Calcolo per l’ Astronomia

a.a. 2019/2020

Primo esercizio di esame

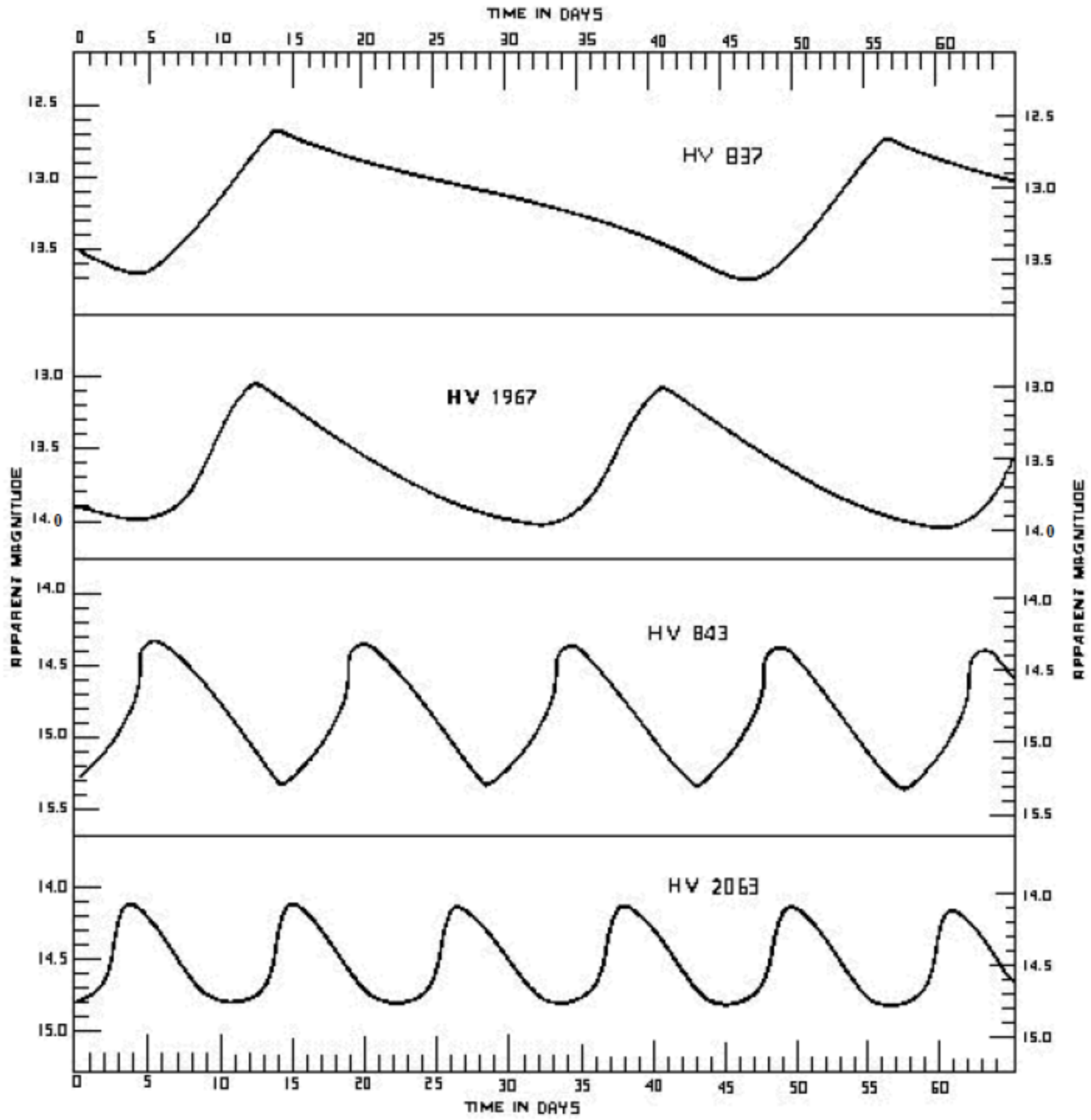
“Stima della costante di Hubble, partendo dalle curve di luce di 19 stelle cefeidi osservate in altrettante galassie”

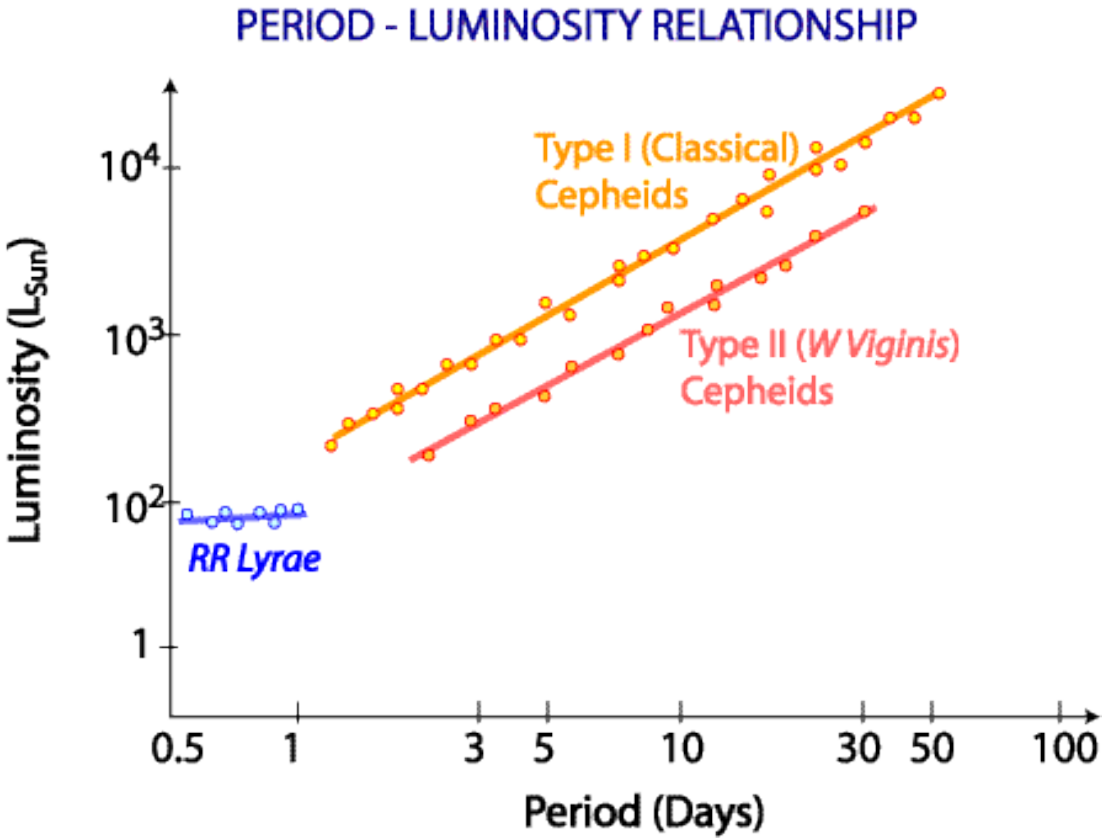
Prof. Lauro Moscardini, lauro.moscardini@unibo.it

Stelle cefeidi

Nei primi anni del Novecento, **Henrietta Leavitt**, analizzando le lastre fotografiche della Grande (LMC) e Piccola Nube di Magellano (SMC), compilò un catalogo di 1777 stelle variabili periodiche. Successivamente fu in grado di classificarne 47 di esse come stelle variabili **Cefeidi** e notò che quelle con periodo più lungo risultavano più brillanti di quelle aventi periodo più corto. Poiché le stelle si trovavano nelle stesse nubi, quindi più o meno alla stessa distanza dall'osservatore, ogni differenza in magnitudine apparente deve essere legata a una differenza in magnitudine assoluta.

Graficando i suoi risultati per le due Nubi, la Leavitt notò che formavano due distinte relazioni tra brillanza e periodo.


TIME IN DAYS
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
HV 837
12.5
13.0
13.5
HV 1967
13.0
13.5
14.0
HV 843
14.0
14.5
15.0
15.5
HV 2063
14.0
14.5
15.0
APPARENT MAGNITUDE
APPARENT MAGNITUDE
TIME IN DAYS



Per le Cefeidi esiste una relazione lineare tra il logaritmo della luminosità (cioé in pratica la magnitudine assoluta M_V) e il logaritmo del periodo P:

$$\boxed{M_V = c_1 \log(P) + c_2}$$

Questo rende le cefeidi un ottimo indicatore di distanza
➔ **candele standard**

Scopo generale del progetto:

Partendo dalla curva di luce di una cefeide, calcolarne il **periodo** di pulsazione e la sua **magnitudine media**. Dopo avere calcolato i parametri della relazione periodo-luminosità utilizzando i dati di un catalogo dato di cefeidi, calcolare la **magnitudine assoluta** della cefeide in esame, da cui poi derivare la **distanza** utilizzando la formula per il modulo di distanza.

Ripetere la cosa per le altre 18 cefeidi disponibili. Infine, sfruttando l'informazione sulla velocità di recessione delle 19 galassie a cui le cefeidi appartengono, combinare i dati per derivare una stima della **costante di Hubble** e del suo errore.

Con il valore così ottenuto, stimare **l'età dell'Universo** e determinare il valore di **due parametri fondamentali: Ω_m e Ω_Λ.**

Dati a disposizione:

• una tabella per ognuna delle 19 cefeidi (**ceph_namegalassia.txt**) contenente la sua **curva di luce**, cioè l’andamento della **magnitudine apparente** in banda V (seconda colonna) in funzione del **giorno giuliano** (prima colonna).

Attenzione: i dati non sono ordinati temporalmente.

• una tabella (**ceph_catalog.txt**) contenente per un catalogo di cefeidi (nome in ultima colonna) il loro **periodo** (in giorni, prima colonna) e la **magnitudine assoluta** in banda V (seconda colonna).

• una tabella (**gal_vel.txt**) in cui per le 19 galassie a cui le cefeidi appartengono (nome in prima) viene data la **velocità di recessione** (in km/s, seconda colonna) e il **suo errore** (in km/s, terza colonna).

Fase 1: Analisi della curva di luce di una singola cefeide

La curva di luce deve essere analizzata per derivare il **periodo di pulsazione** e la **magnitudine apparente media**:

➔ occorre fare una interpolazione con **spline cubica** per stimare il comportamento della curva anche in punti non coperti dalle singole osservazioni

➔ i dati non sono ordinati temporalmente, occorre ricorrere al **sorting** prima di analizzarli

➔ per calcolare il periodo bisogna individuare una **caratteristica della curva** che si ripete (massimo, minimo) e mediare tra i diversi periodi di pulsazione coperti dalle osservazioni oppure provare diversi valori del periodo e vedere quello che meglio si accorda ai valori interpolati

➔ per calcolare la **magnitudine media**, fare la media della magnitudine apparente su un numero intero di periodi

➔ assegnare un **errore** sia al periodo che alla magnitudine media, sfruttando i diversi periodi di pulsazione a disposizione

Fase 2: Derivazione dei parametri della relazione periodo-luminosità

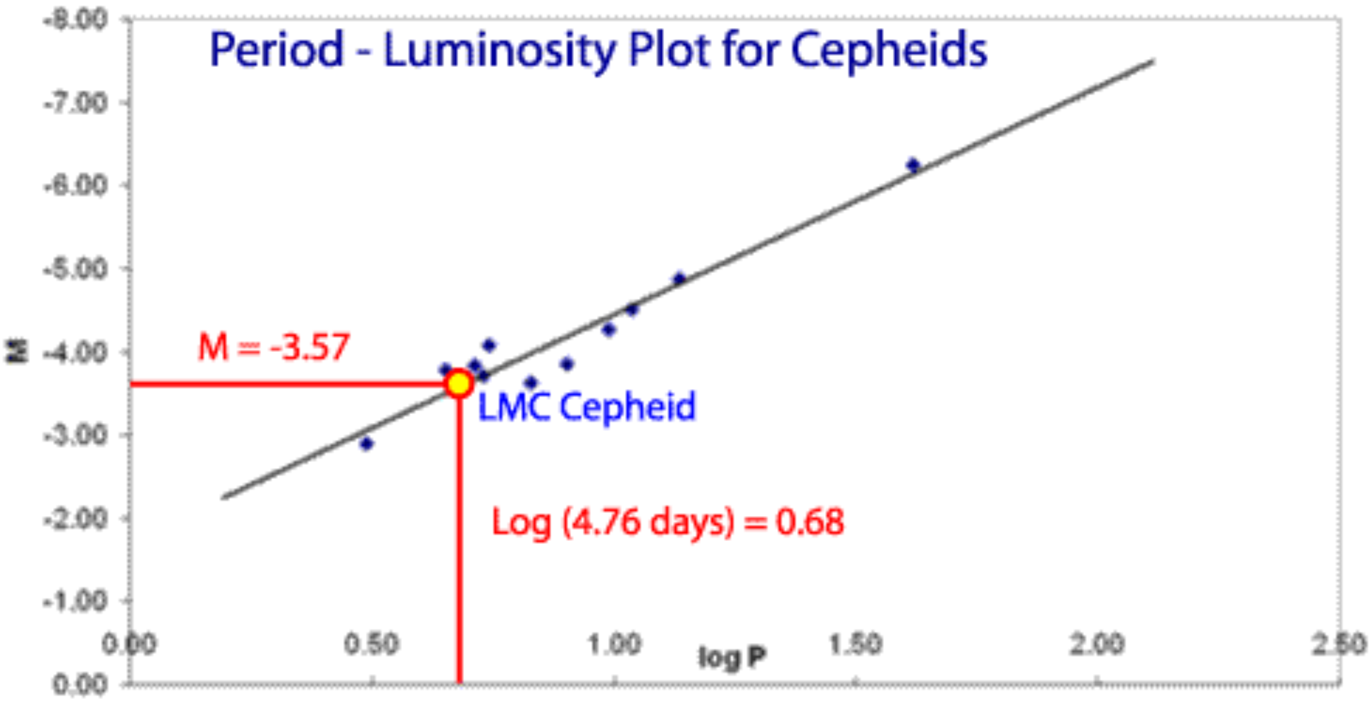
Viene fornito un catalogo di cefeidi (**ceph_cat.txt**) di cui sono noti **periodo e magnitudine assoluta**.
I dati devono essere fittati con la relazione:

$$M_V = c_1 \log(P) + c_2$$

per ottenere le due costanti $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$.

Fase 3: Derivazione della distanza della galassia a cui la cefeide appartiene

Utilizzando la relazione di fit precedente, dato il periodo della cefeide, è possibile derivarne la sua **magnitudine assoluta M_V.**



A questo punto, è possibile calcolare il modulo di distanza:

$$\mu \equiv m_V - M_V = 5\log\left(\frac{d}{10\,pc}\right)$$

da cui, la **distanza** (in parsec) della galassie a cui la cefeide appartiene risulta essere

$$d = 10^{0.2\mu+1}$$

Attenzione: le distanze della galassie sono dell’ordine dei Megaparsec (usare 1 Mpc=10^6 pc)

Fase 4: Stima della costante di Hubble H_0

L’universo è in espansione: le galassie si stanno allontanando da noi seguendo la **legge di Hubble-Lemaître**, che può essere scritta come:

$$\boxed{v_{rec} = H_0 d}$$

Il file **gal_vel.txt** contiene, per le 19 galassie in cui sono state osservate le cefeidi, una stima di $\mathbf{v_{rec}}$ **e del suo errore**

➔ Stimare H_0 usando i valori di v_{rec} e le distanze d misurate in precedenza, facendo un’opportuna **media pesata**.
Anche se H_0 ha le dimensioni di un inverso del tempo ($Hz=s^{-1}$), viene misurato in unità di **km/s/Mpc**

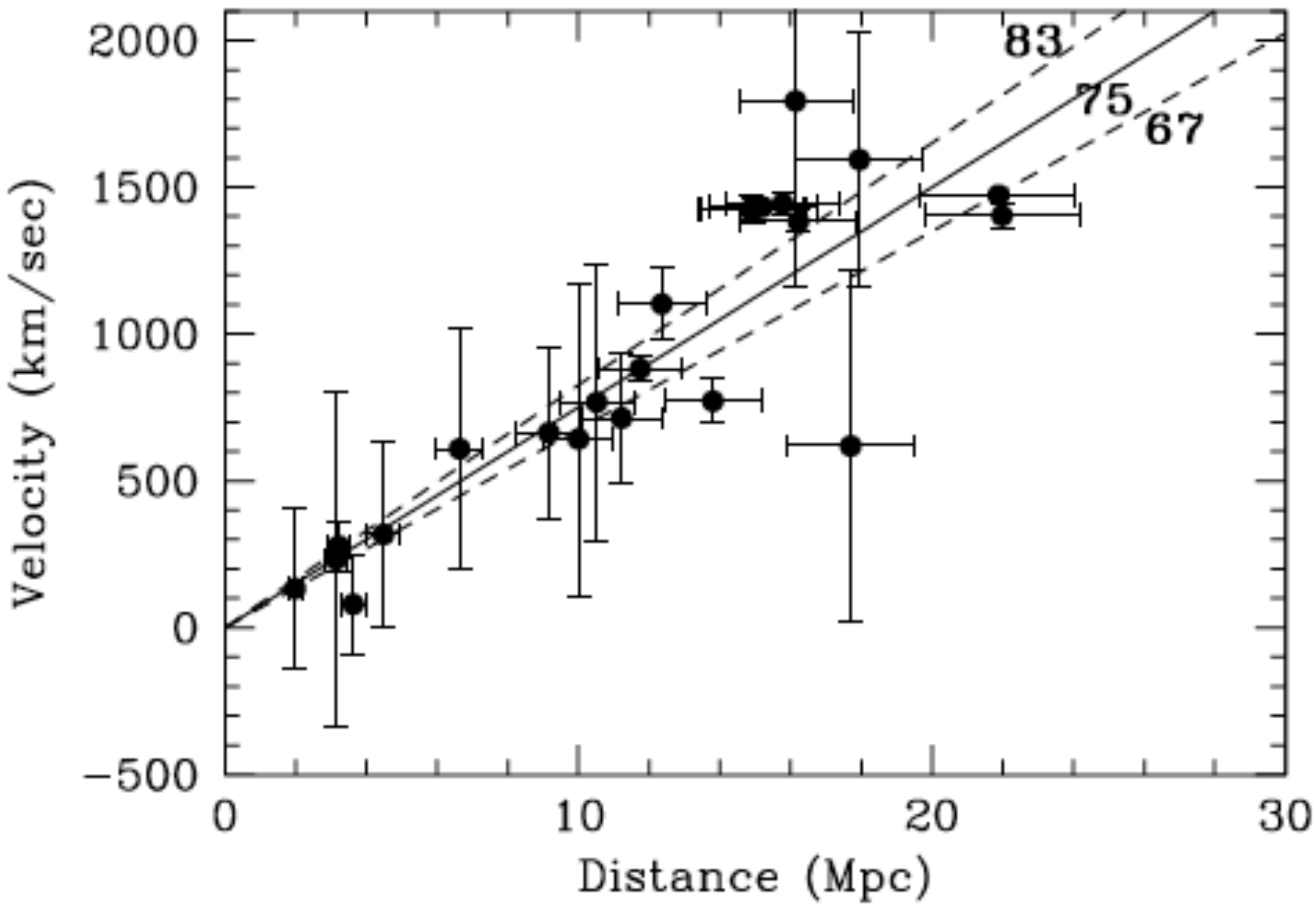


FIG. 1.—Velocity vs. distance for galaxies with Cepheid distances. Velocities in this plot have been corrected using the flow model described in Mould et al. (2000a). The Cepheid distances have been corrected for metallicity. A formal fit to these data yields a slope of $H_0 = 75 \pm 10$ (random) km s^{-1} Mpc^{-1}, in good agreement, to within the uncertainties, with the value of H_0 obtained for methods that extend to much greater distances.

La costante di Hubble in cosmologia

La **costante di Hubble H_0** fissa la scala delle distanze e dei tempi in Cosmologia.
L'**età del nostro Universo** è data da:

$$\boxed{t_0 = \int_0^{t_0} dt = \frac{1}{H_0} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z)^{1/2}}}$$

dove

$$E(z) = \Omega_M (1+z)^3 + (1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda$$

I **parametri di densità Ω_M e Ω_Λ** definiscono rispettivamente il contributo al budget energetico del nostro Universo dovuto alla componente di **materia** e di **energia oscura** (qui scritta in forma di costante cosmologica).

Il **satellite Planck** ha misurato per l'età del nostro Universo un valore di **13.82 miliardi di anni** (con un errore dell'ordine dell'1%).

Utilizzare il valore ottenuto di H_0 per trovare le coppie di valori dei parametri di densità Ω_M e Ω_Λ in grado di riprodurre un'età dell'Universo compatibile con il valore determinato da Planck.

In prima istanza assumere che l'Universo abbia una geometria piatta/euclidea, cioè che la somma dei parametri di densità Ω_M e Ω_Λ (chiamata parametro di densità totale dell'universo Ω_{TOT}) valga 1.

In seguito lasciare liberi i due parametri Ω_M e Ω_Λ di variare tra 0 e 1, considerando quindi sia universi con geometria sferica/chiusa ($\Omega_{TOT} > 1$), sia con geometria iperbolica/aperta ($\Omega_{TOT} < 1$).

Relazione: un possibile schema…

- Scopo generale
- Breve presentazione del problema generale dal punto di vista matematico/fisico/astrofisico
- Presentazione dati disponibili
- Descrizione algoritmi numerici utilizzati
- Risultati (con figure)
- Discussione **critica** dei risultati (punto di vista del calcolo numerico!!)
- ….