

Primo Esercizio per Esame di Calcolo per l'Astronomia

Simone Brazioli

A.A. 2019-2020

Abstract

In questa relazione mostrerò l'analisi richiesta delle curve di luce di un catalogo di stelle Cefeidi per ottenere una stima della Costante di Hubble. Utilizzerò questa costante per calcolare un'approssimazione dei parametri cosmologici Ω_M e Ω_Λ nelle assunzioni di Universo Piatto, Chiuso o Aperto.

Contents

1	Introduzione	2
1.1	Relazione Periodo-Luminosità delle Cefeidi	2
1.2	La Legge di Hubble Lemaître	4
1.3	La Legge di H-L nella Cosmologia	5
2	Dati Disponibili	6
3	Algoritmi Numerici Utilizzati in FORTRAN	7
3.1	Spline Cubica	7
3.2	Calcolo dei Parametri Cosmologici	8
4	Risultati	9
4.1	Coefficienti Relazione Periodo-Luminosità delle Cefeidi	9
4.2	Curve di Luce delle Cefeidi da Analizzare	9
4.3	Magnitudine Assoluta	22
4.4	Distanza della Galassia	22
4.5	Costante di Hubble	23
4.6	Modelli Cosmologici	24
5	Discussione e Problemi	26
5.1	Difetto del Codice	26

1 Introduzione

Il problema dell'età dell'Universo e delle sue caratteristiche fondamentali, ha impegnato per secoli gli scienziati e prima di loro i filosofi.

Fino a inizio '900, l'idea più quotata era che l'universo fosse finito e statico, immobile. In buona sostanza si identificava la Via Lattea, la galassia in cui risiede il Sole con il suo sistema, come l'intero Universo.

Fu nei primi decenni del '900 che le opinioni cambiarono radicalmente. Spinto infatti dalle nuove scoperte osservative di **Henrietta Leavitt** e teoriche di **Lemaître** e **Einstein**, l'astronomo statunitense **Hubble** determinò sperimentalmente che l'universo non solo era molto più grande di quanto si pensasse (di fatto, la Via Lattea non è che una delle mille miliardi di galassie nell'Universo), ma anche che l'Universo fosse in espansione.

1.1 Relazione Periodo-Luminosità delle Cefeidi

Le Cefeidi sono stelle di età avanzata e massa intermedia che attraversano una fase instabile del loro ciclo evolutivo. Questa fase instabile si manifesta in una pulsazione dell'intera stella. Esse, infatti, si contraggono ed espandono a ritmi regolari nel tempo (per certi casi anche con un periodo dell'ordine delle ore).

Questa contrazione ed espansione determinano una variazione della loro luminosità. Per questo vengono classificate come stelle variabili.

A inizio '900, l'Astronoma Henrietta Leavitt, analizzando le lastre fotografiche della Piccola e Grande Nube di Magellano (*SMC* e *LMC*) compilò un catalogo di 1777 stelle variabili periodiche e ne classificò 47 di queste come Cefeidi.

Misurando il periodo delle loro variabilità, notò che le Cefeidi con un periodo più lungo risultavano essere più brillanti di quelle con un periodo più corto. Dato che queste stelle appartenevano tutte alla stessa nube, e quindi si trovavano a una distanza grosso modo uguale dall'osservatore, questa differenza in magnitudine apparente rispecchiava anche una differenza in magnitudine assoluta.

Fu così che, graficando separatamente le curve di luce delle Cefeidi per le due nubi, Henrietta Leavitt si accorse della presenza di un'effettiva relazione tra Periodo e Luminosità.

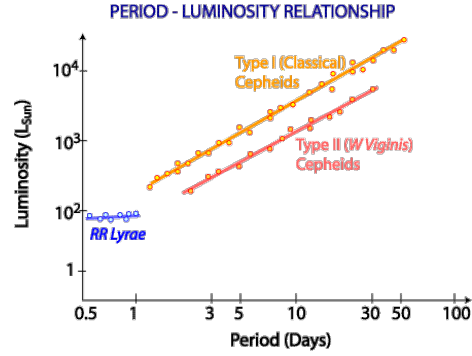


Figure 1: Relazione Periodo-Luminosità per Cefeidi e RR Lyrae.

Matematicamente, questa relazione possiamo esprimerla come:

$$M_V = c_1 \log(P) + c_2 \quad (1)$$

Grazie a questa relazione, possiamo usare le Cefeidi per stimare la distanza di oggetti nella nostra galassia e negli ammassi, fino alle galassie più vicine, come **M31**.

Il metodo delle Cefeidi è diventato, inoltre, un importantissimo metodo di calibrazione per altre metodologie di calcolo delle distanze per oggetti più lontani.

1.2 La Legge di Hubble Lemaître

La Legge di Hubble-Lemaître venne derivata indipendentemente da Lemaître a livello teorico e da Hubble a livello osservativo nei primi anni del '900.

Sfruttando le stelle Cefeidi (e la loro relazione di Leavitt) nelle galassie più vicine alla Via Lattea, infatti, Hubble fu in grado di stimare le distanze e mostrare come l'Universo fosse più grande di quanto si pensasse. Inoltre, studiando gli spettri della luce proveniente da queste stelle e da queste galassie, notò che presentavano un **redshift**, cioè uno spostamento verso il rosso. Tale redshift viene fisicamente interpretato come effetto *Doppler*.¹ Questo redshift, indicava che le galassie si stavano spostando nei confronti dell'osservatore (Sistema Solare e per estensione la Via Lattea). Osservando risultati e redshift più accentuati per altre galassie più lontane, Hubble capì che vi era una relazione di proporzionalità diretta tra la distanza di una galassia (calcolabile grazie alla relazione Periodo-Luminosità delle Cefeidi) e la sua velocità di recessione (misurabile tramite redshift nello spettro). Fu così che nacque la Legge di Hubble²:

$$v_{rec} = H_0 d \quad (2)$$

Importante in questa equazione è la Costante di Hubble H_0 che fissa la scala delle distanze e dei tempi nella cosmologia.

¹In realtà, il primo caso in studio di Hubble fu *M31* che mostrava un **blueshift**.

²Lemaître aveva già derivato, in linea teorica, tale equazione (come conseguenza della Relatività Generale di Einstein), ma storicamente Hubble venne considerato il suo scopritore. Solo nel 2019, la *IAU* decise di 'rinominare' la Legge includendo Lemaître.

1.3 La Legge di H-L nella Cosmologia

La Costante di Hubble è una delle costanti fondamentali della cosmologia. Grazie a questa costante possiamo effettuare una stima dell'età del nostro Universo. Infatti la costante di Hubble ha le dimensioni del reciproco di un tempo e viene misurata comunemente in $\frac{km}{s \cdot Mpc}$. Invertendo, quindi, la costante di Hubble (e aggiustando le unità di misura posso ottenere una stima dell'età dell'Universo.

$$t_{0,h} = \frac{1}{H_0} \quad (3)$$

Questa, tuttavia, è una sovrastima che deve essere corretta. In cosmologia, infatti, l'età dell'Universo si può calcolare tramite:

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z) E(z)^{1/2}} \quad (4)$$

dove

$$E(z) = \Omega_M (1+z)^3 + (1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda \quad (5)$$

In queste espressioni, i parametri Ω_M e Ω_Λ sono parametri cosmologici che dipendono dal modello di Universo che si sta considerando. In particolare:

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 & \text{nel caso di Universo Piatto - Geometria Euclidea} \\ \Omega_M + \Omega_\Lambda < 1 & \text{nel caso di Universo Aperto - Geometria Iperbolica} \\ \Omega_M + \Omega_\Lambda > 1 & \text{nel caso di Universo Chiuso - Geometria Sferica} \end{cases}$$

Ω parametrizza la densità dell'Universo rapportata alla densità critica³.

³definita come la densità di materia/energia che deve avere l'Universo affinché abbia una geometria euclidea (cioè piatta).

2 Dati Disponibili

L'esercizio offre un database (*data/ceph_catalog.txt*) di stelle cefeidi già analizzate per le quali viene data la Magnitudine Assoluta e il Periodo di Pulsazione. Da questo database, bisogna ricavare i coefficienti c_1 e c_2 della relazione Periodo-Luminosità vista in precedenza.

In aggiunta, ho un set di dati osservativi (*data/ceph_NGC*.txt*) che mostrano l'andamento della magnitudine apparente di 19 stelle Cefeidi (appartenenti ad altrettante galassie) in funzione del tempo (*Julian Day*). Tuttavia, tali dati non sono ordinati temporalmente. Da questi dati, una volta ridotti, ricavo le curve di luce, tramite integrazione, che mi permettono di fare delle stime della lunghezza del periodo. Da queste stime di periodo, ottengo una approssimazione della magnitudine assoluta.

Una volta ottenuta la magnitudine assoluta posso derivare la distanza delle galassie che ospitano le Cefeidi analizzate. Ho a disposizione un file (*data/gal_vel.txt*) che mi mostra, per ciascuna delle galassie in cui ho una Cefeide, una misura della *velocità di recessione* con relativo errore. Da questi dati, sfruttando la Legge di Hubble, ottengo una misura della costante di Hubble.

Una volta conosciuta la stima della costante di Hubble e del relativo errore, posso studiare, con l'equazione (5) vista in precedenza, l'andamento dell'età dell'universo in funzione della scelta dei parametri Ω_Λ e Ω_M . Imponendo di ottenere la misura dell'età dell'Universo data dalla missione Planck, cioè

$$t_0 = 13.82 \pm 0.1382$$

cerco una coppia di parametri Ω_i per ciascuno dei tre modelli di universo considerabili: Universo Piatto, Universo Aperto, Universo Chiuso.

Alla fine confronto i parametri ottenuti (nel caso di Geometria Piatto) con gli Ω_i comunemente accettati dalla comunità scientifica.

3 Algoritmi Numerici Utilizzati in FORTRAN

Il cuore del codice è l'algoritmo di interpolazione numerica delle curve di luce. Infatti, una volta ordinati, i file contenenti le curve di luce hanno un andamento discreto, sul quale una stima del periodo è molto grossolana.

Per poter aumentare la precisione delle analisi, ho scelto di implementare un algoritmo di interpolazione tramite *spline cubica*.

3.1 Spline Cubica

Nella Spline Cubica, ciascun intervallo tra due osservazioni viene rappresentato da un diverso polinomio al terzo ordine:

$$f_k(x) = a_{k,i}x^3 + b_{k,i}x^2 + c_{k,i}x + d_{k,i} \quad (6)$$

Come condizioni di interpolazione abbiamo le seguenti:

$$\begin{cases} f_k(x_k) = y(k) \\ f_k(x_{k+1}) = f_{k+1}(x_{k+1}) \\ \dot{f}_k(x_{k+1}) = \dot{f}_{k+1}(x_{k+1}) \\ \ddot{f}_k(x_{k+1}) = \ddot{f}_{k+1}(x_{k+1}) \\ \ddot{f}_1(x_1) = 0 = \ddot{f}_n(x_n) \end{cases} \quad (7)$$

Vale a dire:

1. la cubica k -esima deve passare per il dato k -esimo;
2. cubiche adiacenti devono unirsi in corrispondenza dei dati;
3. nei punti di incontro, due cubiche devono avere la stessa derivata prima (pendenza)...
4. e la stessa derivata seconda ('flessione');
5. nei nodi finali, la derivata seconda deve essere nulla (*spline naturale*)

Dopo aver interpolato le curve di luce, posso analizzare quanto calcolato alla ricerca dei periodi. Utilizzo il passaggio dei dati dal punto medio per garantire una precisione maggiore dei periodi calcolati.

Per fare ciò, dapprima identifico, usando i valori discreti forniti dal file originale, l'intervallo in cui mi aspetto ci sia il passaggio preciso. Dopodichè, ricerco usando i dati interpolati, all'interno di questo intervallo, il passaggio dal punto medio. Faccio in questo modo per evitare di considerare passaggi spuri dovuti alla rumorosità dei dati o a imprecisioni di interpolazione.

Riporto nella sezione (4) i risultati ottenuti per le singole cefeidi.

3.2 Calcolo dei Parametri Cosmologici

Per calcolare i parametri cosmologici, in funzione del tipo di universo, tali che riprodussero l'età stimata dalla missione Planck, mi sono servito di un algoritmo di integrazione numerica per aggredire l'integrale visibile nell'equazione (5). In particolare ho usato un'implementazione della **quadratura di Gauss a quattro punti**.

Se le formule di Newton-Cotes utilizzano la stima della funzione in punti determinati della funzione (per esempio, gli estremi dell'intervallo scelto), la quadratura di Gauss si serve di punti scelti in maniera 'intelligente', per questo viene detto *metodo dei coefficienti indeterminati*.

Generalizzando la formula dell'integrale tramite trapezoide per quattro punti, possiamo scrivere che l'integrale I :

$$I \sim c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \quad (8)$$

dove x_i sono punti incogniti interni all'intervallo di integrazione e c_i sono opportuni coefficienti da determinare. Il tutto corrisponde, quindi, a un'equazione con 8 incognite da calcolare.

Le otto condizioni da applicare per utilizzare l'algoritmo sono tabulate nelle slide del corso e portano a :

$$\begin{cases} x_{0,1} = \pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}} \\ x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}} \\ c_{0,1} = \frac{18 \pm \sqrt{30}}{36} \\ c_{2,3} = \frac{18 \mp \sqrt{30}}{36} \end{cases} \quad (9)$$

Utilizzando questo algoritmo sono in grado di calcolare l'integrale in (5) per ciascuna coppia di parametri cosmologici e confrontare con il dato 'vero' per scartare o tenere il risultato.

4 Risultati

4.1 Coefficienti Relazione Periodo-Luminosità delle Cefeidi

Analizzando il set di Cefeidi già analizzate, ho determinato i seguenti coefficienti c_1 e c_2 :

c_1	c_2
-2.90	-1.21

4.2 Curve di Luce delle Cefeidi da Analizzare

Riporto di seguito, le curve di luce e i periodi e le magnitudini calcolati (con relativi errori) delle Cefeidi date da analizzare⁴.

NGC 0925

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
11.37	$2.54 \cdot 10^{-2}$	25.54	$1.95 \cdot 10^{-1}$

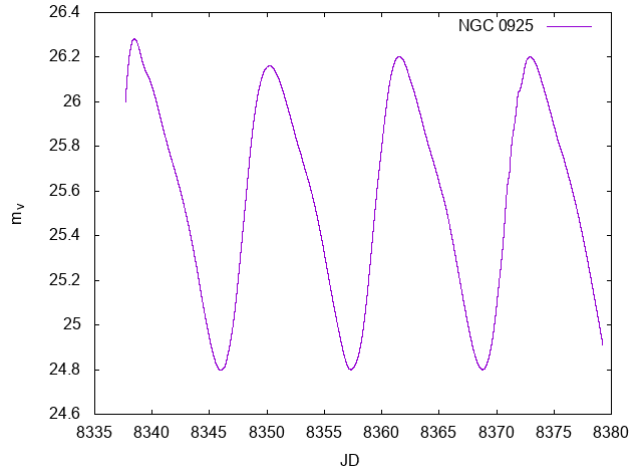


Figure 2: Curva di Luce della Cefeide in NGC0925.

⁴Identifico, di seguito, le Cefeidi analizzate con la galassia che le ospita, per semplificare la notazione.

NGC 1326

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
8.67	$4.86 \cdot 10^{-2}$	27.12	$5.28 \cdot 10^{-2}$

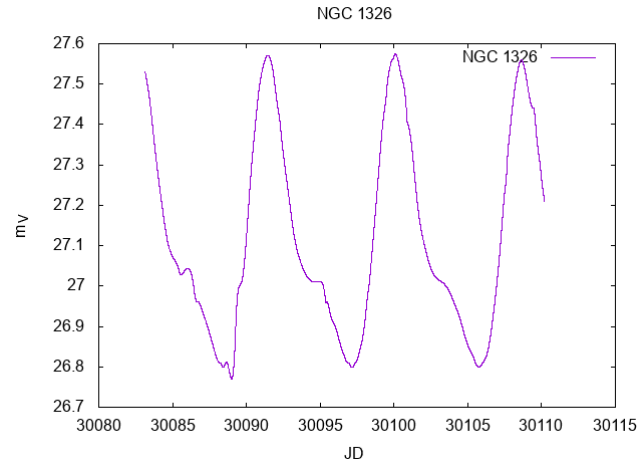


Figure 3: Curva di Luce della Cefeide in NGC1326.

NGC 1365

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
21.31	0.17	26.20	$6.46 \cdot 10^{-2}$

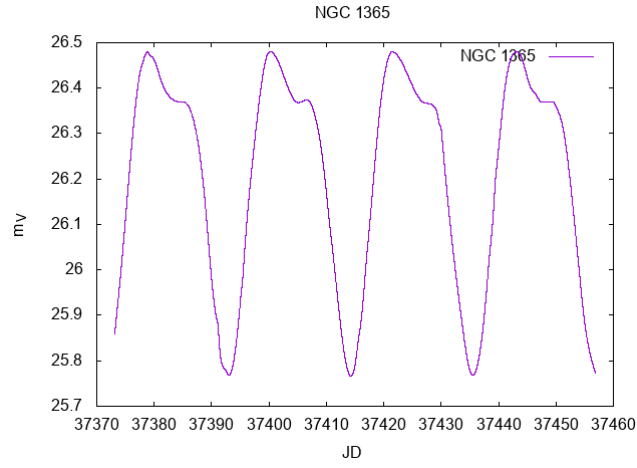


Figure 4: Curva di Luce della Cefeide in NGC1365.

NGC 1425

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
10.74	$1.97 \cdot 10^{-2}$	27.5	$1.70 \cdot 10^{-1}$

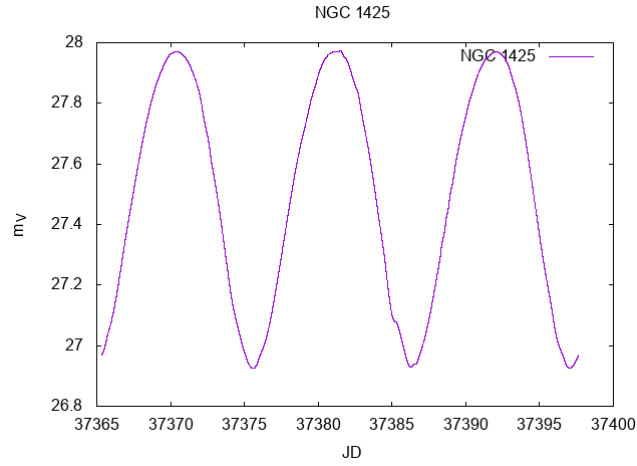


Figure 5: Curva di Luce della Cefeide in NGC1425.

NGC2403

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
3.80	$8.99 \cdot 10^{-3}$	24.66	$3.48e-1$

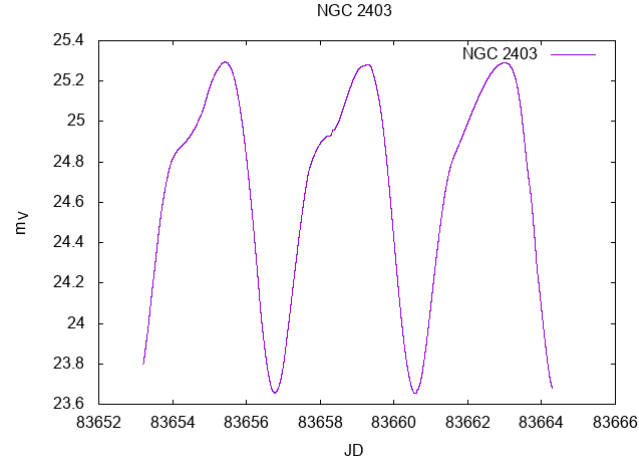


Figure 6: Curva di Luce della Cefeide in NGC2403.

NGC2541

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
19.44	$3.03 \cdot 10^{-1}$	25.29	$1.28 \cdot 10^{-1}$

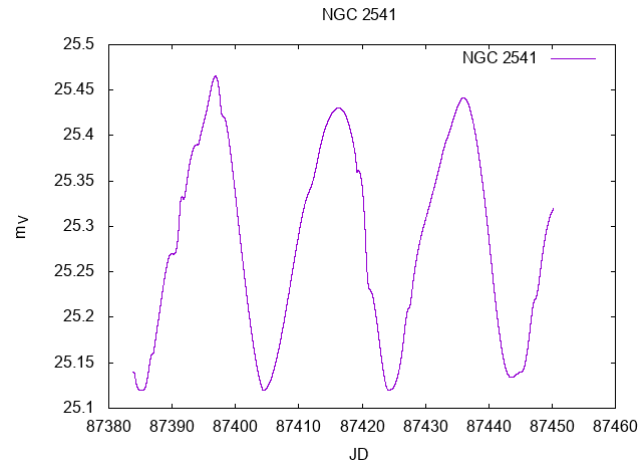


Figure 7: Curva di Luce della Cefeide in NGC2541.

NGC 2090

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
22.43	$3.18 \cdot 10^{-2}$	25.22	$1.69 \cdot 10^{-1}$

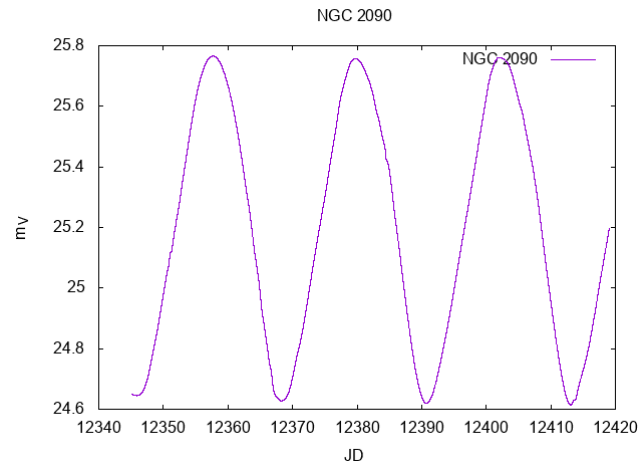


Figure 8: Curva di Luce della Cefeide in NGC2090.

NGC 3198

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
15.12	$7.05 \cdot 10^{-2}$	26.07	$2.32 \cdot 10^{-1}$

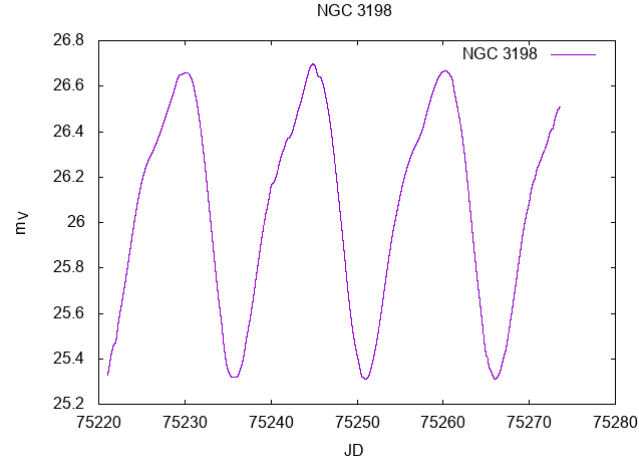


Figure 9: Curva di Luce della Cefeide in NGC3198.

NGC 3351

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
8.20	$1.59 \cdot 10^{-2}$	26.14	$4.87 \cdot 10^{-1}$

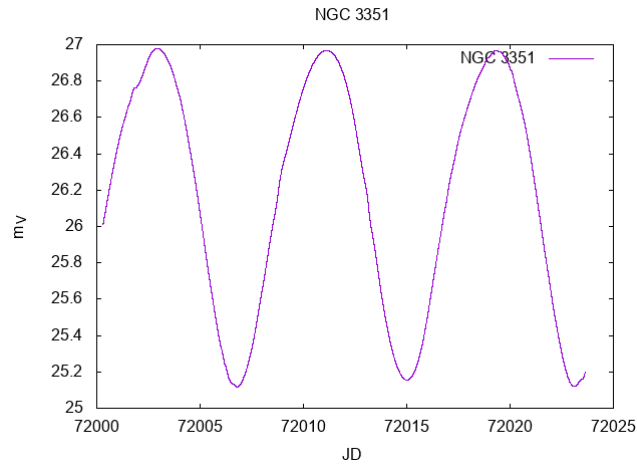


Figure 10: Curva di Luce della Cefeide in NGC3351.

NGC 3368

Periodo Medio (<i>JD</i>)	Errore Periodo (<i>JD</i>)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
7.73	$5.37 \cdot 10^{-2}$	26.33	$2.88 \cdot 10^{-1}$

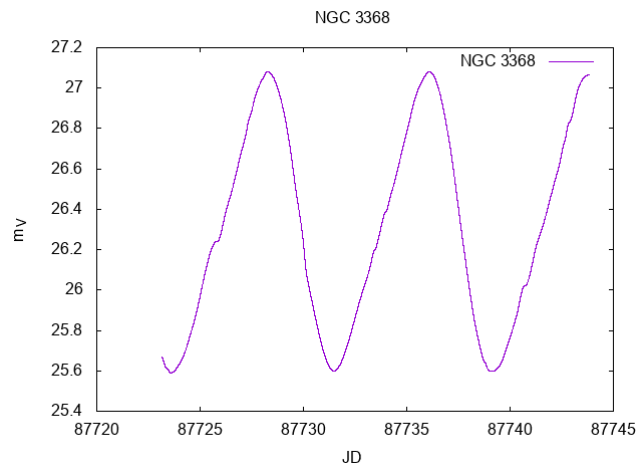


Figure 11: Curva di Luce della Cefeide in NGC3368.

NGC 3621

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
20.12	$6.41 \cdot 10^{-2}$	24.12	$3.47 \cdot 10^{-1}$

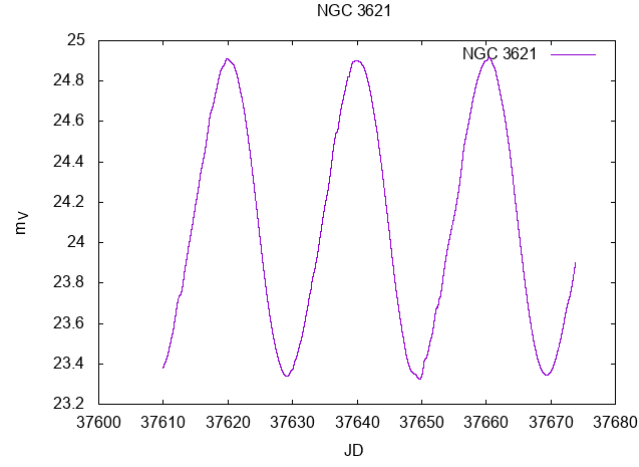


Figure 12: Curva di Luce della Cefeide in NGC3621.

NGC 4321

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
28.18	$9.61 \cdot 10^{-2}$	25.50	$2.36 \cdot 10^{-1}$

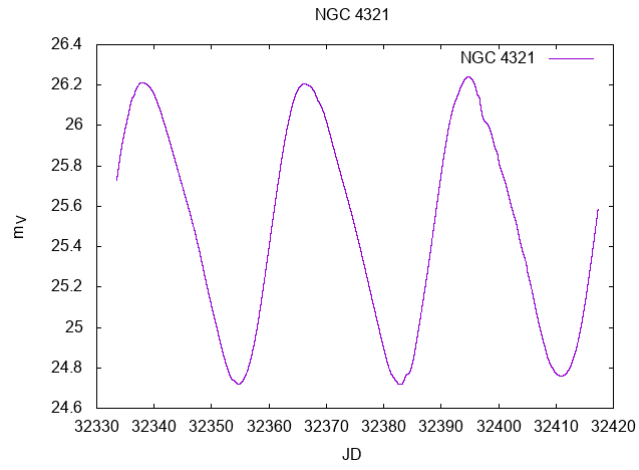


Figure 13: Curva di Luce della Cefeide in NGC4321.

NGC 4496

Periodo Medio (<i>JD</i>)	Errore Periodo (<i>JD</i>)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
22.15	$4.57 \cdot 10^{-2}$	26.75	$1.74 \cdot 10^{-1}$

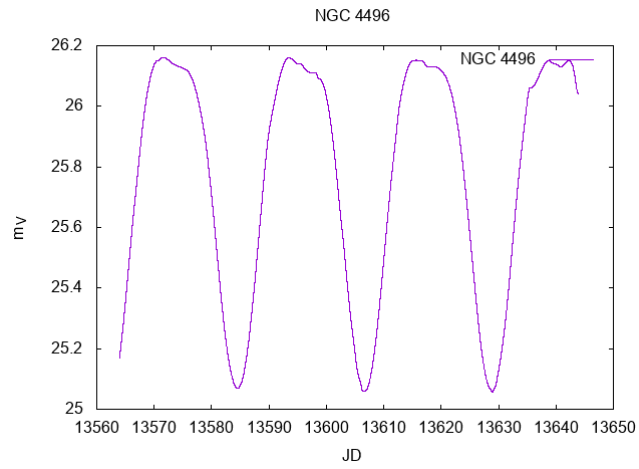


Figure 14: Curva di Luce della Cefeide in NGC4496.

NGC 4548

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
6.98	$2.19 \cdot 10^{-1}$	27.40	$2.29 \cdot 10^{-1}$

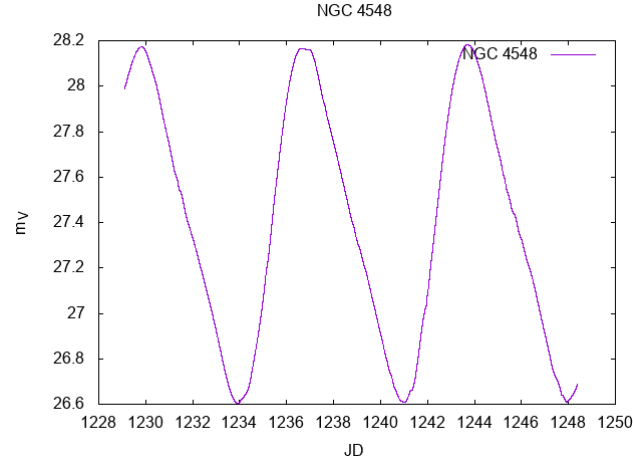


Figure 15: Curva di Luce della Cefeide in NGC4548.

NGC 4535

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
8.42	$5.31 \cdot 10^{-3}$	27.10	$3.75 \cdot 10^{-1}$

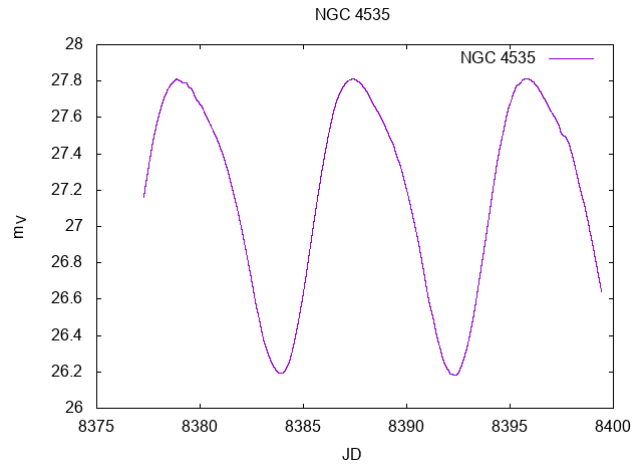


Figure 16: Curva di Luce della Cefeide in NGC4535.

NGC 4536

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
16.15	$7.50 \cdot 10^{-2}$	26.16	$3.40 \cdot 10^{-1}$

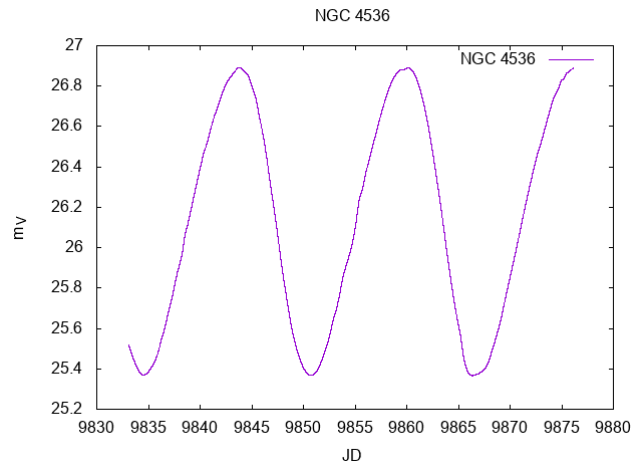


Figure 17: Curva di Luce della Cefeide in NGC4536.

NGC 4639

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
32.44	$1.31 \cdot 10^{-1}$	26.12	$7.72 \cdot 10^{-2}$

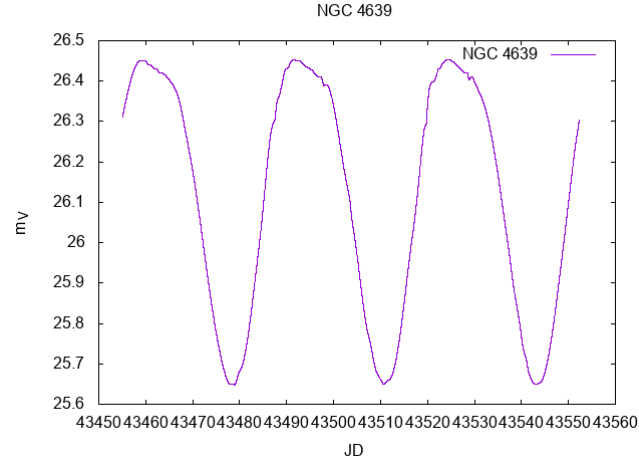


Figure 18: Curva di Luce della Cefeide in NGC4639.

NGC 4725

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
16.66	$3.44 \cdot 10^{-2}$	25.71	$3.21 \cdot 10^{-1}$

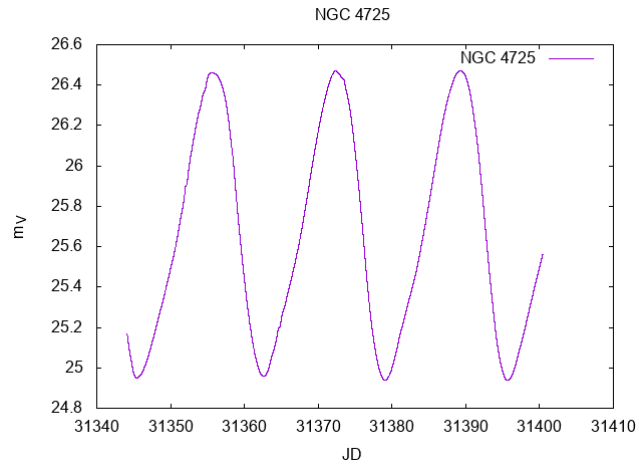


Figure 19: Curva di Luce della Cefeide in NGC4725.

NGC 7331

Periodo Medio (JD)	Errore Periodo (JD)	M. Apparente Media	Errore su M.A.
13.83	$2.16 \cdot 10^{-1}$	26.33	$4.63 \cdot 10^{-2}$

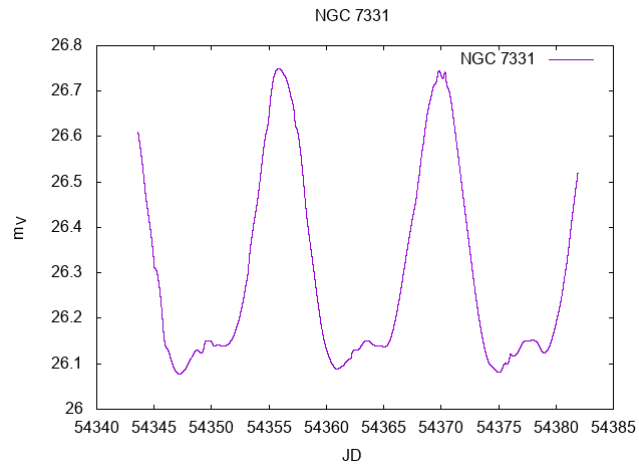


Figure 20: Curva di Luce della Cefeide in NGC7331.

4.3 Magnitudine Assoluta

Sfruttando la relazione Periodo-Luminosità, con i valori per i coefficienti trovati a inizio codice, posso ottenere una stima della magnitudine assoluta della stella e del suo errore.

$$M_V = -2.90 \log(P) - 1.21 \quad (10)$$

Ne calcolo l'errore inserendo:

$$dM_V = \frac{-2.90}{P} \log dP \quad (11)$$

Cefeide (nome Galassia)	Magnitudine Assoluta	Errore Magnitudine
NGC0925	-4.27	$4.07 \cdot 10^{-1}$
NGC1326	-3.93	$4.40 \cdot 10^{-1}$
NGC1365	-5.06	$1.05 \cdot 10^{-1}$
NGC1425	-4.20	$4.62 \cdot 10^{-1}$
NGC2403	-2.89	1.56
NGC2541	-4.94	$7.73 \cdot 10^{-2}$
NGC2090	-5.12	$1.94 \cdot 10^{-1}$
NGC3198	-4.63	$2.21 \cdot 10^{-1}$
NGC3351	-3.86	$6.36 \cdot 10^{-1}$
NGC3368	-3.78	$4.76 \cdot 10^{-1}$
NGC3521	-4.99	$1.72 \cdot 10^{-1}$
NGC4321	-5.41	$1.05 \cdot 10^{-1}$
NGC4496	-5.11	$1.75 \cdot 10^{-1}$
NGC4548	-3.65	$2.74 \cdot 10^{-1}$
NGC4535	-3.89	$7.84 \cdot 10^{-1}$
NGC4536	-4.71	$2.02 \cdot 10^{-1}$
NGC4639	-5.59	$7.91 \cdot 10^{-2}$
NGC4725	-4.75	$2.55 \cdot 10^{-1}$
NGC7331	-4.51	$1.40 \cdot 10^{-1}$

4.4 Distanza della Galassia

Utilizzando il valore trovato della magnitudine assoluta, posso trovare dapprima il modulo di distanza:

$$\begin{cases} \mu = m_V - M_v \\ d\mu = \sqrt{dm_V^2, dM_V^2} \end{cases} \quad (12)$$

per poi ottenere la distanza (della galassia ospitante). Divido per 10^6 per ottenere la distanza in *Mpc*.

$$\begin{cases} D = \frac{10^{0.2\mu+1}}{10^6} \\ dD = \frac{4.61 e^{0.461 \cdot \mu} d\mu}{10^6} \end{cases} \quad (13)$$

Riporto direttamente le distanze delle galassie

Cefeide (nome Galassia)	Distanza (Mpc)	Errore Distanza (Mpc)
NGC0925	9.14	1.93
NGC1326	16.14	3.35
NGC1365	17.89	1.03
NGC1425	21.83	4.98
NGC2403	3.23	2.41
NGC2541	11.15	0.41
NGC2090	11.73	1.41
NGC3198	13.76	2.06
NGC3351	9.99	3.75
NGC3368	10.51	2.74
NGC3521	6.63	1.20
NGC4321	15.18	1.84
NGC4496	14.83	1.71
NGC4548	16.22	2.71
NGC4535	15.77	6.41
NGC4536	14.91	2.76
NGC4639	21.95	1.14
NGC4725	12.34	2.37
NGC7331	14.74	1.01

4.5 Costante di Hubble

Calcolando la costante di Hubble utilizzando la distanza in Mpc appena trovata e usando la velocità di recessione del file fornito con l'esercizio:

$$\begin{cases} H_0 = \frac{v_{rec}}{D} \\ dH_0 = \sqrt{\left(\frac{dv}{D}\right)^2 + \left(\frac{v}{D^2}dD\right)^2} \end{cases} \quad (14)$$

Ottengo i seguenti valori:

Cefeide (nome Galassia)	$H_0 \left(\frac{km}{s \cdot Mpc} \right)$	$dH_0 \left(\frac{km}{s \cdot Mpc} \right)$
NGC0925	72.68	35.26
NGC1326	111.1	45.30
NGC1365	89.10	24.96
NGC1425	67.48	15.42
NGC2403	86.16	69.58
NGC2541	64.06	20.06
NGC2090	75.19	9.80
NGC3198	56.11	10.07
NGC3351	64.24	58.52
NGC3368	73.07	48.60
NGC3521	91.91	64.22
NGC4321	94.39	11.42
NGC4496	95.99	11.45
NGC4548	85.31	14.44
NGC4535	91.58	37.29
NGC4536	95.46	17.85
NGC4639	63.92	3.89
NGC4725	89.37	19.78
NGC7331	67.78	13.01

Con tutti questi valori procedo con il determinare una media pesata usando come pesi:

$$p_i = \frac{1}{dH_{0,i}^2}$$

Otengo così una costante di Hubble:

$$\begin{cases} H_0 = 71.09 \frac{km}{s \cdot Mpc} \\ dH_0 = 2.78 \frac{km}{s \cdot Mpc} \end{cases} \quad (15)$$

4.6 Modelli Cosmologici

Utilizzando il valore della costante di Hubble così ottenuta, posso calcolare le coppie di parametri cosmologici Ω_M e Ω_Λ che rendono l'età dell'universo pari a $t_0 = 13.82 \pm 0.1382$.

Universo Piatto Dapprima scelgo di analizzare un universo con geometria Piatto, in cui

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$$

Tramite il codice ottengo tre coppie di parametri rispettivamente per il valore medio di H_0 , il suo valore massimo e il suo valore minimo.

$$\begin{cases} H_{0,mean} : & \Omega_M = 0.254 & \Omega_L = 0.746 \\ H_{0,max} : & \Omega_M = 0.220 & \Omega_L = 0.780 \\ H_{0,min} : & \Omega_M = 0.293 & \Omega_L = 0.707 \end{cases} \quad (16)$$

A questo va confrontato un valore utilizzando i dati di *Planck*, usando la CMB:

$$\begin{aligned} H_0 &= 67.4 \\ dH_0 &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H_{0,mean} : & \Omega_M = 0.308 & \Omega_L = 0.692 \\ H_{0,max} : & \Omega_M = 0.300 & \Omega_L = 0.700 \\ H_{0,min} : & \Omega_M = 0.316 & \Omega_L = 0.684 \end{cases} \quad (17)$$

Con i dati del team *SH0ES* usando le Supernovae:

$$\begin{cases} H_{0,mean} : & \Omega_M = 0.224 & \Omega_L = 0.776 \\ H_{0,max} : & \Omega_M = 0.209 & \Omega_L = 0.791 \\ H_{0,min} : & \Omega_M = 0.241 & \Omega_L = 0.759 \end{cases} \quad (18)$$

Universo Aperto Proseguo con il calcolo per un universo aperto, dove cioè $\Omega < 1$. Utilizzando la costante di Hubble derivata dal mio codice ottengo:

$$\begin{cases} H_{0,mean} : & \Omega_M = 0.119 & \Omega_L = 0.445 \\ H_{0,max} : & \Omega_M = 0.198 & \Omega_L = 0.733 \\ H_{0,min} : & \Omega_M = 0.052 & \Omega_L = 0.132 \end{cases} \quad (19)$$

Usando i dati della missione Planck (CMB):

$$\begin{cases} H_{0,mean} : & \Omega_M = 0.109 & \Omega_L = 0.254 \\ H_{0,max} : & \Omega_M = 0.163 & \Omega_L = 0.411 \\ H_{0,min} : & \Omega_M = 0.223 & \Omega_L = 0.497 \end{cases} \quad (20)$$

Usando i dati del team SH0ES (SN):

$$\begin{cases} H_{0,mean} : & \Omega_M = 0.046 & \Omega_L = 0.328 \\ H_{0,max} : & \Omega_M = 0.083 & \Omega_L = 0.490 \\ H_{0,min} : & \Omega_M = 0.104 & \Omega_L = 0.446 \end{cases} \quad (21)$$

Universo Chiuso Infine, calcolo le coppie di parametri cosmologici che calcolino un'età dell'universo pari a 13.82 ± 0.1382 per un universo che abbia geometria chiusa. Cioè, tali per cui $\Omega > 1$.

Usando i miei valori:

$$\begin{cases} H_{0,mean} : & \Omega_M = 0.276 & \Omega_L = 0.790 \\ H_{0,max} : & \Omega_M = 0.294 & \Omega_L = 0.926 \\ H_{0,min} : & \Omega_M = 0.332 & \Omega_L = 0.780 \end{cases} \quad (22)$$

Usando i dati di Planck:

$$\begin{cases} H_{0,mean} : & \Omega_M = 0.446 & \Omega_L = 0.941 \\ H_{0,max} : & \Omega_M = 0.393 & \Omega_L = 0.872 \\ H_{0,min} : & \Omega_M = 0.407 & \Omega_L = 0.850 \end{cases} \quad (23)$$

Infine, usando i dati di SH0ES:

$$\begin{cases} H_{0,mean} : & \Omega_M = 0.287 & \Omega_L = 0.900 \\ H_{0,max} : & \Omega_M = 0.294 & \Omega_L = 0.960 \\ H_{0,min} : & \Omega_M = 0.242 & \Omega_L = 0.761 \end{cases} \quad (24)$$

5 Discussione e Problemi

I calcoli effettuati dal mio codice generano un risultato coerente con le derivazioni fatte dalle missioni Planck e dal team SH0ES.

La precisione nel calcolo dei periodi e delle luminosità è buona, ma non superba. Questo però non pregiudica un buon risultato.

La maggior parte dell'errore accumulato (errore che appare visibile nella tabella relativa alle costanti di Hubble derivate con le singole Cefeidi) proviene sicuramente dal calcolo delle distanze.

Essendo prodotto da una legge esponenziale del modulo di distanza, la distanza vede un aumento importante (ma verosimilmente intrinseco) dell'errore. Mediando tante misure, come ho fatto qui, si riesce a ottenere un valore per la costante di Hubble che comunque presenta una incertezza decente, ma da questo si può facilmente capire perchè gli Astrofisici spingono continuamente per la costruzione e la messa in orbita di satelliti con precisione crescente.

Il secondo termine che aumenta l'errore, probabilmente, è la precisione della velocità di recessione. Per alcuni valori, infatti, l'incertezza è addirittura dell'ordine dell'70 – 80%.

5.1 Difetto del Codice

Il grosso difetto del codice che ho scritto è l'efficienza. Per svolgere l'intero codice su macOS 10.14.6 con una CPU *i7 – 4578U* e RAM *16GB* impiega *24m41.700!*

Sicuramente si potrebbe migliorare l'efficienza del codice architettando il calcolo non su array come ho fatto io, ma usando scalari o qualche vettore meno dimensionale rispetto a quelli che ho usato io.

L'operazione più intensiva per la CPU sono, però, sicuramente le due condizioni per l'Universo Aperto o Universo Chiuso. Il programma si trova davanti un pool di un milione di possibili valori da controllare. Non sono riuscito a trovare nessuna via analitica per semplificare il lavoro al codice. Le alternative che avevo scritto, impiegavano anche più tempo.