1 Introduzione

L'equazione di **Lane-Emden** è una forma adimensionale della equazione di **Poisson** che studia il potenziale gravitazionale di un fluido *politropico*, a simmetria sferica e autogravitante.

A livello matematico, l'equazione di Lane-Emden è un'equazione adimensionale differenziale ordinaria al secondo ordine (**ODE2**) e viene utilizzata in Astrofisica per modellare la struttura interna di una stella.

L'equazione è valida a condizione di due assunzioni di partenza:

- il gas che la compone la struttura stellare deve essere in equilibrio idrostatico con la gravità;
- la pressione del gas e la sua densità devono avere una relazione di tipo *politropico*.

Se le condizioni sono verificate allora è possibile scrivere una relazione adimensionale della densità (o pressione) del gas in funzione del raggio:

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n \tag{1}$$

in cui:

- ξ è il raggio adimensionalizzato;
- θ è legata alla densità (e quindi alla pressione) tramite la relazione

  $$\rho = \rho_c\theta^n$$

  dove ρ_c è la densità centrale ed n è l'indice politropico che compare nell'equazione politropica di stato:

  $$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \tag{2}$$

  in cui P è la pressione, ρ è la densità e K è una costante di proporzionalità.

2 Derivazione dell'equazione di Lane-Emden

L'equazione di Lane-Emden può essere derivata a partire dall'equazione di Poisson, oppure sfruttando l'equilibrio idrostatico. In questa relazione utilizzerò il secondo approccio.

Per derivare l'equazione di Lane-Emden utilizzando l'equilibrio idrostatico, dobbiamo partire da tre equazioni fisiche:

- Equazione di Conservazione della Massa;
- Equazione dell'Equilibrio Idrostatico;
- Relazione Politropica tra Pressione e Densità.

2.1 Equazione della Conservazione della Massa

L'equazione della conservazione della massa descrive come varia la massa M all'interno di un determinato raggio sferico r caratterizzato da una densità ρ.

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2 \tag{3}$$

2.2 Equazione dell'Equilibrio Idrostatico

L'equazione dell'equilibrio idrostatico esprime come, in una situazione di equilibrio dinamico, l'attrazione gravitazionale agente sul gas (RHS) sia bilanciata dal gradiente di pressione del gas (LHS). In questa equazione troviamo la pressione P, la densità ρ, la costante di gravitazione universale G, il raggio r e la massa totale M entro il raggio.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho \tag{4}$$

2.3 Relazione Politropica

L'equazione di stato del gas politropico rappresenta la dipendenza della pressione P dalla densità ρ in un modello politropico. Si tratta di una legge di potenza con esponente $\frac{n+1}{n}$ e costante di proporzionalità K.

$$P = K\rho^{(n+1)/n} \tag{5}$$

2.4 Derivazione Equazione L-E

Per ottenere la ODE2 di L-E partiamo dall'equazione dell'equilibrio idrostatico $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho$ e isoliamo il termine relativo alla massa. Esplicito le dipendenze di ogni funzione, per mostrare la derivazione correttamente.

$$\frac{1}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}$$

Procedo derivando entrambi i membri rispetto al raggio r.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr}\right) = \frac{2GM(r)}{r^3} - \frac{dM(r)}{dr}\frac{G}{r^2}$$

A questo punto, noto che nell'equazione ora ottenuta, compare il termine $\frac{dM(r)}{dr}$ che rappresenta la variazione della massa in funzione del raggio. In altre parole, posso sostituire il RHS dell'equazione della conservazione della massa

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2$$

nell'equazione appena derivata[1].

[1] Ometto ora le dipendenze delle funzioni per semplificare la notazione.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = \frac{2GM}{r^3} - 4\pi\rho r^2\frac{G}{r^2}$$

Il termine

$$\frac{GM}{r^3}$$

nel primo termine del LHS ricorda da vicino l'equazione stessa dell'equilibrio idrostatico. Facendo attenzione a bilanciare i valori mancanti o presenti in eccesso, posso sostituire il termine indicato con dP/dr dall'equazione 4. Approfitto per eseguire alcune semplificazioni.

L'equazione risultante sarà:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = \frac{2}{r\rho}\frac{dP}{dr} - 4\pi G\rho \tag{6}$$

A questo punto opero le seguenti sostituzioni, volte ad adimensionalizzare le variabili coinvolte nell'equazione.

- $$\rho = \rho_c\theta^n \tag{7}$$

  In questa sostituzione sfrutto ρ_c, la densità centrale della stella (pertanto costante), per adimensionalizzare la densità e ottenere, quindi, θ che sarà presente nella equazione finale.

- $$r = a\xi \tag{8}$$

  Con questa sostituzione facciamo una cosa analoga alla precedente: utilizzando una costante a, chiamata *scala delle lunghezze* otteniamo la variabile ξ che rappresenta il raggio stellare adimensionalizzato.

Adoperiamo queste sostituzioni nell'equazione di stato politropica 5 e otteniamo:

$$P = K\rho_c^{(n+1)/n}\theta^{n+1} \tag{9}$$

Devo derivare rispetto la 9 rispetto a r per inserirla nella mia equazione di lavoro 6. Noto che l'unico termine che subisce la derivazione è θ:

$$\frac{dP}{dr} = K\rho_c^{(n+1)/n}\left(n+1\right)\theta^n\frac{d\theta}{dr} \tag{10}$$

Inserite le sostituzioni 10 e 7 nell'equazione 6 e dividendo entrambi i membri per r^2 otteniamo:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho_c\theta^n}\rho_c^{(n+1)/n}\left(n+1\right)\theta^n\frac{d\theta}{dr}\right) = -4\pi G\rho_c\theta^n$$

Semplificando i termini simili e portando tutto a primo membro ottengo:

$$\frac{K\rho_c^{1/n}\,(n+1)}{4\pi G\rho_c}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right)+\theta^n=0$$

Sarà facile ora applicare la sostituzione 8 per r e la sostituzione

$$dr = a d\xi \tag{11}$$

per avere l'espressione:

$$\frac{K\rho_c^{1/n}\,(n+1)}{4\pi G\rho_c}\frac{1}{a^2\xi^2}\frac{d}{a\;d\xi}\left(a^2\xi^2\frac{d\theta}{a\;d\xi}\right)+\theta^n=0$$

La a è una costante, quindi non viene toccata dalle derivate e possiamo semplificare, ove necessario, e portare fuori, per ottenere l'equazione[2]:

$$\frac{K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}\,(n+1)}{4\pi G a^2}\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)+\theta^n=0$$

Per concludere, affinchè l'equazione così derivata sia l'equazione di Lane-Emden 1, deve avvenire che:

$$\frac{K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}\,(n+1)}{4\pi G a^2}=1$$

Questo comporta la scelta della scala delle lunghezze a definito come:

$$a=\sqrt{\frac{K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}\,(n+1)}{4\pi G}} \tag{12}$$

Abbiamo quindi ottenuto la equazione

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)+\theta^n=0$$

del tutto uguale all'equazione 1.

[2]In questo passaggio compatto le ρ_c del primo termine.