

$$x_1(t) = \sin(2\pi \cdot 10t) \quad e \quad x_2(t) = \prod\left(\frac{t}{10}\right)$$

Verificare se questi sono Ortogonali.

Soluzione:

L'Ortogonalità si ha quando il loro Prodotto Scalare è pari a zero, cioè se:

$$< x_1(t), x_2(t) > = 0$$

Nel nostro caso:

$$< x_1(t), x_2(t) > = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi \cdot 10t) \cdot \prod\left(\frac{t}{10}\right) dt$$

Rappresentiamo i due Segnali graficamente:

Quindi:

$$< x_1(t), x_2(t) > = \int_{-5}^{5} \sin(2\pi \cdot 10t) \cdot \prod\left(\frac{t}{10}\right) dt$$

Dato che la Moltiplicazione tra due Segnali si calcola come la moltiplicazione del valore dei segnali punto per punto, e dato che il Segnale Rettangolare in questione ha ampiezza Unitaria, il suo valore punto per punto nell'intervallo $(-5, 5)$ è sempre pari ad 1. Quindi:

$$< x_1(t), x_2(t) > = \int_{-5}^{5} \sin(2\pi \cdot 10t)\, dt = \left[-\frac{1}{2\pi \cdot 10} \cdot \cos(2\pi \cdot 10t)\right]_{-5}^{5} = -\frac{1}{2\pi \cdot 10} \cdot [\cos(2\pi \cdot 10t)]_{-5}^{5} =$$

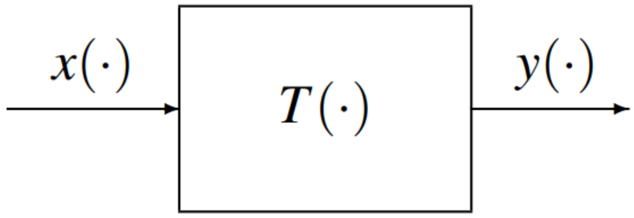
$$< x_1(t), x_2(t) > = -\frac{1}{2\pi \cdot 10} \cdot \left[\cos(2\pi \cdot 50) - \cos\big(2\pi \cdot (-50)\big)\right] = -\frac{1}{2\pi \cdot 10} \cdot [1 - 1] = 0$$

Quindi, si: i Segnali sono Ortogonali.

Sistemi nel dominio del Tempo

Un sistema può essere rappresentato mediante un operatore $T(\cdot)$ che converte il segnale $x(\cdot)$ detto "ingresso" nel segnale $y(\cdot)$ detto "uscita".

L'azione del sistema $T(\cdot)$ sul segnale può essere schematizzata come:



Per un Sistema Continuo il legame Ingresso/Uscita e definito dalla trasformazione:

$$y(t) = T[x(t), t]$$

Per un Sistema Discreto, ugualmente, abbiamo:

$$y(n) = T[x(n), n]$$

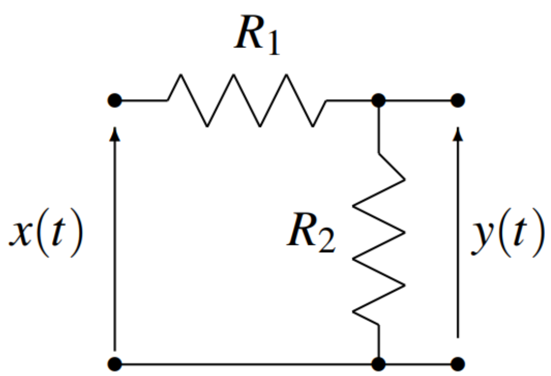
Cioè l'Uscita è funzione del Segnale d'Ingresso, ma anche del tempo.

I Sistemi in cui l'Uscita dipende sia dall'Ingresso che dal Tempo sono detti:

"Sistemi Tempo – Varianti"

Partitore Resistivo o Partitore di Tensione

Il Partitore Resistivo è un Sistema Tempo – Variante rappresentato attraverso il seguente schema ed il cui legame "Ingresso – Uscita " è definito attraverso la seguente equazione:



$$y(t) = a \cdot x(t) \quad con \quad a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Ritardo Elementare di una Posizione

Il Ritardo Elementare di una Posizione è un Sistema Discreto il cui legame "Ingresso – Uscita" è definito attraverso la seguente equazione:

$$y(n) = x(n-1)$$

Filtro a Media Mobile – MA (Moving Average)

Il Filtro a Media Mobile è un Sistema il cui legame "Ingresso – Uscita" è definito attraverso la seguente equazione:

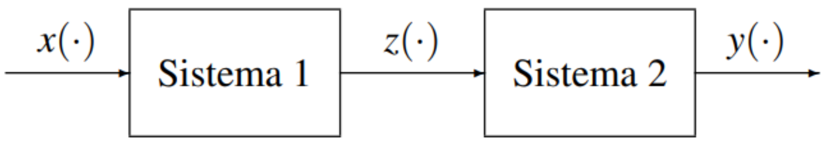
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k \cdot x(n-k)$$

Cioè un filtro il cui in cui il Valore Attuale dell'Uscita $y(n)$ è dato dalla somma pesata, con pesi "b_k", del Valore Attuale dell'Ingresso $x(n)$ e di quelli precedenti $x(n-k)$ per $k = 1 \ldots N$.

Sistemi Complessi e Tipi di Connessioni

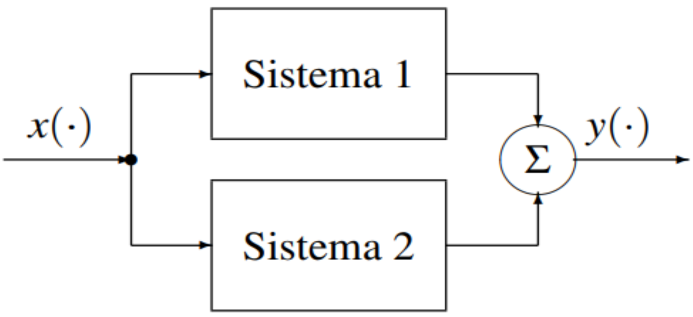
I Sistemi Complessi sono Sistemi costruiti attraverso Connessioni tra più Sistemi Semplici. Esistono tre fondamentali tipi di connessioni:

1. Connessione in Cascata (anche detta in Serie)
   Esempio con due Sistemi:



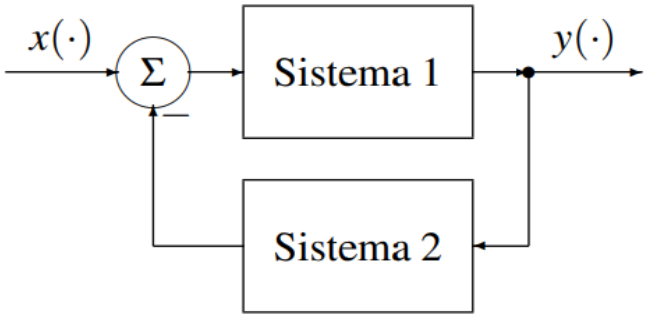
Connessione in cascata

2. Connessione in Parallelo
   Esempio con due Sistemi:



Connessione in parallelo

3. Connessione in Controreazione
   Esempio con due Sistemi:



Connessione in controreazione

Proprietà dei Sistemi

1. **Dispersività**:

   Un Sistema si dice “Dispersivo” o “Con Memoria” se → L’Uscita in un determinato istante di tempo dipende in genere da tutto il Segnale di Ingresso;

   Viceversa, un Sistema si dice “Non Dispersivo” o “Senza Memoria” se → Il valore “$y(t)$” (o “$y(n)$”) dell’Uscita all’istante “t” (o “n”), dipende solo dal corrispondente Valore dell’Ingresso nello stesso istante di tempo.
   Esempio:

   $$y(n) = n \cdot x(n)$$

   N.B. → Il Partitore Resistivo è un Sistema Non Dispersivo.

   N.B. → Il Ritardo Elementare è un Sistema Dispersivo.

   N.B. → Il Filtro a Media Mobile è un Sistema Dispersivo.

2. **Causalità**:

   Un Sistema è “Causale” se il valore “$y(t)$” (o “$y(n)$”) dell’Uscita all’istante “t” (o “n”) dipende solo dai valori assunti da “$x(t)$” (o “$x(n)$”) negli istanti di tempo precedenti, “t” (o “n”) compreso.

   Cioè l’Uscita “$y(t)$” (o “$y(n)$”) di un Sistema “Causale” non dipende dall’Ingresso negli istanti “futuri” di tempo, ma solo dall’Ingresso negli istanti precedenti di tempo, con l’istante “t” o “n” compreso.

   Esempio:

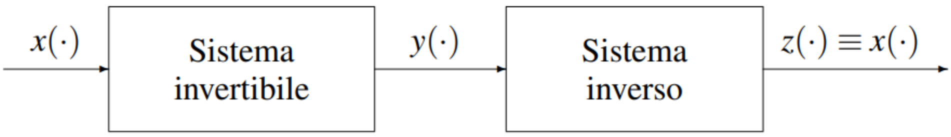
   Un Filtro a Media Mobile il cui il cui legame “Ingresso – Uscita” è definito attraverso la seguente equazione:

   $$y(n) = b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n+1) \quad con \quad b_1 \neq 0$$

   È un Sistema Discreto, Dispersivo e Non Causale.

3. **Invertibilità**:

   Un Sistema è “Invertibile” se esiste un altro Sistema, detto “Sistema Inverso”, tale che la Connessione in Cascata del Sistema Invertibile e del suo Sistema Inverso, realizza la trasformazione identica:



   Esempio:

   Consideriamo un Sistema il cui legame “Ingresso – Uscita” è definito attraverso la seguente equazione:

   $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

Questo Sistema realizza la "Somma Corrente" dei Valori dell'Ingresso ed è denominato "Sistema Accumulatore", proprio perché somma i Valori dell'Ingresso $x(k)$ per tutti gli istanti precedenti ad "n", con "n" incluso.

Questo Sistema è Invertibile ed il suo Sistema Inverso è il Sistema Filtro a Media Mobile il cui legame "Ingresso – Uscita" è definito dall'equazione:

$$z(n) = y(n) - y(n-1) = x(n)$$

N.B. → Differenza Prima → Un Sistema con legame "Ingresso – Uscita":

$$z(n) = \nabla_1 [y(n)] = y(n) - y(n-1)$$

È detto "Differenza Prima" ed è denotato attraverso il Simbolo " ∇_1 ".

4. **Invarianza Temporale**:

Un Sistema si dice "Temporalmente Invariante" se → Una Traslazione dell'Ingresso comporta una Traslazione della stessa entità anche dell'Uscita:

- Tempo Continuo → $x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - T) \rightarrow y(t - T)$
- Tempo Discreto → $x(n) \rightarrow y(n) \Rightarrow x(n - N) \rightarrow y(n - N)$

Esempio:

Consideriamo un Sistema il cui legame "Ingresso – Uscita" è definito dall'equazione:

$$y(n) = n \cdot x(n)$$

Quindi noi sappiamo che per l'Ingresso "$x(n)$":

$$x(n) \rightarrow y(n) = n \cdot x(n)$$

Se però consideriamo l'Ingresso Traslato Temporalmente "$x(n-N)$", allora:

$$x(n-N) \rightarrow y(n) = n \cdot x(n-N)$$

Che è diverso da:

$$y(n-N) = (n-N) \cdot x(n-N)$$

Quindi capiamo che questo Sistema NON è Temporalmente Invariante.

5. **Stabilità BIBO (Bounded Input – Bounded Output)**:

Un Sistema è Stabile *BIBO* se → Ad un qualunque Ingresso Limitato, corrisponde un'Uscita Limitata.

N.B. → In tal caso, per "Ingresso Limitato", non ci si riferisce ad "Ingresso Limitato Temporalmente", cioè il limite non è relativo all'Asse delle Ascisse (ossia al tempo) ma all'Asse delle Ordinate, cioè ai valori che il Segnale in Ingresso può assumere.

Esempio di Sistema Stabile BIBO:

Consideriamo il Sistema Filtro a Media Mobile definito dall'equazione:

$$|y(n)| = \sum_{k=0}^{N} |b_k \cdot x(n-k)|$$

Devo verificare che la somma degli Ingressi che vanno da $x(n)$ ad $x(n-N)$ sia "limitata".

Questa somma è limitata se è maggiorabile → Quindi troviamo una sommatoria maggiore di questa sopra:

$$\sum_{k=0}^{N} |b_k \cdot x(n-k)| \leq \sum_{k=0}^{N} |b_k| \cdot B \quad con \quad B > |x(n-k)|$$

Questa Sommatoria che ho definito, la posso scrivere come:

$$\sum_{k=0}^{N} |b_k| \cdot B = B \cdot \sum_{k=0}^{N} |b_k|$$

Essendo "B" e "b_k" due Costanti, allora queste sono per forza limitate e quindi esiste per forza una Costante "C" tale che:

$$B \cdot \sum_{k=0}^{N} |b_k| \leq C$$

Quindi abbiamo dimostrato che $\sum_{k=0}^{N} b_k \cdot x(n-k)$ è limitata e cioè che anche l'Uscita $y(n)$ lo è.

Esempio di Sistema NON Stabile BIBO:

Il Sistema definito dall'equazione $|y(n)| = |n \cdot x(n)|$, non è Stabile BIBO, infatti anche scegliendo un ingresso limitato:

$$|x(n)| \leq B$$

Comunque avremo:

$$|y(n)| \leq |n| \cdot B$$

Che non è limitata, infatti, per $n \to \infty$, l'Uscita $y(n) \to \infty$.

6. **Linearità**:

Un Sistema è Lineare se è Omogeneo ed Additivo:

- Omogeneità → Ad un Cambiamento di Scala per le Ampiezze dell'Ingresso, corrisponde uno stesso Cambiamento di Scala delle Ampiezze dell'Uscita, cioè:

$$x(\cdot) \to y(\cdot) \Rightarrow a \cdot x(\cdot) \to a \cdot y(\cdot) \quad \forall\, a, x(\cdot)$$

Questo significa automaticamente che se c'è Omogeneità, ad un Ingresso Nullo, DEVE corrispondere un'Uscita Nulla;

- Additività → La risposta ad un Segnale Somma è la Somma delle Singole risposte, cioè:

$$\left.\begin{matrix} x_1(\cdot) \to y_1(\cdot) \\ x_2(\cdot) \to y_2(\cdot) \end{matrix}\right\} \to x_1(t) + x_2(t) \to y_1(\cdot) + y_2(t) \quad \forall\, x(\cdot), y(\cdot)$$

Quindi, unendo le due Proprietà, deduciamo che un Sistema è Lineare se:

$$a_1 \cdot x_1(\cdot) \to a_2 \cdot x_2(\cdot) \Rightarrow a_1 \cdot y_1(\cdot) \to a_2 \cdot y_2(\cdot) \quad \forall\, a_1, a_2, x_1(\cdot), x_2(\cdot)$$

Convoluzione Discreta

Consideriamo un Sistema Lineare e Tempo Invariante e consideriamo anche un Segnale Discreto "$x(n)$".

Per la Proprietà di "Riproducibilità" dell'Impulso Discreto, possiamo scrivere $x(n)$ come:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

Ora supponiamo che, nel Sistema in questione, ad un certo ingresso "$x_1(n) = \delta(n-k)$", corrisponda la seguente Uscita del Sistema:

$$x_1(n) = \delta(n-k) \rightarrow h(n-k)$$

Dato che abbiamo supposto che il Sistema in Questione sia anche Tempo Invariante, allora:

$$\delta(n-k) \rightarrow h(n-k) \Rightarrow \delta(n) \rightarrow h(n)$$

Questa risposta "$h(n)$" del sistema è detta "Risposta Impulsiva del Sistema", perché in effetti è la Risposta del Sistema all'Impulso "$\delta(n)$" in ingresso.

Noi sappiamo che in un Sistema Lineare (e quindi Additivo), la risposta ad un Segnale Somma è la Somma delle Singole risposte, per cui:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Questa Relazione qui sopra, è molto vantaggiosa ed utile, infatti ci dice che se conosciamo la Risposta Impulsiva del Sistema, cioè se $h(n)$ ci è nota, attraverso questa Sommatoria qui sopra, siamo in grado di calcolare l'Uscita del Sistema per qualsiasi Segnale in Ingresso "$x(k)$"!

Cioè basta conoscere un' "Uscita Universale" del Sistema (che è la Risposta Impulsiva), per poter calcolare l'Uscita del Sistema per qualsiasi ingresso.

Ora, se poniamo:

$$n - k = m \rightarrow k = n - m$$

Possiamo scrivere la sommatoria anche come:

$$y(n) = \sum_{m=\infty}^{-\infty} x(n-m) \cdot h(m)$$

Perché $n - k = m$ e quindi quando $k = -\infty \rightarrow n - (-\infty) = m \rightarrow m = \infty$ e quando $k = \infty \rightarrow n - \infty = = m \rightarrow m = -\infty$, però per comodità ed ordine invertiamo gli "infiniti" della sommatoria:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) \cdot h(m)$$

Le Relazioni che abbiamo appena identificato, si definiscono "Convoluzione":

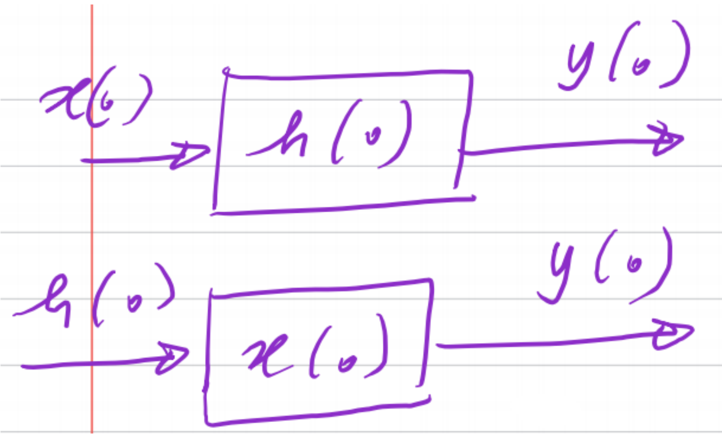
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) = y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) \cdot h(m) = Convoluzione = x(n) * h(n)$$

La Convoluzione si indica come:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Che si legge come "$y(n)$" Convoluto con "$h(n)$".

Questo, in termini di Sistemi, significa che:



Sia che io abbia un Sistema con ingresso $x(\cdot)$ e risposta impulsiva $h(\cdot)$, o viceversa, l'uscita sarà sempre $y(\cdot)$.

Questo Legame Convolutivo è valido per Sistemi Lineari e Tempo Invarianti.

La Convoluzione è stata presa molto in considerazione recentemente per lo sviluppo di Reti Neurali dette appunto "Convolutional Neural Network", nelle quali i legami e le connessioni sono di tipo Convolutivo.

Convoluzione Continua

La Convoluzione sussiste anche per Sistemi Lineari Continui e Tempo Invarianti Continui:

Sfruttando sempre la Proprietà di Riproducibilità dell'Impulso (stavolta Continuo, o di Dirac), scriveremo che:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau$$

Questa indica una "sovrapposizione" in ingresso, cioè la $x(t)$ è data come una sovrapposizione delle $\delta(t-\tau)$ ed i coefficienti della sovrapposizione sono le $x(\tau)$.

Dato che abbiamo supposto che il Sistema in Questione sia Tempo Invariante, allora:

$$\delta(t-\tau) \to h(t-\tau) \Rightarrow \delta(t) \to h(t)$$

E dato che abbiamo supposto che il Sistema sia Lineare, allora ad una sovrapposizione in ingresso, corrisponde una sovrapposizione in uscita:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

Quindi:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Es. → Convoluzione Discreta.

Consideriamo l'Ingresso "$x(n) = u(n)$" e la Risposta Impulsiva "$h(n) = a^n \cdot u(n)\ con\ |a| < 1$", allora:

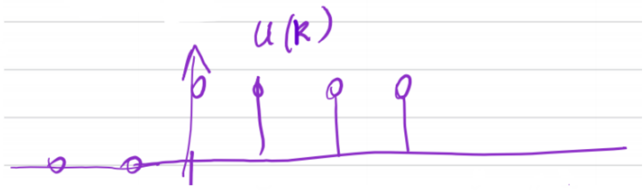
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) \cdot h(k) \to$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k) \cdot a^k \cdot u(k)$$

Supponiamo che $n \geq 0$, allora, rappresentiamo i Segnali Graficamente:

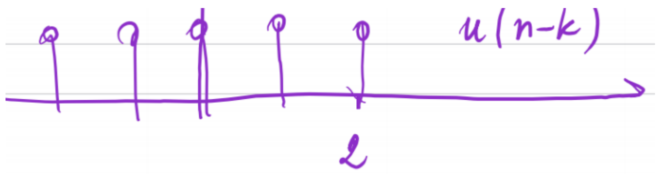
$u(k) \quad \to$

Quindi $u(k) \neq 0$ per $k \geq 0$.



Per rappresentare "$u(n-k)$" supponiamo un $n=2$:

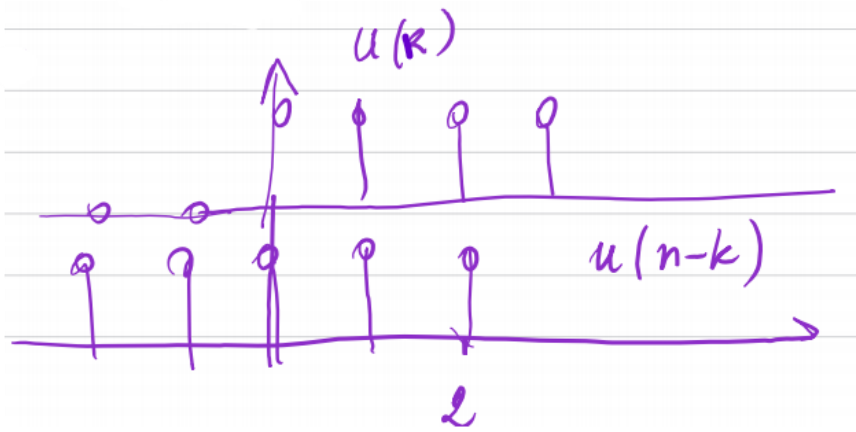
$u(n-k) \quad \rightarrow$



Perché $u(n-k) \neq 0$ per $n-k \geq 0$

Cioè $u(n-k) \neq 0$ per $n \geq k \ \rightarrow k \leq n$

Quindi il loro prodotto è $\neq 0$ nell'intervallo $(0, n)$:



In particolare, il loro prodotto in quest'intervallo è pari ad 1, poiché stiamo parlando di Funzioni a Gradino Unitario.

E quindi:

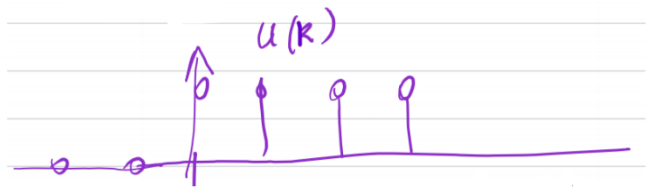
$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad per \quad n \geq 0$$

Dovremmo fare lo stesso anche per $n<0$, ma la vita è troppo breve per sprecare il tempo a farlo.

Anzi no:

Supponiamo che $n<0$, allora, rappresentiamo i Segnali Graficamente:

$u(k) \quad \rightarrow$

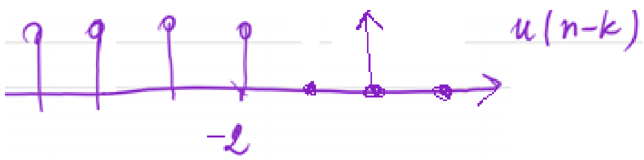


Quindi $u(k) \neq 0$ per $k \geq 0$.

"$u(k)$" è sempre lo stesso, perché non dipende da "n".

Per rappresentare "$u(n-k)$", invece, supponiamo un $n=-2$:

$u(n-k) \quad \rightarrow$



Perché $u(n-k) \neq 0$ per $n-k \geq 0$

Cioè $u(n-k) \neq 0$ per $n \geq k \ \rightarrow k \leq n$

Quindi il loro prodotto è sempre $=0$.

E quindi concludiamo dicendo che:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} u(n-k) \cdot a^k \cdot u(k) = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad per \quad n \geq 0 \\ 0 \quad per \quad n < 0 \end{cases}$$

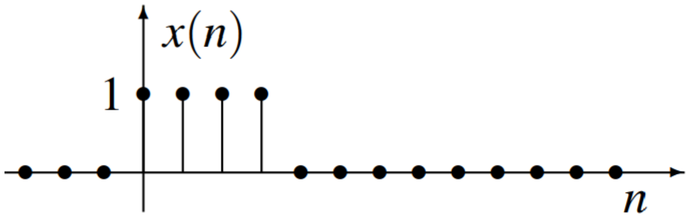
Convoluzione di Segnali Discreti Finiti

Quando si ha a che fare con Sequenze di Lunghezza Finita, cioè Segnali Discreti Finiti, allora la Convoluzione può essere calcolate in modo più semplice:

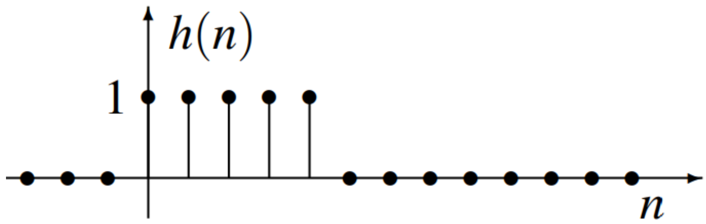
Es. → Convoluzione di Impulsi Rettangolari:

Consideriamo l'Ingresso "$x(n) = R_4(n)$" e la Risposta Impulsiva "$h(n) = R_5(n)$" ed analizziamo le due Sequenze Rettangolari graficamente:

$x(n) = R_4(n) =$



$h(n) = R_5(n) =$

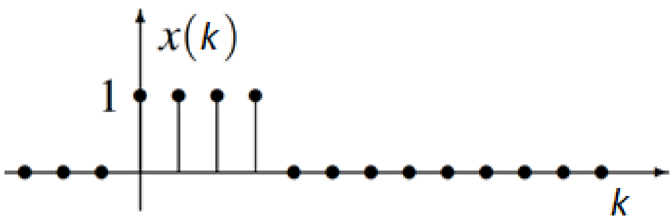


La Convoluzione è definita come:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

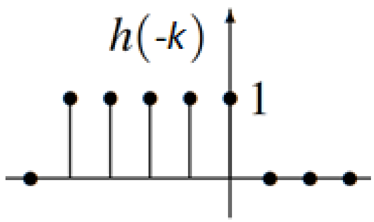
Dove:

$x(k) = R_4(k) =$



$h(n-k) = R_5(n-k)$ → Ora supponiamo di avere $n = 0$:

$R_5(n-k)$ $per\ n = 0$ $\rightarrow R_5(-k) =$

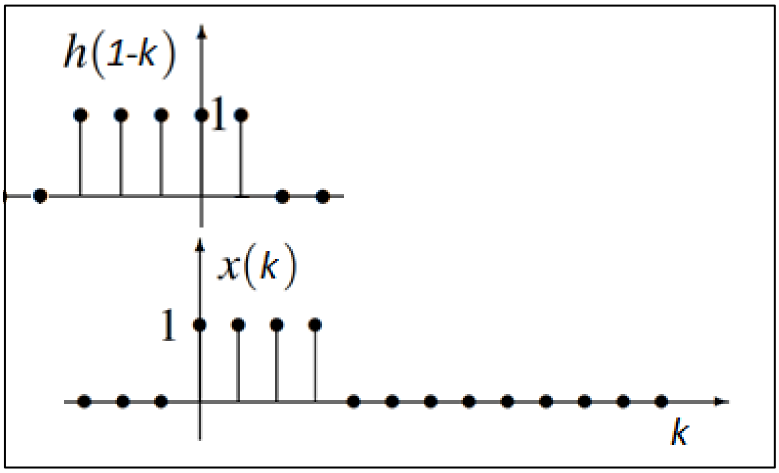


Per cui capisco che $y(0)$ è uguale alla somma dei prodotti tra queste due funzioni, che è sempre 0, tranne che per $k = 0$ dove il prodotto è 1. Quindi:

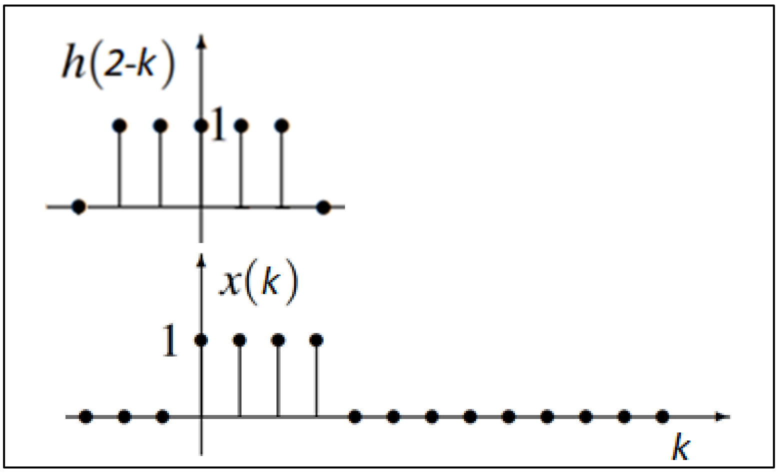
$$y(0) = 1$$

Poi faccio così per le altre "n":

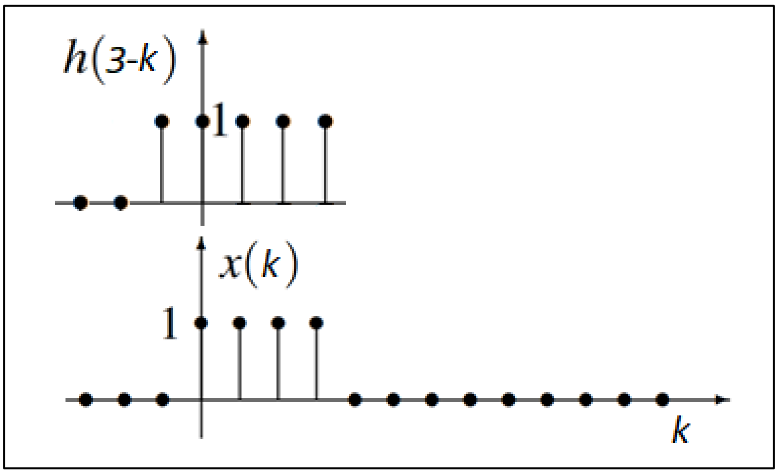
$y(1) = 1 + 1 = 2 \;\rightarrow Infatti \rightarrow$



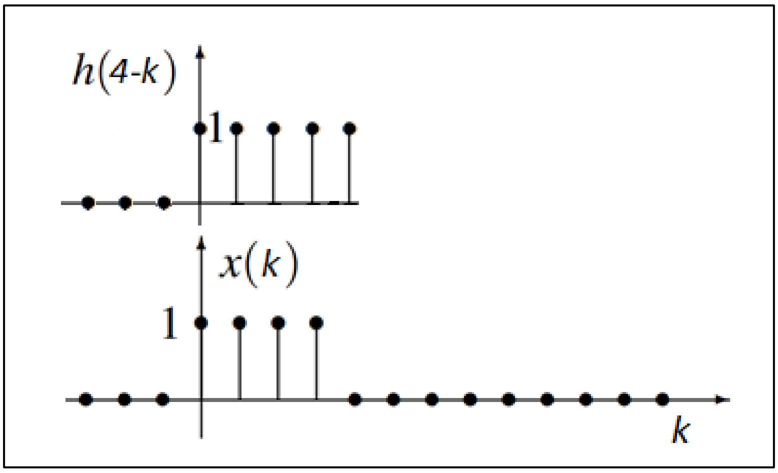
$y(2) = 1 + 1 + 1 = 3 \;\rightarrow Infatti \rightarrow$



$y(3) = 4 \;\rightarrow Infatti \rightarrow$



$y(4) = 4 \;\rightarrow Infatti \rightarrow$



E poi:

$y(5) = 3$

$y(6) = 2$

$y(7) = 1$

$y(8) = 0$

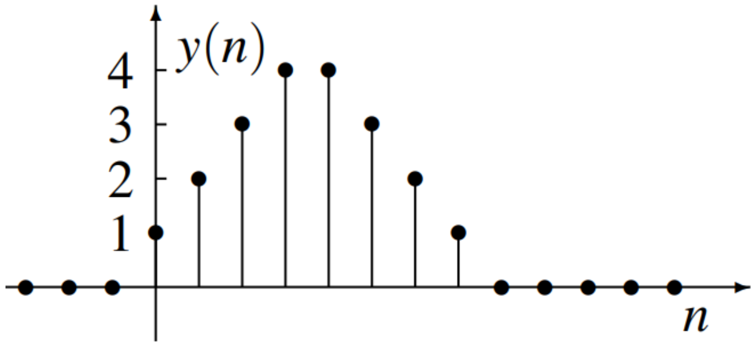
$Y(9) = 0$

... Tutti Zero.

Per le $n < 0$, invece, capisco che i prodotti sono sempre 0, perché se sposto $h(-k)$ a sinistra anche solo di 1, già il prodotto tra $h(-k)$ ed $n(k)$ è nullo, e così per tutte le altre $n < 0$.

Quindi:

$y(n) = 20 \rightarrow$



Quindi la Convoluzione di due Sequenze Rettangolari di lunghezza N e M è una Sequenza Trapezoidale di lunghezza $L = N + M - 1$.

Inoltre, è bene sapere che la Convoluzione di due Sequenze Rettangolari della stessa lunghezza è una sequenza triangolare di lunghezza ed ampiezza $2N - 1$.

Ed in generale è bene sapere anche che la Convoluzione di due qualsiasi Sequenze di Lunghezza Finita N e M è una sequenza di lunghezza $L = N + M - 1$.

Proprietà della Convoluzione

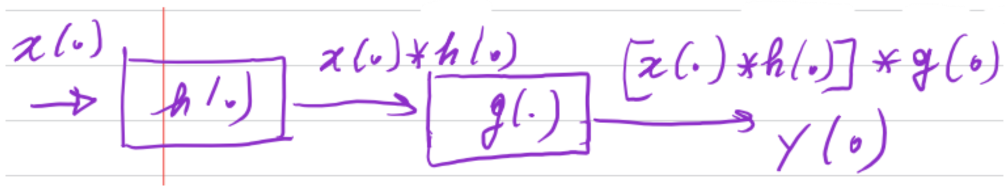
1. Commutativa:

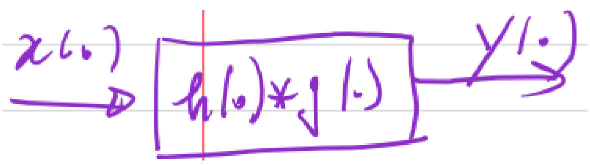
$$x(\cdot) * h(\cdot) = h(\cdot) * x(\cdot)$$

2. Associativa:

$$x(\cdot) * h(\cdot) * g(\cdot) = x(\cdot) * [h(\cdot) * g(\cdot)] = [x(\cdot) * h(\cdot)] * g(\cdot)$$

Questo, da un Punto di Vista dei Sistemi, significa che:



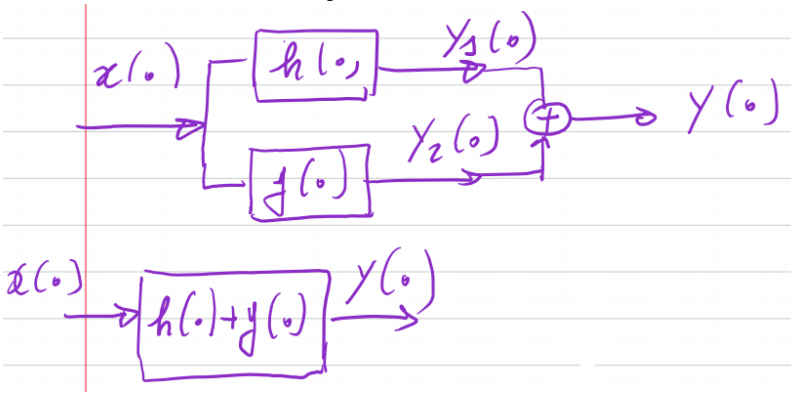


Questi due Sistemi sono uguali.

3. Distributiva:

$$x(\cdot) * [h(\cdot) + g(\cdot)] = x(\cdot) * h(\cdot) + x(\cdot) * g(\cdot)$$

Questo, da un Punto di Vista dei Sistemi, significa che:



Questi due Sistemi sono uguali.

4. Elemento Unitario:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

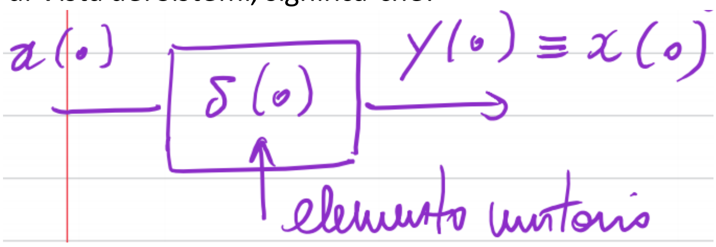
Quindi $\delta(t)$, nella Convoluzione, rappresenta un Elemento Unitario, cioè si comporta come l'Unità.

Infatti:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \, d\tau$$

Quest'integrale, per la Proprietà della Retta, è uguale alla "x" calcolata nel punto di applicazione della retta, che è $\tau = t$ e quindi alla $x(t)$.

Questo, da un Punto di Vista dei Sistemi, significa che:



Sistemi ARMA

I Sistemi ARMA (AutoRegressivi a Media Mobile – AutoRegressive Moving Average) sono Sistemi che soddisfano la seguente equazione:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot x(n-k)$$

Supponiamo che:

$$N = 1, M = 2$$

Allora:

$$a_0 \cdot y(n) + a_1 \cdot y(n-1) = b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1)$$

E quindi:

$$y(n) = -\frac{a_1}{a_0} \cdot y(n-1) + \frac{b_0}{a_0} \cdot x(n) + \frac{b_1}{a_0} \cdot x(n-1)$$

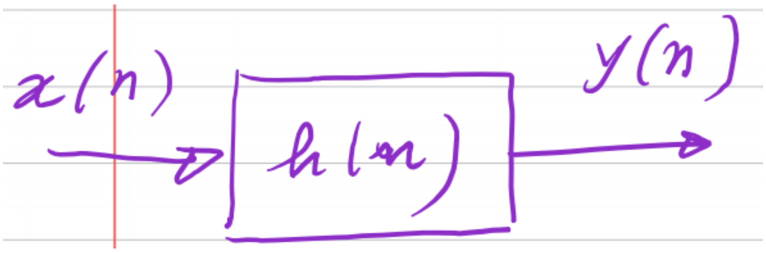
Quindi i Sistemi ARMA sono caratterizzati da un'Uscita che dipende dal Valore Attuale dell'Ingresso ($x(n)$) e da quelli Precedenti ($x(n-k)$) ed anche dai Valori Precedenti dell'Uscita! ($y(n-k)$).

Cioè l'Uscita all'istante attuale è funzione dell'Ingresso all'istante attuale ed a quelli precedenti, ma anche dell'Uscita agli istanti precedenti.

Quindi sono sistemi che riportano l'Uscita sull'Ingresso → Cioè si dicono "Autoregressivi", con " $-\frac{a_1}{a_0} \cdot y(n-1)$ " che indica la "Componente Autoregressiva" e " $\frac{b_0}{a_0} \cdot x(n)$; $\frac{b_1}{a_0} \cdot x(n-1)$ " che indicano le Componenti a Media Mobile.

Relazioni Ingresso – Uscita per la Media Temporale (anche detta Componente Continua)

Consideriamo il seguente Sistema:



La Componente Continua in Ingresso è definita come:

$$< x(n) > = x_{dc}$$

La Componente Continua in Uscita è definita come:

$$< y(n) > = y_{dc}$$

Vogliamo individuare la Relazione e quindi il Legame tra

$$y_{dc} \; ed \; x_{dc}$$

Noi sappiamo che:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) \cdot h(m)$$

Quindi:

$$< y(n) > = < x(n) * h(n) > = < \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) \cdot h(m) >$$

Per la Proprietà di Linearità della Media Temporale, noi sappiamo che la Media Temporale di Somme è uguale alla Somma delle Medie Temporali, inoltre la Media Temporale prende in considerazione il "tempo" (in questo caso il Tempo Discreto), ossia opera sulla variabile "n" e quindi non dipende da e ne agisce su "m". Quindi, dato che la Sommatoria ha come indice "m", posso portarla fuori dalla Media Temporale:

$$y_{dc} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} < x(n-m) \cdot h(m) >$$

Sempre per lo stesso motivo descritto sopra, dal punto di vista della Media Temporale che opera solo e dipende solo dalla variabile "n", la Risposta Impulsiva "$h(m)$" è una costante, proprio perché questa dipende da "m", non da "n" e quindi la posso portare fuori:

$$y_{dc} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot < x(n-m) >$$

Un'altra Proprietà della Media Temporale è quella di Invarianza Temporale, cioè la Media Temporale è invariante rispetto alle Traslazioni Temporali, per cui:

$$< x(n-m) > = < x(n) > = x_{dc}$$

E dato che la Media Temporale di $x(n)$ assume un determinato valore, cioè è una Costante, la posso portare fuori dalla Sommatoria:

$$y_{dc} = x_{dc} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)$$

La quantità "$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)$" è detta "Guadagno in Continua" o "Risposta in Continua" del Sistema ed è solitamente rappresentata attraverso la notazione:

$$H(0)$$

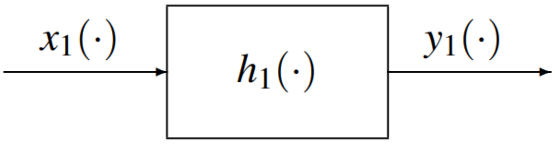
Per cui:

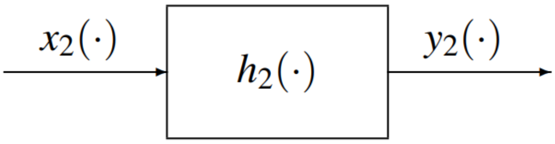
$$y_{dc} = x_{dc} \cdot H(0)$$

Relazioni Ingresso – Uscita per le Funzioni di Correlazione

- **Mutua Correlazione dell'Uscita di Due Sistemi**:

  Consideriamo due Sistemi:





  Esiste una Relazione e quindi un Legame tra la Mutua Correlazione dei due Ingressi e la Mutua Correlazione delle due Uscite, cioè esiste un Legame tra:

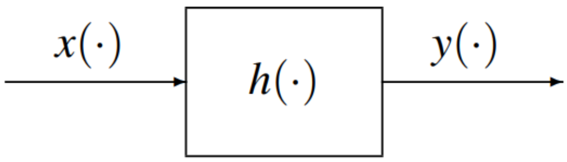
$$r_{x_1x_2}(\cdot) \; ed \; r_{y_1y_2}(\cdot)$$

  Questo Legame è il seguente:

$$r_{y_1y_2}(\cdot) = r_{x_1x_2}(\cdot) * h_1(\cdot) * h_2^*(-(\cdot))$$

- **Autocorrelazione dell'Uscita di Un Sistema**:

  Supponiamo di avere il seguente Sistema:

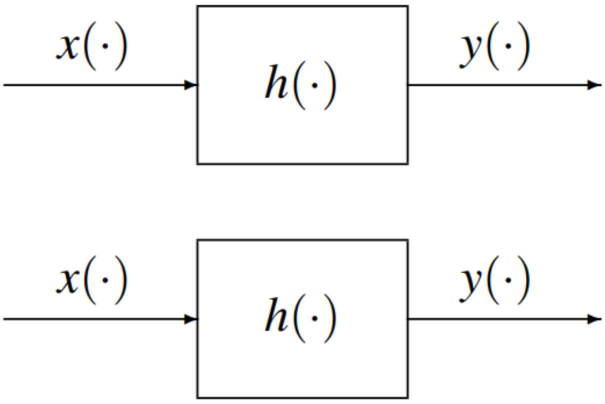


  In tal caso, non possiamo sfruttare la Relazione precedente poiché qui abbiamo un solo sistema, cioè non c'è una Mutua Correlazione.

  Possiamo sfruttare però, l'Autocorrelazione e sfruttare il Legame tra:

$$r_x(\cdot) \; ed \; r_y(\cdot)$$

Noi sappiamo che l'Autocorrelazione "$r_x(\cdot)$" non è altro che "$r_{xx}(\cdot)$" e quindi posso considerare due volte lo stesso sistema con lo stesso ingresso "$x(\cdot)$", la stessa Risposta Impulsiva "$y(\cdot)$" e la stessa Uscita "$h(\cdot)$":



E quindi ora, posso sfruttare la Relazione precedente, cioè la seguente:

$$r_{y_1 y_2}(\cdot) = r_{x_1 x_2}(\cdot) * h_1(\cdot) * h_2^*(-(\cdot))$$

Solo che ho due volte lo stesso Sistema, quindi:

$$r_y(\cdot) = r_x(\cdot) * h(\cdot) * h^*\big(-(\cdot)\big) = r_x(\cdot) * r_h(\cdot)$$

N.B. → Il Prodotto:

$$h(t) * h^*\big(-(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} h\,(\tau) \cdot h^*(\tau - t)d\tau$$

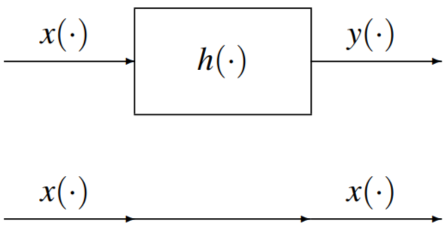
Infatti, se non avessi avuto $h^*(-t)$, ma semplicemente $h^*(t)$, allora avrei avuto:

$$h(t) * h^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h\,(\tau) \cdot h^*(t - \tau)d\tau$$

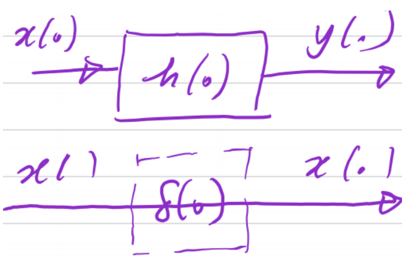
Dato che, però, ho $h^*(-t)$, ossia $h^*(t)$ ma invertito, allora, al posto di $h^*(t-\tau)$ avrò $h^*(\tau - t)$.

- **Mutua Correlazione dell'Uscita di Un Sistema con l'Ingresso di un altro Sistema**:

Consideriamo i seguenti Due Sistemi:



Affinché io abbia in Ingresso $x(\cdot)$ ed in Uscita sempre $x(\cdot)$, il Sistema ha una Risposta Impulsiva uguale ad un Elemento Unitario, quindi:



In tal caso voglio sempre individuare una Relazione tra la Mutua Correlazione dei due Ingressi e la Mutua Correlazione delle due Uscite, cioè un Legame tra:

$$r_{x_1 x_2}(\cdot) \; ed \; r_{y_1 y_2}(\cdot)$$

Solo che in tal caso, gli ingressi dei Sistemi sono tutti e due $x(\cdot)$ e l'Uscita del primo è $y(\cdot)$, mentre l'Uscita del secondo è $x(\cdot)$, quindi la Relazione che devo individuare è tra:

$$r_{xx}(\cdot) ed \; r_{yx}(\cdot) \quad cioè \quad r_x(\cdot) ed \; r_{yx}(\cdot)$$

Sfruttando la Relazione del Primo caso:

$$r_{y_1 y_2}(\cdot) = r_{x_1 x_2}(\cdot) * h_1(\cdot) * h_2^*(-(\cdot))$$

Abbiamo:

$$r_{yx}(\cdot) = r_x(\cdot) * h_1(\cdot) * h_2^*(-(\cdot))$$

Ma "$h_2(\cdot) = \delta(\cdot)$" e "$\delta(\cdot)$" è una Funzione Reale, per cui il suo coniugato è sempre uguale a $\delta(\cdot)$ ed è anche una Funzione Pari, quindi $\delta(-(\cdot)) = \delta(\cdot)$.

Quindi:

$$r_{yx}(\cdot) = r_x(\cdot) * h_1(\cdot) * \delta(\cdot)$$

Essendo $\delta(\cdot)$ l'Elemento Unitario nella Convoluzione, allora:

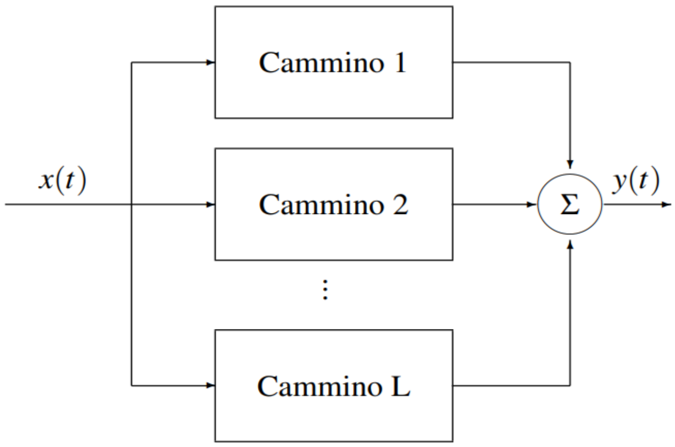
$$h_1(\cdot) * \delta(\cdot) = h_1(\cdot)$$

E quindi:

$$r_{yx}(\cdot) = r_x(\cdot) * h_1(\cdot)$$

Esercizio Slide 6, Pag. 16. → Risoluzione di cammini multipli di propagazione.

Si consideri la propagazione attraverso un Canale non Distorcente.
Il segnale trasmesso $x(t)$ risulta ritardato ed attenuato per effetto della propagazione.
Il mezzo non dispersivo si comporta come un sistema LTI di risposta impulsiva "$h(t) = a\delta(t - t0)$".
Se la propagazione avviene su cammini multipli, come delineato nella figura seguente:



Supponendo di Trasmettere il Segnale $x(t)$, allora il Segnale Ricevuto sarà:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot x(t - t_i)$$

Dove α_i indica l'Attenuazione e t_i il Ritardo, più precisamente indicano l'Attenuazione ed il Ritardo Relativo al cammino i – esimo.

Problema → Identificare il Numero di Cammini e misurarne i Ritardi "t_i".

Svolgimento:

Supponiamo che il Ricevitore conosca il Segnale Trasmesso oltre a quello che Riceve. Cioè supponiamo che il Trasmettitore trasmetta un Segnale che è noto al Ricevitore, quindi che il Ricevitore conosca sia "$x(t)$" che "$y(t)$" (naturalmente $y(t)$ lo conosce perché è quello che riceve).

Allora, dal lato Ricevitore è possibile calcolare la Mutua Correlazione $r_{yx}(\tau)$:

$$r_{yx}(\tau) = < y(t), x(t-\tau) > = < \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot x(t-t_i)\right), x(t-\tau) > \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot x(t-t_i) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \rightarrow$$

Ma noi sappiamo che l'integrale di una Somma è la Somma degli Integrali:

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_i \cdot x(t-t_i) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \rightarrow$$

Effettuiamo un cambio di Variabili:

$$t - t_i = s \rightarrow t = t_i + s \qquad dt = ds$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_i \cdot x(s) \cdot x^*(t_i + s - \tau)\, ds \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \cdot x^*(s - (\tau + t_i))\, ds$$

Sapendo che, però, la Funzione di Autocorrelazione è definita come:

$$r_x(\tau) = < x(t), x(t-\tau) > = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt$$

Allora:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \cdot x^*(s - (\tau + t_i))\, ds = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot r_x(\tau - t_i)$$

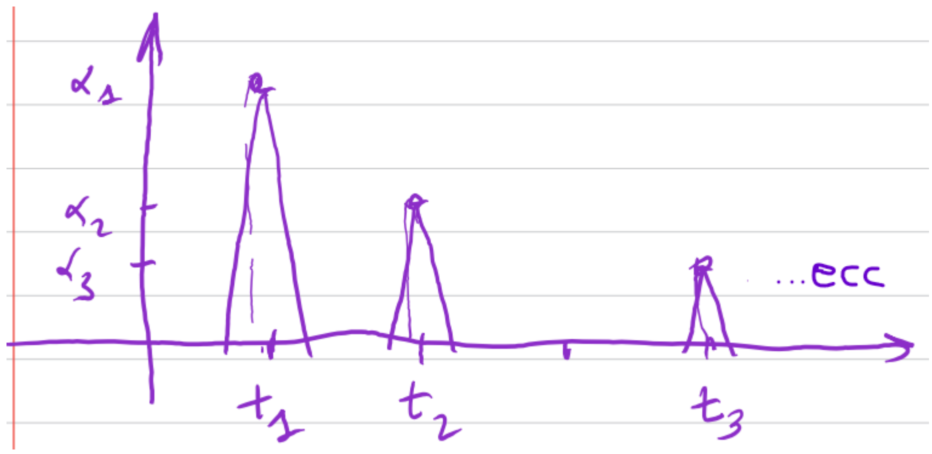
Ora che siamo arrivati a quest'equazione:

$$r_{yx}(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot r_x(\tau - t_i)$$

N.B. → Funzione di Autocorrelazione:

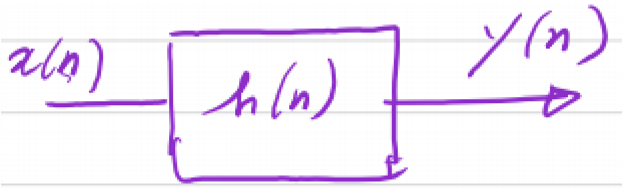
Una delle Proprietà della Funzione di Autocorrelazione è che questa ha un Massimo nell'Origine.

Dato che io ho una sommatoria di Autocorrelazioni traslate, allora avrò una situazione di questo tipo:



Esercizio → Calcolo Autocorrelazione dell'Uscita di un Sistema.

Ho il seguente Sistema:



Con:

$$x(n) = 2 \cdot \delta(n) - 3 \cdot \delta(n-1) + \delta(n-3)$$

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

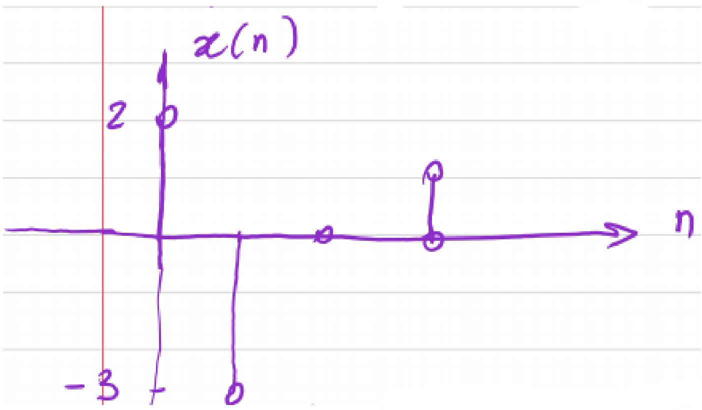
Calcolare l'Autocorrelazione dell'Uscita del Sistema e l'Energia dell'Uscita del Sistema:

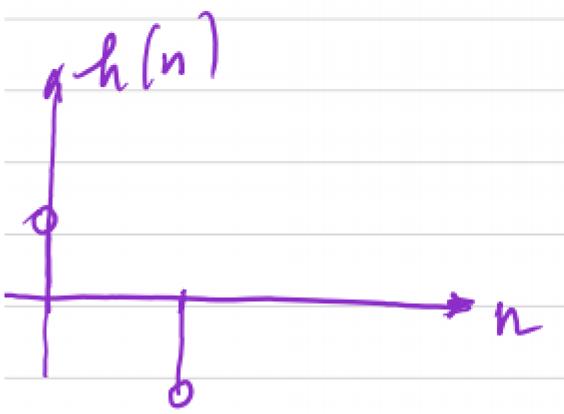
$$r_y(n) = ?\, , \mathcal{E}_y = ?$$

Inoltre verificare se Ingresso ed Uscita sono Ortogonali.

Svolgimento:

Innanzitutto, rappresentiamo graficamente i Segnali:





In tal caso ci conviene calcolare prima $y(n)$, e poi, a partire da $y(n)$, calcolare $r_y(n)$:

$$y(n) = x(n) * h(n) = [2 \cdot \delta(n) - 3 \cdot \delta(n-1) + \delta(n-3)] * [\delta(n) - \delta(n-1)] \rightarrow$$

Una delle Proprietà della Convoluzione è quella "Distributiva", per la quale:

$$x(\cdot) * [h(\cdot) + g(\cdot)] = x(\cdot) * h(\cdot) + x(\cdot) * g(\cdot)$$

Quindi:

$$y(n) = \underbrace{[2 \cdot \delta(n) - 3 \cdot \delta(n-1) + \delta(n-3)] * [\delta(n)]}_{} - \underbrace{[2 \cdot \delta(n) - 3 \cdot \delta(n-1) + \delta(n-3)] * [\delta(n-1)]}_{}$$

$$y(n) = \boxed{2 \cdot \delta(n) - 3 \cdot \delta(n-1) + \delta(n-3)} - \boxed{2 \cdot \delta(n-1) + 3 \cdot \delta(n-2) - \delta(n-4)}$$

Questo perché nella Convoluzione, $\delta(n)$, è l'Elemento Unitario.

$$y(n) = 2 \cdot \delta(n) - 5 \cdot \delta(n-1) + 3 \cdot \delta(n-2) + \delta(n-3) - \delta(n-4)$$

$x(k)$	2	-5	3	1	-1	0
$n=0 \rightarrow h(n-k)$	2	-5	3	1	-1	0
$n=1 \rightarrow h(1-k)$	0	2	-5	3	1	-4
$n=2 \rightarrow h(2-k)$	0	0	2	-5	3	1
$n=3 \rightarrow h(3-k)$	0	0	0	2	-5	3
$n=4 \rightarrow h(4-k)$	0	0	0	0	2	-5
$n=5 \rightarrow h(5-k)$	0	0	0	0	0	2
$n=6 \rightarrow h(6-k)$	0	0	0	0	0	0

$2 \cdot 2 + (-5 \cdot -5) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + (-1 \cdot -1) = 40$

$0 - 10 - 15 + 3 - 1 = -21$

$0 + 0 + 6 - 5 + 3 = 4$

.....

E non c'è bisogno di fare lo stesso traslando dall'altra parte, poiché l'Autocorrelazione è una Funzione Pari, quindi:

$$r_x(\cdot) = r_x(-(\cdot))$$

E quindi so che:

$$r_y(0) = 40, r_y(1) = -21, r_y(2) = 4, r_y(3) = 7, r_y(4) = -2, r_y(5) = 0, \ldots ecc = 0$$

Quindi, sapendo che:

$$r_y(n) = r_x(n) * r_h(n)$$

$$r_y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_y(n) = \cdots + 0 - 2 + 7 + 4 - 21 + 40 - 21 + 4 + 7 - 2 + 0 \ldots = 16$$

Per calcolare "$\mathcal{E}_y$", io so che l'Autocorrelazione dell'Uscita nello Zero, è uguale all'Energia, quindi:

$$\mathcal{E}_y = r_y(0) = 40$$

Se volessimo calcolare anche "$\mathcal{E}_x$" allora, sapendo che l'Energia de Segnale $x(n)$ corrisponde alla somma dei quadrati dei coefficienti dei singoli Segnali, avrò:

$$x(n) = 2 \cdot \delta(n) - 3 \cdot \delta(n-1) + \delta(n-3)$$

$$\mathcal{E}_x = 2^2 + (-3)^2 + 1^2 = 14$$

Infine, verifichiamo se Ingresso ed Uscita sono Ortogonali:

$$< x(n), y(n) > = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot y^*(n) =$$

2	-5	3	1	-1
2	-3	0	1	0

$4 + 15 + 1 = 20$

Quindi, dato che il Prodotto Scalare viene "20" e non "0", i Segnali non sono Ortogonali.

Es. → Calcolo Convoluzione.

$$sinc(t) \cdot u(t) * \delta(t-1)$$

Svolgimento:

$$sinc(t-1) \cdot u(t-1)$$

Es. → Calcolo Convoluzione.

$$2t \cdot \delta(2t)$$

Svolgimento:

$$\cancel{2}t \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \delta(t) = t \; calcolato \; in \; 0 \cdot \delta(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$$

Es. → Calcolo Convoluzione.

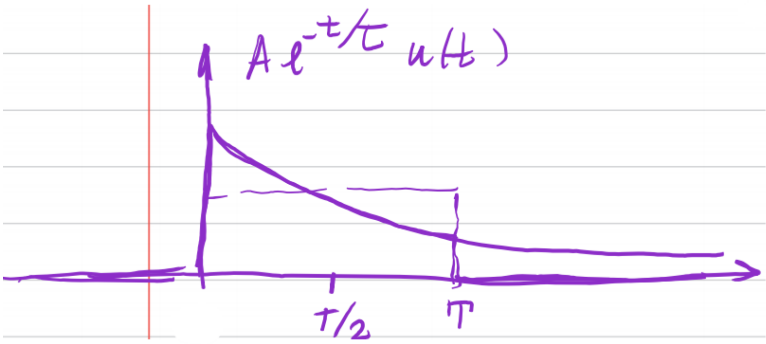
Dato il Segnale:

$$x(t) = A \cdot e^{-t/\tau} \cdot u(t) \cdot \prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

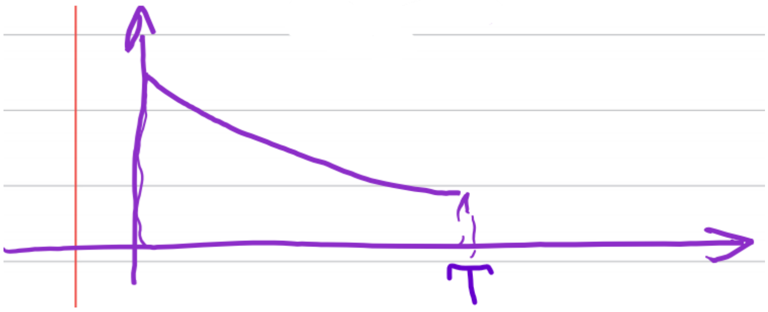
Calcolare "T" tale che il Segnale "$a(t) = A \cdot e^{-t/\tau} \cdot u(t)$" abbia il 95% di Energia del Segnale $x(t)$.

Svolgimento:

Rappresentiamo i segnali sul grafico:



Quindi la loro Moltiplicazione sarà un Segnale del tipo:



Allora, iniziamo a calcolare l'Energia del Segnale $x(t)$:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot e^{-2t/\tau} \cdot \prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right) dt$$

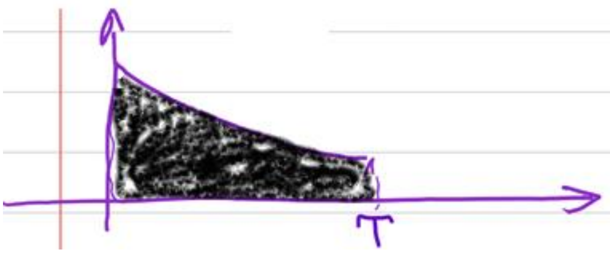
Il Quadrato di un Segnale Rettangolare è uguale al Segnale Rettangolare stesso, inoltre, scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot e^{-2t/\tau} \cdot \prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right) dt = \int_{0}^{T} A^2 \cdot e^{-2t/\tau} \, dt$$

Perché l'area che vado a calcolare è identica, e quindi:

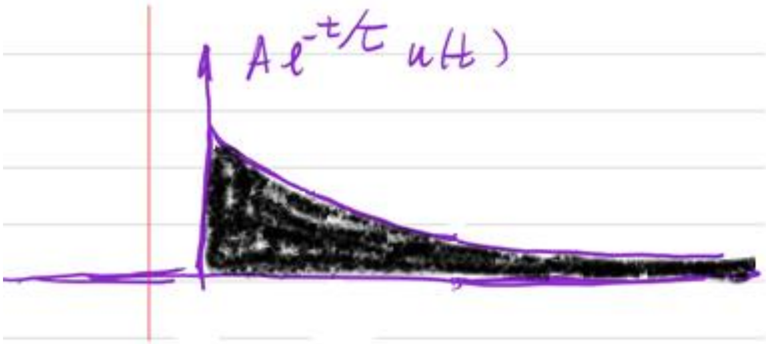
$$\mathcal{E}_x = A^2 \cdot \int_0^T e^{-2t/\tau} \, dt = \mathcal{E}_x = -A^2 \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \left[e^{-2t/\tau}\right]_0^T = A^2 \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \left[1 - e^{-2T/\tau}\right]$$

Quindi ora abbiamo calcolato quest'area nera:



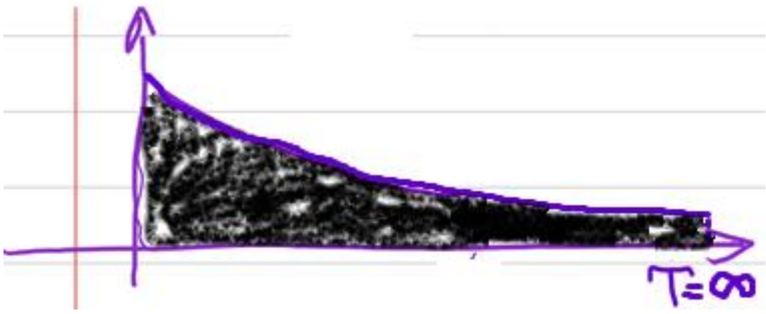
Ci accorgiamo che, volendo calcolare l'Energia di $a(t) = A \cdot e^{-t/\tau} \cdot u(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot e^{-2t/\tau} \rightarrow$$



Dobbiamo semplicemente far tendere "T" di $\mathcal{E}_x = A^2 \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \left[1 - e^{-2T/\tau}\right]$ all'infinito:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T A^2 \cdot e^{-2t/\tau} \rightarrow$$



Quindi:

$$\mathcal{E}_a = \lim_{T\to\infty} \mathcal{E}_x = A^2 \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \left[1 - e^{-2\cdot\infty/\tau}\right] = A^2 \cdot \frac{\tau}{2} \cdot [1-0] = A^2 \cdot \frac{\tau}{2}$$

Quindi ora devo calcolare "T" tale che $\mathcal{E}_a = 95\%\ di\ \mathcal{E}_x$:

$$T : \mathcal{E}_x = 0.95 \cdot \mathcal{E}_a \rightarrow T : \cancel{A^2} \cdot \cancel{\frac{\tau}{2}} \cdot \left[1 - e^{-2T/\tau}\right] = 0.95 \cdot \cancel{A^2} \cdot \cancel{\frac{\tau}{2}}$$

Per cui:

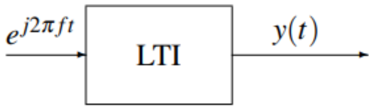
$$e^{-2T/\tau} = 1 - 0.95 = 0.05 \rightarrow$$

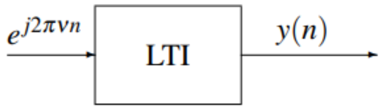
$$T = \frac{-\tau \cdot \ln(0.05)}{2}$$

Segnali e Sistemi nel Dominio della Frequenza

Finora abbiamo rappresentato i Segnali mediante Impulsi (Discreti $\delta(n)$ o Continui $\delta(t)$) e grazie agli Impulsi ad alle loro Proprietà (come quella di Riproducibilità), abbiamo individuato il Legame Ingresso – Uscita dei Sistemi LTI ed abbiamo notato che questo è basato sulla Convoluzione, cioè che è un legame di "Convoluzione".

Nell'analisi in Frequenza, invece, i Segnali vengono rappresentati come combinazione lineare di esponenziali complessi, ossia come combinazione lineare di Fasori.





Analizziamo il caso Continuo:

$$y(t) = h(t) * e^{j2\pi ft} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{j2\pi f(t-\tau)}\, d\tau$$

Quest'integrale posso scriverlo come:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

La variabile d'integrazione è "τ", ciò significa che $e^{j2\pi ft}$, non dipendendo da tale variabile, può essere portato al di fuori dell'integrale:

$$y(t) = e^{j2\pi ft} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau}_{\boxed{H(f)}}$$

Quindi:

$$y(t) = e^{j2\pi ft} \cdot H(f)$$

N.B. → Abbiamo dimostrato che, dato un sistema Lineare Tempo Invariante (LTI), se in ingresso a questo sistema ho un fasore, in uscita avrò lo stesso fasore moltiplicato per una quantità "$H(f)$" che dipende dalla Frequenza "f" del Fasore.

Questa quantità $H(f)$ si calcola come l'integrale di una quantità complessa, per cui è essa stessa una quantità complessa.

$H(f)$, infatti, si dice "Funzione Complessa della Frequenza".

Analogamente, per il Tempo Discreto, si ha:

$$y(n) = h(n) * e^{j2\pi \nu n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot e^{j2\pi \nu(n-m)} \rightarrow$$

$$y(n) = e^{j2\pi \nu n} \cdot \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot e^{-j2\pi \nu m}}_{\boxed{H(\nu)}} \rightarrow$$

E quindi:

$$y(n) = e^{j2\pi \nu n} \cdot H(\nu)$$

Risposta in Frequenza di un Elemento di Ritardo

- Tempo Discreto:

  L'elemento di ritardo unitario discreto e definito dal seguente legame Ingresso – Uscita:

$$y(n) = x(n-1)$$

  Supponiamo che:

$$x(n) = e^{j2\pi vn}$$

  E quindi:

$$y(n) = x(n-1) = e^{j2\pi v(n-1)} = e^{j2\pi vn} \cdot e^{-j2\pi v}$$

  Noi sappiamo che, come visto poco sopra, quando in Entrata ad un Sistema LTI abbiamo un Fasore, allora in Uscita al Sistema avremo il medesimo fasore moltiplicato per una quantità "$H(v)$", che quindi non può che essere pari a "$e^{-j2\pi v}$":

$$y(n) = x(n-1) = e^{j2\pi vn} \cdot H(v)$$

- Tempo Continuo:

  Consideriamo un elemento di ritardo "T" continuo (quindi non unitario come nel caso precedente) e consideriamo il seguente legame Ingresso – Uscita:

$$y(t) = x(t-T)$$

  Supponiamo che:

$$x(t) = e^{j2\pi ft}$$

  E quindi:

$$y(t) = x(t-T) = e^{j2\pi f(t-T)} = e^{j2\pi ft} \cdot e^{-j2\pi fT}$$

  Noi sappiamo che, come visto poco sopra, quando in Entrata ad un Sistema LTI abbiamo un Fasore, allora in Uscita al Sistema avremo il medesimo fasore moltiplicato per una quantità "$H(f)$", che quindi non può che essere pari a "$e^{-j2\pi fT}$":

$$y(t) = x(t-T) = e^{j2\pi ft} \cdot H(f)$$

Risposta in Frequenza di un Sistema ARMA

Sappiamo che i Sistemi ARMA soddisfano la seguente equazione:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot x(n-k)$$

Noi vogliamo calcolare "$y(n)$" e sappiamo che il primo elemento della Sommatoria (cioè quello per $k = 0$) è proprio "$a_0 \cdot y(n)$", quindi scriviamo:

$$a_0 \cdot y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot x(n-k)$$

Ora supponiamo che:

$$x(n) = e^{j2\pi vn}$$

E quindi che:

$$y(n) = e^{j2\pi vn} \cdot H(v)$$

Sostituisco nell'equazione precedente:

$$a_0 \cdot H(v) \cdot e^{j2\pi vn} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot H(v) \cdot e^{j2\pi v(n-k)} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot e^{j2\pi v(n-k)}$$

$$a_0 \cdot H(v) \cdot e^{j2\pi vn} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot H(v) \cdot e^{j2\pi vn} \cdot e^{-j2\pi vk} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot e^{j2\pi vn} \cdot e^{-j2\pi vk}$$

$$a_0 \cdot H(v) \cdot e^{j2\pi vn} + H(v) \cdot e^{j2\pi vn} \cdot \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot e^{-j2\pi vk} = e^{j2\pi vn} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot e^{-j2\pi vk}$$

$$H(v) \cdot \cancel{e^{j2\pi vn}} \cdot \left(a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot e^{-j2\pi vk}\right) = \cancel{e^{j2\pi vn}} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot e^{-j2\pi vk}$$

E quindi:

$$H(v) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot e^{-j2\pi vk}}{a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot e^{-j2\pi vk}}$$

N.B. → Quindi questi Sistemi ARMA sono molto Flessibili poiché possono avere una diversa Risposta in Frequenza a seconda dei fattori "a_k" e "b_k" che andiamo a scegliere.

Risposta in Frequenza in Regime Sinusoidale

Supponiamo di avere un Sistema LTI in ingresso al quale abbiamo una Sinusoide e non un Fasore. Quindi abbiamo un Ingresso Sinusoidale e non Fasoriale.

Noi sappiamo che una Sinusoide è la parte Reale di un Fasore, cioè il Coseno è la parte Reale di un Esponenziale Complesso.

Quindi supponiamo:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Per le Formule di Eulero:

$$x(t) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right]$$

$$x(t) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{j\varphi} + e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j\varphi}\right]$$

Ora che abbiamo scritto l'ingresso sotto forma di esponenziali, notiamo che i termini $e^{j2\pi f_0 t}$ e $e^{-j2\pi f_0 t}$ sono a tutti gli effetti dei "fasori", per cui, sapendo che "dato un Sistema Lineare Tempo Invariante (LTI), se in ingresso a questo sistema ho un fasore, in uscita avrò lo stesso fasore moltiplicato per una quantità "$H(f)$" che dipende dalla Frequenza "f" del Fasore stesso", allora:

$$y(t) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot H(f_0) + A \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \cdot H(-f_0)$$

Supponiamo che $H(f_0)$ sia pari, cioè che $H(f_0) = H(-f_0)$, allora posso mettere in evidenza $H(f_0)$:

$$y(t) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot H(f_0) \cdot \left[e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right]$$

Riscriviamo il Risultato sotto forma di Sinusoide:

$$y(t) = A \cdot H(f_0) \cdot cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

Come detto in Precedenza, questa quantità $H(f)$ si calcola come l'integrale di una quantità complessa, per cui è essa stessa una quantità complessa e può essere espressa in Forma Polare:

$$H(f_0) = |H(f_0)| \cdot e^{j\phi(H(f_0))}$$

Dove "$\phi(H(f_0))$" indica la "Fase di $H(f_0)$".

Quindi, questo significa che l'Uscita di un Sistema LTI con una Sinusoide in Ingresso, avrà Ampiezza pari all'Ampiezza della Sinusoide in Ingresso moltiplicata per il Modulo di $H(f_0)$:

$$A_y = A \cdot |H(f_0)|$$

E Fase pari alla Fase del Coseno più la Fase di $H(f_0)$:

$$\varphi_y = \varphi_0 + \phi(H(f_0))$$

N.B. → Metodo Pratico per il calcolo della Risposta in Frequenza di un Sistema Incognito con una Sinusoide in Ingresso:

Queste Relazioni scritte sopra "$A_y = A \cdot |H(f_0)|$" e "$\varphi_y = \varphi_0 + \phi(H(f_0))$", permettono, attraverso un metodo pratico, di ricavare sperimentalmente Modulo e Fase della Risposta in Frequenza di un Sistema Incognito, in un certo intervallo di frequenze desiderato:

Praticamente questo metodo consiste nel sollecitare il Sistema Incognito con una Sinusoide a Frequenza Variabile, cioè con più Sinusoidi in Ingresso, ognuna con una certa Frequenza (la Frequenza la vario in base al "campo" che voglio esplorare, cioè all'intervallo di Frequenze per il quale voglio conoscere la Risposta in Frequenza del Sistema) → Per ogni Sinusoide (ognuna con Frequenza diversa), registro l'Uscita del Sistema → Poi si procede confrontando l'Ampiezza le la Fase della Sinusoide in Uscita dal Sistema, con la rispettiva Sinusoide in Ingresso ed in questo modo si misura la Risposta in Frequenza del Sistema.

Esistono dei Sistemi denominati "Analizzatori di Spettro" che applicano questo metodo sperimentale e quindi permettono di conoscere la Risposta in Frequenza di un Sistema Incognito.

Trasformata di Fourier

La Trasformata di Fourier "$X(f)$" o "$X(v)$" consente di rappresentare Segnali come Sovrapposizione di Fasori, cioè ci fornisce una Rappresentazione Frequenziale di un Segnale, perché ci permette di decomporre un Segnale in Fasori e di Individuare le Ampiezze e le Fasi dei Singoli Fasori.

N.B. → Per "Sovrapposizione":

- Nel Continuo s'intende l'Integrale;
- Nel Discreto s'Intende la Sommatoria.

Quindi, grazie alla Trasformata di Fourier, considerato un Segnale Tempo Continuo "$x(t)$", possiamo rappresentarlo come:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t}\, df \rightarrow \quad \textit{Equazione di Sintesi}$$

Quindi, attraverso questo Integrale io considero un certo Fasore e ne vario la Frequenza da $-\infty$ a $+\infty$.

Con "$X(f)$" che è una quantità Complessa ed indica il "Coefficiente" del Fasore $e^{j2\pi f t}$ e si calcola come:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt \rightarrow \quad \textit{Equazione di Analisi}$$

Naturalmente vale sempre l'uguaglianza:

- $f = frequenza\ continua = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi f$

Quindi:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega \rightarrow$$ *Equazione di Sintesi*

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \rightarrow$$ *Equazione di Analisi*

Considerando un Segnale Tempo Discreto "$x(n)$", possiamo rappresentarlo come:

$$x(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(v) \cdot e^{j2\pi v n}\, dv \rightarrow$$ *Equazione di Sintesi*

Quindi, attraverso questo Integrale io considero un certo Fasore e ne vario la Frequenza da $-\frac{1}{2}$ a $+\frac{1}{2}$ (o da 0 as 1). Questo perché in tal caso lavoro con Frequenze che non sono Continue, ma sono Discrete e quindi, dato che il Fasore è Periodico analizzo come varia al variare della Frequenza ma solo nel periodo Unitario.

Con "$X(f)$" che è una quantità Complessa ed indica il "Coefficiente" del Fasore $e^{j2\pi f t}$ e si calcola come:

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi v n} \rightarrow$$ *Equazione di Analisi*

Naturalmente vale sempre l'uguaglianza:

- $v = frequenza\ discreta = \frac{\theta}{2\pi} \rightarrow \theta = 2\pi v$

Quindi:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \cdot e^{j\theta t}\, d\theta \rightarrow$$ *Equazione di Sintesi*

$$X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\theta n} \rightarrow$$ *Equazione di Analisi*

N.B. → La Condizione Necessaria e Sufficiente per applicare queste Equazioni è che:

Il Segnale $x(t)$ o $x(n)$ deve essere un Segnale di Energia.

Serie di Fourier e Trasformata di Fourier

Mentre la Serie di Fourier permette di rappresentare un Segnale Periodico come una Somma di Sinusoidi, la Trasformata di Fourier permette di rappresentare un Segnale Non Periodico come una Sovrapposizione di Fasori.

Quindi la Trasformata di Fourier generalizza la teoria della Serie di Fourier al caso di segnali non periodici.

Trasformata di Fourier di un Impulso Esponenziale Decrescente Monolatero

$$x(t) = e^{-at} \cdot \underbrace{u(t)}_{\text{Monolatero}} \quad con\ \underbrace{a > 0}_{\text{Decrescente}}$$

Un Segnale Esponenziale Decrescente Monolatero è un Segnale d'Energia come visto in precedenza → Quindi esiste la sua Trasformata di Fourier.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} \cdot u(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt$$

Il Segnale è Monolatero, quindi non ha senso integrare da $-\infty$:

$$X(f) = \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\, dt \rightarrow$$

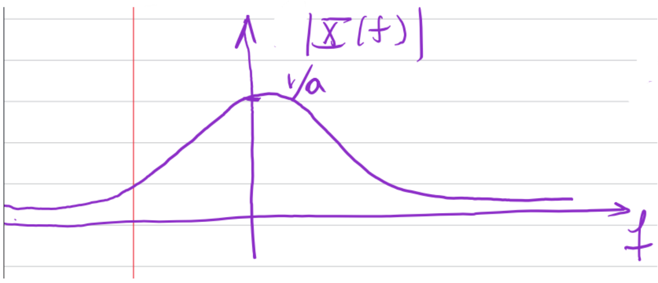
$$X(f) = -\frac{1}{a + j2\pi f} \cdot \left[e^{-(a+j2\pi f)t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{a + j2\pi f} \cdot [0 - 1] \rightarrow$$

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Quindi $X(f)$ è una quantità Complessa con Ampiezza pari a:

$$|X(f)| = \left|\frac{1}{a + j2\pi f}\right| = \frac{|1|}{|a + j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}$$

E calcolando i limiti di questa funzione a $+\infty$, a $-\infty$ ed a 0, posso capire bene o male com'è fatta:



N.B. → Segnale Passa Basso:

Un Sistema il cui Modulo della Risposta in Frequenza ha un massimo nell'Origine, come in questo caso, viene detto "Sistema Passa Basso", perché il Segnale ha un Valore che decresce all'aumentare della Frequenza, quindi è centrato intorno alle "basse frequenze" (cioè è centrato intorno all'origine).

Inoltre, ha Fase pari a:

$$\phi(X(f)) = arctan\left(\frac{0}{1}\right) - arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$

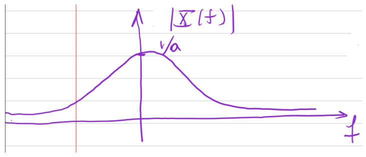
Spettro di Ampiezza e Spettro di Fase

Per "Spettro di Ampiezza si intende il Modulo della Trasformata di Fourier, invece, per "Spettro di Fase" si intende la Fase della Trasformata di Fourier.
Ad esempio, nell'esercizio precedente li abbiamo calcolati come:

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Spettro di Ampiezza:

$$|X(f)| = \left|\frac{1}{a + j2\pi f}\right| = \frac{|1|}{|a + j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}$$



Spettro di Fase:

$$\phi\big(X(f)\big) = arctan\left(\frac{0}{1}\right) - arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$

Generalmente, lo Spettro di Ampiezza si analizza in dB, per cui:

$$|X(f)|_{dB} = 20\log_{10}|X(f)| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}\right)$$

In tal caso abbiamo visto che lo Spettro di Ampiezza corrisponde ad un Segnale Passa Basso e i Segnali Passa Basso sono caratterizzati da una "Frequenza di Taglio f_0", ossia quella Frequenza per la quale lo Spettro di Ampiezza risulta attenuato di $3dB$ rispetto al valore nello zero.

Quindi la Frequenza di Taglio è calcolabile come:

$$20\log_{10}\frac{|X(f_0)|}{|X(0)|} = -3\ dB \rightarrow 20\log_{10}|X(f_0)| - 20\log_{10}|X(0)| = -3\ dB \rightarrow$$

$$20\log_{10}|X(f_0)| = 20\log_{10}|X(0)| - 3\ dB$$

Calcoliamo la Frequenza di Taglio nel nostro caso:

$$20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f_0)^2}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{a}\right) - 3 \rightarrow$$

$$20\log_{10}(1) - 20\log_{10}\left(\sqrt{a^2 + (2\pi f_0)^2}\right) = 20\log_{10}(1) - 20\log_{10}(a) - 3 \rightarrow$$

$$0 - 10\log_{10}(a^2 + (2\pi f_0)^2) = 0 - 20\log_{10}(a) - 3 \rightarrow$$

$$\log_{10}(a^2 + (2\pi f_0)^2) = 2\log_{10}(a) + \frac{3}{10} \rightarrow$$

$$a^2 + (2\pi f_0)^2 = 10^{2\log_{10}(a)} \cdot 10^{3/10} \rightarrow$$

$$a^2 + (2\pi f_0)^2 = 10^{\log_{10}(a^2)} \cdot 10^{3/10} \rightarrow$$

$$\cancel{a^2} + (2\pi f_0)^2 = \cancel{a^2} \cdot 10^{3/10} \rightarrow (2\pi f_0)^2 = 10^{3/10} \rightarrow 2\pi f_0 = \sqrt{10^{3/10}} \rightarrow$$

$$f_0 = \frac{10^{3/20}}{2\pi}$$

N.B. → Frequenza di Taglio "f_0" :

A partire da $|X(f)|$ avrò:

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}$$

Mettiamo in evidenza la "a":

$$|X(f)| = \frac{1}{a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi f}{a}\right)^2}}$$

Se supponiamo che $f = f_0 = \frac{a}{2\pi}$ allora avremo:

$$|X(f)| = \frac{1}{a \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{a \cdot \sqrt{2}}$$

E

$$|X(0)| = \frac{1}{a}$$

E quindi:

$$\frac{|X(f)|}{|X(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ed in effetti:

$$20 \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3dB$$

Il fatto che $f_0 = \frac{a}{2\pi}$ mi permette di capire che "a" devo scegliere se voglio una certa Frequenza di Taglio. Ad esempio, se vogliamo una Frequenza di Taglio pari a $1MHz = 10^6 Hz$, allora:

$$10^6 = \frac{a}{2\pi} \rightarrow a = 10^6 \cdot 2\pi$$

Trasformata di Fourier di un Impulso Esponenziale Decrescente Bilatero

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad con\ \underbrace{a > 0}_{\text{Decrescente}}$$

Un Segnale Esponenziale Decrescente Bilatero è un Segnale d'Energia come visto in precedenza → Quindi esiste la sua Trasformata di Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt \rightarrow$$

Spezziamo l'Integrale per $t > 0$ e $t < 0$:

$$X(f) = \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt \rightarrow$$

Il Primo Integrale:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\, dt = -\frac{1}{a + j2\pi f} \cdot \left[e^{-(a+j2\pi f)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Il Secondo Integrale:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(a-j2\pi f)}\, dt = \frac{1}{a-j2\pi f} \cdot \left[e^{(a-j2\pi f)t}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a-j2\pi f}$$

Quindi:

$$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} + \frac{1}{a-j2\pi f} = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

Quindi, al contrario della Trasformata di Fourier dell'Impulso Esponenziale Decrescente Monolatero, stavolta la Trasformata di Fourier è una quantità Reale, cioè non ha parte Immaginaria, ma solo parte Reale.

Quindi il suo Spettro di Ampiezza si calcola come il suo Valore Assoluto:

$$|X(f)| = \left|\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}\right| = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

Ed il suo Spettro di Fase si calcola come la Fase di un numero reale, che è pari a 0 se il numero reale è positivo ed è pario a $-\pi$ se il numero reale è negativo:

$$\phi\big(X(f)\big) = 0$$

Quindi ho sempre un Segnale Passa Basso, ma stavolta l'attenuazione è più rapida rispetto all' Impulso Esponenziale Decrescente Monolatero.

Trasformata di Fourier di una Sequenza Esponenziale Monolatera

$$x(n) = a^n \cdot u(n) \;\; con\ |a| < 1$$

Segnale di Energia:

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \cdot u(n) \cdot e^{-j2\pi v n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j2\pi v n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \left(e^{-j2\pi v}\right)^n \rightarrow$$

$$X(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a \cdot e^{-j2\pi v}\right)^n$$

Dato che $|a| < 1$ e $\left|e^{-j2\pi v}\right| = |cos(2\pi v) + j \cdot sin\,(2\pi v)| = \sqrt{cos^2(2\pi v) + \sin^2(2\pi v)} = 1$ allora questa Serie è una Serie Convergente ed è del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad con \;\; |z| < 1 \;\; che\ è \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Quindi:

$$X(v) = \frac{1}{1-a\cdot e^{-j2\pi v}}$$

Quindi il suo Spettro di Ampiezza si calcola come:

$$|X(v)| = \left|\frac{1}{1-a\cdot e^{-j2\pi v}}\right| = \left|\frac{1}{1-a\cdot\cos(2\pi v) + a\cdot j\cdot\sin(2\pi v)}\right| \rightarrow$$

$$|X(v)| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cdot\cos(2\pi v))^2 + (a\cdot\sin(2\pi v))^2}} \rightarrow$$

$$|X(v)| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cdot cos^2(2\pi v) - 2a\cdot cos(2\pi v) + a^2\cdot\sin^2(2\pi v)}} \rightarrow$$

Noi sappiamo per la Prima Relazione Fondamentale della Trigonometria che:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

E quindi:

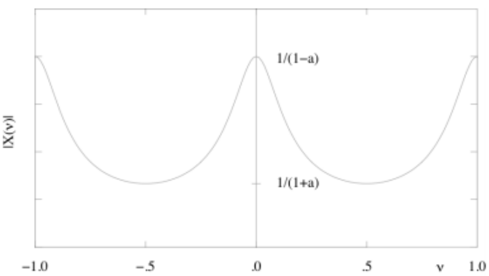
$$a^2 \cdot cos^2(2\pi v) + a^2 \cdot \sin^2(2\pi v) = a^2$$

In definitiva:

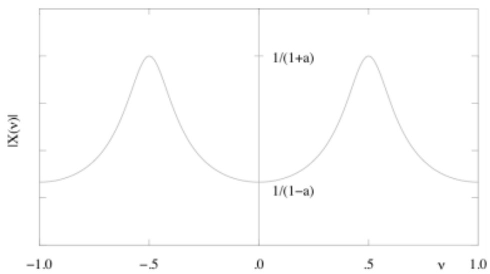
$$|X(v)| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cdot cos(2\pi v)}}$$

Dato che c'è il coseno, capiamo che lo Spettro di Ampiezza della Trasformata di Fourier è un Segnale Periodico.

Per $a < 0$:



Per $a > 0$



Trasformata di Fourier di una Sequenza Esponenziale Bilatera

Sequenza esponenziale bilatera

Si consideri la sequenza esponenziale bilatera

$$x(n) = a^{|n|} \qquad |a| < 1$$

La sua trasformata è

$$X(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\theta n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\theta})^n + \sum_{k=1}^{+\infty} (a e^{j\theta})^k$$

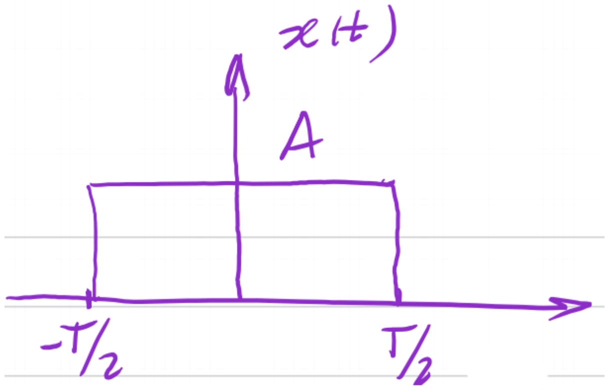
La prima sommatoria è la serie geometrica di ragione $ae^{-j\theta}$ e la seconda sommatoria è la serie geometrica di ragione $ae^{j\theta}$ mancante del primo termine, quindi si ha

$$X(\theta) = \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}} + \frac{1}{1 - a e^{j\theta}} - 1 = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

Lo spettro della sequenza esponenziale bilatera è reale e pari; inoltre il segnale è passa-basso, per $0 < a < 1$, mentre per $a < 0$ è passa-alto.

Trasformata di Fourier di un Impulso Rettangolare Continuo

$$x(t) = A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$$



Un Segnale Rettangolare è un Segnale d'Energia come visto in precedenza → Quindi esiste la sua Trasformata di Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} A \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = -\frac{A}{j2\pi f} \cdot \left[e^{-j2\pi f t}\right]_{-T/2}^{T/2} \rightarrow$$

$$X(f) = -\frac{A}{j2\pi f} \cdot \left[e^{-\frac{j\cancel{2}\pi f T}{\cancel{2}}} - e^{\frac{j\cancel{2}\pi f T}{\cancel{2}}}\right] \rightarrow$$

Considerando la Formula di Eulero:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

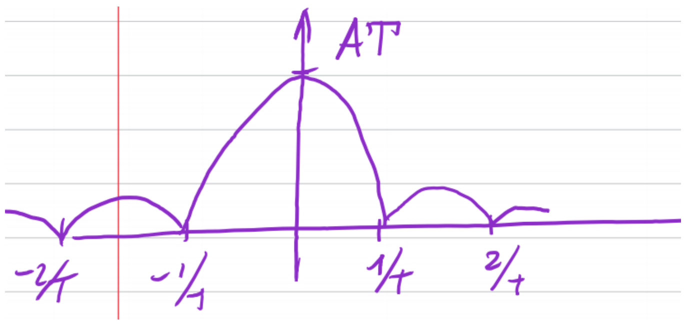
Possiamo scrivere:

$$X(f) = \frac{A}{\pi f} \cdot \sin(\pi f T)$$

Se moltiplichiamo e dividiamo per "T":

$$X(f) = \frac{AT}{\pi f T} \cdot \sin(\pi f T) = AT \cdot sinc(fT)$$

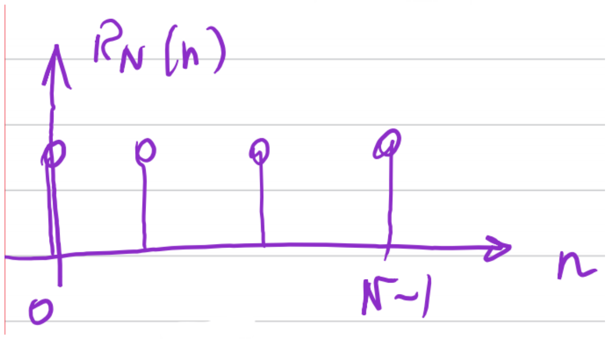
Quindi questa funzione si comporterà in questo modo:



Poiché la $sinc(0) = 1 \rightarrow AT \cdot sinc(fT) = AT$ e poi sappiamo che $sinc(k) = 0$ quando $k = Numero\ Intero$, per cui $sinc(fT) = 0\ per\ fT = Numero\ Intero \rightarrow f = \frac{Numero\ Intero}{T} =$
$= \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, ecc\ \ldots$

Trasformata di Fourier di un Impulso Rettangolare Discreto

$$x(n) = R_N(n) = \begin{cases} 1 \; se \; n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}$$



$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) \cdot e^{-j2\pi vn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi vn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi v}\right)^n \rightarrow$$

Dato che $\left|e^{-j2\pi v}\right| = |cos(2\pi v) + j \cdot sin\,(2\pi v)| = \sqrt{cos^2(2\pi v) + \sin^2(2\pi v)} = 1$ allora questa Serie è una Serie Convergente ed è del tipo:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

Per cui:

$$X(v) = \frac{1-e^{-j2\pi vN}}{1-e^{-j2\pi v}}$$

Quindi la Trasformata di Fourier di un Impulso Rettangolare Discreto è una quantità complessa.

Se ora mettiamo in evidenza la quantità "$e^{-j2\pi v\frac{N}{2}}$" al numeratore e "$e^{-j2\pi\frac{v}{2}}$" al denominatore:

$$\frac{e^{-j2\pi v\frac{N}{2}} \cdot \left(e^{j2\pi v\frac{N}{2}} - e^{-j2\pi v\frac{N}{2}}\right)}{e^{-j2\pi\frac{v}{2}} \cdot \left(e^{j2\pi\frac{v}{2}} - e^{-j2\pi\frac{v}{2}}\right)}$$

Ora moltiplichiamo e dividiamo per la quantità "$2j$" :

$$\frac{e^{-j2\pi v\frac{N}{2}} \cdot 2j \cdot \left(e^{j2\pi v\frac{N}{2}} - e^{-j2\pi v\frac{N}{2}}\right)}{e^{-j2\pi\frac{v}{2}} \cdot 2j \cdot \left(e^{j2\pi\frac{v}{2}} - e^{-j2\pi\frac{v}{2}}\right)}$$

E sfruttando la Formula di Eulero:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Avremo:

$$\frac{e^{-j\pi vN} \cdot \sin\,(\pi Nv)}{e^{-j\pi v} \cdot \sin\,(\pi v)}$$

Ora, considerando che:

$$\frac{e^{-j\pi vN}}{e^{-j\pi v}} = e^{-j\pi v(N-1)}$$

In definitiva avrò:

$$X(v) = e^{-j\pi v(N-1)} \cdot \frac{\sin\,(\pi Nv)}{\sin\,(\pi v)}$$

Lo Spettro di Ampiezza è:

$$|X(v)| = \left|e^{-j\pi v(N-1)}\right| \cdot \frac{|\sin(\pi N v)|}{|\sin(\pi v)|}$$

Dato che:

$$\left|e^{-j\pi v(N-1)}\right| = |cos(\pi v(N-1)) + j \cdot sin(\pi v(N-1))| = \sqrt{cos^2(\pi v(N-1)) + \sin^2(\pi v(N-1))} = 1$$

Avremo:

$$|X(v)| = \frac{|\sin(\pi N v)|}{|\sin(\pi v)|}$$

Per capire come si comporta questa Funzione, vediamo innanzitutto quanto vale nell'origine:

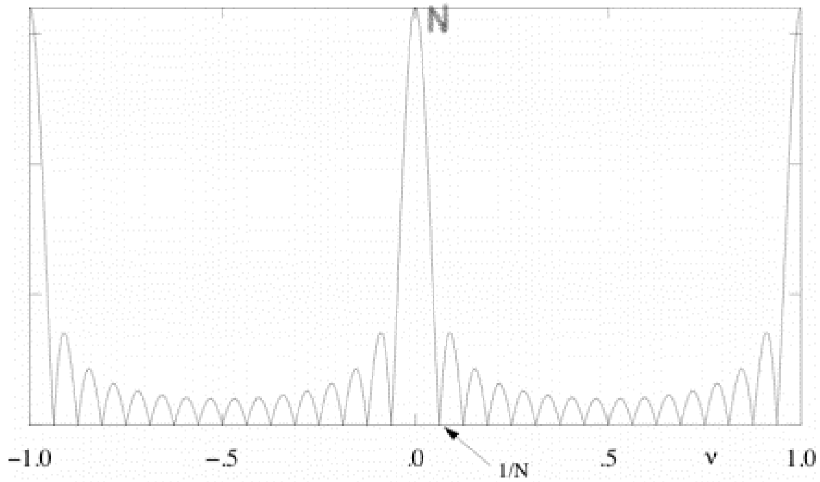
Per il caso "$v = 0$", dato il limite notevole $\lim_{x\to 0} \sin(x) \approx x$ avremo:

$$\lim_{x\to 0} |X(v)| = \frac{\cancel{\pi} N \cancel{v}}{\cancel{\pi v}} = N$$

Inoltre, sappiamo che questa funzione vale zero quando si annulla il Numeratore:

$$\sin(\pi N v) = 0 \quad se \quad \pi N v = k\pi \rightarrow Nv = k \rightarrow v = \frac{k}{N} \qquad con\ k = Numero\ Intero$$

Quindi:



Proprietà della Trasformata di Fourier

1. Linearità:

$$a_1 \cdot x_1(\cdot) + a_2 \cdot x_2(\cdot) = a_1 \cdot X_1(\cdot) + a_2 \cdot X_2(\cdot)$$

2. Dualità:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Longrightarrow X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$

Esempio:

In precedenza, abbiamo visto che il segnale:

$$x(t) = A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

Ha la seguente Trasformata di Fourier:

$$X(f) = AT \cdot sinc(fT)$$

Quindi:

$$A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT \cdot sinc(fT)$$

Allora, per la Proprietà di Dualità:

$$A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT \cdot sinc(fT) \Longrightarrow AT \cdot sinc(tT) \longleftrightarrow A \cdot \prod\left(-\frac{f}{T}\right)$$

Ma il Segnale Rettangolare è un Segnale Pari, quindi:

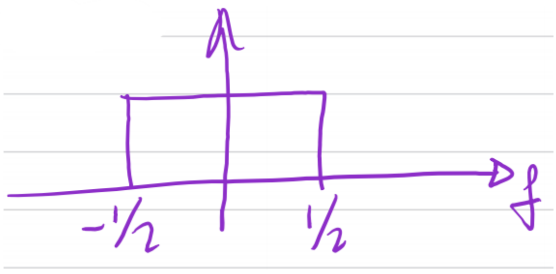
$$A \cdot \prod\left(-\frac{f}{T}\right) = A \cdot \prod\left(\frac{f}{T}\right)$$

Quindi sapevamo (perché l'avevamo calcolato) che la Trasformata di un Impulso Rettangolare è una *sinc*, ma ora, sappiamo anche che la Trasformata della *sinc* è un impulso rettangolare!

Se, ad esempio, supponiamo che T=1, avremo:

$$A \cdot sinc(t) \longleftrightarrow A \cdot \prod(f)$$

Dove "$A \cdot \prod(f)$" è il Seguente Segnale:



3. Simmetria:

   - Riflessione → Ad una Riflessione nel Dominio del Tempo corrisponde una Riflessione nel Dominio della Frequenza e viceversa:

$$x(-(\cdot)) \leftrightarrow X(-(\cdot))$$

Pertanto, un Segnale Pari ha spettro Pari e viceversa.

- Coniugazione → Ad una Coniugazione in un Dominio, corrisponde una Coniugazione più una Riflessione nell'altro Dominio:

$$x^*(\cdot) \leftrightarrow X^*\big(-(\cdot)\big) \quad e \quad x^*(-(\cdot)) \leftrightarrow X^*(\cdot)$$

N.B. → Funzioni Hermitiane.

E se un Segnale è Reale? Cioè se "$x^*(\cdot) = x(\cdot)$"? In tal caso:

$$X^*\big(-(\cdot)\big) = X(\cdot)$$

Cioè $X(f)$ ha Parte Reale (e Modulo) Pari e Parte Immaginaria (e Fase) Dispari.

Una Funzione che verifica questa caratteristica "$X^*\big(-(\cdot)\big) = X(\cdot)$" è detta "Funzione Hermitiana".

Se $x(\cdot)$, oltre che Reale e anche Pari, allora segue che anche la sua Trasformata $X(\cdot)$ è Reale e Pari.

4. Cambiamento di Scala:

Ad una a Compressione nel Dominio del Tempo corrisponde un'Espansione dello Spettro d'Ampiezza e viceversa:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Quindi il Cambiamento di Scala non influisce sulla Fase, ma solo sull'Ampiezza.

5. Traslazione nel Dominio del Tempo Continuo o Discreto:

Ad una a Traslazione nel Dominio del Tempo Continuo o Discreto corrisponde uno Sfasamento Lineare nel Dominio della Frequenza e viceversa:

$$x(t-T) \leftrightarrow X(f) \cdot e^{-j2\pi fT} \quad e \quad x(n-N) \leftrightarrow X(v) \cdot e^{-j2\pi vN}$$

Quindi un Ritardo non influisce sull'Ampiezza, ma solo sulla Fase.

6. Traslazione nel Dominio della Frequenza:

Dato un Segnale "$x(t)$", se lo moltiplichiamo per un fasore a Frequenza "f_c", otterremo:

$$x(t) \cdot e^{j2\pi f_c t}$$

La trasformata di questa quantità è definita come:

$$x(t) \cdot e^{j2\pi f_c t} \leftrightarrow X(f - f_c)$$

N.B. → Quindi abbiamo visto che la Traslazione nel Dominio del Tempo di un Segnale, corrisponde alla moltiplicazione per un Fasore nel Dominio della Frequenza e la moltiplicazione per un Fasore nel Dominio del Tempo, corrisponde alla Traslazione nel Dominio della Frequenza.

Analogamente, per il Tempo Discreto abbiamo che, dato un Segnale "$x(n)$", se lo moltiplichiamo per un fasore a Frequenza Discreta "v_c", otterremo:

$$x(n) \cdot e^{j2\pi v_c n}$$

E la trasformata di questa quantità è definita come:

$$x(n) \cdot e^{j2\pi v_c n} \leftrightarrow X(v - v_c)$$

7. Modulazione:

Moltiplicando un Segnale per una Sinusoide a Frequenza "f_c", ottengo:

$$2 \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) = X(f - f_c) + X(f + f_c)$$

Es. → Dato l'impulso Cosinusoidale:

$$x(t) = A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot cos(2\pi f_c t)$$

Sfruttando le Formule di Eulero lo scrivo come:

$$x(t) = A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[e^{-j2\pi f_c t} + e^{j2\pi f_c t}\right] = A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\pi f_c t} + A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{j2\pi f_c t}$$

Avevamo già calcolato in precedenza la Trasformata di Fourier di un impulso rettangolare discreto ed avevamo visto che, dato il Segnale:

$$A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

Avremo come trasformata:

$$AT \cdot sinc(fT)$$

Inoltre, abbiamo calcolato poco sopra che:

$$e^{j2\pi f_c t} \leftrightarrow \delta(f - f_c)$$

Quindi, dato che noi abbiamo:

$$x(t) = \underbrace{A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\pi f_c t}} + \underbrace{A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{j2\pi f_c t}}$$

$$X(f) = \boxed{A \cdot \frac{1}{2} \cdot sinc\big((f - f_c) \cdot T\big)} + \boxed{A \cdot \frac{1}{2} \cdot sinc\big((f + f_c) \cdot T\big)}$$

Che si comporta all'incirca così:

8. Convoluzione:

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) \cdot Y(f)$$

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

9. Scambio di Alte e Basse Frequenze:

Se consideriamo il Segnale:

$$x(n) \cdot (-1)^n$$

Cioè un Segnale "$x(n)$" moltiplicato per la Sequenza Discreta di impulsi "$+1, -1, +1, -1, ecc$ ..."

Considerano che la Sequenza Discreta di impulsi " $(-1)^n$ " può essere scritta come:

$$(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n}$$

Allora, sapendo che per la Proprietà di Traslazione nel Dominio della Frequenza:

$$x(n) \cdot e^{j2\pi v_c n} \leftrightarrow X(v - v_c)$$

Nel nostro caso avremo:

$$x(n) \cdot (-1)^n = x(n) \cdot e^{j\pi n} \leftrightarrow X\left(v - \frac{1}{2}\right)$$

Questo significa che se il Segnale "$x(n)$" è un Segnale Passa – Basso, ossia centrato in zero, nell'origine, se moltiplicato per la Sequenza Discreta $(-1)^n$, lo Spettro d'Ampiezza della sua Trasformata è un Segnale Passa – Alto (perché è centrato in $\frac{1}{2}$).

Quindi un Segnale Passa – Basso, moltiplicato per la Sequenza Discreta $(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n}$, diventa Passa – Alto ed un Segnale Passa – Alto, moltiplicato per la Sequenza Discreta $(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n}$, diventa Passa – Basso.

Perché la Moltiplicazione per $(-1)^n$, permette di "Shiftare il Segnale".

10. Valore nell'origine:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt \quad e \quad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, df$$

Infatti:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Ma se $f = 0$:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{0}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$$

11. Uguaglianza di Parseval:

Il Prodotto Scalare tra due Segnali nel Dominio del Tempo è uguale al Prodotto Scalare nel Dominio della Frequenza:

$$< x(t), y(t) > = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t)\, dt \;\rightarrow\; < X(f), Y(f) > = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot Y^*(f)\, df$$

Cioè si dice che "il Prodotto Scalare si conserva".

Trasformata di Fourier dell'Impulso Discreto

Dato l'Impulso Discreto "$\delta(n)$" calcoliamone la Trasformata di Fourier "$X(v)$" :

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) \cdot e^{-j2\pi v n}$$

Per la Proprietà di Campionamento dell'Impulso Discreto, sappiamo che:

$$x(n) \cdot \delta(n-k) = x(k) \cdot \delta(n-k)$$

Per cui nel nostro caso, dato che abbiamo "$\delta(n)$" la nostra "k" è pari a zero e quindi:

$$x(n) \cdot \delta(n-0) = x(0) \cdot \delta(n-0)$$

Quindi "$e^{-j2\pi v n}$", moltiplicato per "$\delta(n)$", diventa "$e^{-j2\pi v 0} = e^0 = 1$" e quindi:

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) \cdot e^{-j2\pi v n} = 1$$

Quindi la Trasformata di Fourier di un Impulso Discreto equivale alla costante unitaria.

Trasformata di Fourier dell'Impulso Continuo

Dato l'Impulso Continuo "$\delta(t)$" calcoliamone la Trasformata di Fourier "$X(f)$" :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Analogamente all'Impulso Discreto, per la Proprietà di Campionamento dell'Impulso Continuo:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = 1$$

Quindi la Trasformata di Fourier di un Impulso Continuo equivale alla costante unitaria.

Trasformata di Fourier di una Costante

Dato che, come visto poco più sopra, la Trasformata di Fourier dell'Impulso è uguale alla Costante Unitaria:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = 1$$

Allora, dato che la Proprietà di Dualità della Trasformata di Fourier afferma che:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Longrightarrow X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$

Nel nostro caso:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \Longrightarrow 1 \longleftrightarrow \delta(-f)$$

Ma l'Impulso è una Funzione Pari, quindi:

$$\delta(-f) = \delta(f)$$

Quindi possiamo affermare che, data la Costante Unitaria, la sua Trasformata di Fourier è definita come:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t}\, dt = \delta(f)$$

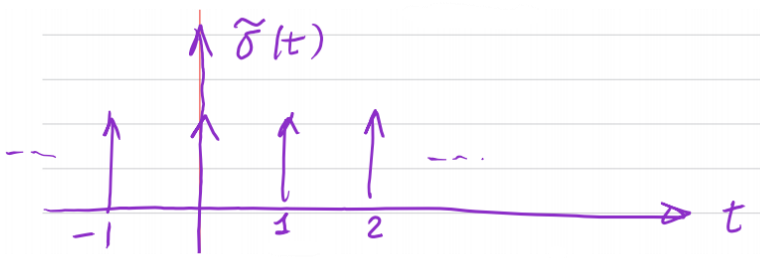
E più in generale che, data una Costante " c ", allora:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = c \cdot \delta(f)$$

Trasformata del Segnale Campionatore Ideale

Consideriamo il Segnale Campionatore Ideale "$\tilde{\delta}(t)$", cioè la Sequenza di Impulsi di Dirac:

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k)$$



Allora, la Trasformata di Fourier del Segnale Campionatore Ideale è definita come:

$$\tilde{\delta}(f)$$

Quindi:

$$\tilde{\delta}(t) \leftrightarrow \tilde{\delta}(f)$$

Trasformata del Segnale Campionatore Ideale di Periodo T

Consideriamo il Segnale Campionatore Ideale di Periodo "T" :

$$\widetilde{\delta_T}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Allora:

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(T\left(\frac{t}{T} - k\right)\right) \rightarrow$$

Per la Proprietà di Cambiamento di Scala dell'Impulso Continuo, sappiamo che:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

Quindi:

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot \delta\left(\frac{t}{T} - k\right) = \frac{1}{T} \cdot \tilde{\delta}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Ora, per la Proprietà di Cambiamento di Scala della Trasformata di Fourier sappiamo che "ad una a Compressione nel Dominio del Tempo corrisponde un'Espansione dello Spettro d'Ampiezza e viceversa":

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

In tal caso noi non abbiamo una "compressione", ma un'espansione, quindi a questa corrisponderà una compressione dello Spettro d'Ampiezza:

$$\frac{1}{T} \cdot \tilde{\delta}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow \tilde{\delta}(fT)$$

Con:

$$\tilde{\delta}(fT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(fT - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(T\left(f - \frac{k}{T}\right)\right)$$

Per la Proprietà di Cambiamento di Scala dell'Impulso Continuo, sappiamo che:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

Quindi:

$$\tilde{\delta}(fT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \cdot \tilde{\delta}_{1/T}(f)$$

Concludiamo che:

$$\tilde{\delta}_T(t) \leftrightarrow \tilde{\delta}_{1/T}(fT)$$

Cioè se si ha un distanziamento tra gli impulsi pari a "T" nel Dominio del Tempo, si avrà un distanziamento tra gli impulsi pari a $1/T$ nel Dominio della Frequenza.

Trasformata di Fourier di un Fasore

$$x(t) = A \cdot e^{j2\pi f_c t}$$

Per la Proprietà di Traslazione nel Dominio della Frequenza della Trasformata di Fourier, sappiamo che:

$$x(t) \cdot e^{j2\pi f_c t} \leftrightarrow X(f - f_c)$$

Inoltre, abbiamo calcolato la Trasformata di Fourier di una Costante ed abbiamo ricavato che, data una Costante "A", la sua trasformata è:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = A \cdot \delta(f)$$

Quindi:

$$A \cdot e^{j2\pi f_c t} \leftrightarrow A \cdot \delta(f - f_c)$$

Replicazione

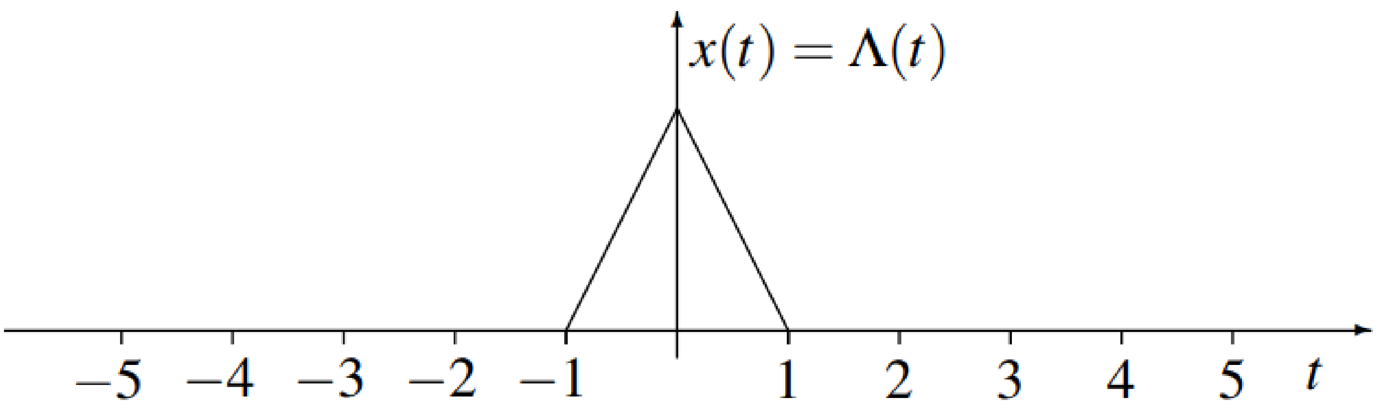
Dato un Segnale "$x(t)$" detto "Segnale Generatore", il Segnale Replicato che si indica come:

$$\tilde{x}_T(t) \quad oppure\ come \quad rep_T(x(t))$$

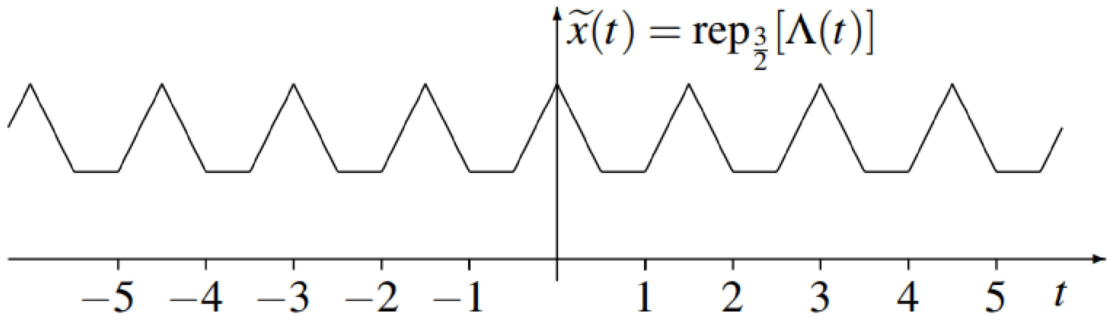
E si calcola come:

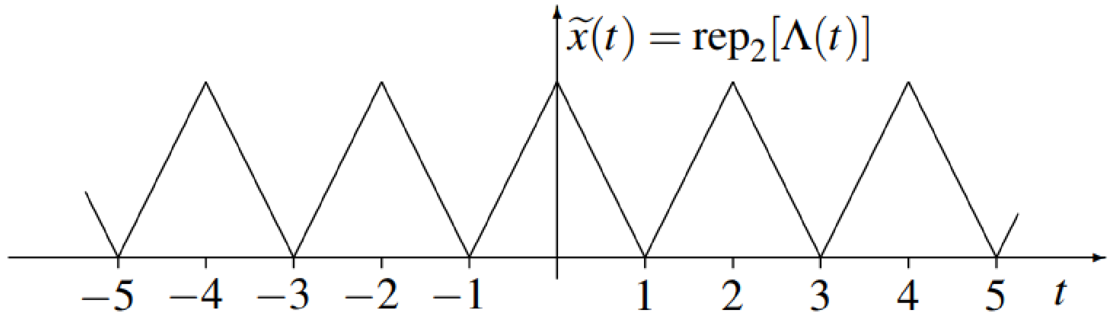
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$$

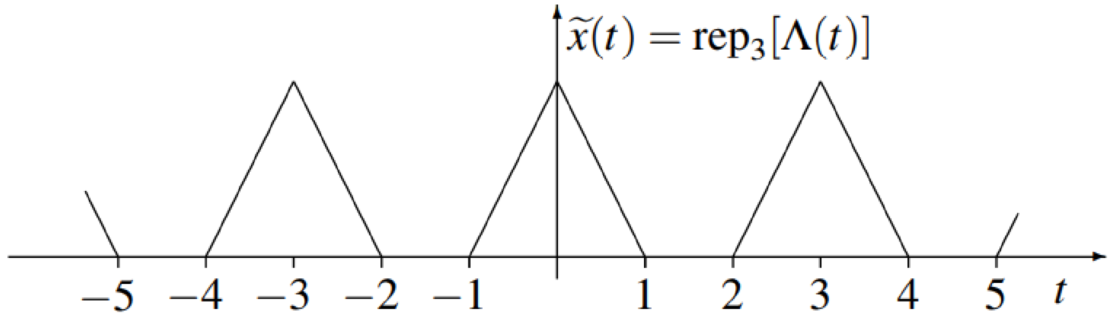
Quindi, dato il Segnale Generatore $x(t)$ definito come:



Allora:

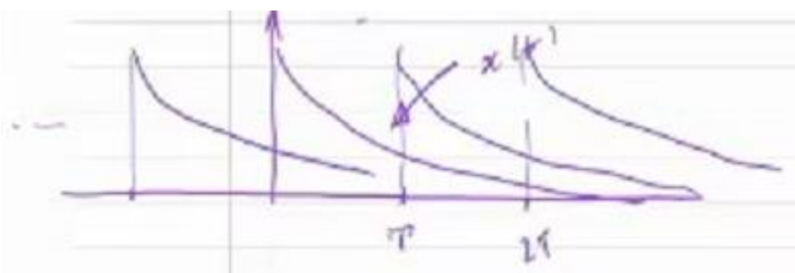






Es. → Dato il Segnale Generatore $x(t)$ definito come:

Allora, il Segnale Replicato "$\tilde{x}_T(t)$" è definito come:



Trasformata di Fourier di un Segnale Replicato

Consideriamo un Segnale Periodico ottenuto come Replicazione di un Segnale Generatore:

$$x(t) = x(t - kT) \quad \forall t, k$$

Dimostrazione Periodicità del Segnale "$x(t)$":

Noi sappiamo che Qualsiasi Segnale Periodico può essere sempre considerato come la Replicazione di un opportuno Segnale Generatore, per cui, consideriamo la Replicazione di questo Segnale:

$$rep_T(x(t)) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t - kT - iT)$$

(Utilizziamo la "i" come indice della sommatoria per non confonderci con la "k" del Segnale Generatore).

$$rep_T(x(t)) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t - T(k + i))$$

Poniamo $k + i = m$, ed otteniamo:

$$rep_T(x(t)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT)$$

Abbiamo ottenuto proprio la stessa cosa del Segnale Generatore! → Quindi abbiamo provato che:

$$x(t) = x(t - kT) \quad \forall t, k \text{ è } periodico$$

Ora, per la Proprietà di Riproducibilità dell'Impulso Discreto, possiamo scrivere che:

$$x(t - kT) = x(t) * \delta(t - kT)$$

Quindi:

$$rep_T(x(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t - kT)$$

La Somma di Convoluzioni è uguale alla Convoluzione delle Somme, inoltre $x(t)$ non dipende dall'indice "k" della Sommatoria, quindi:

$$rep_T(x(t)) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Ora possiamo calcolarne più facilmente la Trasformata di Fourier, infatti in Precedenza abbiamo calcolato la [Trasformata del Segnale Campionatore Ideale di Periodo T] che equivale proprio alla nostra sommatoria e inoltre, sfruttiamo anche la Proprietà di Convoluzione della Trasformata di Fourier:

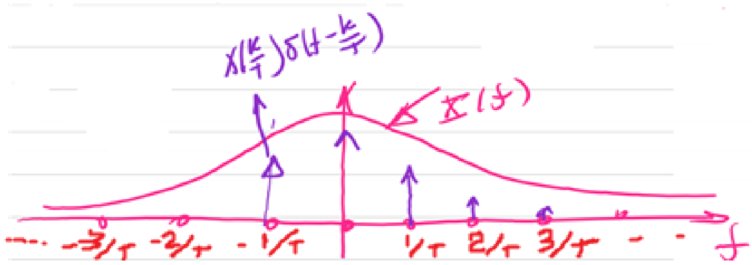
$$x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow X(f) \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Data la Proprietà di Campionamento della dell'Impulso Discreto, possiamo scriverla anche come:

$$x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Quindi abbiamo ottenuto che:

$$X(f) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



Quindi abbiamo Campionato la Trasformata di Fourier attraverso Impulsi Discreti distanziati di $1/T$.

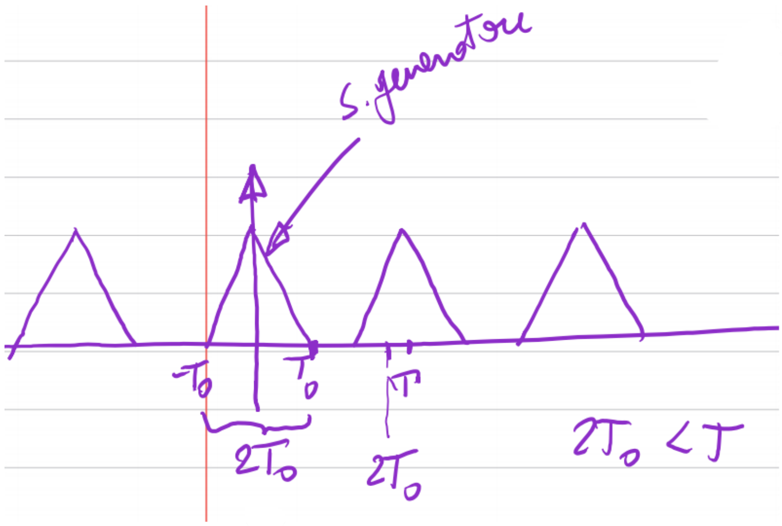
N.B. → La Trasformata di Fourier di un Segnale Replicato corrisponde ad un Segnale Campionato.

Replicazione e Sovrapposizione

Le Repliche di un Segnale possono Sovrapporsi se il Periodo "T", scelto per la Replicazione, è minore della Durata del Segnale.

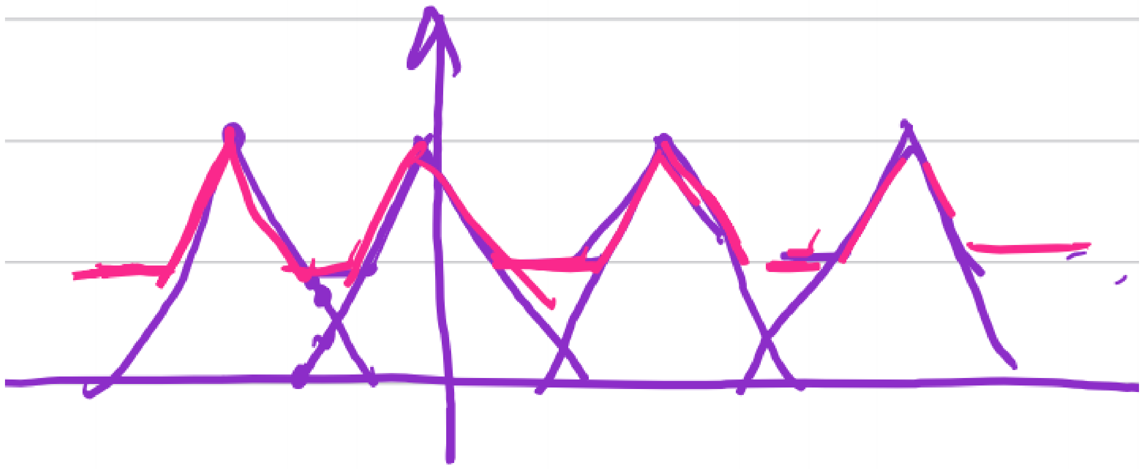
Quindi se non vogliamo delle Repliche Sovrapposte:

Dobbiamo scegliere un Valore di "T" che sia maggiore o uguale alla Durata del Segnale Generatore (che nell'esempio è pari a $2T_0$).



Se $T = 2T_0$ avremo:

Ma se $T < 2T_0$ avremo:

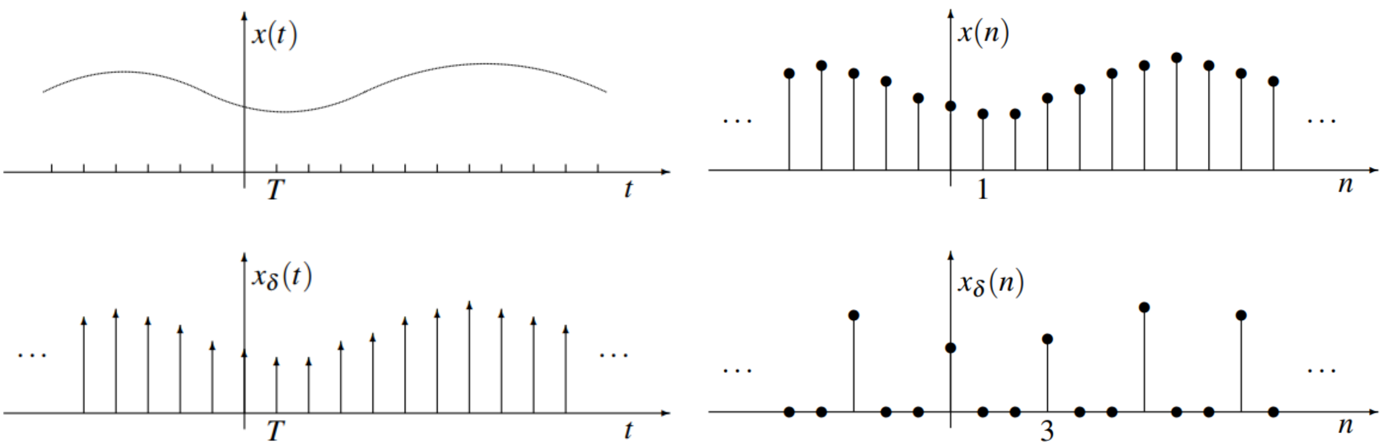


Campionamento

Dato un segnale $x(\cdot)$, la sua Versione Campionata è definita come il Segnale:

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT) \quad o \quad x_\delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kN) \cdot \delta(n - kN)$$

Cioè ho una Sommatoria di Impulsi Continui o Discreti, centrati in "kT" ed ognuno con Ampiezza pari a $x(kT)$:



Trasformata di Fourier di un Segnale Campionato

Consideriamo il Segnale Campionato definito sopra:

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

Per la Proprietà di Riproducibilità dell'Impulso sappiamo che:

$$x(kT) \cdot \delta(t - kT) = x(t) \cdot \delta(t - kT)$$

Quindi:

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - kT) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Questa Trasformata l'abbiamo già calcolata, precisamente nel calcolo della Trasformata di Fourier di un Segnale Replicato ed abbiamo visto che:

$$x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow X(f) * \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Dato che la Convoluzione di Somme è uguale alla Somma di Convoluzioni, possiamo scrivere:

$$X(f) * \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Per la Proprietà della Retta, la Convoluzione "$X(f) * \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$" è uguale a "$X$" calcolata nel punto di applicazione della retta, che è $f = f - \frac{k}{T}$ e quindi:

$$\frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Che, come abbiamo visto nel Calcolo della Trasformata del Segnale Campionatore Ideale di Periodo "T", è uguale a:

$$x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \leftrightarrow \frac{1}{T} \cdot rep_{1/T}(X(f))$$

N.B. → La Trasformata di Fourier di un Segnale Campionato corrisponde ad un Segnale Replicato.

Esercizio sull'Applicazione delle Proprietà della Trasformata di Fourier

Calcolo dello Spettro del seguente Segnale:

$$x(t) = sinc^2(2t) * rep_{4\pi}\left(e^{-|t|}\right)$$

Trasformiamo il primo termine:

$$sinc^2(2t) = sinc(2t) \cdot sinc(2t)$$

Il Prodotto nel Dominio del Tempo corrisponde alla Convoluzione nel Dominio della Frequenza:

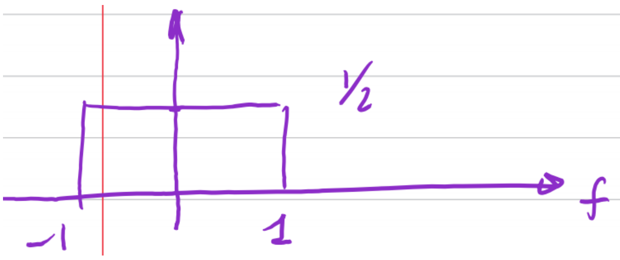
$$sinc(2t) \cdot sinc(2t) \rightarrow TrasformataFourier\big(sinc(2t)\big) * TrasformataFourier\big(sinc(2t)\big)$$

Abbiamo visto, durante il calcolo della Trasformata di Fourier di un Impulso Rettangolare, che questa era uguale al Segnale "sinc" e per la Proprietà di Dualità della Trasformata di Fourier abbiamo dedotto che la Trasformata del Segnale "sinc" sia un impulso Rettangolare:

$$sinc(t) \rightarrow \prod(f)$$

Quindi, applicando la Proprietà di Cambiamento di Scala, avremo:

$$sinc(2t) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \prod\left(\frac{f}{2}\right)$$



Quindi:

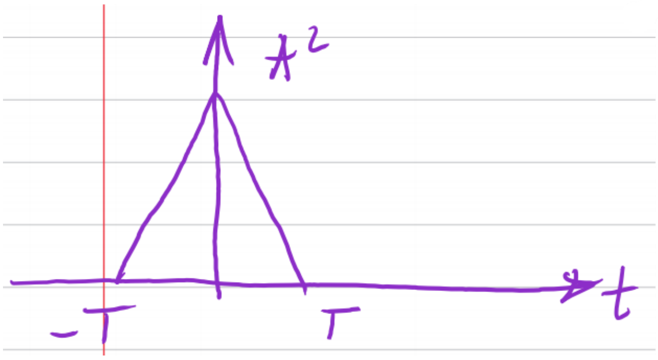
$$sinc(2t) \cdot sinc(2t) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \prod\left(\frac{f}{2}\right) * \frac{1}{2} \cdot \prod\left(\frac{f}{2}\right)$$

Sappiamo che la Convoluzione equivale alla Correlazione del Segnale Coniugato e Ribaltato, quindi, dato che questa è una Funzione Pari ed il suo Dominio è Reale, in tal caso *Correlazione = Convoluzione*.

In particolar modo qui abbiamo la Correlazione tra due Segnali Rettangolari identici e cioè l'Autocorrelazione del Segnale Rettangolare "$\frac{1}{2} \cdot \prod\left(\frac{f}{2}\right)$".

Noi l'Autocorrelazione di un Segnale Rettangolare l'abbiamo già calcolata in Precedenza, in particolare vedemmo che l'Autocorrelazione del Segnale Rettangolare "$x(t) = A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right)$" è definita come:

$$r_x(t) = A^2 T \cdot \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$



Nel nostro caso abbiamo:

$$\frac{1}{2}\cdot\Pi\left(\frac{f}{2}\right)*\frac{1}{2}\cdot\Pi\left(\frac{f}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\Lambda\left(\frac{f}{2}\right)$$

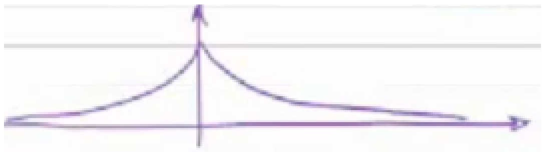
E quindi la Trasformata del Primo Termine è fatta:

$$sinc^2(2t)\rightarrow\frac{1}{2}\cdot\Lambda\left(\frac{f}{2}\right)$$

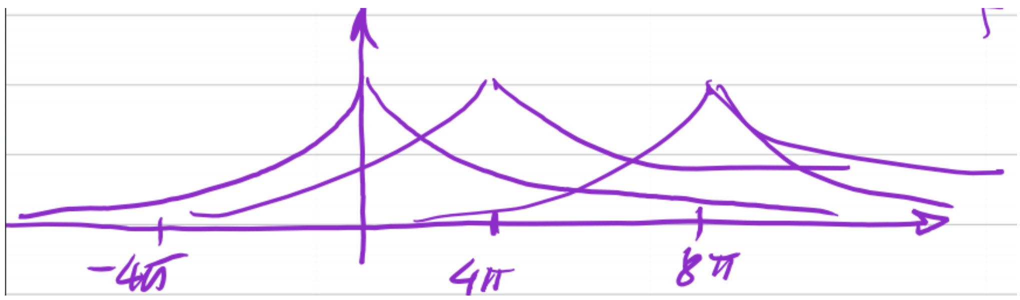
Ora trasformiamo il secondo termine:

$$rep_{4\pi}\left(e^{-|t|}\right)$$

Noto innanzitutto che è un esponenziale bilatero decrescete:



Ed è replicato per ogni multiplo di "4π":



Abbiamo studiato (qui) che "La Trasformata di Fourier di un Segnale Replicato corrisponde ad un Segnale Campionato", in particolare calcolammo che:

$$x(t-kT)\rightarrow\frac{1}{T}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\frac{k}{T}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Nel nostro caso avremo:

$$rep_{4\pi}\left(e^{-|t|}\right)\rightarrow\frac{1}{4\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\frac{k}{4\pi}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{k}{4\pi}\right)$$

Dobbiamo capire a cosa equivale "$X\left(\frac{k}{4\pi}\right)$":

$$X\left(\frac{k}{4\pi}\right)=[X(f)]_{f=\frac{k}{4\pi}}$$

E quindi dobbiamo capire a cosa equivale "$X(f)$":

$X(f)$ è la Trasformata del Segnale Generatore, cioè di $e^{-|t|}$, che è un Esponenziale Decrescente Bilatero la cui Trasformata è stata già calcolata in precedenza (solo che in questo caso "$a=1$") e quindi sappiamo già che:

$$e^{-|t|}\rightarrow\frac{2}{1+(2\pi f)^2}$$

E quindi:

$$X\left(\frac{k}{4\pi}\right)=\frac{2}{1+\left(\frac{2\pi k}{4\pi}\right)^2}=\frac{2}{1+\left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

Per cui:

$$rep_{4\pi}\left(e^{-|t|}\right)\rightarrow\frac{1}{4\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{k}{2}\right)^2}\cdot\delta\left(f-\frac{k}{4\pi}\right)$$

Ora possiamo concludere:

$$sinc^2(2t)*rep_{4\pi}\left(e^{-|t|}\right)\rightarrow\frac{1}{2}\cdot\Lambda\left(\frac{f}{2}\right)\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{k}{2}\right)^2}\cdot\delta\left(f-\frac{k}{4\pi}\right)$$

Esercizio → Sistema "MA".

Dato il seguente Legame Ingresso – Uscita:

$$y(n)=0.7\cdot x(n)+0.2\cdot x(n-1)+a\cdot x(n-2)$$

Calcolare "a" tale che la Risposta in Continua del Sistema si nulla.

Svolgimento:

In precedenza, abbiamo già calcolato la Risposta in Continua di un Sistema ed abbiamo visto che è definita come "$H(0)$":

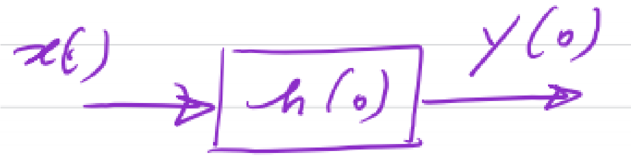
$$H(0)$$

Quindi l'Esercizio richiede di calcolare:

$$a:\ H(0)=0$$

Ma per sapere a cosa è uguale "$H(0)$", dobbiamo prima calcolare "$H(v)$", quindi:

Innanzitutto, noi sappiamo che, dato un Sistema LTI:



Il suo Legame Ingresso – Uscita è:

$$y(\cdot)=x(\cdot)*h(\cdot)$$

La Proprietà di Convoluzione della Trasformata di Fourier, però, ci dice che:

$$x(\cdot)*h(\cdot)=X(\cdot)\cdot H(\cdot)$$

E quindi, il Legame Ingresso – Uscita del Sistema, possiamo scriverlo come:

$$Y(\cdot)=X(\cdot)\cdot H(\cdot)\rightarrow H(\cdot)=\frac{Y(\cdot)}{X(\cdot)}$$

Calcoliamo la Trasformata di Fourier dell'Uscita del Sistema:

$$y(n)=0.7\cdot x(n)+0.2\cdot x(n-1)+a\cdot x(n-2)\rightarrow$$

$$\rightarrow Y(v)=0.7\cdot X(v)+0.2\cdot X(v)\cdot e^{-j2\pi v}+a\cdot X(v)\cdot e^{-j4\pi v}$$

Mettiamo in evidenza "$X(v)$":

$$Y(v)=X(v)\cdot\left[0.7+0.2\cdot e^{-j2\pi v}+a\cdot e^{-j4\pi v}\right]$$

$$\frac{Y(v)}{X(v)} = \left[0.7 + 0.2 \cdot e^{-j2\pi v} + a \cdot e^{-j4\pi v}\right] = H(\cdot)$$

Quindi:

$$H(0) = 0.7 + 0.2 + a$$

Ora poniamo $H(0) = 0$ e calcoliamo "a":

$$0 = 0.7 + 0.2 + a \rightarrow$$

$$a = -0.9$$

Calcoliamo lo Spettro d'Ampiezza della Risposta in Frequenza che sappiamo essere:

$$|H(v)| = \left|0.7 + 0.2 \cdot e^{-j2\pi v} + a \cdot e^{-j4\pi v}\right|$$

A questo punto, per calcolare il Modulo, possiamo sia scrivere gli esponenziali complessi in termini di "Parte Reale + Parte Immaginaria" e poi, cercherò di ottenere l'intera quantità nella forma di "Parte Reale + Parte Immaginaria" e poi ne calcolo il modulo come "Radice Quadrata della Parte Reale al Quadrato + Parte Immaginaria al Quadrato", oppure posso moltiplicare questa quantità per il suo coniugato e poi calcolarne la Radice Quadrata.

Scelgo la Seconda Opzione:

$$|H(v)| = \sqrt{(0.7 + 0.2 \cdot e^{-j2\pi v} + a \cdot e^{-j4\pi v}) \cdot (0.7 + 0.2 \cdot e^{j2\pi v} + a \cdot e^{j4\pi v})}$$

$$= \sqrt{0.7^2 + 0.14 \cdot e^{j2\pi v} + 0.7 \cdot a \cdot e^{j4\pi v} + 0.14 \cdot e^{-j2\pi v} + 0.04 + 0.2 \cdot a \cdot e^{j2\pi v} + 0.7 \cdot a \cdot e^{-j4\pi v} + 0.2 \cdot a \cdot e^{j2\pi v} + a^2}$$

$$= \sqrt{0.49 + 0.04 + a^2 + 0.34 \cdot e^{j2\pi v} + 0.34 \cdot e^{-j2\pi v} + 0.7 \cdot e^{j4\pi v} + 0.7 \cdot e^{-j4\pi v}}$$

$$= \sqrt{0.53 + a^2 + 0.34 \cdot 2 \cdot \cos(2\pi v) + 0.7 \cdot 2 \cdot \cos(4\pi v)}$$

$$|H(v)| = \sqrt{0.53 + a^2 + 0.68 \cdot \cos(2\pi v) + 1.4 \cdot \cos(4\pi v)}$$

N.B. → L'Uscita di un Sistema LTI con in ingresso una costante, è nulla. Cioè se

$$x(\cdot) = Costante \rightarrow y(\cdot) = 0$$

Perché l'Uscita ha una Risposta in Frequenza nulla alla Continua.

Esercizio → Si consideri la Somma di due Segnali Incoerenti:

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad con \quad x(t), y(t)\ incoerenti$$

E si considerino le Funzioni di Autocorrelazione di "$x(t)$" ed "$y(t)$" :

$$r_x(\tau) = \Lambda\left(\frac{2\tau}{3}\right) \quad e \quad r_y(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$$

Allora:

$$r_{zy}(\tau) = ?$$

Svolgimento:

Sappiamo che:

$$r_{zy}(\tau) = < z(t), y(t-\tau) > = < x(t) + y(t), y(t-\tau) >$$

Per la Proprietà di Linearità del Prodotto Scalare:

$$r_{zy}(\tau) = < x(t), y(t-\tau) > + < y(t), y(t-\tau) > = r_{xy}(\tau) + r_y(\tau)$$

Ed ora possiamo calcolarla:

$$r_{xy}(\tau) = 0$$

Perché $x(t)$ ed $y(t)$ sono incoerenti.

Quindi:

$$r_{zy}(\tau) = r_y(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$$

Esercizio → Consideriamo un Segnale "$x(t)$" il cui Spettro è:

$$X(t) = \Lambda\left(\frac{f}{2B}\right)$$

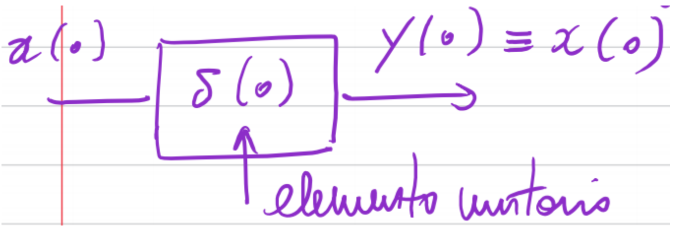
E consideriamo che questo Segnale venga filtrato da un Sistema con la seguente Risposta Impulsiva:

$$h(t) = -\frac{1}{2} \cdot \delta(t) + \delta\left(t - {}^{T}\!/_{2}\right) - 0.5 \cdot \delta(t-T)$$

Disegnare il Grafico del Modulo della Risposta in Frequenza del Sistema (dello Spetto d'Ampiezza).

Svolgimento:

Per la Proprietà di "Elemento Unitario" della Delta, noi sappiamo che, se un Sistema ha Risposta Impulsiva uguale alla Delta, allora:



Quindi, nel nostro caso, se la Risposta Impulsiva è la seguente:

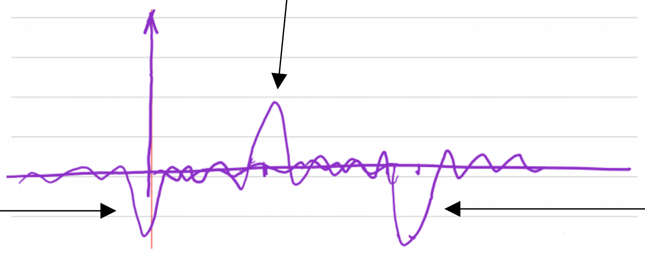
$$h(t) = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \delta(t)} + \underbrace{\delta\left(t - {}^{T}\!/_{2}\right)} - \underbrace{0.5 \cdot \delta(t-T)}$$

Segnale in Ingresso Ribaltato e moltiplicato per -0.5

Segnale Ritardato di un Fattore ${}^{T}\!/_{2}$

Segnale Ritardato di un Fattore T e moltiplicato per -0.5

Quindi, considerando che la Trasformata del Segnale $sinc^2$ è un Segnale Triangolare, allora so che il Segnale originale è proprio il Segnale $sinc^2$ e se viene immesso in un sistema con questa Risposta Impulsiva, otterrò all'incirca:



La Risposta in Frequenza è:

$$H(f) = -\frac{1}{2} + e^{-2\pi f ^T/_2} - \frac{1}{2} e^{-2\pi f T}$$

Il Modulo è:

$$|H(f)| = \left| -\frac{1}{2} + e^{-2\pi f ^T/_2} - \frac{1}{2} e^{-2\pi f T} \right| =$$

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2} + e^{-2\pi f ^T/_2} - \frac{1}{2} e^{-2\pi f T}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + e^{2\pi f ^T/_2} - \frac{1}{2} e^{2\pi f T}\right)}$$

...

Volendo calcolare l'Uscita del Sistema nel Dominio del Tempo:

Per la Proprietà di Cambiamento di Scala della Trasformata:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Ho che:

$$x(t) = 2B \cdot sinc^2(2Bt)$$

E dato che la Delta, nella Convoluzione si comporta come Elemento Unitario, avrò:

$$y(t) = x(t) * h(t) = -B \cdot sinc^2(2Bt) + 2B \cdot sinc^2\left(2B\left(t - {^T/_2}\right)\right) - B \cdot sinc^2\left(2B(t - T)\right)$$

Esercizio → Consideriamo il Seguente Segnale Discreto:

$$x(0) = -1, x(1) = -1, x(2) = 2, x(3) = 0, x(4) = 1$$

-1	-1	2	0	1

E consideriamo il caso in cui venga filtrato da un Sistema con Risposta Impulsiva:

$$h(n) = R_3(n)$$

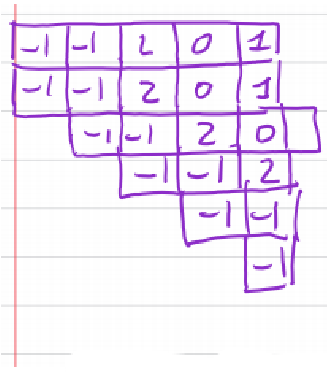
Calcolare:

$$r_{yx}(m) = ?$$

Svolgimento:

- 1° Modo: Sfrutto la Relazione Ingresso – Uscita vista in precedenza: $r_{yx}(\cdot) = r_x(\cdot) * h_1(\cdot)$;
- 2° Modo: Calcolo $y(n) = x(n) * h(n)$ e poi calcolo $r_{yx}(n)$.

Scegliamo il Primo, quindi, come abbiamo studiato in precedenza, la Convoluzione di Segnali Discreti Finiti può essere calcolata in questo modo:



$r_x(0) = 7$

$r_x(1) = 1 - 2 = -1$

$r_x(2) = -2 + 2 = 0$

$r_x(3) = -1$

$r_x(4) = -1$

Devo fare lo Stesso anche sciftando i valori verso sinistra e quindi alla fine avrò trovato tutti i coefficienti e poi, dopo aver ottenuto i valori della $r_x(n)$ per le varie "n", possiamo scrivere:

$$r_{yx}(m) = \underbrace{7\delta(m)}_{r_x(0)} - \underbrace{\delta(m-1)}_{r_x(1)} - \underbrace{\delta(m-3)}_{r_x(3)} - \underbrace{\delta(m-4)}_{r_x(4)} - \underbrace{\delta(m+1)}_{r_x(-1)} - \underbrace{\delta(m+3)}_{r_x(-3)} - \underbrace{\delta(m+4)}_{r_x(-4)}$$

Densità Spettrale di Energia – ESD (Energy Spectral Density)

Dalla Proprietà di "Uguaglianza di Parseval", si ha che:

Il Prodotto Scalare tra due Segnali nel Dominio del Tempo è uguale al Prodotto Scalare nel Dominio della Frequenza:

$$< x(t), y(t) > = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t)\, dt \;\rightarrow\; < X(f), Y(f) > = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot Y^*(f)\, df$$

Cioè si dice che "il Prodotto Scalare si conserva".

Questo ci permette di dire che, data la formula dell'Energia di un Segnale Continuo:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$

E data la "Norma di un Segnale", che è definita come:

$$\|x(\cdot)\|^2 = < x(\cdot), x(\cdot) > = < x(\cdot) \cdot x^*(\cdot) > = < |x(\cdot)|^2 > = \begin{cases} \mathcal{P}_x & se \;\; x(\cdot) \text{ è } un\ Segnale\ di\ Potenza \\ \mathcal{E}_x & se \;\; x(\cdot) \text{ è } un\ Segnale\ di\ Energia \end{cases}$$

Allora possiamo affermare che:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

Lo stesso vale anche per il Tempo Discreto:

$$\mathcal{E}_x = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(v)|^2\, df$$

Con:

$$S_x(\cdot) = |X(\cdot)|^2$$

Che indica la Densità Spettrale d'Energia o Distribuzione Spettrale dell'Energia di un Segnale $x(\cdot)$.

Proprietà della Densità Spettrale d'Energia

- L'ESD è sempre ≥ 0 ed è sempre Reale → L'*ESD* è definita come il "Modulo Elevato al Quadrato", quindi capiamo che è sempre Reale e mai Negativa;
- Invarianza per Traslazione Temporale → Come abbiamo visto analizzando le Proprietà della Trasformata di Fourier, se abbiamo una Traslazione nel Dominio del Tempo, allora nel Dominio della Frequenza avremo uno sfasamento (cioè avremo una moltiplicazione per un fasore). Ma l'*ESD* si calcola come Valore Assoluto Quadrato della Trasformata di Fourier, quindi eventuali Fasori vanno a farsi fottere e quindi l'*ESD* non subisce variazioni anche in caso di Traslazioni Temporali;
- Funzione di Trasferimento dell'Energia → Data una Trasformata di Fourier dell'Uscita di un Sistema LTI, che è definita come:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Allora:

$$|X(f)|^2 = |Y(f)|^2 \cdot |H(f)|^2$$

Che vuol dire:

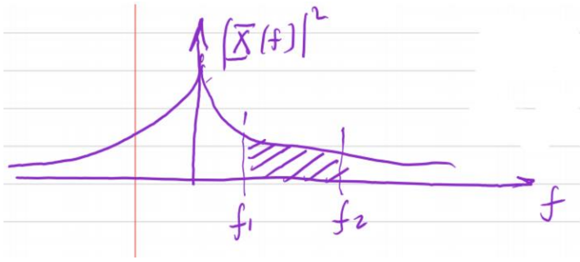
$$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$$

Con "$|H(f)|^2$" che indica la "Funzione di Trasferimento dell'Energia";

Densità Spettrale d'Energia e Banda di un Segnale

Definizione Energetica di Banda di un Segnale:

La Densità Spettrale d'Energia può essere calcolata anche in un determinato intervallo:



Integrando l'*ESD* su in un intervallo di frequenze, si ottiene l'Energia del segnale contenuta nell'intervallo di integrazione.

Per i segnali di energia, dunque, la "Banda" può essere definita come l'intervallo di frequenze in cui è contenuta una determinata porzione dell'Energia Totale (ad esempio il 90%, il 95%, il 99%).

Se i segnali sono reali (per cui la *ESD* è pari), si prendono in esame solo le Frequenze Positive (Banda Monolatera), mentre per segnali complessi si fa sempre riferimento alla Banda Bilatera.

Densità Spettrale d'Energia di un Impulso Rettangolare

$$x(t) = A \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = AT \cdot sinc(fT)$$

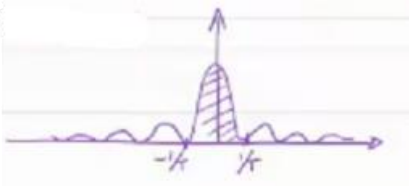
ESD:

$$S_x(\cdot) = |AT \cdot sinc(fT)|^2$$

Ma "$AT \cdot sinc(fT)$" è una quantità reale, per cui il Modulo corrisponde al Valore assoluto, che posso levare di mezzo:

$$S_x(\cdot) = A^2T^2 \cdot sinc^2(fT)$$

Quando trasmettiamo un Segnale, questo deve essere per forza di cose a Banda Limitata, quindi devo cercare di "troncare" il Segnale in modo coerente, cioè facendo in modo che conservi gran parte della sua Energia.



➔ Ad esempio, supponiamo di volerlo Troncare ad $^1/_T$, quanta Energia di quella Totale conserverà? Circa il 90%.

Per sapere quanto precisamente calcoliamo l'Energia Totale:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| A \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right|^2 dt = A^2 T$$

Quindi possiamo scrivere che:

$$S_x(\cdot) = \mathcal{E}_x \cdot T \cdot sinc^2(fT)$$

E quindi, sapendo che troncando il Segnale ad $^1/_T$, questo conserverà il 90% dell'Energia Totale, Sappiamo che:

$$\int_{-1/T}^{1/T} \mathcal{E}_x \cdot T \cdot sinc^2(fT)\ dt \approx 0.9 \cdot \mathcal{E}_x$$

Inoltre, è bene sapere che:

$$\int_{-2/T}^{2/T} \mathcal{E}_x \cdot T \cdot sinc^2(fT)\ dt \approx 0.95 \cdot \mathcal{E}_x$$

E che:

$$\int_{-10/T}^{10/T} \mathcal{E}_x \cdot T \cdot sinc^2(fT)\ dt \approx 0.99 \cdot \mathcal{E}_x$$

Densità Spettrale d'Energia di un Impulso Esponenziale Decrescente Monolatero

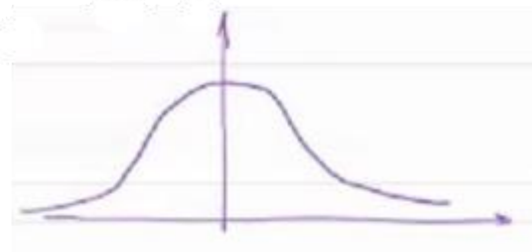
$$x(t) = e^{-at} \cdot \underbrace{u(t)}_{\text{Monolatero}}\ \ con\ \underbrace{a > 0}_{\text{Decrescente}}$$

Come visto in Precedenza, la Trasformata di Fourier di questo Segnale

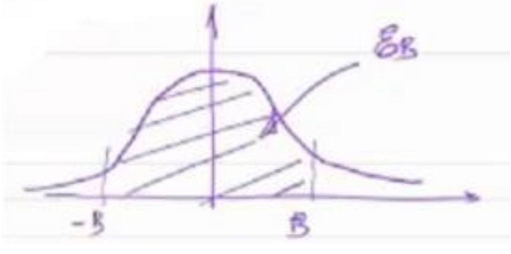
$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{^1/_a}{1 + ^{j2\pi f}/_a}$$

La Densità Spettrale è:

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \left| \frac{^1/_a}{1 + ^{j2\pi f}/_a} \right|^2 = \frac{^1/_{a^2}}{1 + \left(^{2\pi f}/_a\right)^2} \rightarrow$$



Ipotizziamo di voler trovare una quantità "B" tale che il Segnale troncato a "B", conservi il 99% dell'energia totale, cioè:



Vogliamo trovare "B":

$$B\ :\ \mathcal{E}_B = 0.99 \cdot \mathcal{E}_x$$

Sappiamo che:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}^1/_{a^2}}{1+\left({}^{2\pi f}/_a\right)^2}\, df$$

Questo lo sappiamo per l'Uguaglianza di Parseval.

E quindi:

$$\mathcal{E}_B = \int_{-B}^{B} \frac{{}^1/_{a^2}}{1+\left({}^{2\pi f}/_a\right)^2}\, df$$

Risolviamo l'Integrale:

$$\mathcal{E}_B = {}^1/_{a^2} \cdot \int_{-B}^{B} \frac{1}{1+\left({}^{2\pi f}/_a\right)^2}\, df$$

Ora poniamo:

$$\mathcal{E}_B = {}^{2\pi f}/_a = x \rightarrow df = \frac{a}{2\pi} dx$$

E quindi:

$$\mathcal{E}_B = {}^1/_{a^2} \cdot \int_{-{}^{2\pi B}/_a}^{{}^{2\pi B}/_a} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{a}{2\pi} dx$$

$\frac{1}{1+x^2}$ è una Funzione pari, quindi questo non è l'integrale che va da $-{}^{2\pi B}/_a$ a ${}^{2\pi B}/_a$, ma diventa 2 volte l'integrale che va da 0 a ${}^{2\pi B}/_a$:

$$\mathcal{E}_B = 2 \cdot \frac{a}{2\pi} \cdot {}^1/_{a^2} \cdot \int_0^{{}^{2\pi B}/_a} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi a} \cdot \int_0^{{}^{2\pi B}/_a} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi a} \cdot [\arctan(x)]_0^{{}^{2\pi B}/_a} =$$

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{\pi a} \cdot \arctan\left({}^{2\pi B}/_a\right)$$

Per avere un risultato preciso nell'individuare "B" attraverso l'equazione:

$$B:\ \mathcal{E}_B = 0.99 \cdot \mathcal{E}_x$$

Dovrei calcolare l'integrale:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}^1/_{a^2}}{1+\left({}^{2\pi f}/_a\right)^2}\, df$$

Ma, mi è più facile vederlo come:

$$\mathcal{E}_x = \lim_{B\to\infty} \mathcal{E}_B = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{\pi a} \cdot \arctan\left({}^{2\pi B}/_a\right) = \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2a}$$

Quindi:

$$B:\ \mathcal{E}_B = 0.99 \cdot \mathcal{E}_x \rightarrow \frac{1}{\pi a} \cdot \arctan\left({}^{2\pi B}/_a\right) = 0.99 \cdot \frac{1}{2a} \rightarrow \arctan\left({}^{2\pi B}/_a\right) = 0.99 \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow {}^{2\pi B}/_a = tan\left(0.99 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$B = \frac{a}{2\pi} \cdot tan\left(0.99 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Densità Spettrale di Potenza

Consideriamo la Definizione di Potenza di un Segnale "$x(t)$":

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{+T}|x(t)|^2\,dt\right)$$

In tal caso io non posso sfruttare l'Uguaglianza di Parseval come abbiamo fatto per la Densità Spettrale d'Energia, perché quell'uguaglianza vale solo per integrali che vanno da $-\infty$ a $+\infty$. Allora posso fare questa cosa:

$$x_T(t) = x(t)\cdot\prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

Cioè posso considerare un Segnale Troncato "$x_T(t)$" che equivale al Segnale $x(t)$ ma moltiplicato per un Segnale Rettangolare $\prod\left(\frac{t}{T}\right)$ ad ampiezza unitaria. Quindi questo Segnale Troncato "$x_T(t)$" vale esattamente quanto $x(t)$ ma solo nell'intervallo $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$, perché poi vale zero, quindi è troncato solo in quest'intervallo.

Ora, posso scrivere la Potenza del Segnale $x(t)$ come:

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|x_T(t)|^2\,dt\right)$$

Posso sfruttare l'Uguaglianza di Parseval! Perché ora l'integrale ha come estremi gli infiniti.

Quindi:

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|x_T(t)|^2\,dt\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|X_T(f)|^2\,df\right) \to$$

$$\mathcal{P}_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot|X_T(f)|^2\right)df$$

Con "$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot|X_T(f)|^2\right)$" che indica proprio la Densità Spettrale di Potenza:

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot|X_T(f)|^2\right)$$

Con $X_T(f)$ che è la Trasformata di Fourier del Segnale Troncato, che esiste proprio perché il Segnale è Troncato e quindi è di Energia.

Densità Spettrale di Potenza di un Segnale Costante

Consideriamo un Segnale Costante, cioè di Potenza:

$$x(t) = A$$

Tronchiamo il Segnale:

$$x_T(t) = x(t)\cdot\prod\left(\frac{t}{T}\right) = A\cdot\prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

La sua Trasformata è:

$$X_T(f) = AT\cdot sinc(fT)$$

Quindi:

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot|X_T(f)|^2\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot|AT\cdot sinc(fT)|^2\right) \to$$

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot A^2\cdot T^2\cdot sinc^2(fT)\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot A^2\cdot T\cdot sinc^2(fT)\right)$$

Sappiamo che la funzione $sinc^2(fT)$ ha un lobo di ampiezza massima nell'origine (che in questo caso corrisponderà ad "$\frac{A^2\cdot T}{2}$" perché è moltiplicata per questa quantità) e poi vale zero quando il suo argomento è un numero intero, ossia quando "$fT = Numero\ Intero \to f = \frac{Numero\ Intero}{T}$". Quindi la funzione sarà definita come:

La durata dei vari lobi tende a zero, perché $\frac{Numero\ Intero}{T} \to 0\ \ per\ \ T \to \infty$, cioè questo Segnale è centrato e compresso nell'origine, punto in cui ha ampiezza massima → Questa è l'esatta descrizione dell'Impulso di Dirac! Quindi:

$$S_x(f) = \frac{A^2}{2}\cdot\delta(f)$$

Densità Spettrale Mutua di Energia e di Potenza

Per Segnali di Energia è definita come:

$$S_{xy}(f) = X(f)\cdot Y^*(f)$$

Per Segnali di Potenza è definita come:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\cdot X_T(f)\cdot Y_T^*(f)\right)$$

Teorema di Wiener – Kintchine

Dati due Segnali "$x(\cdot)$" e "$y(\cdot)$", la Densità Spettrale Mutua di Energia e Potenza "$S_{xy}(f)$" è la Trasformata di Fourier della loro Funzione di Mutua Correlazione.

$$r_{xy}(\cdot) \leftrightarrow S_{xy}(\cdot)$$

Infatti:

$$S_{xy}(\cdot) = X(f)\cdot Y^*(f) \leftrightarrow x(t)\cdot y^*(-t) = r_{xy}(\tau)$$

N.B. → Naturalmente, se i Segnali Coincidono, cioè se $x(\cdot) = y(\cdot)$, allora:

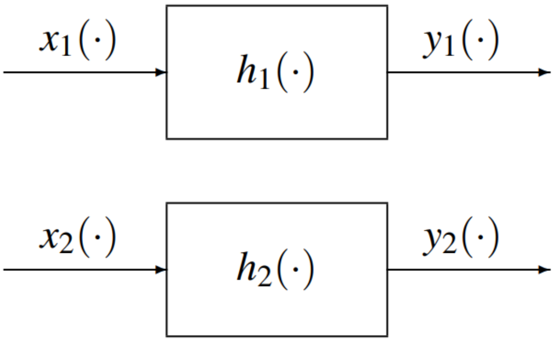
$$r_x(\cdot) \leftrightarrow S_x(\cdot)$$

Relazioni Ingresso - Uscita per le Funzioni di Correlazione e Teorema di Wiener – Kintchine

Ora che abbiamo studiato questo Teorema, possiamo trarre delle conclusioni aggiuntive riguardo alle "Relazioni Ingresso – Uscita per le Funzioni di Correlazione" che già avevamo visto in precedenza, in particolare:

- **Mutua Correlazione dell'Uscita di Due Sistemi**:

  Avevamo visto che, considerando due Sistemi:



  Esiste una Relazione e quindi un Legame tra la Mutua Correlazione dei due Ingressi e la Mutua Correlazione delle due Uscite, cioè esiste un Legame tra:

$$r_{x_1x_2}(\cdot)\ ed\ r_{y_1y_2}(\cdot)$$

  Questo Legame è il seguente:

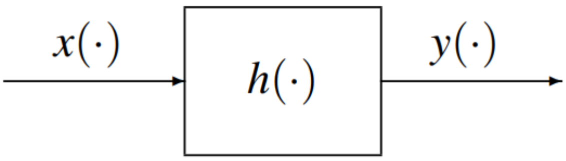
$$r_{y_1y_2}(\cdot) = r_{x_1x_2}(\cdot) * h_1(\cdot) * h_2^*(-(\cdot))$$

  Ora che abbiamo studiato il Teorema di Wiener – Kintchine, sappiamo che la Trasformata di questa quantità è:

$$S_{y_1y_2}(\cdot) = S_{x_1x_2}(\cdot) \cdot H_1(\cdot) * H_2^*(\cdot)$$

- **Autocorrelazione dell'Uscita di Un Sistema**:

  Avevamo visto che, considerando il seguente Sistema:



  Esiste una Relazione e quindi un Legame tra l'Autocorrelazione dell'Ingresso e l'Autocorrelazione dell'Uscita, cioè esiste un Legame tra:

$$r_x(\cdot)\ ed\ r_y(\cdot)$$

  Questo Legame è il seguente:

$$r_y(\cdot) = r_x(\cdot) * h(\cdot) * h^*\big(-(\cdot)\big) = r_x(\cdot) * r_h(\cdot)$$

  Ora che abbiamo studiato il Teorema di Wiener – Kintchine, sappiamo che la Trasformata di questa quantità è:

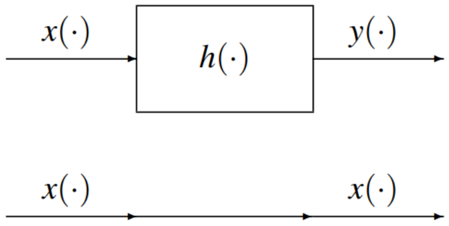
$$S_y(\cdot) = S_x(\cdot) \cdot |H(\cdot)|^2$$

  La Trasformata di "$r_h(\cdot)$" è "$|H(\cdot)|^2$", infatti:

$$r_h(\cdot) = h(\cdot) \cdot h^*\big(-(\cdot)\big) \rightarrow H(\cdot) * H^*(\cdot) = |H(\cdot)|^2$$

- **Mutua Correlazione dell'Uscita di Un Sistema con l'Ingresso di un altro Sistema**:

  Avevamo visto che, considerando i seguenti Sistemi:



  Esiste una Relazione e quindi un Legame tra la Mutua Correlazione dei due Ingressi e la Mutua Correlazione delle due Uscite, cioè un Legame tra:

$$r_{x_1x_2}(\cdot)\ ed\ r_{y_1y_2}(\cdot)$$

  Solo che in tal caso, gli ingressi dei Sistemi sono tutti e due $x(\cdot)$ e l'Uscita del primo è $y(\cdot)$, mentre l'Uscita del secondo è $x(\cdot)$, quindi la Relazione che devo individuare è tra:

$$r_{xx}(\cdot)\ ed\ r_{yx}(\cdot) \quad cio\grave{e} \quad r_x(\cdot)\ ed\ r_{yx}(\cdot)$$

  Questo Legame è il seguente:

$$r_{yx}(\cdot) = r_x(\cdot) * h(\cdot)$$

  Ora che abbiamo studiato il Teorema di Wiener – Kintchine, sappiamo che la Trasformata di questa quantità è:

$$S_{yx}(\cdot) = S_x(\cdot) \cdot H(\cdot)$$

  Ed inoltre, dato il legame:

$$r_{xy}(\cdot) = r_x(\cdot) * h^*(-(\cdot))$$

  Allora:

$$S_{xy}(\cdot) = S_x(\cdot) \cdot H^*(\cdot)$$

Rumore Termico

Quando, all'inizio del Corso, avevamo visto la Densità Spettrale di Potenza, avevamo dimostrato che per Frequenze molto più piccole di $10^{12}Hz$ la Densità Spettrale di Potenza di un Segnale era approssimabile a:

$$S_x(f) \cong \frac{K \cdot T}{2} \cong \frac{N_0}{2} \cong 2{,}07 \cdot 10^{-21}$$

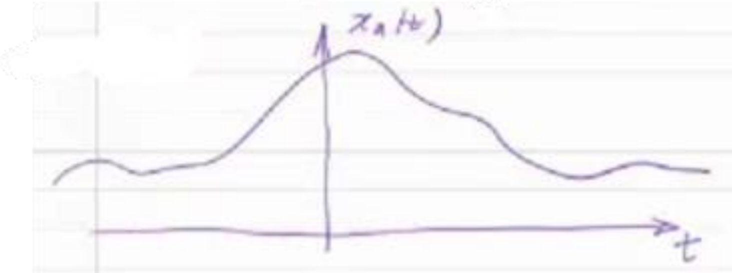
Un Segnale le cui componenti Spettrali hanno la stessa Ampiezza e quindi la cui Densità Spettrale di Potenza risulta essere costante, viene detto "Spettro Bianco".

Anche il Segnale Rumore, per Frequenze minori di $10^{12}Hz$, è considerato "Rumore Bianco".

Campionamento Ideale e Campionamento dei Segnali

Per Trasmettere o Immagazzinare Segnali è necessario Campionarli, infatti i Segnali Tempo Continuo posso assumere infiniti valori perché ci sono infiniti istanti di tempo, quindi è necessari considerare esclusivamente alcuni di questi istanti di tempo ed i relativi valori che il Segnale assume in questi istanti di tempo considerati.

Cioè considerato un Segnale Tempo Continuo "$x_a(t)$":



È necessario costruire un Segnale Tempo Discreto "$x_a(nT)$" andando a considerare dei "Campioni" del Segnale relativi solo agli Istanti di Tempo "nT" (cioè T, $2T$, $3T$, ...):

La versione Campionata del Segnale Tempo Continuo "$x_a(t)$" è definita come:

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

Per la Proprietà di Campionamento dell'Impulso Discreto, sappiamo che:

$$x(n) \cdot \delta(n - k) = x(k) \cdot \delta(n - k)$$

Quindi:

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(t) \cdot \delta(t - kT) = x_a(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

La Trasformata di Fourier di questa quantità è la seguente:

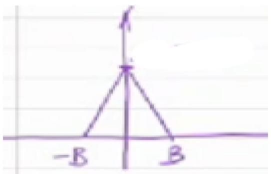
$$x_\delta(t) \to X_\delta(f)$$

$$x_a(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \to X_a(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

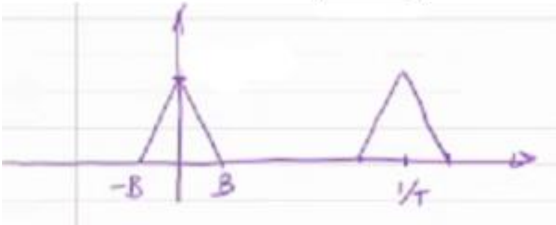
E quindi:

$$x_a(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \to \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Ad esempio, supponiamo che X_a sia un Segnale a Banda Limitata e che sia come in figura:

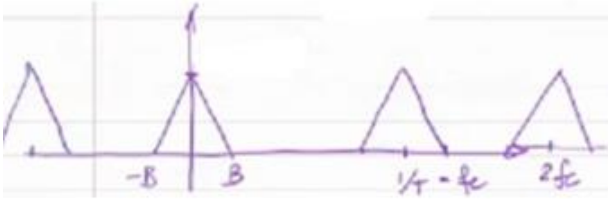


Quindi per $k = 0$, è così raffigurato. Poi, per $k = 1$, si avrà una prima replica del Segnale:



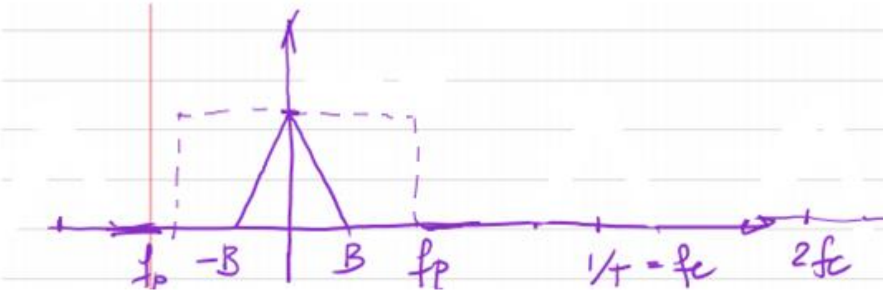
Se la prima replica e quindi il primo Campione del Segnale, è centrata nella Frequenza "$\frac{1}{T}$", questa Frequenza viene detta "Frequenza di Campionamento": "f_c". Quindi:

$X_\delta(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - k \cdot f_c)$ → Trasformata di Fourier di un Segnale Campionato



Se il primo campione si trova centrato nella Frequenza "f_c", allora io, attraverso un Filtro Passa Basso, posso andare a prendermi solo la Replica Centrale di questo Spettro del Segnale Campionato e questa Replica Centrale corrisponde proprio allo Spettro del Segnale Analogico di Partenza "$X_a(f)$"!

Per farlo, mi basta moltiplicare il Segnale "$X_\delta(f)$" per un Segnale del tipo "$\prod\left(\frac{f}{2 \cdot f_p}\right)$" ed anche per "$T$" (infatti "T" a compensare il fattore di scala delle ampiezze, infatti abbiamo "$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - f_c)$", quindi se devo ricostruire "$X_a(f)$", mi serve moltiplicare anche per T) e così otterrò solo lo Spettro del Segnale Analogico di Partenza:

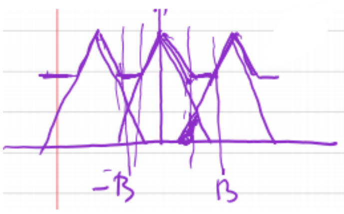


$T \cdot X_\delta(f) \cdot \prod\left(\frac{f}{2 \cdot f_p}\right) = X_a(f)$ → Ricostruzione di un Segnale

$X_a(f)$ è la Trasformata di Fourier del Segnale Ricostruito a partire da quello Campionato.

N.B. → Ricostruzione di Segnali → Quindi è Possibile Ricostruire un Segnale a partire da un Segnale Campionato, ma sono necessarie due condizioni:

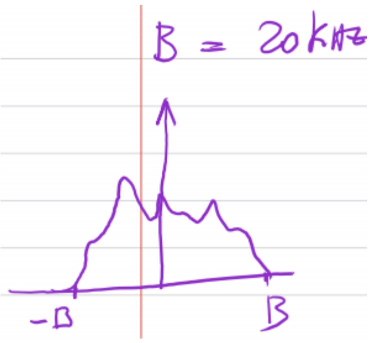
1. Il Segnale originale deve essere a Banda Limitata;
2. $f_c \geq 2B$ → La Frequenza di Campionamento deve essere sufficientemente grande, in modo da evitare che le Repliche del Segale si sovrappongano, altrimenti:



Non ci è più possibile scegliere una Frequenza "f_p" tale da prendere solo la Replica centrata nell'origine.

N.B. Condizione di Nyquist e Frequenza di Nyquist → La Frequenza di Campionamento "$f_c \geq 2B$", è detta "Frequenza di Campionamento di Nyquist" ed indica la Frequenza Minima alla quale è concesso campionare un Segnale, per non avere problemi di ricostruzione del Segnale Originale a partire da quello campionato più avanti.

Es. → Ho un Segnale che si estende in Frequenza da 0 a $20\ KHz$:



Per il Teorema di Nyquist, la Frequenza di Campionamento che devo scegliere per Campionare il Segnale deve essere $\geq 2B \rightarrow \geq 40\ KHz$.

$$40\ KHz = 40 \cdot 10^3\ Hz$$

Questo significa che è necessario memorizzare $40 \cdot 10^3$ Campioni al Secondo, per poter ricostruire correttamente il Segnale Originale a partire da quello Campionato.

N.B. Bit – Rate → Ipotizziamo di avere un Sistema che prende in considerazione 4096 Valori dell'Asse delle Ordinate, cioè un sistema che esprime il Valore relativo ad ogni Campione del Segnale attraverso 12 bit (perché $2^{12} = 4096$).

Allora il Bit – Rate di questo sistema è di:

$$40 \cdot 10^3 \cdot 12\ bit/s \rightarrow 480\ Kbit/s$$

Interpolazione Ideale e Ricostruzione di un Segnale

Consideriamo la formula che ci consente di ottenere la Trasformata di Fourier del Segnale Originale "$X_a(f)$", a partire da quello campionato "$X_\delta(f)$":

$$T \cdot X_\delta(f) \cdot \prod\left(\frac{f}{2 \cdot f_p}\right) = X_a(f)$$

Supponiamo di star campionando proprio alla Frequenza di Nyquist, cioè che $\frac{1}{T} = f_c = 2B$, allora, per forza di cose: $f_p = B$, quindi:

$$T \cdot X_\delta(f) \cdot \prod\left(\frac{f}{2 \cdot B}\right) = X_a(f)$$

Quindi, andiamo a ricavare il Segnale Originale, cioè antitrasformiamo "$X_a(f)$":

$$x_a(t) = T \cdot x_\delta(t) * 2B \cdot sinc(2Bt)$$

Inoltre, sapendo che, come abbiamo visto prima:

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

Scriviamo:

$$x_a(t) = T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \big(x_a(kT) \cdot \delta(t - kT)\big) * 2B \cdot sinc(2Bt)$$

Abbiamo scritto poco fa che "$\frac{1}{T} = f_c = 2B$", per cui:

$$x_a(t) = \cancel{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \cdot \delta(t - kT) * \frac{1}{\cancel{T}} \cdot sinc\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \cdot \delta(t-kT) * sinc\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$$

E quindi, data la Proprietà della Retta, secondo cui:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$$

Quest'integrale è uguale alla "x" calcolata nel punto di applicazione della retta, che è $\tau = t$ e quindi alla $x(t)$, allora:

$$\delta(t-kT) * sinc\left(\frac{t}{T}\right) = sinc\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

E quindi:

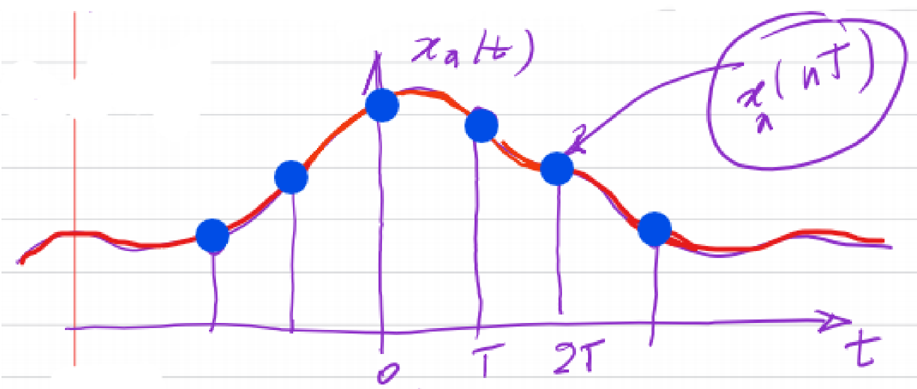
$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \cdot sinc\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

Questa è detta "Formula di Interpolazione Ideale" o (serie di Shannon).

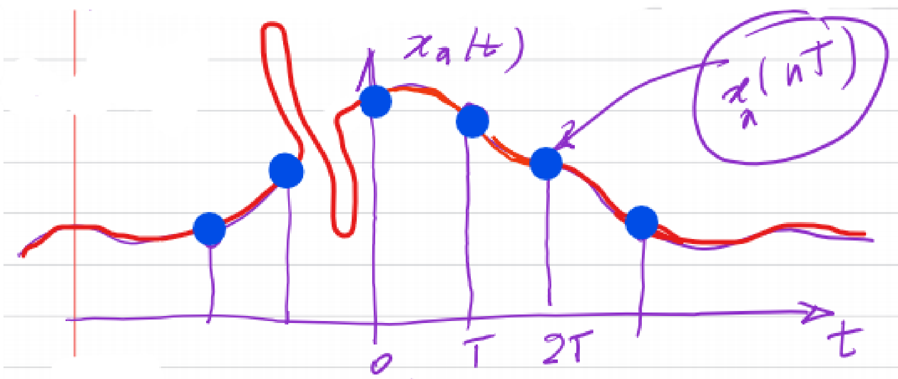
L'aggettivo "ideale" tiene conto del fatto che la funzione interpolatrice "$sinc(\cdot)$" è infinitamente estesa nel tempo, mentre nella pratica il Filtro che si utilizza per la Ricostruzione ha una lunghezza finita.

Grazie a questa formula, per ogni "t", posso sapere il valore di $x_a(t)$ (cioè del Segnale Originale) a partire da quello Campionato.

Naturalmente si parla di "Interpolazione" perché nel momento in cui io "Campiono" un segnale, prendo in considerazione il valore di un Segnale solo per determinati istanti di tempo e questo significa che il comportamento del Segnale tra due campioni, lo perdo! Cioè durante il Campionamento io ho un'inevitabile perdita di informazioni. Quindi alla fine, devo riuscire a ricostruire il Segnale (in rosso) a partire dal Segnale Campionato (campioni blu):



E com'è possibile che io riesca a farlo bene? Cioè chi mi dice che non sbaglio? Chi mi dice che la parte rossa l'ho disegnata sbagliata perché in realtà il Segnale Originale faceva così:



Me lo dice il cuore. No scherzo, me lo dice il fatto che i Segnali a Banda Limitata non possono variare molto rapidamente.

Campionamento Reale

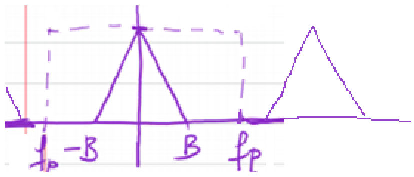
Finora abbiamo parlato di Campionamento Ideale, ma:

1. Problema Impulsi di Dirac → Il Campionamento Ideale avviene attraverso Impulsi di Dirac, che sono impulsi "ideali" (perché sono istantanei) e non esistono nella realtà:

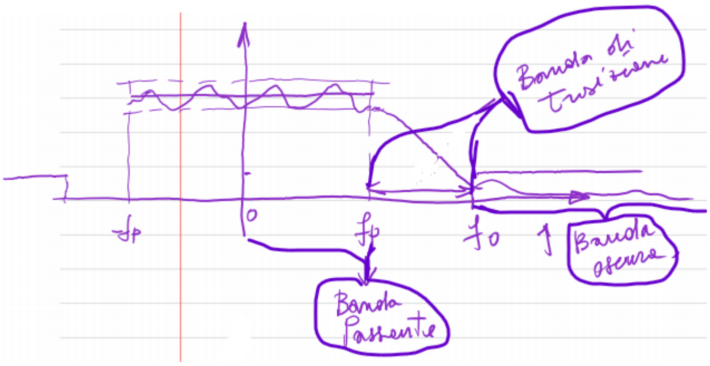
   

   Ma qualsiasi campionatore reale io utilizzi, questo non potrà mai essere "istantaneo", ma acquisirà il Campione in un intervallo di tempo che per quanto piccolo possa essere, non corrisponderà mai ad un preciso istante di tempo;

2. Problema Filtro di Ricostruzione → Il Filtro Passa Basso che utilizziamo per ricostruire il Segnale e prendere inconsiderazione solo la Replica del Segnale che è centrata nell'Origine, è un filtro ideale, che è caratterizzato da una Frequenza di Taglio ben precisa e che quindi tronca il Segnale in modo molto preciso:

   Mentre un Filtro Passa Basso Reale si comporta in questo modo:

   Quindi è caratterizzato da:

   - Banda Passante (indicata dalla Frequenza "f_p"), è la Banda entro la quale il Segnale deve essere il più possibile "costante";
   - Banda Oscura, che caratterizza tutte le Frequenze da f_0 in poi ed è la Banda entro la quale il Segnale filtrato viene attenuato di una certa quantità (ad esempio 60 dB);

- Banda di Transizione, che dovrebbe essere più corta possibile per approssimare nel miglior modo possibile il Filtro Passa Basso Ideale (quest'ultimo, infatti, ha un passaggio immediato da Banda Passante a Banda Oscura).

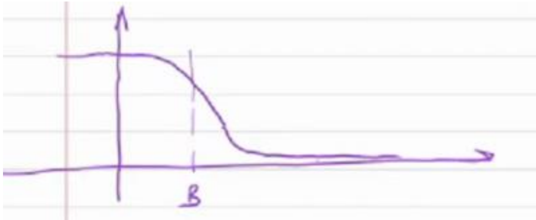
   Quindi questo Filtro Passa Basso Reale, rischia di attenuare (e non eliminare) le Repliche successive del Segnale invece di tagliarle via, proprio a causa del fatto che non passa direttamente da Banda Passante a Banda Oscura, ma nel mezzo ha questa "Banda di Transizione" e se una seconda Replica del Segnale rientra in questa banda e non viene attenuata correttamente, c'è il rischio che possa figurare come parte della replica centrata in zero, quando invece non lo è.

3. Problema Banda Limitata → I Segnali Reali non sono tutti Segnali a Banda Rigorosamente Limitata, ad esempio potremmo avere un Segnale del Genere:

   Ed in tal caso, quindi, la Banda del Segnale caratterizzerebbe un ampio intervallo di frequenze!

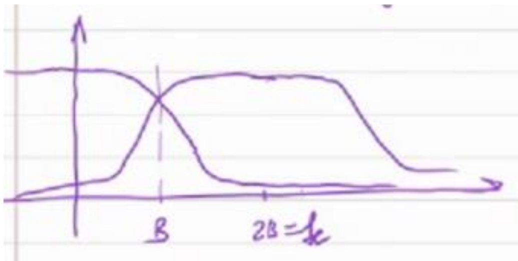
   E se scegliamo di considerare come Banda del Segnale una certa Frequenza "B":



E scegliamo di Campionare proprio alla Frequenza di Nyquist, quindi:

$$f_c = 2B$$

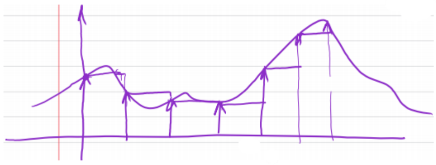
Allora:



Le Repliche si Sovrappongono e vado in contro a problemi come quello di Aliasing che poi non mi permette di ricostruire correttamente il Segnale Originale.

Come risolviamo queste tre problematiche? In questo modo:

1. Soluzione Impulsi di Dirac → Adotto il Campionamento Sample&Hold, cioè adotto degli Impulsi Rettangolari che approssimano il comportamento degli Impulsi di Dirac:

   Per cui, il Segnale Campionato attraverso il Campionamento Reale sarà:

   $$x_{SH}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot p(t-kT) \quad con \quad p(t) = \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

   Il segnale "$p(t-kT)$" possiamo scriverlo come: "$p(t) * \delta(t-kT)$", quindi:

   $$x_{SH}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot p(t) * \delta(t-kT) = p(t) * \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t-kT)}_{x_\delta(t)}$$

   $$x_{SH}(t) = p(t) * x_\delta(t)$$

   Quindi, la Trasformata di "$x_{SH}(t)$" è la Seguente:

   $$X_{SH}(f) = P(f) * X_\delta(f)$$

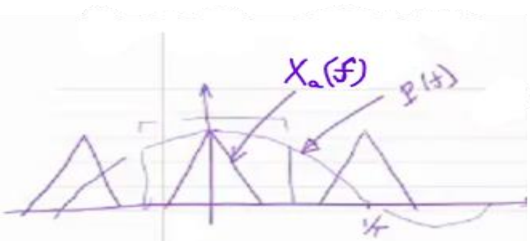
   E sappiamo che:

   $$X_\delta(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - k \cdot f_c)$$

   E che:

   $$P(f) = T \cdot sinc(fT)$$

   Quindi ora avrò:

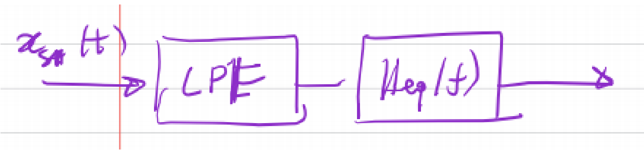
   

Cioè la $sinc(fT)$ moltiplica la $X_a(f)$! Quindi la $X_a(f)$ è distorta dalla $P(f)$! Ma posso fare una cosa:

In cascata al Filtro Passa Basso, posso mettere un Filtro Equalizzatore che sia così definito:

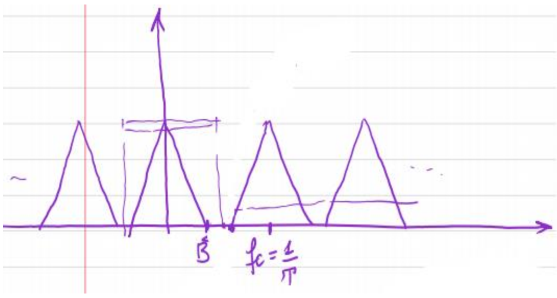
$$Heq(f) = \frac{1}{P(f)}$$

E quindi:

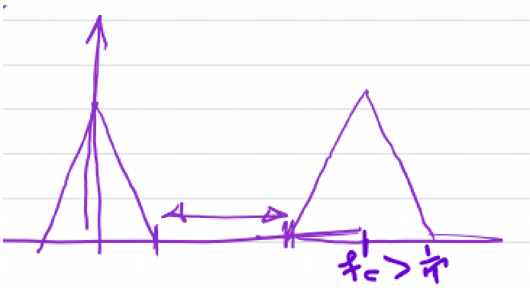


In questo modo vado ad eliminare la distorsione causata dalla Moltiplicazione tra $P(f) * X_a(f)$.

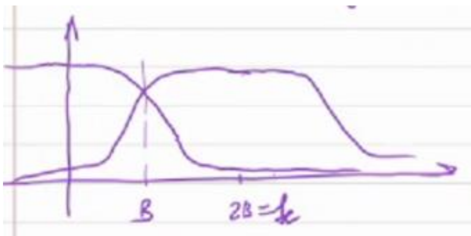
2. Soluzione Filtro di Ricostruzione → Sovraccampionamento → Cioè bisogna fare in modo che le altre Repliche del Segnale siano in Banda Oscura e non in Banda di Transizione e per farlo, bisogna evitare di scegliere come Frequenza di Campionamento quella di Nyquist e bisogna sceglierne una molto più grande, infatti più la Frequenza di Campionamento "f_c" è alta e più le Repliche del Segnale saranno distanziate tra loro:



→



3. Problema Banda Limitata → I Segnali Reali non sono tutti Segnali a Banda Rigorosamente Limitata e questo può portare al Problema delle Repliche Sovrapposte come già visto:



Una soluzione a questo problema potrebbe essere sicuramente quella del Sovraccampionamento, che permetterebbe di distanziare le repliche ed evitare che si sovrappongano.

Ma nel caso in cui non ci sia la possibilità di scegliere una Frequenza di Campionamento molto più elevata, allora un'altra soluzione è quella di considerare solo la Banda del Segnale che ci interessa ed utilizzare un Filtro detto "Filtro Anti Aliasing" prima del Campionatore, ossia utilizzare un Filtro Passa Basso a Monte del Campionatore che consente di attenuare tutte le frequenze che si trovano oltre quella Banda di nostro interesse. In questo modo, infatti, non possiamo incorrere in problemi di Aliasing.