Integrazione di funzioni

Integrazione di funzioni: caso unidimensionale

Il problema generale e':

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Grazie al teorema fondamentale del Calcolo Integrale, si cerca la **funzione primitiva F(x)** tale per cui **F'(x)= f(x)**. Dopo di che si ha che:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Formule di Integrazione di Newton-Cotes

Strategia: sostituire una funzione complicata con una sua approssimazione facile da integrare:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_n(x)dx$$

dove $f_n(x)$ e' un **polinomio** di forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Ordine 1: Regola del trapezoide

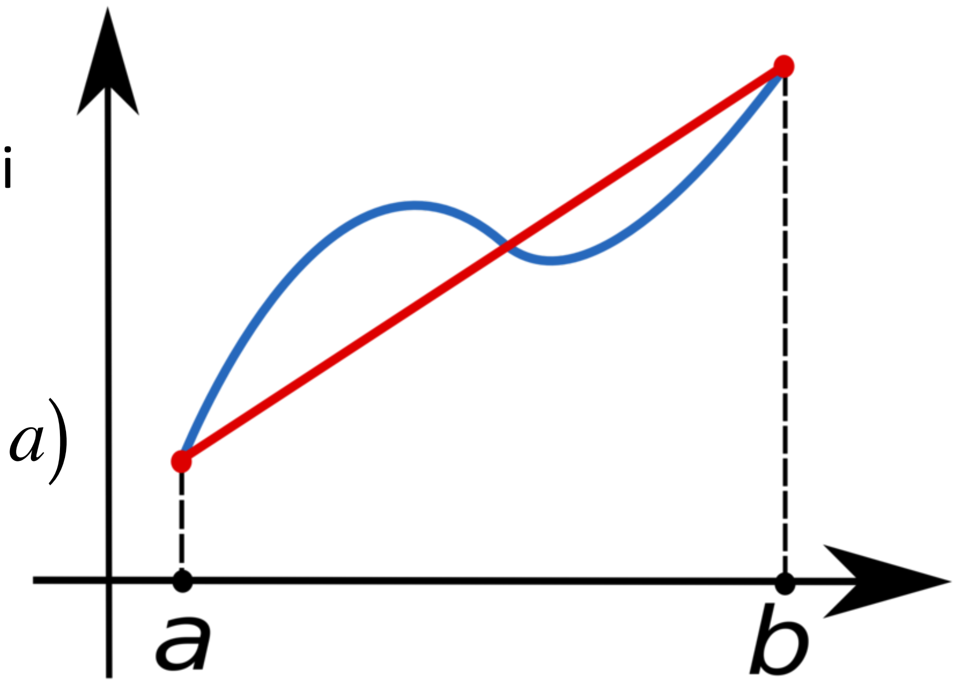
In questo caso il polinomio e' al prim'ordine (retta):

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_1(x)dx$$

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Equazione della retta passante per i due punti [a, f(a)] e [b, f(b)]

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$



Ordine 1: Regola del trapezoide

Integrando il polinomio si ha:

$$I \cong \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right] dx$$

$$I \cong (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Stima dell'errore totale locale:

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b - a)^3$$

dove ξ punto tra a e b

Commenti:

- l'errore cresce con il cubo della lunghezza dell'intervallino
- il risultato e' esatto se l'integranda e' una funzione costante o lineare (f"=0)

Ordine 1: Regola del trapezoide

Come fare a migliorare?

Ridurre la lunghezza dell'intervallino, facendo **un' applicazione multipla** del metodo su **n intervallini**!

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_{a}^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \ldots + \int_{a+(n-2)h}^{a+(n-1)h} f(x)dx + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad I \cong (b-a)\frac{f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)}{2n}$$

Commento:

- l'integrale e' approssimato dal prodotto tra la lunghezza dell'intervallino e una stima dell'altezza media della funzione sullo stesso intervallino

Ordine 1: Regola del trapezoide

Come varia la stima dell'errore?

L'intervallo e' ora lungo

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Su ogni singolo intervallino si ha

$$E_i = -\frac{1}{12} f''(\xi_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad E_t = -\frac{1}{12n^3}(b-a)^3 \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \cong -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

Commento:

- dimezzando la lunghezza degli intervallini, l'errore si riduce di un fattore 4! e cosi' via… Attenzione pero': a un certo punto si diventa dominati dall'**errore di arrotondamento**!

Ordine 2: Regola di Simpson 1/3

In questo caso il polinomio e' al second'ordine (parabola):

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx$$

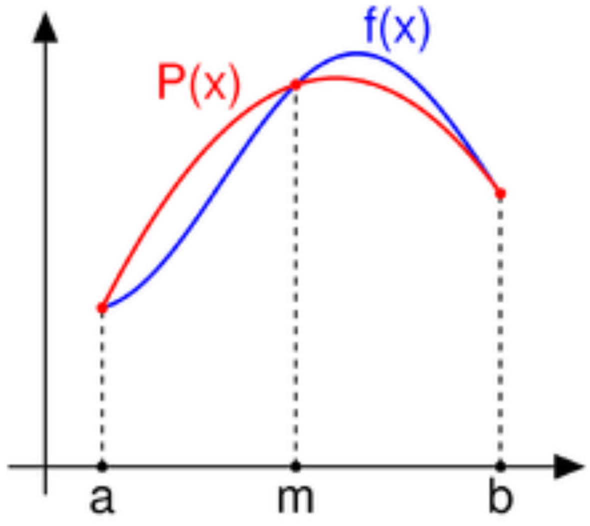
$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Per definire una parabola servono **3 punti**, quindi

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$I \cong \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(b)\right]$$

$$I \cong (b-a)\frac{f(a) + 4f(a+h) + f(b)}{6}$$



Ordine 2: Regola di Simpson 1/3

Stima errore totale:

$$E_t = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

dove ξ punto tra a e b

Commento:

- Nonostante sia al second'ordine, l'errore cresce con la quinta potenza della lunghezza dell'intervallino!!!

Applicazione multipla su n intervallini

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I \cong (b-a)\frac{f(a) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(a+ih) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(a+ih) + f(b)}{3n}$$

Stima errore totale si riduce a:

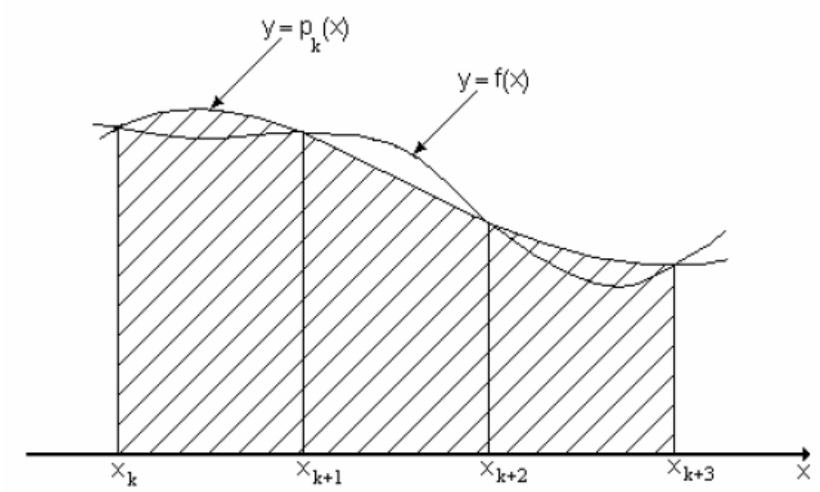
$$E_t \cong -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Ordine 3: Regola di Simpson 3/8

In questo caso il polinomio e' al terz'ordine (cubica):

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_3(x)dx$$

$$f_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$



Per definire una cubica la servono **4 punti**, quindi

$$h = \frac{b-a}{3}$$

$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\right]$$

$$I \cong (b-a)\frac{f(a) + 3f(a+h) + 3(a+2h) + f(b)}{8}$$

Ordine 3: Regola di Simpson 3/8

Stima errore totale:

$$E_t = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

dove ξ punto tra a e b

Commento:

- Stesso ordine di Simpson 1/3, ma con coefficiente minore

➔ solo leggermente piu' accurata (coefficiente numerico inferiore).

Ordini superiori

Ordine 4: Regola di Boole

$$I \cong (b-a)\frac{7f(a)+32f(a+h)+12f(a+2h)+32f(a+3h)+7f(b)}{90}$$

Stima errore totale:

$$E_t = -\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$$

dove ξ punto tra a e b

Ordine 5

$$I \cong (b-a)\frac{19f(a)+75f(a+h)+50f(a+2h)+50f(a+3h)+75f(x+4h)+19f(b)}{288}$$

Stima errore totale:

$$E_t = -\frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(\xi)$$

dove ξ punto tra a e b

Estrapolazione di Richardson

- **L'estrapolazione di Richardson** rappresenta un metodo in cui si combinano tra di loro due diverse stime numeriche dell'integrale per ottenerne una piu' accurata, sfruttando la conoscenza dell'andamento dell'errore.
- La sua implementazione numerica piu' efficiente e' il **metodo di Romberg,** una tecnica ricorsiva ideale per generare una stima dell'integrale con una tolleranza sull'errore pre-definita.

Estrapolazione di Richardson

Supponiamo di avere applicato un dato metodo per stimare l'integrale. Avremo:

$$I = I(h) + E(h)$$

I(h) e' la **stima** dell'integrale
E(h) e' il suo **errore** di troncamento

Considerando il trapezoide con spaziatura h: $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$E_t \cong -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}'' = -\frac{b-a}{12}h^2\bar{f}''$$

N.B. Il trapezoide ha un'accuratezza O(h^2)

Estrapolazione di Richardson

Supponiamo ora di avere ottenuto due stime dell'integrale con due spaziature diverse, h_1 e h_2. Avremo:

$$I = I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

Considerando indipendente da h il valore medio di f", si ha:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \quad \Rightarrow \quad E(h_1) = E(h_2)\frac{h_1^2}{h_2^2}$$

sostituendo

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = I(h_2) + E(h_2)$$

Estrapolazione di Richardson

Da cui possiamo ricavare:

$$E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

Pertanto possiamo migliorare la stima precedente:

$$I = I(h_2) + E(h_2) \cong I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

In particolare se $h_2 = h_1/2$

$$I \cong I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{2^2 - 1} = \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$

Anche se basata sul metodo del trapezoide (applicato due volte!), la nuova stima ha un'accuratezza $O(h^4)$!

Estrapolazione di Richardson

Il metodo puo' essere **ulteriormente iterato**. Se si hanno due diverse stime con accuratezza $O(h^4)$ ottenute sempre con $h_2=h_1/2$, queste possono essere combinate per ottenere una nuova stima che avra' accuratezza $O(h^6)$:

$$I \cong \frac{16}{15} I(h_2) - \frac{1}{15} I(h_1)$$

Combinando due stime con accuratezza $O(h^6)$ si puo' ottenere una nuova stima che avra' accuratezza $O(h^8)$:

$$I \cong \frac{64}{63} I(h_2) - \frac{1}{63} I(h_1)$$

e cosi' via...

Algoritmo di integrazione di Romberg

Corrisponde all'implementazione numerica dell'estrapolazione di Richardson, sempre con **$h_2=h_1/2$.** In generale i coefficienti necessari per combinare le diverse stime possono essere scritti come:

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

k rappresenta l'**ordine** di accuratezza: k=1 $O(h^2)$, k=2 $O(h^4)$, k=3 $O(h^6)$, …

j rappresenta il **livello** di accuratezza: (j+1) e' piu' accurato di j

$$\begin{array}{ccccccccc}
I_{1,1} & & & & & & & & \\
& \searrow & & & & & & & \\
I_{2,1} & \rightarrow & I_{1,2} & & & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & & & \\
I_{3,1} & \rightarrow & I_{2,2} & \rightarrow & I_{1,3} & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
I_{4,1} & \rightarrow & I_{3,2} & \rightarrow & I_{2,3} & \rightarrow & I_{1,4} & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
I_{5,1} & \rightarrow & I_{4,2} & \rightarrow & I_{3,3} & \rightarrow & I_{2,4} & \rightarrow & I_{1,5} \\
O(h^2) & & O(h^4) & & O(h^6) & & O(h^8) & & O(h^{10})
\end{array}$$

Algoritmo di integrazione di Romberg: pseudo-codice

INPUT a, b (limiti di integrazione), INPUT ε_s (criterio di stop),INPUT maxit (numero massimo di iterazioni)

ε_a=1.1 ε_s

i=0

DOWHILE (ε_a> ε_s) and (i<maxit)

i=i+1

n=2^{i-1}

CALL **TRAPEZOIDE**(n,a,b,integrale)

$I_{i,1}$= integrale

DOFOR k=2 to i

j=1+i-k

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

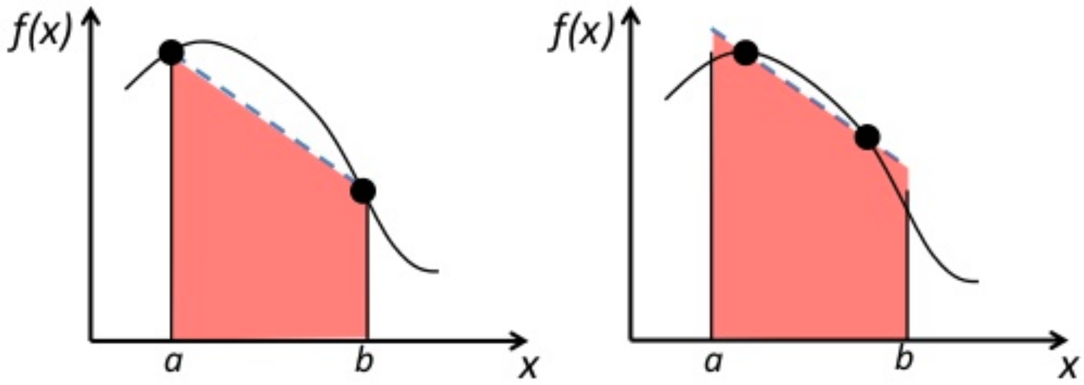
ENDDO

$$\varepsilon_a = \left| \frac{I_{1,i} - I_{1,i-1}}{I_{1,i}} \right| \cdot 100$$

ENDDO

QUADRATURA DI GAUSS

- Nelle formule di **Newton-Cotes**, sono utilizzati valori della funzione in **punti predeterminati regolari**.
- Nella **Quadratura di Gauss**, i punti di integrazione sono **indeterminati.**



- Nell'esempio, l'approssimazione dell'integrale puo' essere migliorata usando **due punti interni scelti in modo 'intelligente'.**
- La **Quadratura di Gauss** offre un metodo per trovare questi punti.

QUADRATURA DI GAUSS:
metodo dei coefficienti indeterminati

Per il trapezoide avevamo:

$$I \cong (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

Generalizzando:

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

dove **x_0 e x_1** sono punti incogniti interni all'intervallo di integrazione e **c_0 e c_1** sono opportuni coefficienti, pure da determinarsi → **abbiamo 4 incognite da determinare!**

QUADRATURA DI GAUSS:

Servono quattro condizioni per trovare le quattro incognite:

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

NOTA: con un semplice cambiamento di variabile, qualsiasi integrale puo’ essere trasformato in un integrale tra -1 e 1!

QUADRATURA DI GAUSS:

Sostituendo si ha:

$$
\begin{aligned}
& c_0 + c_1 = 2 \\
& c_0 x_0 + c_1 x_1 = 0 \\
& c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\
& c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = 0
\end{aligned}
$$

NOTA: con la scelta delle condizioni imposte, i valori risultanti delle incognite (c_0, c_1, x_0, x_1) sono tali da garantire che **l'integrale sia esatto fino all'ordine cubico!**

QUADRATURA DI GAUSS:

Risolvendo si ha:

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.5773503$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5773503$$

Pertanto:

$$I \cong f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Formula a due punti di Gauss-Legendre

Per **cambiare i limiti di integrazione**, e' necessario fare il seguente cambio di variabile:

$$x = a_0 + a_1 x_d$$

Dall'estremo inferiore ($x=a \Rightarrow x_d=-1$) $\quad a = a_0 + a_1 \cdot (-1)$

Dall'estremo superiore ($x=b \Rightarrow x_d=1$) $\quad b = a_0 + a_1 \cdot (+1)$

Le soluzioni sono: $\quad a_0 = \dfrac{b+a}{2} \qquad a_1 = \dfrac{b-a}{2}$

Per cui $\quad x = \dfrac{(b+a)+(b-a)x_d}{2}$

il cui differenziale e' $\quad dx = \dfrac{(b-a)}{2} dx_d$

QUADRATURA DI GAUSS:

Formule agli ordini superiori

In maniera analoga si possono sviluppare versioni della quadratura di Gauss agli ordini superiori. Utilizzando n punti si ha :

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_{n-1} f(x_{n-1})$$

Per esempio, la **formula di Gauss-Legendre a 3 punti** ha i seguenti 6 parametri:

$$c_0 = 0.555555556 \qquad x_0 = -0.774596669$$
$$c_1 = 0.888888889 \qquad x_1 = 0.0$$
$$c_2 = 0.555555556 \qquad x_2 = 0.774596669$$

Per ottenerli sono stati utilizzati 6 condizioni, pertanto la formula e' **esatta per funzioni fino all'ordine 5 compreso!**

➔ $$E_t \approx f^{(6)}(\xi)$$

Formule agli ordini superiori

Number of points, n	Points, x_i	Weights, w_i
1	0	2
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

$$E_t \approx f^{(4)}(\xi)$$

$$E_t \approx f^{(6)}(\xi)$$

$$E_t \approx f^{(8)}(\xi)$$

$$E_t \approx f^{(10)}(\xi)$$

INTEGRALI IMPROPRI

Bisogna fare un cambio di variabile!

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

Funziona quando f tende a zero piu' velocemente di $1/x^2$ quando x tende a ∞ e per ab>0. Altrimenti conviene spezzare l'integrale in due parti. Esempio:

$$\int_{-\infty}^{b>0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^{b} f(x)dx$$

Fatto cambiando variabile

Fatto normalmente